

IPhO 2026

Teorik sorular ve çözümler · Bucaramanga, Kolombiya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

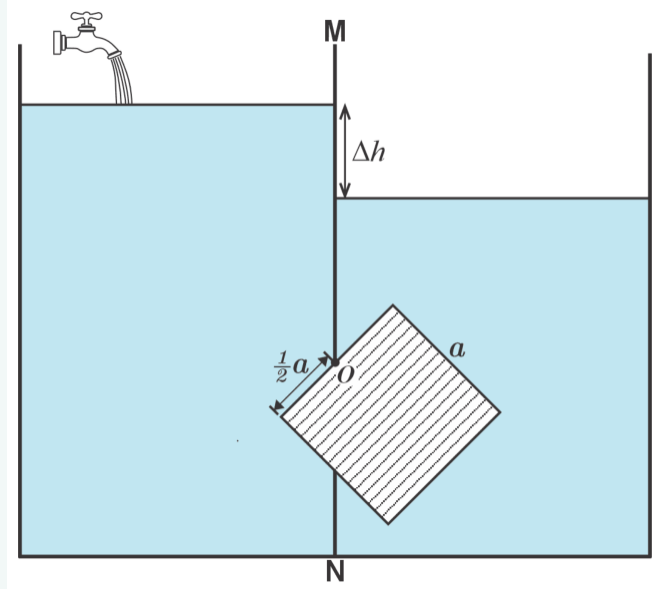
eulersolve.org/ipho/2026/

Soru 1: Üç problem (A: Hidrostatik kapak; B: Elektron-pozitron çifti; C: Ozonun fotoayrışması)

SORU T1 [10 puan]. Üç problem

Bu soru birbirinden bağımsız üç problemden oluşmaktadır.

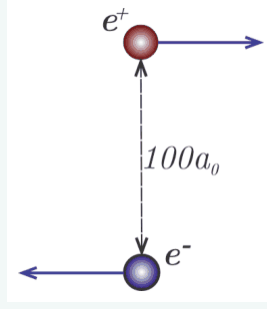
T1-A [3.0 puan]. Hidrostatik kapak



Şekil 1a.

İki su haznesi, şekil 1a'da gösterildiği gibi düşey bir MN duvarıyla birbirinden ayrılmıştır. Soldaki hazneye bir kaynaktan su gelebilmektedir. Su seviyeleri arasındaki farkın en fazla $\Delta h = 1.41 \text{ m}$ olması sağlanmalıdır. Bunun için MN duvarında düşey boyutu $a\sqrt{2}/2$ olan bir açıklık açılır ve bu açıklık, kenar uzunluğu a olan dolu bir küp blokla kapatılır. Bloğun yoğunluğu $3\rho_0$ olup ρ_0 suyun yoğunluğudur. Blok tamamen suya batmış durumdadır; duvara O noktasından tutturulmuştur ve O noktasından geçen, şekil düzlemine dik eksen etrafında sürtünmesiz dönebilmektedir.

T1-A1 [3.0 puan]. Su seviyeleri arasında izin verilen en büyük farkın aşılmamasını sağlayan a değerini hesaplayınız.

T1-B [3.5 puan]. Elektron-pozitron çifti

Şekil 1b.

Belirli bir anda, bir pozitron e^+ , bir elektrondan e^- $100a_0$ uzaklıkta bulunmaktadır. Parçacıklar, şekil 1b'de gösterildiği gibi, o anda hızları birbirine zıt yönlü ve onları birleştiren doğruya dik olacak şekilde hareket etmektedir. Her bir parçacığın sistemin kütle merkezine göre açısal momentumunun büyüklüğünün $\mu\hbar$ olduğu bilinmektedir; burada μ boyutsuz bir sayısal katsayıdır. e^+ ile e^- arasındaki tek etkileşimin elektrostatik olduğunu varsayınız (iki parçacığın kütlesi de m , yükleri ise eşit büyüklükte ve zıt işaretlidir). Ayrıca bu sistemin yalıtılmış kaldığını ve dinamiğinin klasik ve göreceli olmayan mekanikle betimlendiğini varsayınız.

Bohr yarıçapı a_0 , $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ bağıntısıyla verilir.

T1-B1 [1.0 puan]. $\mu = 4$ ise sistem bağlıdır; yani parçacıklar sistemin kütle merkezi etrafında kapalı bir yörüngede hareket eder. e^+ ile e^- arasındaki en büyük uzaklığı a_0 cinsinden bulunuz.

T1-B2 [2.5 puan]. $\mu = \frac{15}{2}$ ise sistem bağlı değildir; yani parçacıklar artık sistemin kütle merkezi etrafında kapalı bir yörüngede değildir. Aralarındaki uzaklık sonsuza giderken e^+ 'nin e^- 'ye göre hızı $\vec{u}_\infty$ olsun. $\vec{u}_\infty$ ile e^+ 'nin başlangıçtaki hareket doğrultusu arasındaki açıyı hesaplayınız. Cevabınızı derece cinsinden veriniz.

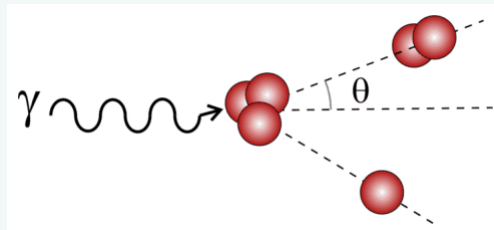
İpucu 1: Bu durumda konik bir yörüngenin dışmerkezliği ε ,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{k^2e^4m}}$$

bağıntısıyla verilir; burada E ve L , sırasıyla toplam enerji ve toplam açısal momentumun büyüklüğüdür. k , Coulomb sabiti olup $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ şeklindedir.

İpucu 2: Bir koniğin kutupsal koordinatlardaki denklemi şöyledir:

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

T1-C [3.5 puan]. Ozonun fotoayırışması

Şekil 1c.

Açısal frekansı ω olan bir foton, durgun bir ozon molekülüne O_3 çarpar ve onu şekil 1c'de gösterildiği gibi bir oksijen molekülüne O_2 ve bir oksijen atomuna O ayırıştırır (parçalar). Bu süreçte foton soğurulur. Ozon ve oksijen moleküllerinin temel durum enerjileri sırasıyla U_i ve U_f olsun. Bu sistemin yalıtılmış kaldığını ve dinamiğinin klasik olduğunu varsayınız (potansiyel enerjiler kütleye katkıda bulunmaz ve oksijen atomlarının hareketi göreceli değildir). Fotonun çizgisel momentumu için $p = E/c$ bağıntısını kullanınız; burada E fotonun enerjisidir.

T1-C1 [2.5 puan]. Ayırışma sonucu çıkan O_2 'nin momentumunun gelen fotonun doğrultusuyla yaptığı açı θ ise ayırışmanın bu açıda gerçekleşmesi için gereken en küçük açısal frekansı $\omega_{\min}$ belirleyiniz. Cevabınızı $\hbar$, c , θ , $\Delta U = U_f - U_i$ ve bir oksijen atomunun kütlesi m cinsinden yazınız.

T1-C2 [1.0 puan]. $\theta = \pi/6$ ise $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$ değerini hesaplayınız. Cevabınızı elektronvolt (eV) cinsinden veriniz. $\Delta U = 1.10$ eV ve $m = 16.0$ amu alınız.

İpucu:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Fiziksel Sabitler

Seçilmiş fiziksel sabitlerin referans değerleri.

Sabit	Gösterim	Değer	Birimler
Işığın boşluktaki hızı	c	2.99792458×10^8	$m \cdot s^{-1}$
Planck sabiti	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$eV \cdot s$
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$eV \cdot s$
Avogadro sayısı	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann sabiti	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$eV \cdot K^{-1}$
İdeal gaz sabiti	R	8.31446261815324	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
Temel yük	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$A \cdot s$
Evrensel kütleçekim sabiti	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Stefan Boltzmann sabiti	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-4}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$
Elektronun kütlesi	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
Protonun kütlesi	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
Atomik kütle birimleri	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **T1-A1:** Belirtilen seviye farkında açılmayı sağlayan, izin verilebilir en büyük kenar uzunluğu şudur:

$$a = \frac{\Delta h}{2\sqrt{2}} = 0.499 \text{ m.}$$

- **T1-B1:**

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

- **T1-B2:**

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ,$$

hareket doğrusunun başlangıçta elektronun bulunduğu tarafına yöneliktir.

- **T1-C1:** Şekildeki gibi $0 \leq \theta < \pi/2$ için $F = 1 + 2 \sin^2 \theta$ olsun. Bu durumda

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar F} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right) = \frac{2\Delta U}{\hbar \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right)}.$$

$\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ için F yerine 3 yazılır; sonuç, çıkan O_2 'nin momentumu sıfıra giderken yaklaşılan bir infimumdur.

- **T1-C2:**

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV.}$$

Çözüm

T1-A1

Açılmanın başladığı anda O noktasına göre torku hesaplayalım. Menteşe kuvvetinin O 'ya göre momenti yoktur ve açıklığın alt kenarındaki temas kuvveti bu eşikte sıfır olur.

Açıklığın yüksekliğini

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

olarak yazalım. İşaretlenmiş $a/2$ uzaklığı, O 'yu kare kesitin sol üst kenarının orta noktasına yerleştirir. Dolayısıyla küpün merkezi, O 'nun yatay olarak sağında

$$d = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

uzaklığındadır.

Su basıncını iki katkıya ayıralım. Önce her iki haznedeki su seviyesinin sağ taraftaki seviyeye eşit olduğunu düşünelim. Bu hidrostatik basınç, küpün merkezinden geçen, yukarı yönlü

$$B = \rho_0 g a^3$$

kaldırma kuvvetini oluşturur. Küpün ağırlığı

$$W = 3\rho_0 g a^3.$$

olur. Dolayısıyla bu iki kuvvetin saat yönündeki toplam torku

$$\tau_{\text{closing}} = (W - B)d = 2\rho_0 g a^3 \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}}.$$

olur.

Soldaki su seviyesinin Δh kadar yükseltilmesi, küpün duvarın solunda kalan yüzeyine düzgün dağılımlı

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta h$$

basıncını ekler.

Bu ek basıncın bileşke kuvveti ve torku, açıklığı kaplayan düşey bir dikdörtgene etkiyenlere eşdeğerdir. Bunu görmek için dışarı taşan yüzeyi bu dikdörtgenle kapatalım: oluşan kapalı yüzeye etkiyen düzgün dağılımlı basıncın net kuvveti ve torku sıfırdır.

Böylece ek basınç, açıklığın yüksekliğinin orta noktasında etkiyen

$$F_{\Delta p} = \Delta p a H$$

yatay kuvvetini oluşturur. Bu kuvvetin saat yönünün tersine olan açma torku

$$\tau_{\text{opening}} = \Delta p a H \frac{H}{2} = \frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4}.$$

olur.

Açılma eşiğinde

$$\frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}},$$

dolayısıyla

$$\Delta h = 2\sqrt{2} a.$$

Bu eşiği izin verilen seviye farkına eşitleyince

$$a = \frac{1.41}{2\sqrt{2}} \text{ m} = 0.498510 \dots \text{ m} \approx 0.499 \text{ m}.$$

elde edilir. Daha küçük a değerleri, kapağın daha küçük bir seviye farkında açılmasına neden olur.

T1-B1

Parçacıklar arasındaki uzaklık r olsun ve

$$\kappa = k e^2 = \frac{\hbar^2}{m a_0}.$$

tanımını yapalım. Kütle merkezi referans sisteminde çalışıyoruz. İndirgenmiş kütle $m/2$ 'dir ve iki açısal momentum aynı yönlüdür; dolayısıyla toplam açısal momentumlarının büyüklüğü

$$L = 2\mu\hbar.$$

olur.

Mekanik enerjinin korunumu

$$E = \frac{m}{4} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

bağıntısını verir. Başlangıçta bağlı hız, parçacıkları birleştiren doğruya diktir; bu nedenle $r_0 = 100a_0$ iken $\dot{r} = 0$ 'dır. Dolayısıyla

$$E = \frac{4\mu^2\hbar^2}{m(100a_0)^2} - \frac{\kappa}{100a_0} = \frac{\kappa}{a_0} \left(\frac{\mu^2}{2500} - \frac{1}{100} \right).$$

$\mu = 4$ için

$$E = -\frac{9}{2500} \frac{\kappa}{a_0} < 0.$$

Uzaklığın her iki uç değerinde de $\dot{r} = 0$ 'dır. $x = r/a_0$ yazarsak dönüm noktası denklemi

$$-\frac{9}{2500} = \frac{64}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

olur. Eşdeğer olarak,

$$9x^2 - 2500x + 160000 = (x - 100)(9x - 1600) = 0.$$

Dolayısıyla iki dönüm noktası

$$r_{\min} = 100a_0, \quad r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0.$$

olur. Böylece verilen başlangıç durumu, uzaklığın en küçük olduğu noktadır ve

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

T1-B2

$\mu = 15/2$ için aynı ifadeler

$$L = 15\hbar, \quad E = \frac{\kappa}{80a_0} > 0.$$

sonucunu verir. Verilen dışmerkezlik formülünü kullanırsak

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{m\kappa^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(15\hbar)^2}{m\kappa^2} \frac{\kappa}{80a_0}}.$$

$ma_0\kappa = \hbar^2$ olduğundan

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Enberi doğrultusundan ölçülen ve hareket yönünde artan bir φ kutupsal açısı seçelim. Bu seçimle konik denklemi

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{(m/2)\kappa} = 450a_0.$$

olur. Enberideki uzaklık

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{450a_0}{1 + 7/2} = 100a_0,$$

olduğundan başlangıç konumu gerçekten enberidedir.

Uzaklaşan kolda,

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0,$$

olduğunda $r \rightarrow \infty$ olur ve buradan

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{2}{7}.$$

elde edilir.

Bağıl hızın enine bileşeni $L/[(m/2)r]$ olup sonsuzda sıfıra gider. Bu nedenle son bağıl hız, radyal yönün limitindeki yönü gösterir. Başlangıç hızı enberi doğrultusuna dik olduğundan istenen açı

$$\alpha = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2}.$$

olur. Buradan

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{7},$$

ve dolayısıyla

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ.$$

bulunur. Şekilde, uzaklaşan parçacıkların bağıl hızı pozitronun başlangıçtaki yatay yönünün aşağısına yönelmiştir.

T1-C1

Fotonun enerjisi ve momentumunun büyüklüğü

$$E_\gamma = \hbar\omega, \quad P = \frac{E_\gamma}{c}.$$

olsun. Fotonun yönünü x eksenini olarak alalım. Ayrışma sonucu çıkan oksijen molekülünün momentumu $q\hat{n}$ olsun; burada

$$q \geq 0, \quad \hat{n} \cdot \hat{x} = \cos \theta.$$

Belirtilen kütle kabulüne göre oksijen molekülünün kütlesi $2m$, atomun kütlesi ise m 'dir. Momentumun korunumu

$$\mathbf{p}_O = P\hat{x} - q\hat{n}.$$

bağıntısını verir. En küçük foton enerjisinde ek bir iç uyarılma gerekmez. Bu durumda enerjinin korunumu

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{q^2}{4m} + \frac{P^2 + q^2 - 2Pq \cos \theta}{2m}.$$

şeklindedir.

Tam kareye tamamlayınca

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{3}{4m} \left(q - \frac{2P \cos \theta}{3} \right)^2 + \frac{P^2}{6m} (3 - 2 \cos^2 \theta).$$

İleri yönde çıkış geometrisi için, $0 \leq \theta < \pi/2$, kinetik enerji fiziksel olarak izin verilen

$$q_* = \frac{2P \cos \theta}{3} > 0.$$

momentumunda en küçük değerini alır.

$$F = 3 - 2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta.$$

tanımını yapalım. Dolayısıyla verilen bir foton enerjisi için en küçük son kinetik enerji

$$K_{\min} = \frac{FP^2}{6m} = \frac{FE_\gamma^2}{6mc^2}.$$

olur.

Ayrışma eşiğinde

$$E_{\gamma, \min} - \Delta U = \frac{FE_{\gamma, \min}^2}{6mc^2}.$$

Bu ikinci dereceden denklemi çözüp küçük kökü alırsak

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar(1 + 2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right].$$

elde edilir. Diğer kökün enerjisi mc^2 mertebesinde ve varsayılan görelî olmayan rejimin dışında kalır.

$\Delta U \ll mc^2$ olduğunda kullanışlı olan eşdeğer bir biçim şöyledir:

$$\omega_{\min} = \frac{2\Delta U}{\hbar \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right]}.$$

Bunun açılımı

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(1 + 2 \sin^2 \theta)(\Delta U)^2}{6mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

şeklinde.

Tamlik açısından, soru metninin aç aralığını açıkça kısıtlamadığını belirtelim. $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ise kısıtsız minimumu veren q_* pozitif değildir. Bunun yerine $q \geq 0$ kısıtı uygulandığında

$$\inf K = \frac{P^2}{2m}.$$

elde edilir. Dolayısıyla bu açılar için eşik formülünde $F = 3$ kullanılır. Belirli bir çıkış yönü için bu yalnızca bir infimumdur: $q = 0$ iken bu yön tanımsızdır; buna karşılık istenildiği kadar küçük pozitif q , eşiğe istenildiği kadar yakın enerjilere olanak tanır.

T1-C2

$\theta = \pi/6$ için

$$F = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

Dolayısıyla

$$\hbar\omega_{\min} = 2mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{mc^2}} \right).$$

Verilen atomik kütle birimini kullanırsak

$$mc^2 = 16.0 (9.3149410372 \times 10^8) \text{ eV} = 1.49039 \times 10^{10} \text{ eV}.$$

Açılım parametresi

$$x = \frac{\Delta U}{mc^2} \approx 7.38 \times 10^{-11}.$$

olur.

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

açılımını kullanarak

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

elde ederiz.

Böylece

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(1.10 \text{ eV})^2}{4(1.49039 \times 10^{10} \text{ eV})},$$

buradan üç anlamlı basamakla

$$\boxed{\hbar\omega_{\min} - \Delta U = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}}$$

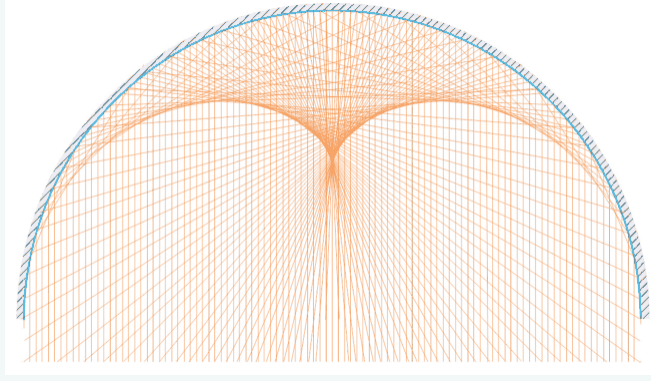
bulunur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Güneş ışığıyla yemek pişirmek?

SORU T2 [10 puan]. Güneş ışığıyla yemek pişirmek?

Işık akısının yansıma veya kırılma nedeniyle yüksek ve düşük şiddetli bölgelere yeniden dağılması, birbirine sonsuz küçük uzaklıktaki ışınların kesişmesiyle oluşan eğriler olan *kaustiklerin* oluşumuna yol açabilir. Örnek olarak, Şekil 2a'da yarım silindirik bir aynaya paraksial olarak gelen ışınların oluşturduğu kaustik gösterilmektedir. Şekil 2b'de ise bir kahve fincanının alt kısmında ışığın yansımasıyla oluşan kaustiğin fotoğrafı gösterilmektedir. Kaustiğin merkezindeki en parlak noktaya *sivri uç* denir; bu noktada ışık şiddeti en büyüktür.



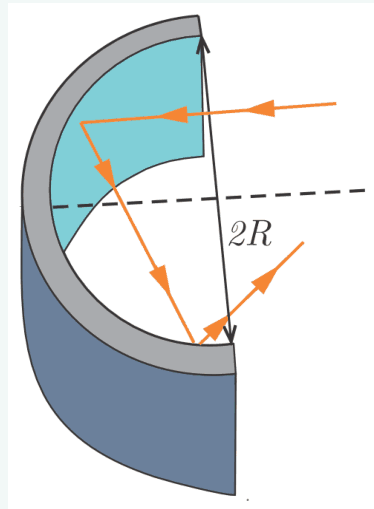
Şekil 2a.



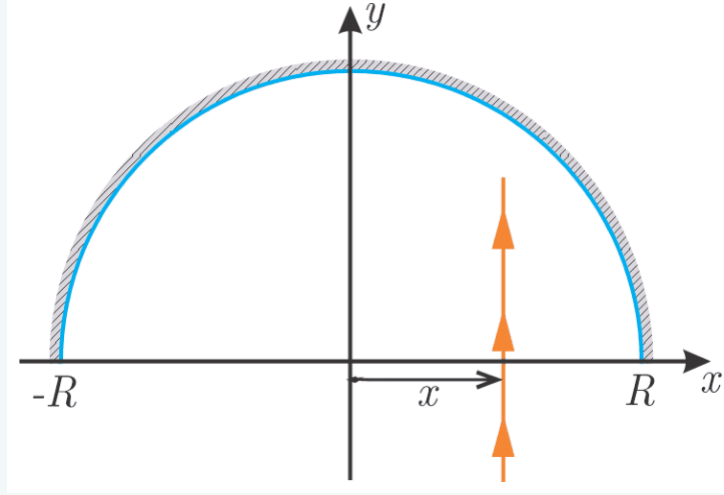
Şekil 2b.

Kaustiklerin bilimde yüksek hassasiyetli optik ve kuantum optiğinden astrofiziğe kadar uzanan çeşitli uygulamaları vardır. Bu soruda, Şekil 2c'de gösterildiği gibi, yarıçapı R olan yarım silindirik bir aynada ışığın yansımasıyla kaustik oluşumunu inceleyeceksiniz. Ayrıca bu aynanın *güneş ocaklarında* kullanımı gibi başka yönlerini de araştıracaksınız.

Soru boyunca, gelen ışınların uzaktaki bir dış ışık kaynağından geldiğini ve aynanın optik eksenine paralel olduğunu varsayın. Simetri gereği, yansımayı tek bir düzlemde incelemek yeterlidir. Şekil 2d'de böyle bir düzlem, ayna ve soru boyunca kullanılan koordinat sistemi gösterilmektedir.

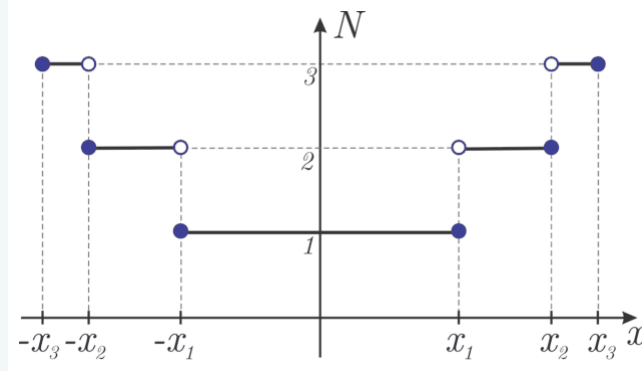


Şekil 2c.



Şekil 2d.

T2-A [1.5 puan]. Çoklu yansımalar

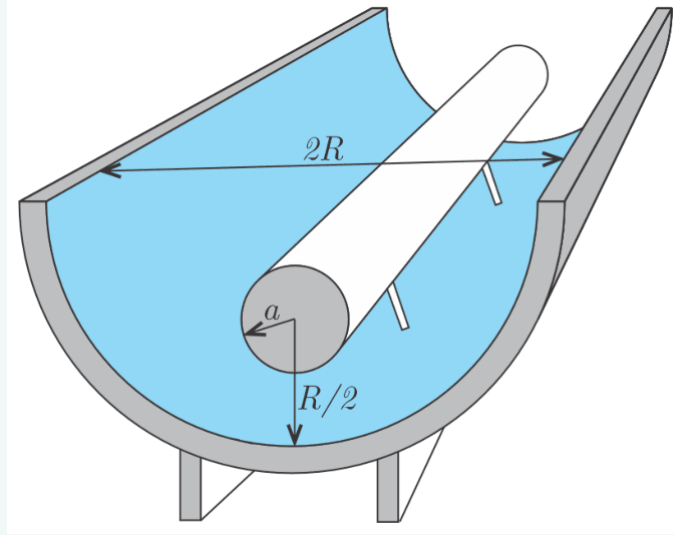


Şekil 2e.

Şekil 2e'de, gelen bir ışının x koordinatı ile uğradığı yansıma sayısı N arasındaki ilişki, $N = 3$ 'e kadar gösterilmektedir. x , $(-R, R)$ aralığında değişirken N değişkeni 1'e eşit veya 1'den büyük tüm doğal sayı değerlerini alır. Gelen bir ışının aynadan en fazla N kez yansımaya izin veren, optik eksene olan en büyük uzaklık x_N ile gösterilmektedir.

T2-A1 [1.5 puan]. En fazla N kez yansıyan ışınların koordinatlarını sınırlayan $x_1, x_2, x_3, \dots$ sonsuz dizisindeki x_N için genel ifadeyi bulun. Cevabınızı R ve N cinsinden ifade edin.

T2-B [4.0 puan]. Güneş Ocağı



Şekil 2f.

İçi boş yarım silindir biçiminde bir ayna ile silindirik bir kaptan oluşan bir sistem düşünün. Silindir tam soğurucudur: üzerine düşen her ışık ışını soğurulur. Aynanın yarıçapı R 'dir. Kabın yarıçapı a 'dır. Aynanın ve kabın eksenleri paraleldir. Kabın merkezi, Şekil 2f'de gösterildiği gibi, sistemin simetri düzlemi üzerinde aynadan $R/2$ uzaklıktadır. Ayna, kabın içindeki yiyeceği ısıtmak için güneş ışınımından yararlanır. Güneş ışığının şiddetinin (birim alan başına güç) sabit ve düzgün olduğunu ve ışınların aynanın optik eksenine paralel olduğunu varsayın. Ayrıca, a 'nın, silindir tarafından soğurulan her ışın aynadan en fazla bir kez yansıyacak şekilde seçildiğini varsayın. Kaba çarpan yansımış ışınların aynadaki gelme açılarının (gelme noktasında çizilen normale göre ölçülen) en büyüğü $\theta_{\max}$ olsun.

T2-B1 [2.0 puan]. Kabın yarıçapı $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$ şeklindedir. α ve β 'yi R cinsinden yazın.

α ve β 'yi bulamazsanız, sorunun geri kalanı için verilen ifadeyi kullanın.

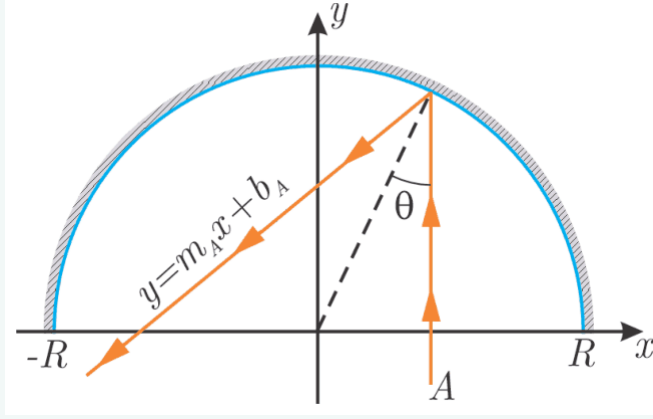
T2-B2 [1.5 puan]. Ayna olmasaydı silindire ulaşacak güç P_0 olsun. Gerçekte alınan güç P 'nin P_0 'a oranı olan P/P_0 'ı $\theta_{\max}$ cinsinden yazın.

T2-B3 [0.5 puan]. $R = 1.0$ m ise, $P = 5P_0$ olmasını sağlayan a değerini yazın. Cevabınızı cm cinsinden verin.

T2-C [4.5 puan]. Kaustikler ve Sivri Uç

T2-C1 [0.5 puan]. Şekil 2g'de gösterildiği gibi aynaya θ açısıyla çarpan bir A ışını düşünün. Yansıdıktan sonra bu ışının Şekil 2g'de tanımlanan koordinat sistemindeki denklemi $y = m_A x + b_A$ 'dır. m_A ve b_A 'yi θ ve R cinsinden yazın.

İpucu: Beklenen biçim, K_i 'ler sayısal sabitler olmak üzere, $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ ve $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$ şeklindedir.



Şekil 2g.

T2-C2 [2.0 puan]. Şimdi, A 'ya paralel olan ve yüzeye $\theta + \Delta\theta$ açısıyla çarpan bir B ışını düşünün; burada $\Delta\theta \ll \theta$ 'dir. Yansdıktan sonra bu ışının denklemi $y = m_B x + b_B$ 'dir. $\Delta\theta$ 'ya göre birinci mertebeden yaklaşım yaparak m_B ve b_B 'yi θ , $\Delta\theta$ ve R cinsinden yazın.

T2-C3 [1.0 puan]. A ve B 'nin yansıyan ışınlarının kesişim noktası (X_c, Y_c) 'nin koordinatlarını bulun. Cevabınızı R ve θ cinsinden yazın.

T2-C4 [1.0 puan]. $\theta \ll 1$ için $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$ bağıntısı geçerlidir. v ve u 'yu R cinsinden yazın ve p ile q tam sayılarının değerlerini bulun (eşdeğer olarak, p/q rasyonel sayısını verin).

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- T2-A1:

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

- T2-B1:

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

- T2-B2:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

- T2-B3:

$$a = 12 \text{ cm}.$$

- T2-C1:

$$m_A = \cot(2\theta), \quad b_A = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

- **T2-C2:** $\Delta\theta$ 'ya göre birinci mertebede,

$$m_B \simeq \cot(2\theta) - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2(2\theta)}, \quad b_B \simeq \frac{R}{2\cos\theta} + \frac{R\sin\theta}{2\cos^2\theta}\Delta\theta.$$

- **T2-C3:** Komşu ışınlar limiti $\Delta\theta \rightarrow 0$ 'da,

$$X_c = R\sin^3\theta, \quad Y_c = \frac{R}{2}\cos\theta(1 + 2\sin^2\theta).$$

- **T2-C4:**

$$v = \frac{3}{4}R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Çözüm

T2-A1

Simetri gereği, $x \geq 0$ olan bir gelen ışını ele alalım. İlk gelme noktasının pozitif x ekseninden ölçülen kutupsal açısı ϕ olsun. O hâlde

$$x = R\cos\phi, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Gelen ışın düşey doğrultuda ilerlediğinden, normale göre gelme açısı

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Yansıma yasası gereği, yansıyan ışın yarıçap doğrultusundaki normale aynı θ açısını yapar. Dolayısıyla, ardışık iki yansıma noktasını birleştiren kirişin gördüğü merkez açı

$$\pi - 2\theta = 2\phi.$$

Bu kiriş ile iki yarıçapın oluşturduğu üçgen ikizkenar olduğundan, ardışık yansılarda gelme açısı aynı kalır.

Sonuç olarak, karşılık gelen tam çember üzerinde ardışık temas noktalarının kutupsal açıları

$$\phi, \quad 3\phi, \quad 5\phi, \quad \dots, \quad (2j-1)\phi.$$

Yalnızca üst yarım çember aynadır. Tam çember üzerindeki bir sonraki temas noktası çapın üzerinde veya altında olaksa ışın çap üzerinden dışarı çıkar.

Sınır gelme koordinatı x_N 'de ışın N kez yansır ve ardından karşı kenara ulaşır. Dolayısıyla, gerçekleşmesi öngörülen $(N+1)$. temasın kutupsal açısı π 'dir:

$$(2N+1)\phi_N = \pi.$$

Buradan

$$x_N = R\cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right).$$

Eşitlik durumunda ışın, Şekil 2e'de gösterilen uç noktalarla uyumlu olarak kenardan çıkar. İlk değerler

$$x_1 = \frac{R}{2}, \quad x_2 \approx 0.8090R, \quad x_3 \approx 0.9010R,$$

şeklindedir ve $N \rightarrow \infty$ iken $x_N \rightarrow R$ olur.

T2-B1

Şekil 2d'deki koordinatları kullanalım. Kabin merkezi

$$C = \left(0, \frac{R}{2}\right).$$

Gelme açısı $\theta \geq 0$ olan bir ışın aynaya

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta).$$

noktasında çarpar. Buradaki dışa yönelmiş birim normal

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

ve gelen ışının yayılma yönü $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1)$ 'dir.

Yansıma yasasının vektörel biçimi, yansıyan ışının birim yön vektörünü verir:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= (0, 1) - 2 \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).\end{aligned}$$

C 'den bu yansıyan ışın doğrusuna olan dik uzaklık, $C - M$ ile $\hat{\mathbf{u}}$ 'nun iki boyutlu vektörel çarpımının büyüklüğüdür:

$$\begin{aligned}d(\theta) &= |(C_x - M_x)\hat{u}_y - (C_y - M_y)\hat{u}_x| \\ &= \left| -R \sin \theta + \frac{R}{2} \sin 2\theta \right| \\ &= R \sin \theta (1 - \cos \theta).\end{aligned}$$

$0 \leq \theta < \pi/2$ için bu uzaklık θ ile artar, çünkü

$$d'(\theta) = R(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \geq 0.$$

Kaba ulaşan yansımış ışınların sınırındaki ışın kaba teğet olduğundan $d(\theta_{\max}) = a$ 'dır. Dolayısıyla

$$a = R \sin \theta_{\max} - \frac{R}{2} \sin 2\theta_{\max}.$$

Verilen ifadeyle karşılaştırıldığında

$$\boxed{\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}}.$$

T2-B2

Düzgün gelen ışık şiddeti I , silindir eksenleri boyunca aydınlatılan ortak uzunluk ise L olsun. Ayna yokken kabin izdüşüm alanı $2aL$ olduğundan

$$P_0 = 2aLI.$$

Soğurulmayla sonuçlanan gelen ışınların optik eksene olan en büyük uzaklığı

$$h_{\max} = R \sin \theta_{\max}.$$

$|x| \leq a$ olan ışınlar doğrudan kaba çarpar.

$$a < |x| \leq h_{\max}$$

koşulunu sağlayan ışınlar aynaya ulaşır ve ardından bir kez yansdıktan sonra soğurulur.

Doğrudan soğurulan ışınlar, aynanın karşılık gelen kısmını gölgede bırakır. Dolayısıyla doğrudan ve yansıma yoluyla gelen katkılar

$$P_{\text{direct}} = 2aLI, \quad P_{\text{reflected}} = 2(h_{\text{max}} - a)LI.$$

Belirtilen kısıt gereği, iki veya daha fazla kez yansıyan ışıklardan soğurulan güce ek bir katkı gelmez. Bu nedenle ideal ayna için gücün korunumu

$$P = 2h_{\text{max}}LI = 2R \sin \theta_{\text{max}}LI.$$

sonucunu verir. Böylece

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R \sin \theta_{\text{max}}}{a}.$$

T2-B1'in sonucu yerine konursa,

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\text{max}}}}.$$

T2-B3

$P = 5P_0$ koşulu

$$1 - \cos \theta_{\text{max}} = \frac{1}{5}, \quad \cos \theta_{\text{max}} = \frac{4}{5}.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla

$$\sin \theta_{\text{max}} = \frac{3}{5}$$

ve

$$a = R \sin \theta_{\text{max}}(1 - \cos \theta_{\text{max}}) = R \frac{3}{5} \frac{1}{5} = \frac{3R}{25}.$$

$R = 1.0$ m için,

$$\boxed{a = 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}}.$$

T2-C1

T2-B1'e göre yansıyan ışın

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta)$$

noktasından geçer ve yönü

$$\hat{\mathbf{u}} = (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

şeklindedir. Dolayısıyla eğimi

$$\boxed{m_A = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x} = \cot 2\theta}.$$

M 'nin koordinatları kullanılarak,

$$\begin{aligned} b_A &= R \cos \theta - R \sin \theta \cot 2\theta \\ &= R \cos \theta - \frac{R \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \\ &= \boxed{\frac{R}{2 \cos \theta}}. \end{aligned}$$

İpucundaki gösterimle,

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = \frac{1}{2}, \quad K_4 = 1.$$

$\theta = 0$ 'daki merkezi yansıyan ışın, düşey $x = 0$ doğrusudur. Bu ışının eğimini içeren sonuçlar $\theta \rightarrow 0$ limiti üzerinden yorumlanır.

T2-C2

B ışını için θ yerine $\theta + \Delta\theta$ konur. Birinci mertebeye kadar Taylor açılımı

$$m_B = m_A + \frac{dm_A}{d\theta} \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2).$$

sonucunu verir.

$$\frac{d}{d\theta} \cot 2\theta = -2 \csc^2 2\theta,$$

olduğundan,

$$m_B \simeq \cot 2\theta - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R}{2 \cos \theta} \right) = \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta},$$

olduğundan

$$b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

Bu açılımlarda, istendiği üzere, yalnızca $\Delta\theta$ 'ya göre birinci mertebeye kadar olan terimler tutulmuştur.

T2-C3

İki yansıyan ışının kesişiminde,

$$m_A X_c + b_A = m_B X_c + b_B.$$

Dolayısıyla,

$$(m_B - m_A) X_c + (b_B - b_A) = 0.$$

T2-C2'deki birinci mertebeden farklar kullanılıp komşu ışınlar limiti alınırsa,

$$-\frac{2X_c}{\sin^2 2\theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = 0.$$

Böylece

$$X_c = \frac{R \sin \theta \sin^2 2\theta}{4 \cos^2 \theta}.$$

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ olduğundan,

$$X_c = R \sin^3 \theta.$$

A ışınının denkleminde yerine konursa,

$$\begin{aligned}
Y_c &= R \sin^3 \theta \cot 2\theta + \frac{R}{2 \cos \theta} \\
&= \frac{R}{2 \cos \theta} (1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta) \\
&= \boxed{\frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta)}.
\end{aligned}$$

Buradaki sadeleştirmede

$$1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

özdeşliği kullanılır.

Bu parametrik denklemler kaustiği betimler. Optik eksenin diğer tarafındaki dal simetriden elde edilir: X_c işaret değiştirirken Y_c değişmeden kalır.

T2-C4

Optik eksenin yakınında küçük açı açılımlarını kullanalım:

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4).$$

Bu durumda kaustik koordinatları

$$X_c = R\theta^3 + O(R\theta^5)$$

ve

$$\begin{aligned}
Y_c &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) (1 + 2\theta^2 + O(\theta^4)) \\
&= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} \theta^2 + O(R\theta^4).
\end{aligned}$$

olur. Her iki simetrik dal için,

$$\theta^2 \simeq \left(\frac{|X_c|}{R} \right)^{2/3}.$$

Dolayısıyla θ yok edilirse, sivri ucun yakınında başat mertebede,

$$\boxed{Y_c \simeq \frac{R}{2} + \frac{3}{4} R^{1/3} |X_c|^{2/3}}.$$

elde edilir. Böylece

$$\boxed{v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3}.$$

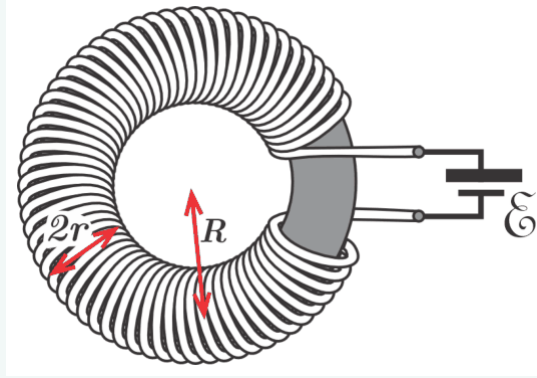
Sivri uç $(0, R/2)$ noktasındadır. İki simetrik dalı, y 'nin arttığı yöne doğru açılır ve bu noktada ortak bir düşey teğete sahiptir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Mutlak sıfırın peşinde

SORU T3 [10 puan]. Mutlak sıfırın peşinde

Bir soğutma çevrimi, ulaşılmak istenen sıcaklıklara uygun özelliklere sahip bir sistemle gerçekleştirilmelidir. Yüz yıl önce, 1926'da, kimyager William Giauque ve ondan bağımsız olarak fizikçi Peter Debye, sıcaklıkları 1 K'nin çok altına düşürmek için ideal sistemler olarak paramanyetik tuzları önerdiler. Nitekim, izleyen on yıldan itibaren 0.0044 K kadar düşük sıcaklıklara ulaşıldı (Wander de Haas ve Gerrit Wiersma, 1935, Leiden Kriyojeni Laboratuvarları). Bu soruda, paramanyetik Carnot soğutma çevrimi incelenmektedir.



Şekil 3a.

Şekil 3a'da gösterildiği gibi, homojen ve izotrop bir paramanyetik malzemeden yapılmış, ortalama yarıçapı R ve iç yarıçapı r olan bir torus düşünün. Torusun etrafına yalıtılmış bir iletken tel sarılmış ve telin uçları harici bir gerilim kaynağına (emk) bağlanmıştır. Telin direnci, telin ısınmasından kaynaklanan enerji kayıplarının ihmal edilebileceği kadar küçüktür. Toplam N sarımlı sargı sık sarılmıştır ve $r \ll R$ olduğu varsayılmaktadır; dolayısıyla $\vec{H}$ ve $\vec{B}$ alanları ile $\vec{M}$ mıknatıslanmasının büyüklükleri torusun her yerinde yaklaşık olarak sabittir. Torusun hacmi V , kesit alanı ise A olsun. Bundan sonra paramanyetik torusu belirtmek için Pm-T kısaltması kullanılacaktır.

Paramanyetik malzemelerde $\vec{M}$, $\vec{H}$ 'ye paraleldir ve aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

Enerji aktarımı için işaret kuralı: bu soruda iş (W) ve ısı (Q), sisteme aktarıldıklarında pozitif, sistemden dışarı aktarıldıklarında negatif kabul edilir.

T3-A [1.0 puan]. Pm-T'de iş

İpucu: manyetik malzemelerde, $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$ olup burada I_C , kapalı C eğrisinin sınırladığı alandan geçen net serbest akımdır.

T3-A1 [0.2 puan]. Torustaki $\vec{H}$ 'nin büyüklüğü H olsun. H 'yi N , A , V ve teldeki anlık elektrik akımı I cinsinden yazın.

T3-A2 [0.6 puan]. Harici gerilim kaynağının $\vec{B}$ 'nin büyüklüğünü dB kadar değiştirmek için yaptığı iş dW_{emf} olsun. dW_{emf} 'yi V , H ve dB cinsinden yazın.

T3-A3 [0.2 puan]. Gerilim kaynağının yaptığı toplam iş dW_{emf} iki kısma ayrılabilir: toroidin çekirdeği boşluk olsaydı manyetik alanı değiştirmek için yapılacak iş dW_{vac} ve paramanyetik malzemenin kendisi üzerinde yapılan iş dW . dW 'yi μ_0 , H , V ve dM cinsinden yazın.

T3-B [3.0 puan]. Pm-T'de ısı ve sıcaklık

Aşağıdaki tabloda iki termodinamik sistem karşılaştırılmaktadır: ideal gaz ve Pm-T. Aşağıdaki soruları çözmek için bu bilgileri ve T3-A3 sorusuna verdiğiniz cevabı kullanın. Bu bilgiler C bölümünde de kullanılacaktır. T3-A3 sorusunda dW için bir cevap bulamadıysanız, α bir sayı olmak üzere $dW = \alpha V \mu_0 H dM$ ifadesini kullanabilirsiniz. Paramanyetik torusun hacmi V sabittir; dolayısıyla basınçtan kaynaklanan bir iş yoktur. Aşağıda T , her durumda sıcaklığı göstermektedir.

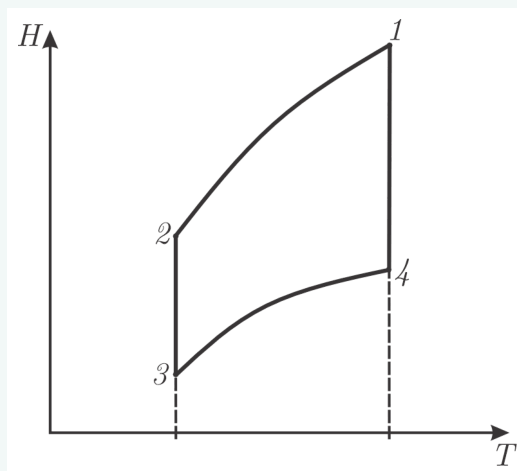
İDEAL GAZ	PARAMANYETİK TORUS
Durum fonksiyonları: P , V ve sıcaklık T	Durum fonksiyonları: H , M ve sıcaklık T
Sabitler: R , γ ve mol sayısı n	Sabitler: K , λ ve mol sayısı n
Durum denklemi: $PV = nRT$	Durum denklemi: $TMV = nKH$
Sabit V 'de ısı kapasitesi: $C_V = nR/(\gamma - 1)$	Sabit M 'de ısı kapasitesi: $C_M = n\lambda/T^2$
İç enerji U , her süreçte $dU = C_V dT$ bağıntısını sağlar	İç enerji U , her süreçte $dU = C_M dT$ bağıntısını sağlar

K ve λ , torustaki malzemenin belirlediği sabitlerdir. Tabloda verilen denklemleri kanıtlamadan doğrudan kullanabilirsiniz.

T3-B1 [1.5 puan]. $\vec{H}$ 'nin büyüklüğü sabit T sıcaklığında H_i 'den H_f 'ye değişirse Pm-T ile çevresi arasında Q enerjisi aktarılır. Q 'yu μ_0 , n , V , K , H_i , H_f ve T cinsinden yazın.

T3-B2 [1.5 puan]. $\vec{H}$ 'nin büyüklüğü adyabatik olarak H_i 'den H_f 'ye değişirse Pm-T'nin sıcaklığı T_i 'den T_f 'ye değişir. $\Delta T = T_f - T_i$ 'yi μ_0 , V , n , K , λ , H_i , H_f ve T_i cinsinden yazın.

T3-C [6.0 puan]. Pm-T ile çalışan Carnot soğutucusu



Şekil 3b.

Pm-T'nin gerçekleştirdiği $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ Carnot soğutma çevriminin $H-T$ diyagramı şekil 3b'de gösterilmiştir. Bu çevrimde aşağıdaki tanımları kullanalım:

- T_h : sıcak ısı deposunun sıcaklığı

- T_c : soğuk ısı deposunun sıcaklığı
- Q_h : sıcak ısı deposuna aktarılan ısıнын mutlak değeri
- Q_c : soğuk ısı deposundan alınan ısıнын mutlak değeri

T3-C1 [0.2 puan]. $H-T$ diyagramının T ekseninde T_h ve T_c 'yi işaretleyin. Ayrıca sırasıyla Q_h ve Q_c aktarımlarının gerçekleştiği süreçleri de etiketleyin.

T3-C2 [1.5 puan]. Bu çevrimin köşe noktalarında $\vec{M}$ 'nin büyüklükleri M_1 , M_2 , M_3 ve M_4 olsun. M_1 'i M_2 , M_3 ve M_4 cinsinden yazın.

T3-C3 [0.8 puan]. Başlangıçta 1.00 K sıcaklığındaki 1.00 L sıvı helyumu soğutmak için *potasyum kromattan* yapılmış 2.0 mollük bir Pm-T kullandığımızı varsayın. Bu malzeme için $K = 1.87 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$, yoğunluk 2730 kg/m^3 ve molar kütle 0.19 kg/mole 'dür. Pm-T, $H_1 = 411624 \text{ A/m}$, $H_2 = 311306 \text{ A/m}$, $H_3 = 204618 \text{ A/m}$ ve $H_4 = 240446 \text{ A/m}$ değerleriyle bir Carnot soğutma çevrimi gerçekleştirir. Bir çalışma çevriminden sonra sıvı helyumun son sıcaklığını hesaplayın. Sıvı helyumun hem özgül ısı kapasitesinin $c = 100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ hem de yoğunluğunun $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$ sabit kaldığını varsayın.

T3-C4 [2.0 puan]. Isı kapasitesi C_c sabit olan bir cismin sıcaklığını sürekli düşürmek amacıyla, soğutucuya aktarılan P gücü sabit kalacak şekilde zaman içinde Carnot çevrimleri gerçekleştirilir. Sıcak ısı deposunun T_h sıcaklığının sabit kaldığı ve her çalışma çevriminde soğutulan cismin T_c sıcaklığının dT_c kadar azaldığı, bu sırada $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$ bağıntısının sağlandığı varsayılmaktadır. $t = 0$ anında $T_c = T_0$ ise soğutulan cismin $T < T_0$ sıcaklığına ulaşması için Carnot soğutucusunun çalışması gereken t süresini belirleyin. Cevabınızı C_c , T_h , P , T_0 ve T cinsinden ifade edin.

T3-C5 [1.5 puan]. Bir soğutucunun verimliliği, *performans katsayısı* $\text{COP} = Q_c/W$ ile nicelendirilir. T3-C4 sorusundaki soğutucunun t anına kadar gerçekleştirilen tüm çevrimleri için toplam COP değerini belirleyin. Cevabınızı T_0 , T_h ve T cinsinden yazın.

Fiziksel Sabitler

Seçilmiş fiziksel sabitler için referans değerler.

Sabit	Gösterim	Değer	Birimler
Işığın boşluktaki hızı	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck sabiti	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Avogadro sayısı	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann sabiti	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
İdeal gaz sabiti	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Temel yük	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Evrensel kütle çekimi sabiti	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann sabiti	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

Sabit	Gösterim	Değer	Birimler
Boşluğun elektriksel geçirgenliği	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$
Elektronun kütlesi	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^{-5}$	eV/c^2
Protonun kütlesi	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^{-8}$	eV/c^2
Atomik kütle birimleri	amu	$9.3149410372(29) \times 10^{-8}$	eV/c^2

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- T3-A1:

$$H = \frac{NAI}{V}.$$

- T3-A2:

$$dW_{emf} = VH dB.$$

- T3-A3:

$$dW = \mu_0 VH dM, \quad \alpha = 1.$$

- T3-B1:

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

- T3-B2:

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

- T3-C1: 2, 3 durumlarından geçen soldaki düşey doğru T_c sıcaklığındadır; 1, 4 durumlarından geçen sağdaki düşey doğru ise T_h sıcaklığındadır. $2 \rightarrow 3$ sırasında Q_c ısı alınır, $4 \rightarrow 1$ sırasında ise Q_h ısı dışarı verilir.

- T3-C2:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

- T3-C3: Soğuk aşama için $T_c \simeq 1.00$ K kullanıldığında,

$$T_{He,f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

Bu, küçük bir soğumaya dayanan bir tahmindir; soğuk izoterm helyumun başlangıç sıcaklığında alınmış ve yalnızca soğuk aşama $2 \rightarrow 3$ kullanılmıştır (T3-C3 çözümünün sonundaki nota bakın).

• T3-C4:

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

• T3-C5:

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Çözüm

Çözüm boyunca belirtilen işaret kuralını kullanıyoruz:

$$dU = dQ + dW,$$

burada ısı ve iş, paramanyetik malzemeye aktarıldıklarında pozitifdir. Manyetik süreçler, $r \ll R$ düzgün alan yaklaşımı ve ihmal edilebilir direnç kayıpları altında kuazistatik olarak ele alınmaktadır.

T3-A1

Torusun içinde yarıçapı R olan bir Ampère çemberi seçin. Bu çember, N sarımın tümünü çevreler; dolayısıyla çevrelediği serbest akım NI 'dir. Böylece,

$$H(2\pi R) = NI.$$

Torusun hacmi $V = (2\pi R)A$ olduğundan,

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NAI}{V}.$$

T3-A2

Her sarımdan geçen manyetik akı yaklaşık olarak

$$\Phi = AB.$$

Faraday yasası, indüklenen emk'yi $-NA dB/dt$ olarak verir. Direnç ihmal edilebildiğinde, uygulanan kaynak emk'si bunu dengeler:

$$\mathcal{E} = NA \frac{dB}{dt}.$$

Dolayısıyla dt süresinde sağlanan elektriksel iş

$$dW_{emf} = \mathcal{E} I dt = NAI dB.$$

A1'deki $NAI = VH$ bağıntısı kullanılarak,

$$dW_{emf} = VH dB.$$

Bu ifade, alan azalırken kaynak enerji aldığı da doğru işareti verir.

T3-A3

Alanlar ve mıknatıslanma paralel olduğundan,

$$dB = \mu_0 dH + \mu_0 dM.$$

Bunun sonucunda,

$$dW_{emf} = \mu_0 VH dH + \mu_0 VH dM.$$

Boşluk çekirdek için $B = \mu_0 H$ olduğundan, H 'nin aynı değişimine karşılık gelen iş

$$dW_{vac} = \mu_0 V H dH = d\left(\frac{\mu_0 V H^2}{2}\right).$$

Boşluktaki alana ait bu katkı çıkarıldığında, malzeme üzerinde yapılan iş kalır:

$$dW = dW_{emf} - dW_{vac} = \mu_0 V H dM.$$

Dolayısıyla, alternatif olarak verilen ifadedeki katsayı $\alpha = 1$ 'dir.

T3-B1

Verilen iç enerji bağıntısı, izotermal bir süreçte

$$dU = \frac{n\lambda}{T^2} dT = 0.$$

olduğunu gösterir. Bu durumda birinci yasa

$$dQ = -dW = -\mu_0 V H dM.$$

bağıntısını verir.

Sabit T 'de durum denkleminde

$$M = \frac{nKH}{VT}, \quad dM = \frac{nK}{VT} dH.$$

elde edilir. Böylece

$$Q = -\frac{\mu_0 nK}{T} \int_{H_i}^{H_f} H dH,$$

ve dolayısıyla

$$Q = \frac{\mu_0 nK}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

Hacim sadeleşir. İzotermal demanyetizasyon, $H_f < H_i$, sırasında ısı alınır; izotermal mıknatıslanma sırasında ısı açığa çıkar.

T3-B2

Adyabatik bir süreçte $dQ = 0$ olduğundan,

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 V H dM.$$

Artık hem H hem de T değişmektedir. Durum denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$dM = \frac{nK}{V} \left(\frac{dH}{T} - \frac{H}{T^2} dT \right).$$

elde edilir. Birinci yasada yerine konulduğunda

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 nK \left(\frac{H}{T} dH - \frac{H^2}{T^2} dT \right).$$

bulunur. Böylece

$$(\lambda + \mu_0 K H^2) dT = \mu_0 K H T dH,$$

veya

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 K H}{\lambda + \mu_0 K H^2} dH.$$

Başlangıç ve son durumlar arasında integral alınırsa,

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}.$$

Dolayısıyla,

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}},$$

ve

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

K ve ısı kapasitesi pozitif olduğunda, H 'nin azalması T 'yi azaltır: bu, adyabatik demanyetizasyondur.

Aşağıda yararlı olacak eşdeğer bir biçim, şu adyabatik değişmezdir:

$$\frac{\lambda + \mu_0 K H^2}{T^2} = \text{bir adyabat boyunca sabit}.$$

T3-C1

Yatay koordinat sıcaklıktır. Bu nedenle:

- 2 ve 3 durumlarının altındaki, kesikli çizgiyle gösterilen soldaki izdüşümü T_c olarak etiketleyin.
- 1 ve 4 durumlarının altındaki, kesikli çizgiyle gösterilen sağdaki izdüşümü T_h olarak etiketleyin.

$2 \rightarrow 3$ sürecinde alan, sabit T_c sıcaklığında azalır. B1'e göre torus ısı alır; bu nedenle aşağı yönlü bu düşey aşamanın yanına, torusun içine doğru yönelmiş Q_c 'yi yerleştirin.

$4 \rightarrow 1$ sürecinde alan, sabit T_h sıcaklığında artar. Torus ısı verir; bu nedenle yukarı yönlü bu düşey aşamanın yanına, torustan dışarı doğru yönelmiş Q_h 'yi yerleştirin.

Kalan aşamalar, adyabatik soğuma olan $1 \rightarrow 2$ ve adyabatik ısınma olan $3 \rightarrow 4$ 'tür.

T3-C2

$$H = \frac{VTM}{nK}$$

ifadesini B2'deki adyabatik değişmezde yerine koyun:

$$\frac{\lambda}{T^2} + \frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} M^2 = \text{sabit}.$$

$1 \rightarrow 2$ adyabatı için,

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_1^2 - M_2^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

$3 \rightarrow 4$ adyabatı için,

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_4^2 - M_3^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Sağ tarafları aynı olduğundan,

$$M_1^2 - M_2^2 = M_4^2 - M_3^2.$$

M_j değerleri büyüklük olduğundan pozitif kök alınmalıdır:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

T3-C3

Tek çevrimlik tahmin için, soğuk aşamanın sıcaklığını yaklaşık olarak helyumun başlangıç sıcaklığına eşit alın:

$$T_c \simeq 1.00 \text{ K}.$$

2 → 3 sırasında alınan ısı

$$Q_c = \frac{\mu_0 n K}{2 T_c} (H_2^2 - H_3^2).$$

Verilen değerler kullanıldığında,

$$Q_c = \frac{(1.25663706127 \times 10^{-6})(2.0)(1.87 \times 10^{-6})}{2(1.00)} (311306^2 - 204618^2) \text{ J},$$

buradan

$$Q_c = 0.1293459 \dots \text{ J} \simeq 0.13 \text{ J}.$$

elde edilir.

Helyumun kütlesi ve ısı kapasitesi

$$m_{\text{He}} = \rho V_{\text{He}} = (130)(1.00 \times 10^{-3}) = 0.130 \text{ kg},$$

$$C_{\text{He}} = m_{\text{He}} c = (0.130)(100) = 13.0 \text{ J K}^{-1}.$$

Helyum için enerjinin korunumu

$$C_{\text{He}}(T_{\text{He},f} - 1.00 \text{ K}) = -Q_c.$$

bağıntısını verir. Böylece

$$T_{\text{He},f} = 1.00 \text{ K} - \frac{0.1293459 \dots \text{ J}}{13.0 \text{ J K}^{-1}} = 0.9900503 \dots \text{ K},$$

veya

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

Tahmin edilen sıcaklık düşüşü yaklaşık 1% olup bu sayısal tahminde küçük değişim yaklaşımının kullanılmasını destekler. Malzemenin hacmi Q_c ifadesinde sadeleştiğinden, yoğunluğu ve molar kütlesi burada gerekli değildir. Tam bir çevrim için verilen dört alan değeri tam olarak tutarlı değildir: iki izotermde $M = nKH/(VT)$ kullanıldığında T3-C2'deki bağıntı

$T_h/T_c = \sqrt{(H_1^2 - H_4^2)/(H_2^2 - H_3^2)} \approx 1.42$ olmasını gerektirir ve bu durumda 1 → 2 ile 3 → 4 adyabatları ancak $\lambda \approx -0.062 \text{ J K mol}^{-1}$ ile, yani $C_M = n\lambda/T^2$ ısı kapasitesi negatif olduğunda sağlanabilir. Yukarıdaki tahmin yalnızca soğuk aşamayı kullanır ve λ 'ya bağlı değildir.

T3-C4

$dT_c < 0$, soğutulan cismin gerçek sıcaklık değişimini gösterebilir. Cisimden çekilen pozitif ısı

$$dQ_c = -C_c dT_c.$$

Belirtilen Carnot bağıntısı

$$dQ_h = \frac{T_h}{T_c} dQ_c.$$

sonucunu verir. Soğutucu her çevrimden sonra başlangıç durumuna döndüğünden, net iç enerji değişimi sıfırdır. Dolayısıyla gerekli iş

$$dW = dQ_h - dQ_c = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c.$$

Sabit giriş gücüyle,

$$P dt = dW = -C_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

$t = 0$ anındaki $T_c = T_0$ 'dan $T_c = T$ 'ye integral alınırsa,

$$Pt = -C_c \int_{T_0}^T \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Böylece

$$Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) + T - T_0 \right],$$

ve

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

$0 < T < T_0 < T_h$ için bu süre pozitifdir. Ayrıca,

$$T \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow \infty.$$

Belirtilen model kapsamında, mutlak sıfıra ulaşmak sonsuz bir çalışma süresi gerektirir.

T3-C5

Soğutulan cisimden çekilen toplam ısı

$$Q_{c,\text{total}} = C_c(T_0 - T).$$

Sağlanan toplam iş

$$W_{\text{total}} = Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

Dolayısıyla,

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{Q_{c,\text{total}}}{W_{\text{total}}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Bir kontrol olarak, sonsuz küçük bir sıcaklık düşüşü için,

$$\lim_{T \rightarrow T_0^-} \text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0}{T_h - T_0},$$

bu da soğuk taraf sıcaklığı T_0 olan Carnot soğutucusunun bilinen COP değeridir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.