

IPhO 2026

Теоретические задачи и решения · Букараманга, Колумбия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2026/

Задача 1: Три задачи (А: Гидростатический затвор; В: Электрон-позитронная пара; С: Фотодиссоциация озона)

ЗАДАЧА Т1 [10 баллов]. Три задачи

Эта задача состоит из трёх независимых задач.

Т1-А [3.0 балла]. Гидростатический затвор

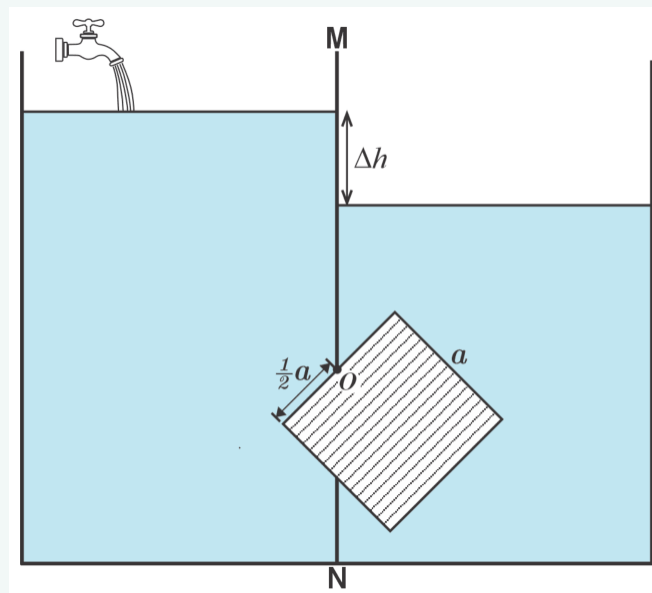


Рис. 1а.

Два резервуара с водой разделены вертикальной стенкой MN, как показано на рисунке 1а. В левый резервуар может поступать вода из источника. Необходимо обеспечить, чтобы максимально возможная разность уровней воды составляла $\Delta h = 1.41$ м. Для этого в MN прорезают отверстие размером по вертикали $a\sqrt{2}/2$ и закрывают его сплошным кубическим блоком с длиной ребра a . Плотность блока равна $3\rho_0$, где ρ_0 — плотность воды. Блок полностью погружён в воду, прикреплён к стенке в точке O и может без трения вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O .

Т1-А1 [3.0 балла]. Вычислите значение a , при котором максимально допустимая разность уровней воды не будет превышена.

Т1-В [3.5 балла]. Электрон-позитронная пара

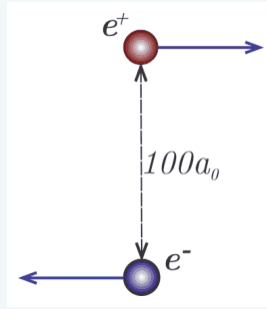


Рис. 1b.

В некоторый момент времени позитрон e^+ находится на расстоянии $100a_0$ от электрона e^- . Частицы движутся так, что в этот момент их скорости противоположно направлены и перпендикулярны отрезку, соединяющему частицы, как показано на рисунке 1b. Известно, что модуль момента импульса каждой частицы относительно центра масс системы равен $\mu\hbar$, где μ — безразмерный числовой коэффициент. Считайте, что между e^+ и e^- действует только электростатическое взаимодействие (обе частицы имеют одинаковую массу m и равные по модулю, но противоположные по знаку заряды). Кроме того, считайте, что система остаётся изолированной и её движение описывается классической нерелятивистской механикой.

Боровский радиус a_0 задаётся выражением $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$.

Т1-В1 [1.0 балла]. Если $\mu = 4$, система является связанной, то есть частицы движутся по замкнутым орбитам вокруг центра масс системы. Найдите максимальное расстояние между e^+ и e^- , выразив его через a_0 .

Т1-В2 [2.5 балла]. Если $\mu = \frac{15}{2}$, система является несвязанной, то есть частицы уже не движутся по замкнутым орбитам вокруг центра масс системы. Пусть $\vec{u}_\infty$ — скорость e^+ относительно e^- , когда расстояние между ними стремится к бесконечности. Вычислите угол между $\vec{u}_\infty$ и первоначальной линией движения e^+ . Дайте ответ в градусах.

Подсказка 1: Эксцентриситет ε траектории в виде конического сечения в данном случае задаётся выражением

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2 E}{k^2 e^4 m}}$$

где E и L — полная энергия и модуль полного момента импульса соответственно. k — постоянная Кулона $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Подсказка 2: Уравнение конического сечения в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

Т1-С [3.5 балла]. Фотодиссоциация озона

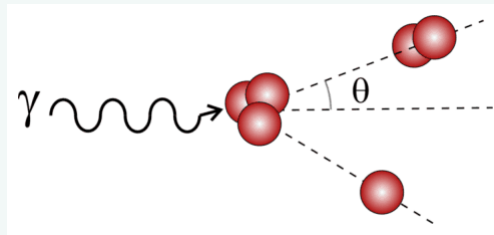


Рис. 1с.

Фотон с угловой частотой ω сталкивается с покоящейся молекулой озона O_3 , вызывая её диссоциацию (распад) на молекулу кислорода O_2 и атом кислорода O , как показано на рисунке 1с. При этом фотон поглощается. Пусть U_i и U_f — энергии основных состояний молекул озона и кислорода соответственно. Считайте, что система остаётся изолированной и её движение описывается классической механикой (потенциальные энергии не вносят вклада в массу, а движение атомов кислорода является нерелятивистским). Для импульса фотона используйте соотношение $p = E/c$, где E — его энергия.

Т1-С1 [2.5 балла]. Если импульс образовавшейся молекулы O_2 составляет угол θ с направлением падающего фотона, определите минимальную угловую частоту $\omega_{\min}$, необходимую для диссоциации с вылетом молекулы под этим углом. Выразите ответ через $\hbar$, c , θ , $\Delta U = U_f - U_i$ и массу m атома кислорода.

Т1-С2 [1.0 балла]. Если $\theta = \pi/6$, вычислите значение $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$. Дайте ответ в электронвольтах (eV). Примите $\Delta U = 1.10$ eV и $m = 16.0$ а.е.м.

Подсказка:

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Физические постоянные

Справочные значения некоторых физических постоянных.

Постоянная	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Скорость света в вакууме	c	2.99792458×10^8	$m \cdot s^{-1}$
Постоянная Планка	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	eV · s
Приведённая постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	eV · s
Число Авогадро	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Постоянная Больцмана	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	eV · K ⁻¹
Универсальная газовая постоянная	R	8.31446261815324	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	A · s
Гравитационная постоянная	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

Постоянная	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Магнитная постоянная	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Масса электрона	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^{-5}$	eV/c^2
Масса протона	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
Атомная единица массы	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **T1-A1:** Наибольшая допустимая длина ребра, обеспечивающая открывание при заданной разности уровней, равна

$$a = \frac{\Delta h}{2\sqrt{2}} = 0.499 \text{ m.}$$

- **T1-B1:**

$$r_{\max} = \frac{1600}{9} a_0 \approx 178 a_0.$$

- **T1-B2:**

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ,$$

с отклонением в ту сторону от линии движения, где первоначально находился электрон.

- **T1-C1:** Для $0 \leq \theta < \pi/2$, как на рисунке, положим $F = 1 + 2 \sin^2 \theta$. Тогда

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar F} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right) = \frac{2\Delta U}{\hbar \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right)}.$$

Для $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ замените F на 3; результат представляет собой точную нижнюю грань, к которой стремится частота при стремлении импульса вылетающей молекулы O_2 к нулю.

- **T1-C2:**

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV.}$$

Решение

T1-A1

Вычислим момент сил относительно O в момент начала открывания. Сила реакции шарнира не создаёт момента относительно O , а сила реакции в месте контакта с нижним краем отверстия при достижении этого порога обращается в нуль.

Обозначим высоту отверстия через

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Указанное расстояние $a/2$ означает, что O находится в середине верхней левой стороны квадратного поперечного сечения. Следовательно, центр куба расположен правее O на расстоянии по горизонтали

$$d = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Разложим давление воды на две составляющие. Сначала представим, что в обоих резервуарах вода находится на уровне правого резервуара. Это гидростатическое давление создаёт направленную вверх выталкивающую силу

$$B = \rho_0 g a^3$$

с линией действия, проходящей через центр куба. Действующая на куб сила тяжести равна

$$W = 3\rho_0 g a^3.$$

Поэтому суммарный момент этих сил, направленный по часовой стрелке, равен

$$\tau_{\text{closing}} = (W - B)d = 2\rho_0 g a^3 \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}}.$$

Повышение уровня воды слева на Δh добавляет равномерное давление

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta h$$

на поверхность куба слева от стенки.

Равнодействующая и момент сил этого дополнительного давления эквивалентны равнодействующей и моменту сил, действующих на вертикальный прямоугольник, перекрывающий отверстие. Чтобы убедиться в этом, замкнём выступающую поверхность этим прямоугольником: равномерное давление на полученную замкнутую поверхность даёт нулевые результирующие силу и момент сил.

Таким образом, дополнительное давление создаёт горизонтальную силу

$$F_{\Delta p} = \Delta p a H$$

с точкой приложения на середине высоты отверстия. Её момент, направленный против часовой стрелки и открывающий затвор, равен

$$\tau_{\text{opening}} = \Delta p a H \frac{H}{2} = \frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4}.$$

На пороге открывания

$$\frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}},$$

поэтому

$$\Delta h = 2\sqrt{2}a.$$

Приравнявая это пороговое значение допустимой разности уровней, получаем

$$a = \frac{1.41}{2\sqrt{2}} \text{ м} = 0.498510 \dots \text{ м} \approx 0.499 \text{ м}.$$

При меньших значениях a затвор открывался бы при меньшей разности уровней.

T1-B1

Пусть r — расстояние между частицами; введём обозначение

$$\kappa = ke^2 = \frac{\hbar^2}{ma_0}.$$

Будем работать в системе отсчёта центра масс. Приведённая масса равна $m/2$, а моменты импульса обеих частиц направлены одинаково, поэтому модуль полного момента импульса равен

$$L = 2\mu\hbar.$$

Закон сохранения механической энергии даёт

$$E = \frac{m}{4} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

Первоначально относительная скорость перпендикулярна отрезку, соединяющему частицы, поэтому $\dot{r} = 0$ при $r_0 = 100a_0$. Следовательно,

$$E = \frac{4\mu^2\hbar^2}{m(100a_0)^2} - \frac{\kappa}{100a_0} = \frac{\kappa}{a_0} \left(\frac{\mu^2}{2500} - \frac{1}{100} \right).$$

Для $\mu = 4$

$$E = -\frac{9}{2500} \frac{\kappa}{a_0} < 0.$$

При обоих крайних значениях расстояния $\dot{r} = 0$. Положив $x = r/a_0$, запишем уравнение для точек поворота:

$$-\frac{9}{2500} = \frac{64}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Эквивалентно,

$$9x^2 - 2500x + 160000 = (x - 100)(9x - 1600) = 0.$$

Таким образом, двум точкам поворота соответствуют расстояния

$$r_{\min} = 100a_0, \quad r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0.$$

Следовательно, заданная начальная конфигурация соответствует точке минимального расстояния, и

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

T1-B2

При $\mu = 15/2$ те же выражения дают

$$L = 15\hbar, \quad E = \frac{\kappa}{80a_0} > 0.$$

Используя приведённую в условии формулу для эксцентриситета, получаем

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2 E}{m\kappa^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(15\hbar)^2}{m\kappa^2} \frac{\kappa}{80a_0}}.$$

Поскольку $ma_0\kappa = \hbar^2$,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Выберем полярный угол φ , отсчитываемый от направления на перигецентр и возрастающий в направлении движения. При таком выборе уравнение конического сечения имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{(m/2)\kappa} = 450a_0.$$

Расстояние в перигецентре равно

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{450a_0}{1 + 7/2} = 100a_0,$$

так что начальное положение действительно соответствует перигецентру.

На участке траектории, соответствующем удалению частиц, $r \rightarrow \infty$, когда

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0,$$

откуда

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{2}{7}.$$

Поперечная составляющая относительной скорости равна $L/[(m/2)r]$ и стремится к нулю на бесконечности. Следовательно, конечная относительная скорость направлена вдоль предельного радиального направления. Начальная скорость перпендикулярна направлению на перигецентр, поэтому искомый угол равен

$$\alpha = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{7},$$

и, следовательно,

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ.$$

На рисунке конечная относительная скорость направлена ниже первоначального горизонтального направления движения позитрона.

T1-C1

Обозначим энергию фотона и модуль его импульса через

$$E_\gamma = \hbar\omega, \quad P = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Направим ось x вдоль его движения. Пусть вылетающая молекула кислорода имеет импульс $q\hat{\mathbf{n}}$, где

$$q \geq 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos \theta.$$

Согласно принятому в условии правилу определения масс, масса молекулы кислорода равна $2m$, а масса атома — m . Закон сохранения импульса даёт

$$\mathbf{p}_O = P\hat{\mathbf{x}} - q\hat{\mathbf{n}}.$$

При минимальной энергии фотона дополнительного возбуждения внутренних степеней свободы не требуется. Тогда закон сохранения энергии имеет вид

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{q^2}{4m} + \frac{P^2 + q^2 - 2Pq \cos \theta}{2m}.$$

Выделяя полный квадрат, получаем

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{3}{4m} \left(q - \frac{2P \cos \theta}{3} \right)^2 + \frac{P^2}{6m} (3 - 2 \cos^2 \theta).$$

При вылете в переднюю полусферу, $0 \leq \theta < \pi/2$, кинетическая энергия минимальна при физически допустимом импульсе

$$q_* = \frac{2P \cos \theta}{3} > 0.$$

Введём обозначение

$$F = 3 - 2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta.$$

Таким образом, минимальная конечная кинетическая энергия при заданной энергии фотона равна

$$K_{\min} = \frac{FP^2}{6m} = \frac{FE_\gamma^2}{6mc^2}.$$

На пороге диссоциации

$$E_{\gamma, \min} - \Delta U = \frac{FE_{\gamma, \min}^2}{6mc^2}.$$

Решая это квадратное уравнение и выбирая меньший корень, получаем

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar(1 + 2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right].$$

Другому корню соответствует энергия порядка mc^2 , лежащая за пределами предполагаемого нерелятивистского режима.

Эквивалентная форма, удобная при $\Delta U \ll mc^2$, имеет вид

$$\omega_{\min} = \frac{2\Delta U}{\hbar \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(1+2\sin^2\theta)\Delta U}{3mc^2}} \right]}.$$

Её разложение имеет вид

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(1+2\sin^2\theta)(\Delta U)^2}{6mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

Для полноты отметим, что условие явно не ограничивает диапазон углов. Если $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, то значение q_* , минимизирующее энергию без учёта ограничений, неположительно. При наложении ограничения $q \geq 0$ вместо этого получаем

$$\inf K = \frac{P^2}{2m}.$$

Таким образом, для этих углов в формуле пороговой частоты следует использовать $F = 3$. При заданном направлении вылета это лишь точная нижняя грань: при $q = 0$ направление не определено, тогда как сколь угодно малые положительные q допускают энергии, сколь угодно близкие к пороговой.

T1-C2

При $\theta = \pi/6$

$$F = 1 + 2\sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\hbar\omega_{\min} = 2mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{mc^2}} \right).$$

Используя приведённое значение атомной единицы массы, получаем

$$mc^2 = 16.0 (9.3149410372 \times 10^8) \text{ eV} = 1.49039 \times 10^{10} \text{ eV}.$$

Параметр разложения равен

$$x = \frac{\Delta U}{mc^2} \approx 7.38 \times 10^{-11}.$$

Используя

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

получаем

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

Таким образом,

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(1.10 \text{ eV})^2}{4(1.49039 \times 10^{10} \text{ eV})},$$

что даёт

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}$$

с точностью до трёх значащих цифр.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Приготовление пищи с помощью солнечного света?

ЗАДАЧА Т2 [10 баллов]. Приготовление пищи с помощью солнечного света?

Перераспределение светового потока вследствие отражения или преломления с образованием областей высокой и низкой интенсивности может приводить к возникновению *каустики*: кривых, образованных пересечениями бесконечно близких световых лучей. В качестве примера на рисунке 2а показана каустика, образованная лучами, падающими параксиально на полуцилиндрическое зеркало. На рисунке 2b приведена фотография каустики, образованной отражением света от нижней части кофейной чашки. Самая яркая центральная точка каустики называется *точкой возврата*; в этой точке интенсивность света максимальна.

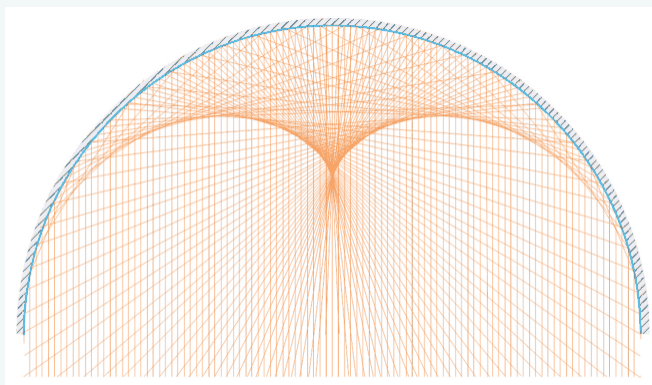


Рис. 2а.



Рис. 2b.

Каустики находят разнообразные применения в науке: от высокоточной и квантовой оптики до астрофизики. В этой задаче вы изучите образование каустики при отражении света от полуцилиндрического зеркала радиуса R , показанного на рисунке 2с. Вы также исследуете другие свойства этого зеркала, в том числе его применение в *солнечных печах*.

Во всей задаче считайте, что падающие лучи исходят от удалённого внешнего источника света и параллельны оптической оси зеркала. В силу симметрии достаточно изучить отражение в одной плоскости. На рисунке 2d показаны такая плоскость, зеркало и система координат, используемая во всей задаче.

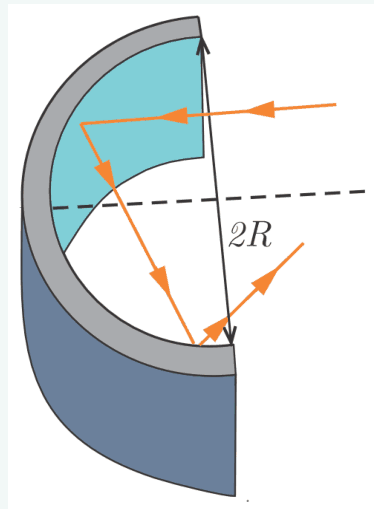


Рис. 2с.

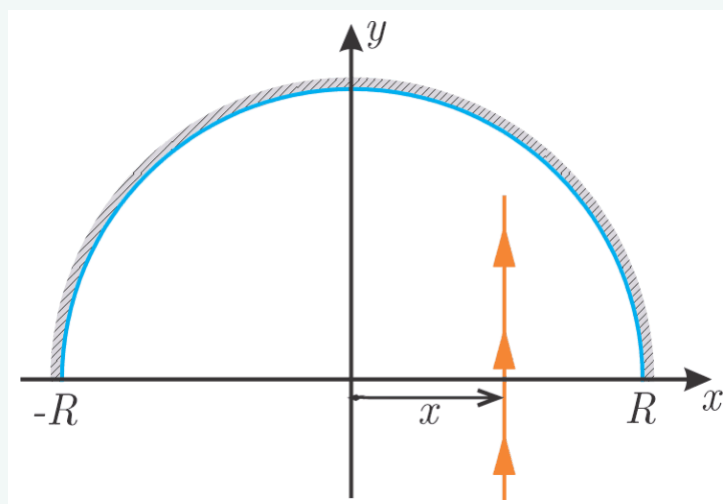


Рис. 2d.

T2-A [1.5 балла]. Многократные отражения

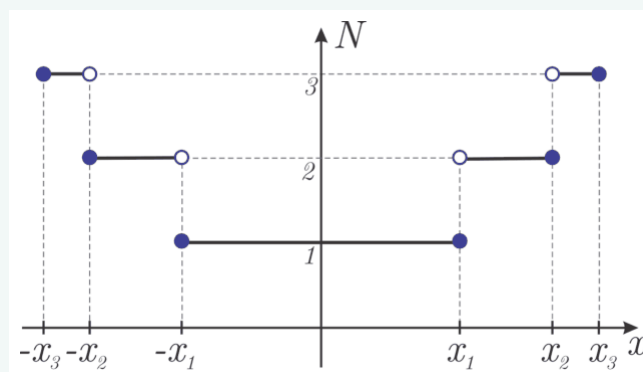


Рис. 2е.

На рисунке 2е показана связь между координатой x падающего луча и числом N испытываемых им отражений, вплоть до $N = 3$. Когда x изменяется в интервале $(-R, R)$, величина N принимает все натуральные значения, большие или равные 1. Максимальное расстояние от оптической оси, при котором падающий луч отражается от зеркала не более N раз, обозначается x_N .

T2-A1 [1.5 балла]. Найдите общее выражение для x_N в бесконечной последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots$, ограничивающей координаты лучей, испытывающих не более N отражений. Выразите ответ через R и N .

T2-B [4.0 балла]. Солнечная печь

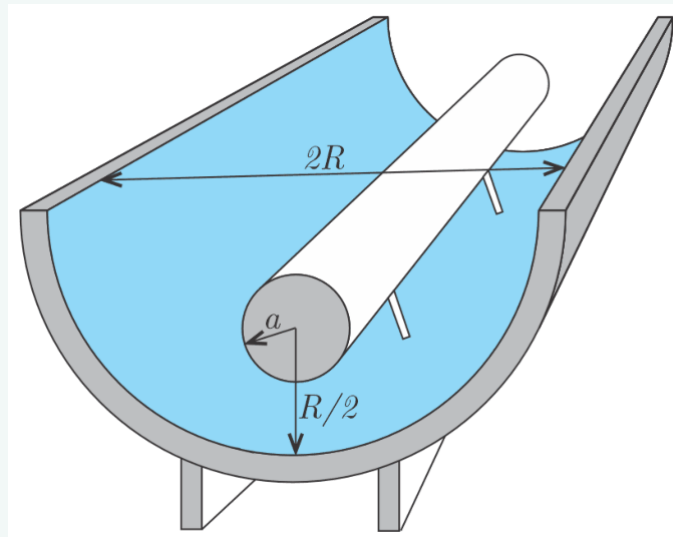


Рис. 2f.

Рассмотрим систему, состоящую из зеркала в форме половины полого цилиндра и цилиндрической ёмкости. Цилиндр полностью поглощает свет: любой попавший на него световой луч поглощается. Радиус зеркала равен R . Радиус ёмкости равен a . Оси зеркала и ёмкости параллельны. Центр ёмкости расположен на расстоянии $R/2$ от зеркала в плоскости симметрии системы, как показано на рисунке 2f. Зеркало использует солнечное излучение для нагревания пищи внутри ёмкости. Считайте, что солнечный свет имеет постоянную и однородную интенсивность (мощность на единицу площади), а световые лучи параллельны оптической оси зеркала. Кроме того, считайте, что a таково, что любой луч, поглощаемый цилиндром, отражается от зеркала не более одного раза. Пусть $\theta_{\max}$ — максимальный угол падения на зеркало (измеряемый относительно нормали, проведённой в точке падения) среди всех отражённых лучей, попадающих на ёмкость.

T2-B1 [2.0 балла]. Радиус ёмкости равен $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$. Выразите α и β через R .

Если вам не удалось найти α и β , используйте приведённое выражение в оставшейся части задачи.

T2-B2 [1.5 балла]. Пусть P_0 — мощность, которую получал бы цилиндр в отсутствие зеркала. Выразите P/P_0 , отношение фактически получаемой мощности P к P_0 , через $\theta_{\max}$.

T2-B3 [0.5 балла]. Если $R = 1.0$ m, найдите значение a , при котором $P = 5P_0$. Дайте ответ в см.

T2-C [4.5 балла]. Каустики и точка возврата

T2-C1 [0.5 балла]. Рассмотрим луч A , падающий на зеркало под углом θ , как показано на рисунке 2g. После отражения уравнение этого луча в системе координат, определённой на рисунке 2g, имеет вид $y = m_A x + b_A$. Выразите m_A и b_A через θ и R .

Подсказка: ожидается ответ вида $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ и $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$, где K_i — числовые константы.

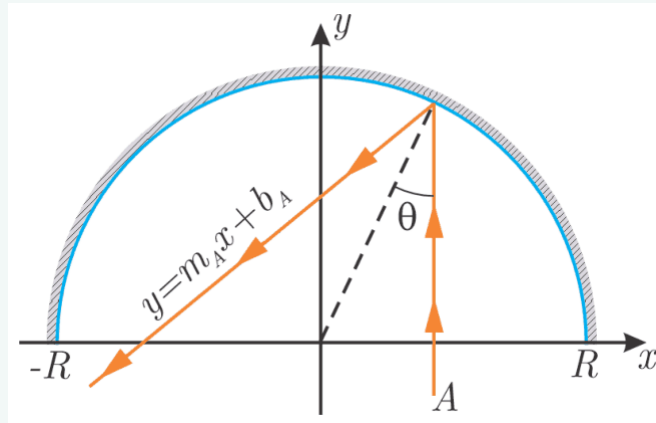


Рис. 2g.

T2-C2 [2.0 балла]. Теперь рассмотрим луч B , параллельный A , который падает на поверхность под углом $\theta + \Delta\theta$, где $\Delta\theta \ll \theta$. После отражения уравнение этого луча имеет вид $y = m_B x + b_B$. Выразите m_B и b_B через θ , $\Delta\theta$ и R в приближении первого порядка по $\Delta\theta$.

T2-C3 [1.0 балл]. Найдите координаты точки пересечения (X_c, Y_c) отражённых лучей A и B . Выразите ответ через R и θ .

T2-C4 [1.0 балл]. При $\theta \ll 1$ имеем $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$. Выразите v и u через R и найдите значения целых чисел p и q (или, что равносильно, укажите рациональное число p/q).

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- T2-A1:

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

- T2-B1:

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

- T2-B2:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

- T2-B3:

$$a = 12 \text{ cm}.$$

- T2-C1:

$$m_A = \cot(2\theta), \quad b_A = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

- T2-C2: С точностью до первого порядка по $\Delta\theta$,

$$m_B \simeq \cot(2\theta) - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2(2\theta)}, \quad b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

- T2-C3: В пределе сближающихся лучей $\Delta\theta \rightarrow 0$,

$$X_c = R \sin^3 \theta, \quad Y_c = \frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

- T2-C4:

$$v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Решение

T2-A1

В силу симметрии рассмотрим падающий луч с $x \geq 0$. Пусть ϕ — полярный угол его первой точки падения, отсчитываемый от положительного направления оси x . Тогда

$$x = R \cos \phi, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку падающий луч распространяется вертикально, его угол падения относительно нормали равен

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

По закону отражения отражённый луч образует с радиальной нормалью тот же угол θ . Поэтому хорда, соединяющая две последовательные точки отражения, стягивает центральный угол

$$\pi - 2\theta = 2\phi.$$

Треугольник, образованный этой хордой и двумя радиусами, равнобедренный, поэтому при последовательных отражениях угол падения остаётся неизменным.

Следовательно, на соответствующей полной окружности последовательные точки попадания луча имеют полярные углы

$$\phi, \quad 3\phi, \quad 5\phi, \quad \dots, \quad (2j-1)\phi.$$

Зеркалом является только верхняя полуокружность. Луч выходит через диаметр, когда следующая точка попадания на полную окружность оказалась бы на нём или ниже него.

При предельной координате падающего луча x_N луч испытывает N отражений, а затем достигает дальнего края. Таким образом, предполагаемая $(N+1)$ -я точка попадания имеет полярный угол π :

$$(2N + 1)\phi_N = \pi.$$

Отсюда следует, что

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N + 1}\right).$$

При равенстве луч выходит у края, что согласуется с граничными точками, показанными на рис. 2е. Первые значения равны

$$x_1 = \frac{R}{2}, \quad x_2 \approx 0.8090R, \quad x_3 \approx 0.9010R,$$

и $x_N \rightarrow R$ при $N \rightarrow \infty$.

T2-B1

Используем координаты с рис. 2d. Центр ёмкости находится в точке

$$C = \left(0, \frac{R}{2}\right).$$

Луч с углом падения $\theta \geq 0$ попадает на зеркало в точке

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta).$$

Единичный вектор внешней нормали в этой точке равен

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

а направление распространения падающего луча задаётся вектором $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1)$.

Закон отражения в векторной форме даёт единичный вектор направления отражённого луча:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= (0, 1) - 2 \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta). \end{aligned}$$

Перпендикулярное расстояние от C до прямой, содержащей отражённый луч, равно модулю двумерного векторного произведения $C - M$ и $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} d(\theta) &= |(C_x - M_x)\hat{u}_y - (C_y - M_y)\hat{u}_x| \\ &= \left| -R \sin \theta + \frac{R}{2} \sin 2\theta \right| \\ &= R \sin \theta (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

При $0 \leq \theta < \pi/2$ это расстояние возрастает с θ , поскольку

$$d'(\theta) = R(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \geq 0.$$

Предельный отражённый луч, попадающий на ёмкость, касается её, поэтому $d(\theta_{\max}) = a$. Следовательно,

$$a = R \sin \theta_{\max} - \frac{R}{2} \sin 2\theta_{\max}.$$

Сравнение с заданным выражением даёт

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

T2-B2

Пусть I — однородная интенсивность падающего света, а L — общая освещённая длина вдоль осей цилиндров. В отсутствие зеркала площадь проекции ёмкости равна $2aL$, поэтому

$$P_0 = 2aLI.$$

Наибольшее расстояние падающего луча от оптической оси, при котором происходит поглощение, равно

$$h_{\max} = R \sin \theta_{\max}.$$

Лучи с $|x| \leq a$ попадают на ёмкость непосредственно. Лучи с

$$a < |x| \leq h_{\max}$$

достигают зеркала и затем поглощаются после одного отражения.

Лучи, поглощаемые непосредственно, затеняют соответствующую часть зеркала. Поэтому вклады прямого и отражённого света равны

$$P_{\text{direct}} = 2aLI, \quad P_{\text{reflected}} = 2(h_{\max} - a)LI.$$

Согласно указанному ограничению, лучи, испытывающие два или более отражений, не дают дополнительного вклада в поглощённую мощность. Поэтому для идеального зеркала закон сохранения мощности даёт

$$P = 2h_{\max}LI = 2R \sin \theta_{\max} LI.$$

Отсюда

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R \sin \theta_{\max}}{a}.$$

Подставляя результат T2-B1, получаем

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}}.$$

T2-B3

Условие $P = 5P_0$ даёт

$$1 - \cos \theta_{\max} = \frac{1}{5}, \quad \cos \theta_{\max} = \frac{4}{5}.$$

Таким образом,

$$\sin \theta_{\max} = \frac{3}{5}$$

и

$$a = R \sin \theta_{\max} (1 - \cos \theta_{\max}) = R \frac{3}{5} \frac{1}{5} = \frac{3R}{25}.$$

При $R = 1.0 \text{ m}$,

$$\boxed{a = 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}}.$$

T2-C1

Согласно T2-B1, отражённый луч проходит через точку

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta)$$

и имеет направление

$$\hat{\mathbf{u}} = (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

Поэтому его угловой коэффициент равен

$$m_A = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x} = \cot 2\theta.$$

Используя координаты M , получаем

$$\begin{aligned} b_A &= R \cos \theta - R \sin \theta \cot 2\theta \\ &= R \cos \theta - \frac{R \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{R}{2 \cos \theta}. \end{aligned}$$

В обозначениях подсказки

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = \frac{1}{2}, \quad K_4 = 1.$$

Центральный отражённый луч при $\theta = 0$ представляет собой вертикальную прямую $x = 0$.

Результаты, содержащие его угловой коэффициент, следует понимать в смысле предела $\theta \rightarrow 0$.

T2-C2

Для луча B заменим θ на $\theta + \Delta\theta$. Разложение Тейлора до первого порядка даёт

$$m_B = m_A + \frac{dm_A}{d\theta} \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2).$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\theta} \cot 2\theta = -2 \csc^2 2\theta,$$

получаем

$$m_B \simeq \cot 2\theta - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

Аналогично,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R}{2 \cos \theta} \right) = \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta},$$

поэтому

$$b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

В этих разложениях сохранены только члены до первого порядка по $\Delta\theta$ включительно, как и требуется.

T2-C3

В точке пересечения двух отражённых лучей

$$m_A X_c + b_A = m_B X_c + b_B.$$

Следовательно,

$$(m_B - m_A)X_c + (b_B - b_A) = 0.$$

Используя разности первого порядка из T2-C2 и переходя к пределу сближающихся лучей, получаем

$$-\frac{2X_c}{\sin^2 2\theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = 0.$$

Поэтому

$$X_c = \frac{R \sin \theta \sin^2 2\theta}{4 \cos^2 \theta}.$$

Поскольку $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$,

$$\boxed{X_c = R \sin^3 \theta}.$$

Подстановка в уравнение луча A даёт

$$\begin{aligned} Y_c &= R \sin^3 \theta \cot 2\theta + \frac{R}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{R}{2 \cos \theta} (1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta) \\ &= \boxed{\frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta)}. \end{aligned}$$

При упрощении здесь использовано тождество

$$1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

Эти параметрические уравнения описывают каустику. Ветвь по другую сторону оптической оси получается из соображений симметрии: X_c меняет знак, а Y_c остаётся неизменной.

T2-C4

Вблизи оптической оси используем разложения для малых углов

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4).$$

Тогда координаты каустики принимают вид

$$X_c = R\theta^3 + O(R\theta^5)$$

и

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) (1 + 2\theta^2 + O(\theta^4)) \\ &= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} \theta^2 + O(R\theta^4). \end{aligned}$$

Для обеих симметричных ветвей

$$\theta^2 \simeq \left(\frac{|X_c|}{R} \right)^{2/3}.$$

Таким образом, исключая θ , в главном порядке вблизи точки возврата получаем

$$\boxed{Y_c \simeq \frac{R}{2} + \frac{3}{4} R^{1/3} |X_c|^{2/3}}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{3}{4}R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Точка возврата находится в $(0, R/2)$. Две симметричные ветви каустики направлены в сторону возрастания y и имеют в этой точке общую вертикальную касательную.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: В погоне за абсолютным нулём

ЗАДАЧА ТЗ [10 баллов]. В погоне за абсолютным нулём

Холодильный цикл должен осуществляться системой, характеристики которой соответствуют температурам, которых требуется достичь. Сто лет назад, в 1926 году, химик Уильям Джиок и независимо от него физик Петер Дебай предложили использовать парамагнитные соли как идеальные системы для понижения температуры значительно ниже 1 К. Действительно, уже в следующем десятилетии были достигнуты температуры вплоть до 0.0044 К (Вандер де Хааз и Геррит Вирсма, 1935 год, Лейденская криогенная лаборатория). В этой задаче рассматривается парамагнитный холодильный цикл Карно.

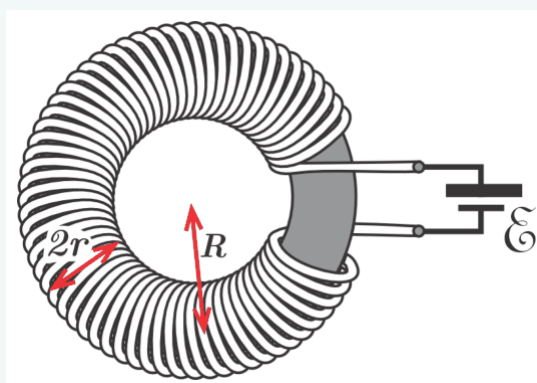


Рис. 3а.

Рассмотрим тор со средним радиусом R и радиусом поперечного сечения r , изготовленный из однородного изотропного парамагнитного материала. На тор намотан изолированный провод, концы которого подключены к внешнему источнику напряжения (ЭДС), как показано на рисунке 3а. Сопротивление провода настолько мало, что потерями энергии на его нагрев можно пренебречь. Обмотка плотная и содержит в общей сложности N витков; предполагается, что $r \ll R$, поэтому модули векторов напряжённости магнитного поля $\vec{H}$, магнитной индукции $\vec{B}$ и намагниченности $\vec{M}$ приблизительно постоянны во всём объёме тора. Обозначим через V и A объём и площадь поперечного сечения тора. Далее для обозначения парамагнитного тора используется сокращение Pm-T.

В парамагнитных материалах $\vec{M}$ параллельна $\vec{H}$, и выполняется следующее соотношение:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

Соглашение о знаках при передаче энергии: в этой задаче работа (W) и количество теплоты (Q) считаются положительными, когда энергия поступает в систему, и отрицательными, когда она покидает систему.

ТЗ-А [1.0 балла]. Работа в Рм-Т

Подсказка: в магнитных материалах $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, где I_C — суммарный свободный ток, проходящий через поверхность, ограниченную замкнутым контуром C .

ТЗ-А1 [0.2 балла]. Пусть H — модуль $\vec{H}$ в торе. Выразите H через N , A , V и мгновенное значение электрического тока I в проводе.

ТЗ-А2 [0.6 балла]. Пусть dW_{emf} — работа, которую совершает внешний источник напряжения при изменении модуля $\vec{B}$ на dB . Выразите dW_{emf} через V , H и dB .

ТЗ-А3 [0.2 балла]. Полную работу источника напряжения dW_{emf} можно разделить на две части: работу dW_{vac} , которая была бы совершена для изменения магнитного поля, если бы внутри тороидальной обмотки был вакуум, и работу dW , совершённую над самим парамагнитным материалом. Выразите dW через μ_0 , H , V и dM .

ТЗ-В [3.0 балла]. Теплота и температура в Рм-Т

В следующей таблице сравниваются две термодинамические системы: идеальный газ и Рм-Т. Используйте эту информацию и свой ответ на вопрос ТЗ-А3 для решения следующих вопросов. Эта информация также понадобится в части С. Если вы не получили выражение для dW в вопросе ТЗ-А3, можно использовать $dW = \alpha V \mu_0 H dM$, где α — некоторое число. Объём V парамагнитного тора постоянен, поэтому работа сил давления отсутствует. Далее T во всех случаях обозначает температуру.

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ	ПАРАМАГНИТНЫЙ ТОР
Функции состояния: P , V и температура T	Функции состояния: H , M и температура T
Постоянные: R , γ и количество вещества n	Постоянные: K , λ и количество вещества n
Уравнение состояния: $PV = nRT$	Уравнение состояния: $TMV = nKH$
Теплоёмкость при постоянном V : $C_V = nR/(\gamma - 1)$	Теплоёмкость при постоянной M : $C_M = n\lambda/T^2$
Внутренняя энергия U в любом процессе удовлетворяет соотношению $dU = C_V dT$	Внутренняя энергия U в любом процессе удовлетворяет соотношению $dU = C_M dT$

K и λ — постоянные, определяемые материалом тора. Вы можете использовать приведённые в таблице уравнения непосредственно, без доказательства.

ТЗ-В1 [1.5 балла]. Если модуль $\vec{H}$ изменяется от H_i до H_f при постоянной температуре T , между Рм-Т и окружающей средой передаётся количество теплоты Q . Выразите Q через μ_0 , n , V , K , H_i , H_f и T .

ТЗ-В2 [1.5 балла]. Если модуль $\vec{H}$ адиабатически изменяется от H_i до H_f , температура Рм-Т изменяется от T_i до T_f . Выразите $\Delta T = T_f - T_i$ через μ_0 , V , n , K , λ , H_i , H_f и T_i .

ТЗ-С [6.0 балла]. Холодильная машина Карно на основе Рм-Т

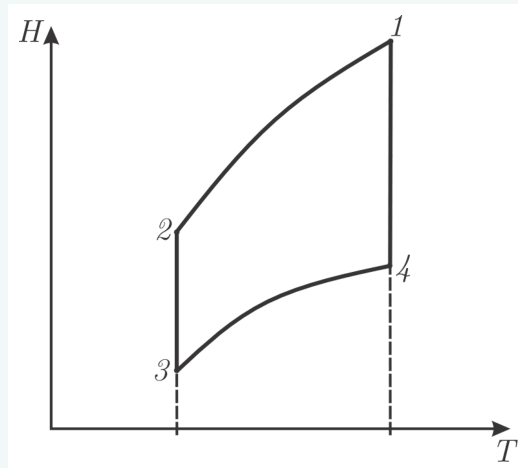


Рис. 3b.

Диаграмма холодильного цикла Карно $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, совершаемого Рм-Т, в координатах H и T показана на рисунке 3b. В этом цикле обозначим:

- T_h : температура горячего резервуара
- T_c : температура холодного резервуара
- Q_h : абсолютное значение количества теплоты, переданного горячему резервуару
- Q_c : абсолютное значение количества теплоты, полученного от холодного резервуара

ТЗ-С1 [0.2 балла]. Отметьте T_h и T_c на оси T диаграммы в координатах H и T . Также обозначьте процессы, в которых происходит передача теплоты Q_h и Q_c соответственно.

ТЗ-С2 [1.5 балла]. Пусть M_1 , M_2 , M_3 и M_4 — модули $\vec{M}$ в вершинах этого цикла. Выразите M_1 через M_2 , M_3 и M_4 .

ТЗ-С3 [0.8 балла]. Предположим, что для охлаждения 1.00 л жидкого гелия с начальной температурой 1.00 К мы используем Рм-Т, содержащий 2.0 моль хромата калия. Для этого материала $K = 1.87 \times 10^{-6} \text{ К} \cdot \text{м}^3/\text{mol}$, его плотность равна $2730 \text{ kg}/\text{m}^3$, а молярная масса — $0.19 \text{ kg}/\text{mole}$. Рм-Т совершает холодильный цикл Карно с $H_1 = 411624 \text{ A}/\text{m}$, $H_2 = 311306 \text{ A}/\text{m}$, $H_3 = 204618 \text{ A}/\text{m}$ и $H_4 = 240446 \text{ A}/\text{m}$. Вычислите конечную температуру жидкого гелия после одного рабочего цикла. Считайте, что удельная теплоёмкость жидкого гелия $c = 100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ и его плотность $\rho = 130 \text{ kg}/\text{m}^3$ остаются постоянными.

ТЗ-С4 [2.0 балла]. Для непрерывного понижения температуры тела с постоянной теплоёмкостью C_c циклы Карно осуществляются во времени таким образом, чтобы мощность P , подводимая к холодильной машине, оставалась постоянной. При этом предполагается, что температура T_h горячего резервуара остаётся постоянной, а в каждом рабочем цикле температура T_c охлаждаемого тела уменьшается на dT_c , причём выполняется соотношение $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$. Если при $t = 0$ имеем $T_c = T_0$, определите время t , в течение которого должна работать холодильная машина Карно, чтобы охлаждаемое тело достигло температуры $T < T_0$. Выразите ответ через C_c , T_h , P , T_0 и T .

Т3-С5 [1.5 балла]. Эффективность холодильной машины характеризуется её *холодильным коэффициентом* $\text{COP} = Q_c/W$. Определите общий холодильный коэффициент COP машины из вопроса Т3-С4 с учётом всех циклов, выполненных за время t . Выразите ответ через T_0 , T_h и T .

Физические постоянные

Справочные значения некоторых физических постоянных.

Постоянная	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Скорость света в вакууме	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Постоянная Планка	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Приведённая постоянная Планка	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Число Авогадро	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Постоянная Больцмана	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Гравитационная постоянная	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Магнитная постоянная	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Электрическая постоянная	ε_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Масса электрона	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
Масса протона	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
Атомная единица массы	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- Т3-А1:

$$H = \frac{NAI}{V}.$$

- Т3-А2:

$$dW_{emf} = VH dB.$$

- T3-A3:

$$dW = \mu_0 V H dM, \quad \alpha = 1.$$

- T3-B1:

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

- T3-B2:

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

- T3-C1: Левая вертикальная линия, проходящая через состояния 2, 3, соответствует T_c ; правая вертикальная линия, проходящая через состояния 1, 4, соответствует T_h . Теплота Q_c поглощается в процессе $2 \rightarrow 3$, а теплота Q_h отдаётся в процессе $4 \rightarrow 1$.

- T3-C2:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

- T3-C3: Принимая $T_c \simeq 1.00$ K на участке цикла при низкой температуре, получаем

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

Это оценка для малого понижения температуры, в которой температура изотермического участка $2 \rightarrow 3$ принимается равной начальной температуре гелия; используется только этот участок (см. примечание в конце решения T3-C3).

- T3-C4:

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

- T3-C5:

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Решение

Во всём решении используем заданное соглашение о знаках:

$$dU = dQ + dW,$$

где теплота и работа положительны, когда энергия передаётся парамагнитному материалу. Магнитные процессы рассматриваются как квазистатические в приближении однородного поля $r \ll R$ и при пренебрежимо малых потерях на сопротивлении.

T3-A1

В качестве контура для теоремы о циркуляции выберем окружность радиуса R внутри тора. Она охватывает все N витков, поэтому охваченный свободный ток равен NI . Таким образом,

$$H(2\pi R) = NI.$$

Поскольку объём тора равен $V = (2\pi R)A$,

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NAI}{V}.$$

T3-A2

Магнитный поток через каждый виток приблизительно равен

$$\Phi = AB.$$

По закону Фарадея ЭДС индукции равна $-NA dB/dt$. При пренебрежимо малом сопротивлении ЭДС внешнего источника уравнивает её:

$$\mathcal{E} = NA \frac{dB}{dt}.$$

Следовательно, электрическая работа, совершаемая за время dt , равна

$$dW_{emf} = \mathcal{E} I dt = NAI dB.$$

Используя $NAI = VH$ из A1, получаем

$$dW_{emf} = VH dB.$$

Это выражение также даёт правильный знак, когда источник получает энергию при уменьшении поля.

T3-A3

Поскольку векторы поля и намагнитченности параллельны,

$$dB = \mu_0 dH + \mu_0 dM.$$

Следовательно,

$$dW_{emf} = \mu_0 VH dH + \mu_0 VH dM.$$

Если внутри обмотки вакуум, то $B = \mu_0 H$, поэтому работа, соответствующая такому же изменению H , равна

$$dW_{vac} = \mu_0 VH dH = d\left(\frac{\mu_0 VH^2}{2}\right).$$

После вычитания этого вклада поля в вакууме остаётся работа над материалом:

$$dW = dW_{emf} - dW_{vac} = \mu_0 VH dM.$$

Таким образом, коэффициент в предложенном вспомогательном выражении равен $\alpha = 1$.

T3-B1

Из заданного соотношения для внутренней энергии следует, что в изотермическом процессе

$$dU = \frac{n\lambda}{T^2} dT = 0.$$

Тогда первое начало термодинамики даёт

$$dQ = -dW = -\mu_0 VH dM.$$

При постоянной T из уравнения состояния получаем

$$M = \frac{nKH}{VT}, \quad dM = \frac{nK}{VT} dH.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{\mu_0 nK}{T} \int_{H_i}^{H_f} H dH,$$

и, следовательно,

$$Q = \frac{\mu_0 nK}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

Объём сокращается. При изотермическом размагничивании, $H_f < H_i$, теплота поглощается; при изотермическом намагничивании теплота выделяется.

T3-B2

В адиабатическом процессе $dQ = 0$, поэтому

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 V H dM.$$

Теперь изменяются и H , и T . Дифференцируя уравнение состояния, получаем

$$dM = \frac{nK}{V} \left(\frac{dH}{T} - \frac{H}{T^2} dT \right).$$

Подстановка в первое начало термодинамики даёт

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 nK \left(\frac{H}{T} dH - \frac{H^2}{T^2} dT \right).$$

Таким образом,

$$(\lambda + \mu_0 K H^2) dT = \mu_0 K H T dH,$$

или

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 K H}{\lambda + \mu_0 K H^2} dH.$$

Интегрируя между начальным и конечным состояниями, получаем

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}.$$

Следовательно,

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}},$$

и

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

При положительных K и теплоёмкости уменьшение H приводит к понижению T : это адиабатическое размагничивание.

Эквивалентная форма, которая пригодится ниже, представляет собой адиабатический инвариант

$$\frac{\lambda + \mu_0 K H^2}{T^2} = \text{постоянная вдоль адиабаты}.$$

Т3-С1

По горизонтальной оси отложена температура. Поэтому:

- Обозначьте T_c левую пунктирную проекцию на ось под состояниями 2 и 3.
- Обозначьте T_h правую пунктирную проекцию на ось под состояниями 1 и 4.

В процессе $2 \rightarrow 3$ поле уменьшается при постоянной T_c . Согласно В1, тор поглощает теплоту, поэтому рядом с этим направленным вниз вертикальным участком следует обозначить Q_c , направленное внутрь тора.

В процессе $4 \rightarrow 1$ поле увеличивается при постоянной T_h . Тор отдаёт теплоту, поэтому рядом с этим направленным вверх вертикальным участком следует обозначить Q_h , направленное из тора наружу.

Оставшиеся участки — это $1 \rightarrow 2$, адиабатическое охлаждение, и $3 \rightarrow 4$, адиабатическое нагревание.

Т3-С2

Подставим

$$H = \frac{VTM}{nK}$$

в адиабатический инвариант из В2:

$$\frac{\lambda}{T^2} + \frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} M^2 = \text{постоянная}.$$

Для адиабаты $1 \rightarrow 2$

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_1^2 - M_2^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Для адиабаты $3 \rightarrow 4$

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_4^2 - M_3^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Их правые части одинаковы, поэтому

$$M_1^2 - M_2^2 = M_4^2 - M_3^2.$$

Поскольку M_j — модули, следует взять положительный корень:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

Т3-С3

Для оценки за один цикл примем температуру на участке цикла при низкой температуре приблизительно равной начальной температуре гелия:

$$T_c \simeq 1.00 \text{ K}.$$

Количество теплоты, поглощённое в процессе $2 \rightarrow 3$, равно

$$Q_c = \frac{\mu_0 n K}{2T_c} (H_2^2 - H_3^2).$$

Подставляя заданные значения, получаем

$$Q_c = \frac{(1.25663706127 \times 10^{-6})(2.0)(1.87 \times 10^{-6})}{2(1.00)} (311306^2 - 204618^2) \text{ J},$$

откуда

$$Q_c = 0.1293459 \dots \text{ J} \simeq 0.13 \text{ J}.$$

Масса и теплоёмкость гелия равны

$$m_{\text{He}} = \rho V_{\text{He}} = (130)(1.00 \times 10^{-3}) = 0.130 \text{ kg},$$

$$C_{\text{He}} = m_{\text{He}} c = (0.130)(100) = 13.0 \text{ J K}^{-1}.$$

Закон сохранения энергии для гелия даёт

$$C_{\text{He}}(T_{\text{He},f} - 1.00 \text{ K}) = -Q_c.$$

Таким образом,

$$T_{\text{He},f} = 1.00 \text{ K} - \frac{0.1293459 \dots \text{ J}}{13.0 \text{ J K}^{-1}} = 0.9900503 \dots \text{ K},$$

или

$$\boxed{T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}}.$$

Оценённое понижение температуры составляет приблизительно 1%, что оправдывает приближение малого изменения для данной численной оценки. Объём материала сокращается в выражении для Q_c , поэтому его плотность и молярная масса здесь не нужны. Для точного цикла четыре заданных значения поля не вполне согласованы: при $M = nKH/(VT)$ на двух изотермах соотношение из Т3-С2 требует $T_h/T_c = \sqrt{(H_1^2 - H_4^2)/(H_2^2 - H_3^2)} \approx 1.42$, и тогда адиабаты $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$ выполняются лишь при $\lambda \approx -0.062 \text{ J K mol}^{-1}$, то есть при отрицательной теплоёмкости $C_M = n\lambda/T^2$. Приведённая выше оценка использует только участок цикла при низкой температуре и не зависит от λ .

Т3-С4

Пусть $dT_c < 0$ обозначает фактическое изменение температуры охлаждаемого тела.

Положительное количество теплоты, отведённое от него, равно

$$dQ_c = -C_c dT_c.$$

Заданное соотношение Карно даёт

$$dQ_h = \frac{T_h}{T_c} dQ_c.$$

Поскольку холодильная машина возвращается в исходное состояние после каждого цикла, суммарное изменение её внутренней энергии равно нулю. Поэтому необходимая работа равна

$$dW = dQ_h - dQ_c = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c.$$

При постоянной подводимой мощности

$$P dt = dW = -C_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Интегрируя от $T_c = T_0$ при $t = 0$ до $T_c = T$, получаем

$$Pt = -C_c \int_{T_0}^T \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Отсюда

$$Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) + T - T_0 \right],$$

и

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

При $0 < T < T_0 < T_h$ это время положительно. Кроме того,

$$T \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow \infty.$$

В рамках заданной модели достижение абсолютного нуля требует бесконечного времени работы.

ТЗ-С5

Полное количество теплоты, отведённое от охлаждаемого тела, равно

$$Q_{c,\text{total}} = C_c(T_0 - T).$$

Полная затраченная работа равна

$$W_{\text{total}} = Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

Следовательно,

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{Q_{c,\text{total}}}{W_{\text{total}}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Для проверки рассмотрим бесконечно малое понижение температуры:

$$\lim_{T \rightarrow T_0^-} \text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0}{T_h - T_0},$$

что совпадает с обычным холодильным коэффициентом машины Карно при температуре холодного резервуара T_0 .

Решение проверено по официальному решению.