

IPhO 2026

理论题与解答 · 哥伦比亚布卡拉曼加 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2026/

题目 1：三个问题（A：静水压力闸门；B：电子—正电子对；C：臭氧的光解离）

题目 T1 [10 分]。三个问题

本题由三个相互独立的问题组成。

T1-A [3.0 分]。静水压力闸门

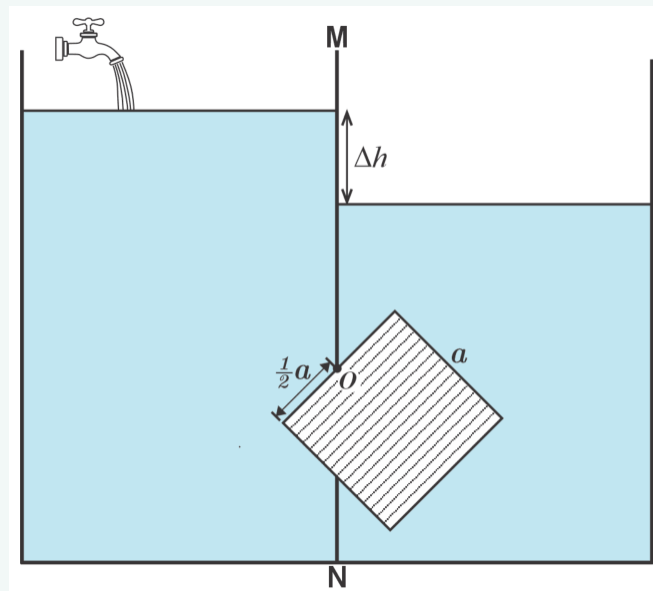


图 1a。

如图 1a 所示，两个蓄水池由竖直墙壁 MN 隔开。左侧蓄水池可以从水源进水。必须保证两侧水位差的最大可能值为 $\Delta h = 1.41 \text{ m}$ 。为此，在 MN 上开一个竖直高度为 $a\sqrt{2}/2$ 的槽口，并用一个边长为 a 的实心立方体块将其封住。该块的密度为 $3\rho_0$ ，其中 ρ_0 为水的密度。该块完全浸没在水中，在 O 点与墙壁铰接，并可绕通过 O 点且垂直于图面的轴无摩擦地转动。

T1-A1 [3.0 分]。计算能够保证水位差不超过最大允许值的 a 值。

T1-B [3.5 分]。电子-正电子对

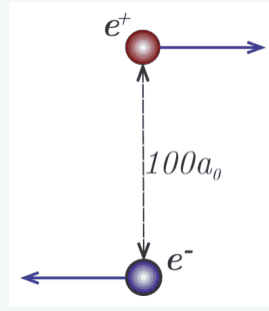


图 1b。

在某一时刻，正电子 e^+ 与电子 e^- 相距 $100a_0$ 。如图 1b 所示，两粒子在该时刻的速度方向相反，且均垂直于它们的连线。已知每个粒子相对于系统质心的角动量大小均为 $\mu\hbar$ ，其中 μ 为无量纲数值因子。假设 e^+ 与 e^- 之间仅存在静电相互作用（两粒子的质量均为 m ，电荷量大小相等、符号相反）。进一步假设该系统始终保持孤立，其动力学遵循经典、非相对论力学。

玻尔半径 a_0 由 $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ 给出。

T1-B1 [1.0 分]。若 $\mu = 4$ ，系统处于束缚态，即两粒子沿闭合轨道绕系统质心运动。用 a_0 表示 e^+ 与 e^- 之间的最大距离。

T1-B2 [2.5 分]。若 $\mu = \frac{15}{2}$ ，系统处于非束缚态，即两粒子不再沿闭合轨道绕系统质心运动。令 $\vec{u}_\infty$ 表示两粒子间距离趋于无穷大时 e^+ 相对于 e^- 的速度。计算 $\vec{u}_\infty$ 与 e^+ 的初始运动直线之间的夹角。以度为单位给出答案。

提示 1：在本题情形下，圆锥曲线轨道的离心率 ε 为

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{k^2e^4m}}$$

其中， E 和 L 分别为总能量和总角动量的大小。 k 为库仑常量， $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ 。

提示 2：圆锥曲线的极坐标方程为

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

T1-C [3.5 分]。臭氧的光解离

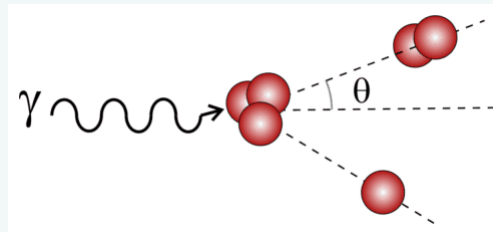


图 1c。

如图 1c 所示，一个角频率为 ω 的光子入射到一个静止的臭氧分子 O_3 上，使其解离（分裂）为一个氧分子 O_2 和一个氧原子 O 。光子在此过程中被吸收。令 U_i 和 U_f 分别为臭氧分子和氧分子的基态能量。假设该系统始终保持孤立，其动力学遵循经典力学（势能不贡献质量，氧原子的运动为非相对论性的）。光子的动量使用关系式 $p = E/c$ ，其中 E 为光子能量。

T1-C1 [2.5 分]。若出射 O_2 的动量与入射光子方向的夹角为 θ ，求使解离能够在此角度发生所需的最小角频率 $\omega_{\min}$ 。用 $\hbar$ 、 c 、 θ 、 $\Delta U = U_f - U_i$ 和氧原子的质量 m 表示答案。

T1-C2 [1.0 分]。若 $\theta = \pi/6$ ，计算 $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$ 的值。以电子伏特 (eV) 为单位给出答案。取 $\Delta U = 1.10$ eV 和 $m = 16.0$ amu。

提示：

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

物理常量

部分物理常量的参考值。

常量	符号	数值	单位
真空中的光速	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
普朗克常量	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
约化普朗克常量	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
玻尔兹曼常量	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
理想气体常量	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
元电荷	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
万有引力常量	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
斯特藩-玻尔兹曼常量	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
真空磁导率	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
真空介电常数	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
电子质量	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
质子质量	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
原子质量单位	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

题目译自官方英文原文。

答案

- **T1-A1:** 使闸门在指定水位差下开启的最大允许边长为

$$a = \frac{\Delta h}{2\sqrt{2}} = 0.499 \text{ m.}$$

- **T1-B1:**

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

- T1-B2:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ,$$

偏转方向朝向该运动直线的电子初始位置所在一侧。

- T1-C1: 对于图示的 $0 \leq \theta < \pi/2$ 情形, 令 $F = 1 + 2 \sin^2 \theta$ 。则

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar F} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right) = \frac{2\Delta U}{\hbar \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right)}.$$

对于 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, 将 F 替换为 3; 所得结果是出射 O_2 的动量趋于零时所趋近的下确界。

- T1-C2:

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}.$$

解答

T1-A1

我们计算闸门刚开始开启时各力对 O 点的力矩。铰链作用力对 O 点的力矩为零, 而槽口下缘的接触力在此临界状态下消失。

将槽口高度记为

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

图中标注的距离 $a/2$ 表明, O 位于正方形截面左上边的中点。因此, 立方体中心位于 O 点的右侧, 与其水平距离为

$$d = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

将水的压力分解为两部分。首先, 设想两个蓄水池的水位均与右侧水位相同。此时静水压力产生通过立方体中心、方向向上的浮力

$$B = \rho_0 g a^3$$

其重力为

$$W = 3\rho_0 g a^3.$$

因此, 两者合成的顺时针力矩为

$$\tau_{\text{closing}} = (W - B)d = 2\rho_0 g a^3 \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}}.$$

将左侧水位升高 Δh , 会在立方体位于墙壁左侧的表面上增加均匀压强

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta h$$

这一附加压力的合力与合力矩, 等效于它作用在覆盖槽口的竖直矩形面上时的合力与合力矩。为说明这一点, 用该矩形面将突出部分的表面封闭: 均匀压强作用于所形成的闭合表面时, 合力与合力矩均为零。

因此，附加压力产生一个水平力

$$F_{\Delta p} = \Delta p a H$$

其作用点位于槽口高度的中点。它产生的逆时针开启力矩为

$$\tau_{\text{opening}} = \Delta p a H \frac{H}{2} = \frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4}.$$

在开启的临界状态下，

$$\frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\Delta h = 2\sqrt{2} a.$$

令这一临界水位差等于允许的水位差，得到

$$a = \frac{1.41}{2\sqrt{2}} \text{ m} = 0.498510 \dots \text{ m} \approx 0.499 \text{ m}.$$

较小的 a 值会使闸门在较小的水位差下开启。

T1-B1

令 r 为两粒子间的距离，并定义

$$\kappa = k e^2 = \frac{\hbar^2}{m a_0}.$$

我们在质心参考系中讨论。约化质量为 $m/2$ ，且两个角动量的方向相同，因此总角动量的大小为

$$L = 2\mu\hbar.$$

由机械能守恒可得

$$E = \frac{m}{4} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m r^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

初始时相对速度垂直于两粒子的连线，因此在 $r_0 = 100a_0$ 处有 $\dot{r} = 0$ 。于是，

$$E = \frac{4\mu^2\hbar^2}{m(100a_0)^2} - \frac{\kappa}{100a_0} = \frac{\kappa}{a_0} \left(\frac{\mu^2}{2500} - \frac{1}{100} \right).$$

对于 $\mu = 4$,

$$E = -\frac{9}{2500} \frac{\kappa}{a_0} < 0.$$

在距离的两个极值处，均有 $\dot{r} = 0$ 。记 $x = r/a_0$ ，则转折点方程为

$$-\frac{9}{2500} = \frac{64}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

等价地，

$$9x^2 - 2500x + 160000 = (x - 100)(9x - 1600) = 0.$$

因此，两个转折点为

$$r_{\min} = 100a_0, \quad r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0.$$

所以，给定的初始状态对应于距离最小的位置，且

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

T1-B2

对于 $\mu = 15/2$ ，由相同的表达式可得

$$L = 15\hbar, \quad E = \frac{\kappa}{80a_0} > 0.$$

使用题目给出的离心率公式，

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{m\kappa^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(15\hbar)^2}{m\kappa^2} \frac{\kappa}{80a_0}}.$$

由于 $ma_0\kappa = \hbar^2$ ，

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

选取极角 φ ，从近心点方向起算，并沿运动方向增大。在此选取下，圆锥曲线方程为

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{(m/2)\kappa} = 450a_0.$$

近心点处的距离为

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{450a_0}{1 + 7/2} = 100a_0,$$

所以初始位置确实位于近心点。

在出射支上， $r \rightarrow \infty$ 时有

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0,$$

由此得到

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{2}{7}.$$

横向相对速率为 $L/[(m/2)r]$ ，在无穷远处趋于零。因此，最终的相对速度沿极限径向方向。初始速度垂直于近心点方向，故所求夹角为

$$\alpha = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2}.$$

由此可得

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{7},$$

因此

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ.$$

在图中，出射相对速度指向正电子初始水平运动方向的下方。

T1-C1

令光子的能量和动量大小分别为

$$E_\gamma = \hbar\omega, \quad P = \frac{E_\gamma}{c}.$$

取其方向为 x 轴方向。令出射氧分子的动量为 $q\hat{\mathbf{n}}$ ，其中

$$q \geq 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos \theta.$$

按照题目给定的质量约定，氧分子的质量为 $2m$ ，氧原子的质量为 m 。由动量守恒可得

$$\mathbf{p}_O = P\hat{\mathbf{x}} - q\hat{\mathbf{n}}.$$

在最小光子能量下，不需要额外的内部激发。此时能量守恒关系为

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{q^2}{4m} + \frac{P^2 + q^2 - 2Pq \cos \theta}{2m}.$$

配方可得

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{3}{4m} \left(q - \frac{2P \cos \theta}{3} \right)^2 + \frac{P^2}{6m} (3 - 2 \cos^2 \theta).$$

对于向前出射的几何情形，即 $0 \leq \theta < \pi/2$ ，动能允许的最小值

$$q_* = \frac{2P \cos \theta}{3} > 0.$$

处达到最小值。定义

$$F = 3 - 2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta.$$

因此，对于给定的光子能量，末态动能的最小值为

$$K_{\min} = \frac{FP^2}{6m} = \frac{FE_\gamma^2}{6mc^2}.$$

在解离阈值处，

$$E_{\gamma, \min} - \Delta U = \frac{FE_{\gamma, \min}^2}{6mc^2}.$$

解此二次方程并取较小的根，得到

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar(1 + 2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right].$$

另一个根对应的能量为 mc^2 量级，超出了所假设的非相对论适用范围。

一个在 $\Delta U \ll mc^2$ 时便于使用的等价形式为

$$\omega_{\min} = \frac{2\Delta U}{\hbar \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right]}.$$

其展开式为

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(1 + 2 \sin^2 \theta)(\Delta U)^2}{6mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

为使讨论完整，还需注意题目并未明确限制角度范围。若 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ，无约束情况下使动能最小的 q_* 非正。施加 $q \geq 0$ 的约束后，则有

$$\inf K = \frac{P^2}{2m}.$$

因此，对这些角度，阈值公式中应取 $F = 3$ 。对于指定的出射方向，这仅是一个下确界：在 $q = 0$ 时，该方向没有定义，而任意小的正 q 则允许能量任意接近这一阈值。

T1-C2

对于 $\theta = \pi/6$,

$$F = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

因此,

$$\hbar\omega_{\min} = 2mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{mc^2}} \right).$$

使用题目给出的原子质量单位,

$$mc^2 = 16.0 (9.3149410372 \times 10^8) \text{ eV} = 1.49039 \times 10^{10} \text{ eV}.$$

展开参数为

$$x = \frac{\Delta U}{mc^2} \approx 7.38 \times 10^{-11}.$$

利用

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

得到

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

于是

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(1.10 \text{ eV})^2}{4(1.49039 \times 10^{10} \text{ eV})},$$

由此得到

$$\boxed{\hbar\omega_{\min} - \Delta U = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}}$$

结果保留三位有效数字。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：用阳光烹饪？

题目 T2 [10 分]。用阳光烹饪？

反射或折射会使光通量重新分布，形成光强较高和较低的区域，从而产生**焦散线**：由无限接近的光线相交而形成的曲线。例如，图 2a 展示了近轴入射到半圆柱面镜上的光线所形成的焦散线。图 2b 是光在咖啡杯底部反射后形成的焦散线的照片。焦散线中央最亮的点称为**尖点**；在这一点，光强达到最大值。

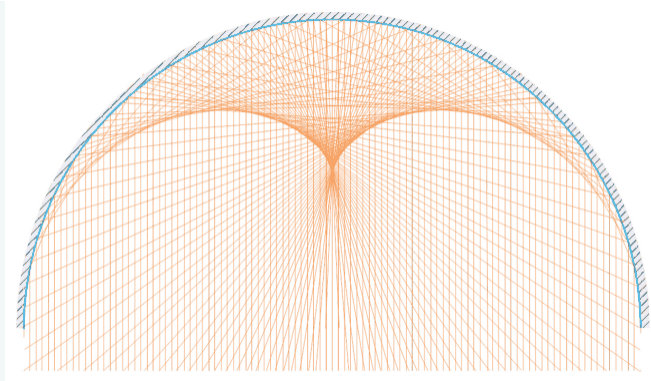


图 2a。



图 2b。

焦散在科学中有着广泛的应用，涉及精密光学、量子光学乃至天体物理学。在本题中，你将研究光在半径为 R 的半圆柱面镜上反射所形成的焦散线，如图 2c 所示。你还将探究这种反射镜的其他特性，例如它在太阳灶中的应用。

在整道题中，假设入射光线来自远处的外部光源，并且平行于反射镜的光轴。由对称性可知，只需研究一个平面内的反射。图 2d 展示了这样的一个平面、反射镜以及本题始终采用的坐标系。

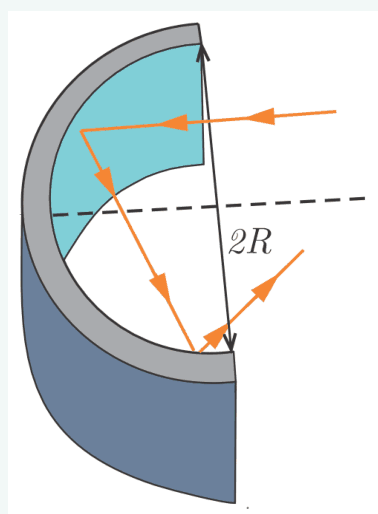


图 2c。

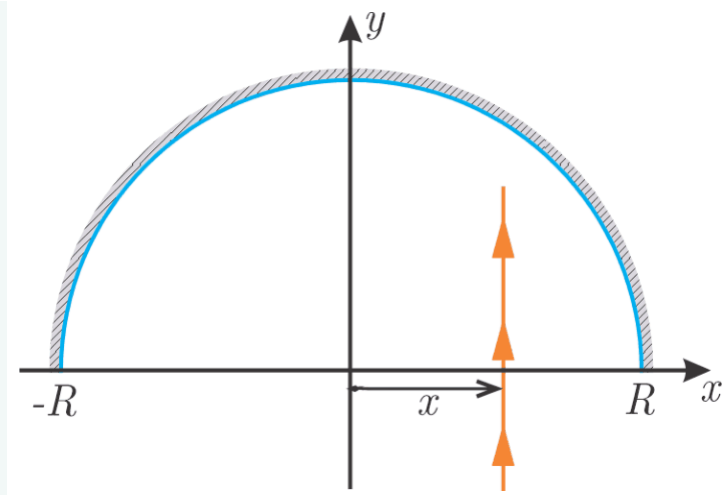


图 2d。

T2-A [1.5 分]。多次反射

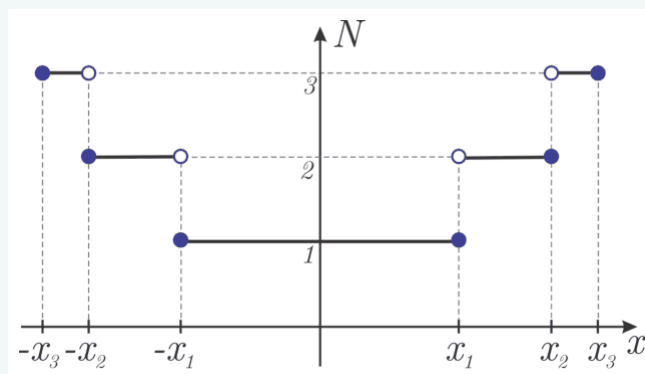


图 2e。

图 2e 展示了入射光线的 x 坐标与其经历的反射次数 N 之间的关系，图中画出了直到 $N = 3$ 的情形。当 x 在区间 $(-R, R)$ 内变化时，变量 N 遍历所有大于或等于 1 的自然数。使入射光线在反射镜上至多反射 N 次的、距光轴的最大距离记为 x_N 。

T2-A1 [1.5 分]。求无限序列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 中 x_N 的通式，这些值限定了至多反射 N 次的光线的坐标范围。用 R 和 N 表示答案。

T2-B [4.0 分]。太阳灶

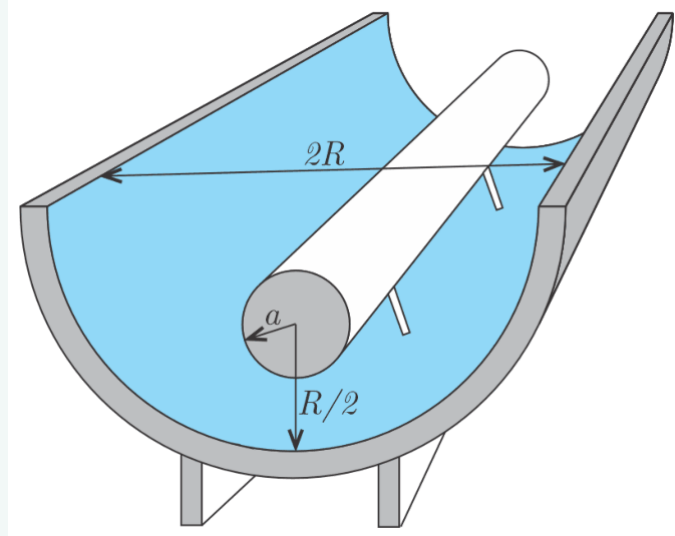


图 2f。

考虑一个由半圆柱形空心反射镜和圆柱形容器组成的系统。该圆柱体完全吸收光：任何照射到它的光线都会被吸收。反射镜的半径为 R 。容器的半径为 a 。反射镜与容器的轴线相互平行。容器中心位于系统的对称平面内，距反射镜为 $R/2$ ，如图 2f 所示。反射镜利用太阳辐射来加热容器内的食物。假设阳光的强度（单位面积上的功率）恒定且均匀，光线平行于反射镜的光轴。此外，假设 a 的取值使得任何被圆柱体吸收的光线在反射镜上至多反射一次。令 $\theta_{\max}$ 为所有经反射后照射到容器的光线在反射镜上的最大入射角（相对于入射点处的法线测量）。

T2-B1 [2.0 分]。容器半径为 $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$ 。用 R 表示 α 和 β 。

如果你未能求出 α 和 β ，请在后续题目中使用所给的表达式。

T2-B2 [1.5 分]。令 P_0 为没有反射镜时圆柱体接收到的功率。用 $\theta_{\max}$ 表示实际接收功率 P 与 P_0 之比 P/P_0 。

T2-B3 [0.5 分]。若 $R = 1.0$ m，写出使 $P = 5P_0$ 的 a 值。答案以 cm 为单位。

T2-C [4.5 分]。焦散线与尖点

T2-C1 [0.5 分]。考虑以角度 θ 入射到反射镜上的光线 A ，如图 2g 所示。在图 2g 定义的坐标系中，这条光线反射后的方程为 $y = m_A x + b_A$ 。用 θ 和 R 表示 m_A 和 b_A 。

提示：预期的形式为 $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ 和 $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$ ，其中 K_i 为数值常数。

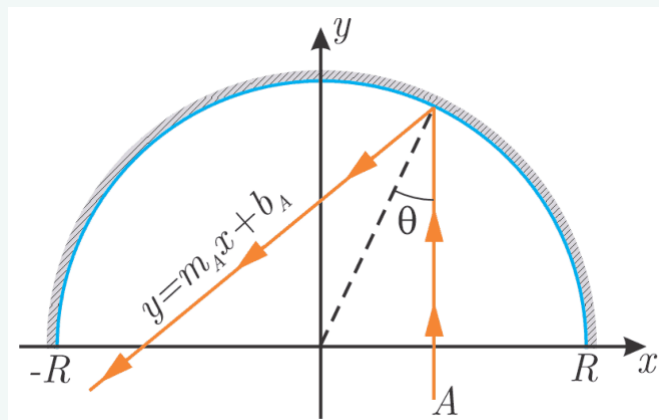


图 2g。

T2-C2 [2.0 分]。现在考虑一条与 A 平行的光线 B ，它以角度 $\theta + \Delta\theta$ 入射到镜面上，其中 $\Delta\theta \ll \theta$ 。这条光线反射后的方程为 $y = m_B x + b_B$ 。用 θ 、 $\Delta\theta$ 和 R 表示 m_B 和 b_B ，近似保留至 $\Delta\theta$ 的一阶。

T2-C3 [1.0 分]。求 A 和 B 的反射光线的交点坐标 (X_c, Y_c) 。用 R 和 θ 表示答案。

T2-C4 [1.0 分]。当 $\theta \ll 1$ 时，有 $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$ 。用 R 表示 v 和 u ，并求出整数 p 和 q 的值（也可以等价地给出有理数 p/q ）。

题目译自官方英文原文。

答案

- T2-A1:

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

- T2-B1:

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

- T2-B2:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

- T2-B3:

$$a = 12 \text{ cm}.$$

- T2-C1:

$$m_A = \cot(2\theta), \quad b_A = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

- T2-C2: 保留至 $\Delta\theta$ 的一阶,

$$m_B \simeq \cot(2\theta) - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2(2\theta)}, \quad b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

- T2-C3: 在相邻光线的极限 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 下,

$$X_c = R \sin^3 \theta, \quad Y_c = \frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

- T2-C4:

$$v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

解答

T2-A1

由对称性, 考虑一条 $x \geq 0$ 的入射光线。令 ϕ 为其第一个入射点的极角, 从 x 轴正方向量起。则

$$x = R \cos \phi, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

由于入射光线沿竖直方向传播, 其相对于法线的入射角为

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

根据反射定律, 反射光线与径向法线也成相同的角 θ 。因此, 连接两个相继反射点的弦所对的圆心角为

$$\pi - 2\theta = 2\phi.$$

这条弦与两条半径构成等腰三角形, 因此在各次相继的反射中, 入射角保持不变。

所以, 在对应的完整圆周上, 各个相继交点的极角为

$$\phi, \quad 3\phi, \quad 5\phi, \quad \dots, \quad (2j-1)\phi.$$

只有上半圆是反射镜。当光线与完整圆周的下一个交点将位于直径上或其下方时, 光线便从直径处射出。

在临界入射坐标 x_N 处, 光线经历 N 次反射后到达远端边缘。因此, 假想的第 $(N+1)$ 个交点的极角为 π :

$$(2N+1)\phi_N = \pi.$$

由此可得

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right).$$

在取等号时, 光线从边缘射出, 这与图 2e 中所示的端点一致。最初几个值为

$$x_1 = \frac{R}{2}, \quad x_2 \approx 0.8090R, \quad x_3 \approx 0.9010R,$$

且当 $N \rightarrow \infty$ 时, $x_N \rightarrow R$ 。

T2-B1

采用图 2d 中的坐标系。容器中心为

$$C = \left(0, \frac{R}{2}\right).$$

入射角为 $\theta \geq 0$ 的光线在下述位置入射到反射镜上:

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta).$$

该处向外的单位法向量为

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

而入射光的传播方向为 $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1)$ 。

反射定律的矢量形式给出反射光的单位方向向量:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= (0, 1) - 2 \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta). \end{aligned}$$

从 C 到这条反射光线所在直线的垂直距离，等于 $C - M$ 与 $\hat{\mathbf{u}}$ 的二维叉积的绝对值：

$$\begin{aligned} d(\theta) &= |(C_x - M_x)\hat{u}_y - (C_y - M_y)\hat{u}_x| \\ &= \left| -R \sin \theta + \frac{R}{2} \sin 2\theta \right| \\ &= R \sin \theta (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时，这一距离随 θ 增大而增大，因为

$$d'(\theta) = R(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \geq 0.$$

恰好能被容器接收的临界反射光线与容器相切，因此 $d(\theta_{\max}) = a$ 。所以

$$a = R \sin \theta_{\max} - \frac{R}{2} \sin 2\theta_{\max}.$$

与所给表达式比较，得到

$$\boxed{\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}}.$$

T2-B2

令 I 为均匀的入射光强， L 为沿圆柱轴线方向共同的受光长度。没有反射镜时，容器的投影面积为 $2aL$ ，因此

$$P_0 = 2aLI.$$

能够被吸收的入射光线距光轴的最大距离为

$$h_{\max} = R \sin \theta_{\max}.$$

满足 $|x| \leq a$ 的光线直接照射到容器。满足

$$a < |x| \leq h_{\max}$$

的光线到达反射镜，在反射一次后被吸收。

被直接吸收的光线使反射镜上的相应部分处于阴影中。因此，直接入射和反射部分的功率贡献分别为

$$P_{\text{direct}} = 2aLI, \quad P_{\text{reflected}} = 2(h_{\max} - a)LI.$$

根据题目给定的限制，经历两次或更多次反射的光线不会带来额外的吸收功率。对于理想反射镜，由功率守恒可得

$$P = 2h_{\max}LI = 2R \sin \theta_{\max}LI.$$

因此

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R \sin \theta_{\max}}{a}.$$

代入 T2-B1 的结果，

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}}.$$

T2-B3

由条件 $P = 5P_0$ 得

$$1 - \cos \theta_{\max} = \frac{1}{5}, \quad \cos \theta_{\max} = \frac{4}{5}.$$

于是

$$\sin \theta_{\max} = \frac{3}{5}$$

且

$$a = R \sin \theta_{\max} (1 - \cos \theta_{\max}) = R \frac{3}{5} \frac{1}{5} = \frac{3R}{25}.$$

取 $R = 1.0 \text{ m}$,

$$\boxed{a = 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}}.$$

T2-C1

由 T2-B1 可知, 反射光线经过

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta)$$

且方向为

$$\hat{\mathbf{u}} = (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

因此, 其斜率为

$$\boxed{m_A = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x} = \cot 2\theta}.$$

利用 M 的坐标,

$$\begin{aligned} b_A &= R \cos \theta - R \sin \theta \cot 2\theta \\ &= R \cos \theta - \frac{R \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \\ &= \boxed{\frac{R}{2 \cos \theta}}. \end{aligned}$$

采用提示中的记号,

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = \frac{1}{2}, \quad K_4 = 1.$$

在 $\theta = 0$ 处, 中央反射光线为竖直直线 $x = 0$ 。涉及其斜率的结果应通过极限 $\theta \rightarrow 0$ 来理解。

T2-C2

对于光线 B , 将 θ 替换为 $\theta + \Delta\theta$ 。作一阶泰勒展开得

$$m_B = m_A + \frac{dm_A}{d\theta} \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2).$$

由于

$$\frac{d}{d\theta} \cot 2\theta = -2 \csc^2 2\theta,$$

可得

$$\boxed{m_B \simeq \cot 2\theta - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2 2\theta}}.$$

同理,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R}{2 \cos \theta} \right) = \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta},$$

所以

$$b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta \theta.$$

按照题目要求，这些展开仅保留至 $\Delta \theta$ 的一阶项。

T2-C3

在两条反射光线的交点处，

$$m_A X_c + b_A = m_B X_c + b_B.$$

因此，

$$(m_B - m_A) X_c + (b_B - b_A) = 0.$$

利用 T2-C2 中的一阶差值，并取相邻光线的极限，

$$-\frac{2X_c}{\sin^2 2\theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = 0.$$

于是

$$X_c = \frac{R \sin \theta \sin^2 2\theta}{4 \cos^2 \theta}.$$

由于 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$,

$$X_c = R \sin^3 \theta.$$

代入光线 A 的方程得

$$\begin{aligned} Y_c &= R \sin^3 \theta \cot 2\theta + \frac{R}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{R}{2 \cos \theta} (1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta) \\ &= \boxed{\frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta)}. \end{aligned}$$

这里的化简使用了

$$1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

这些参数方程描述了焦散线。光轴另一侧的分支可由对称性得到： X_c 变号，而 Y_c 保持不变。

T2-C4

在光轴附近，采用小角度展开

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4).$$

焦散线的坐标于是变为

$$X_c = R\theta^3 + O(R\theta^5)$$

和

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) (1 + 2\theta^2 + O(\theta^4)) \\ &= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} \theta^2 + O(R\theta^4). \end{aligned}$$

对于两个对称分支，都有

$$\theta^2 \simeq \left(\frac{|X_c|}{R} \right)^{2/3}.$$

因此，消去 θ ，在尖点附近保留主导阶，得到

$$Y_c \simeq \frac{R}{2} + \frac{3}{4} R^{1/3} |X_c|^{2/3}.$$

于是

$$v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

尖点位于 $(0, R/2)$ 。其两个对称分支朝 y 增大的方向张开，并在该处具有共同的竖直切线。

解答已与官方解答核对。

题目 3：追寻绝对零度

题目 T3 [10 分]。追寻绝对零度

制冷循环必须由特性适合所要达到的温度的系统来完成。一百年前，即 1926 年，化学家威廉·吉奥克和物理学家彼得·德拜各自独立地提出，顺磁盐是将温度降至远低于 1 K 的理想系统。事实上，从随后的十年开始，人们就实现了低至 0.0044 K 的温度（万德·德哈斯和赫里特·维尔斯马，1935 年，莱顿低温实验室）。本题研究顺磁卡诺制冷循环。

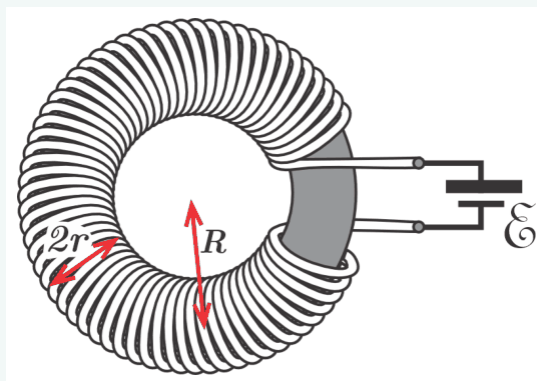


图 3a。

考虑一个由均匀、各向同性的顺磁材料制成的圆环，其平均半径为 R ，内半径为 r 。圆环上绕有绝缘导线，导线两端接外部电压源（电动势），如图 3a 所示。导线的电阻很小，因此可以忽略导线发热造成的能量损耗。绕组紧密排列，总匝数为 N ，并假设 $r \ll R$ ，因此磁场强度 $\vec{H}$ 、磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁化强度 $\vec{M}$ 的大小在整个圆环内近似恒定。令 V 和 A 分别为圆环的体积和横截面积。下文用缩写 Pm-T 表示该顺磁圆环。

在顺磁材料中， $\vec{M}$ 与 $\vec{H}$ 平行，且满足以下关系：

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

能量传递的符号约定：在本题中，功 (W) 和热量 (Q) 传入系统时取正值，传出系统时取负值。

T3-A [1.0 分]。Pm-T 中的功

提示：在磁性材料中， $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$ ，其中 I_C 是穿过闭合曲线 C 所围面积的净自由电流。

T3-A1 [0.2 分]。令 H 为圆环内 $\vec{H}$ 的大小。用 N 、 A 、 V 以及导线中的瞬时电流 I 表示 H 。

T3-A2 [0.6 分]。令 dW_{emf} 为外部电压源使 $\vec{B}$ 的大小改变 dB 所做的功。用 V 、 H 和 dB 表示 dW_{emf} 。

T3-A3 [0.2 分]。电压源所做的总功 dW_{emf} 可分为两部分：假如环形线圈的芯部为真空，改变磁场所需做的功 dW_{vac} ，以及对顺磁材料本身所做的功 dW 。用 μ_0 、 H 、 V 和 dM 表示 dW 。

T3-B [3.0 分]。Pm-T 中的热量与温度

下表对比了理想气体和 Pm-T 这两个热力学系统。利用这些信息以及你在 T3-A3 中得到的答案，解答以下各问。C 部分也将用到这些信息。如果你未能在 T3-A3 中求出 dW ，可以使用 $dW = \alpha V \mu_0 H dM$ ，其中 α 为一个数。顺磁圆环的体积 V 恒定，因此不存在压力做功。下文中的 T 均表示温度。

理想气体	顺磁圆环
状态函数： P, V 和温度 T	状态函数： H, M 和温度 T
常量： R, γ 和物质的量 n	常量： K, λ 和物质的量 n
状态方程： $PV = nRT$	状态方程： $TMV = nKH$
V 恒定时的热容： $C_V = nR/(\gamma - 1)$	M 恒定时的热容： $C_M = n\lambda/T^2$
内能 U 在任何过程中均满足 $dU = C_V dT$	内能 U 在任何过程中均满足 $dU = C_M dT$

K 和 λ 是由圆环材料决定的常量。你可以直接使用表中给出的方程，无需证明。

T3-B1 [1.5 分]。如果 $\vec{H}$ 的大小在温度 T 恒定的条件下从 H_i 变为 H_f ，Pm-T 与环境之间会传递能量 Q 。用 μ_0 、 n 、 V 、 K 、 H_i 、 H_f 和 T 表示 Q 。

T3-B2 [1.5 分]。如果 $\vec{H}$ 的大小在绝热条件下从 H_i 变为 H_f ，Pm-T 的温度便从 T_i 变为 T_f 。用 μ_0 、 V 、 n 、 K 、 λ 、 H_i 、 H_f 和 T_i 表示 $\Delta T = T_f - T_i$ 。

T3-C [6.0 分]。Pm-T 卡诺制冷机

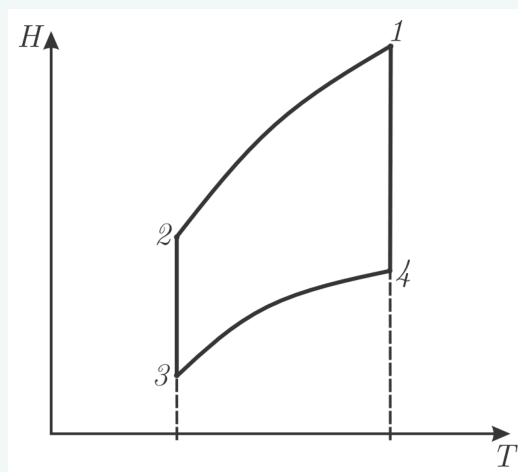


图 3b。

Pm-T 所进行的卡诺制冷循环 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ 的 H - T 图如图 3b 所示。在该循环中，令：

- T_h : 高温热库的温度
- T_c : 低温热库的温度
- Q_h : 传递给高温热库的热量的绝对值
- Q_c : 从低温热库吸收的热量的绝对值

T3-C1 [0.2 分]. 在 $H-T$ 图的 T 轴上标出 T_h 和 T_c 。同时分别标出发生 Q_h 和 Q_c 传递的过程。

T3-C2 [1.5 分]. 令 M_1 、 M_2 、 M_3 和 M_4 分别为该循环各顶点处 $\vec{M}$ 的大小。用 M_2 、 M_3 和 M_4 表示 M_1 。

T3-C3 [0.8 分]. 假设为了冷却初始温度为 1.00 K 的 1.00 L 液氮，我们使用一个由 2.0 mol 铬酸钾制成的 Pm-T。对于这种材料， $K = 1.87 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$ ，其密度为 2730 kg/m^3 ，摩尔质量为 0.19 kg/mole 。Pm-T 进行一个卡诺制冷循环，其中 $H_1 = 411624 \text{ A/m}$ 、 $H_2 = 311306 \text{ A/m}$ 、 $H_3 = 204618 \text{ A/m}$ 和 $H_4 = 240446 \text{ A/m}$ 。计算经过一个工作循环后液氮的最终温度。假设液氮的比热容 $c = 100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 和密度 $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$ 均保持不变。

T3-C4 [2.0 分]. 为了使热容恒为 C_c 的物体持续降温，让卡诺循环随时间不断进行，并使输入制冷机的功率 P 保持恒定。进一步假设高温热库的温度 T_h 保持恒定，且在每个工作循环中，被冷却物体的温度 T_c 下降 dT_c ，满足关系 $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$ 。若在 $t = 0$ 时有 $T_c = T_0$ ，求卡诺制冷机必须工作多长时间 t ，才能使被冷却物体达到温度 $T < T_0$ 。用 C_c 、 T_h 、 P 、 T_0 和 T 表示答案。

T3-C5 [1.5 分]. 制冷机的效率用其性能系数 $\text{COP} = Q_c/W$ 来量化。求 T3-C4 中制冷机截至时刻 t 所完成的全部循环的总 COP。用 T_0 、 T_h 和 T 表示答案。

物理常量

部分物理常量的参考值。

常量	符号	数值	单位
真空中的光速	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
普朗克常量	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
约化普朗克常量	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
玻尔兹曼常量	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
理想气体常量	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
元电荷	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
万有引力常量	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
斯特藩-玻尔兹曼常量	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
真空磁导率	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
真空介电常数	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
电子质量	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
质子质量	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
原子质量单位	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

题目译自官方英文原文。

答案

- T3-A1:

$$H = \frac{NAI}{V}.$$

- T3-A2:

$$dW_{emf} = VH dB.$$

- T3-A3:

$$dW = \mu_0 VH dM, \quad \alpha = 1.$$

- T3-B1:

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

- T3-B2:

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

- T3-C1: 经过状态 2, 3 的左侧竖直线对应 T_c ; 经过状态 1, 4 的右侧竖直线对应 T_h 。在 $2 \rightarrow 3$ 过程中吸收热量 Q_c , 在 $4 \rightarrow 1$ 过程中放出热量 Q_h 。

- T3-C2:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

- T3-C3: 在低温过程取 $T_c \simeq 1.00 \text{ K}$,

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

这是降温幅度较小时的估算，取低温等温线的温度为液氮的初始温度；它只用到低温过程 $2 \rightarrow 3$ （见 T3-C3 解答末尾的说明）。

- T3-C4:

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

- T3-C5:

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

解答

全文采用题目规定的符号约定：

$$dU = dQ + dW,$$

其中，向顺磁材料传入热量和对其做功时取正值。磁过程按准静态过程处理，采用 $r \ll R$ 的均匀场近似，并忽略电阻损耗。

T3-A1

在圆环内部选取半径为 R 的圆形安培回路。它与全部 N 匝绕组交链，因此所包围的自由电流为 NI 。于是，

$$H(2\pi R) = NI.$$

由于圆环体积为 $V = (2\pi R)A$,

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NAI}{V}.$$

T3-A2

穿过每一匝的磁通量近似为

$$\Phi = AB.$$

由法拉第定律，感应电动势为 $-NA dB/dt$ 。电阻可忽略时，外加电源电动势与之平衡：

$$\mathcal{E} = NA \frac{dB}{dt}.$$

因此，在时间 dt 内输入的电功为

$$dW_{emf} = \mathcal{E} I dt = NAI dB.$$

利用 A1 中的 $NAI = VH$,

$$dW_{emf} = VH dB.$$

当磁场减弱、电源接收能量时，该表达式也能给出正确的符号。

T3-A3

由于磁场强度、磁感应强度和磁化强度彼此平行，

$$dB = \mu_0 dH + \mu_0 dM.$$

因此，

$$dW_{emf} = \mu_0 VH dH + \mu_0 VH dM.$$

对于真空芯， $B = \mu_0 H$ ，所以使 H 发生相同变化所需做的功为

$$dW_{vac} = \mu_0 VH dH = d\left(\frac{\mu_0 VH^2}{2}\right).$$

减去这一真空磁场的贡献，剩下的就是对材料所做的功：

$$dW = dW_{emf} - dW_{vac} = \mu_0 VH dM.$$

因此，题目所给备用表达式中的系数为 $\alpha = 1$ 。

T3-B1

由给定的内能关系可知，等温过程中有

$$dU = \frac{n\lambda}{T^2} dT = 0.$$

于是，热力学第一定律给出

$$dQ = -dW = -\mu_0 V H dM.$$

在 T 恒定时, 由状态方程得

$$M = \frac{nKH}{VT}, \quad dM = \frac{nK}{VT} dH.$$

故

$$Q = -\frac{\mu_0 nK}{T} \int_{H_i}^{H_f} H dH,$$

因此

$$Q = \frac{\mu_0 nK}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

体积被约去。等温退磁, 即 $H_f < H_i$, 吸收热量; 等温磁化则放出热量。

T3-B2

绝热过程中有 $dQ = 0$, 所以

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 V H dM.$$

此时 H 和 T 均发生变化。对状态方程微分得

$$dM = \frac{nK}{V} \left(\frac{dH}{T} - \frac{H}{T^2} dT \right).$$

代入热力学第一定律得

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 nK \left(\frac{H}{T} dH - \frac{H^2}{T^2} dT \right).$$

于是

$$(\lambda + \mu_0 K H^2) dT = \mu_0 K H T dH,$$

或

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 K H}{\lambda + \mu_0 K H^2} dH.$$

在初态和末态之间积分,

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}.$$

因此,

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}},$$

且

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

当 K 和热容均为正时，减小 H 会使 T 降低：这就是绝热退磁。

一个将在下文用到的等价形式是绝热不变量

$$\frac{\lambda + \mu_0 K H^2}{T^2} = \text{沿绝热线保持不变}.$$

T3-C1

横坐标为温度。因此：

- 在状态 2 和 3 下方的左侧虚线投影处标注 T_c 。
- 在状态 1 和 4 下方的右侧虚线投影处标注 T_h 。

在 $2 \rightarrow 3$ 过程中，磁场在温度恒为 T_c 的条件下减弱。由 B1 可知，圆环吸收热量，因此在这一向下的竖直过程线旁标注指向圆环内部的 Q_c 。

在 $4 \rightarrow 1$ 过程中，磁场在温度恒为 T_h 的条件下增强。圆环放出热量，因此在这一向上的竖直过程线旁标注指向圆环外部的 Q_h 。

其余过程为 $1 \rightarrow 2$ 的绝热降温过程，以及 $3 \rightarrow 4$ 的绝热升温过程。

T3-C2

将

$$H = \frac{VTM}{nK}$$

代入 B2 中的绝热不变量：

$$\frac{\lambda}{T^2} + \frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} M^2 = \text{常量}.$$

对于绝热线 $1 \rightarrow 2$,

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_1^2 - M_2^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

对于绝热线 $3 \rightarrow 4$,

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_4^2 - M_3^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

两式右端相同，因此

$$M_1^2 - M_2^2 = M_4^2 - M_3^2.$$

由于 M_j 表示大小，必须取正根：

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

T3-C3

在单次循环的估算中，将低温过程的温度近似取为液氦的初始温度：

$$T_c \simeq 1.00 \text{ K}.$$

在 $2 \rightarrow 3$ 过程中吸收的热量为

$$Q_c = \frac{\mu_0 n K}{2T_c} (H_2^2 - H_3^2).$$

代入给定数值,

$$Q_c = \frac{(1.25663706127 \times 10^{-6})(2.0)(1.87 \times 10^{-6})}{2(1.00)} (311306^2 - 204618^2) \text{ J},$$

得到

$$Q_c = 0.1293459 \dots \text{ J} \simeq 0.13 \text{ J}.$$

液氦的质量和热容为

$$m_{\text{He}} = \rho V_{\text{He}} = (130)(1.00 \times 10^{-3}) = 0.130 \text{ kg},$$

$$C_{\text{He}} = m_{\text{He}} c = (0.130)(100) = 13.0 \text{ J K}^{-1}.$$

由液氦的能量守恒得

$$C_{\text{He}}(T_{\text{He},f} - 1.00 \text{ K}) = -Q_c.$$

于是

$$T_{\text{He},f} = 1.00 \text{ K} - \frac{0.1293459 \dots \text{ J}}{13.0 \text{ J K}^{-1}} = 0.9900503 \dots \text{ K},$$

或

$$\boxed{T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}}.$$

估算的温度降幅约为 1%，支持在这一数值估算中采用小变化近似。材料的体积在 Q_c 中被约去，因此这里不需要其密度和摩尔质量。对于精确的循环，给定的四个磁场强度并不完全自治：在两条等温线上利用 $M = nKH/(VT)$ ，T3-C2 中的关系要求 $T_h/T_c = \sqrt{(H_1^2 - H_4^2)/(H_2^2 - H_3^2)} \approx 1.42$ ，此时绝热线 $1 \rightarrow 2$ 和 $3 \rightarrow 4$ 只有在 $\lambda \approx -0.062 \text{ J K mol}^{-1}$ 时才能同时成立，即热容 $C_M = n\lambda/T^2$ 为负。上面的估算只用到低温过程，与 λ 无关。

T3-C4

令 $dT_c < 0$ 表示被冷却物体的实际温度变化。从该物体取出的热量取正值，为

$$dQ_c = -C_c dT_c.$$

由给定的卡诺关系得

$$dQ_h = \frac{T_h}{T_c} dQ_c.$$

由于制冷机在每个循环后都回到初态，其内能的净变化为零。因此所需的功为

$$dW = dQ_h - dQ_c = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c.$$

输入功率恒定时，

$$P dt = dW = -C_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

从 $t = 0$ 时的 $T_c = T_0$ 积分至 $T_c = T$,

$$Pt = -C_c \int_{T_0}^T \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

故

$$Pt = C_c \left[T_h \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) + T - T_0 \right],$$

且

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) - (T_0 - T) \right].$$

当 $0 < T < T_0 < T_h$ 时，该时间为正。此外，

$$T \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow \infty.$$

在给定模型中，达到绝对零度需要无限长的工作时间。

T3-C5

从被冷却物体取出的总热量为

$$Q_{c,\text{total}} = C_c(T_0 - T).$$

输入的总功为

$$W_{\text{total}} = Pt = C_c \left[T_h \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) - (T_0 - T) \right].$$

因此，

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{Q_{c,\text{total}}}{W_{\text{total}}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

作为检验，对于无穷小的温度下降，

$$\lim_{T \rightarrow T_0^-} \text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0}{T_h - T_0},$$

这就是低温端温度为 T_0 时通常的卡诺制冷机 COP。

解答已与官方解答核对。