

IPhO 2026

Problemas teóricos y soluciones · Bucaramanga, Colombia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2026/

Problema 1: Tres problemas (A: Compuerta hidrostática; B: Par electrón-positrón; C: Fotodisociación del ozono)

PREGUNTA T1 [10 pts]. Tres problemas

Esta pregunta consta de tres problemas independientes.

T1-A [3.0 pts]. Compuerta hidrostática

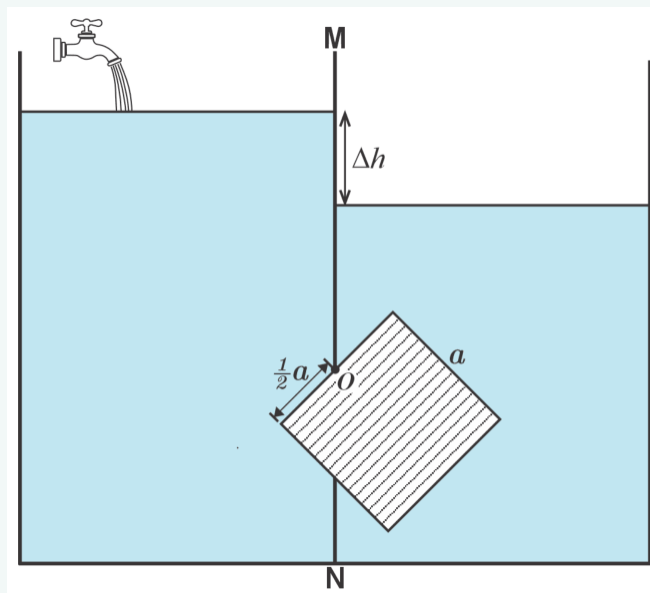


Fig. 1a.

Dos depósitos de agua están separados por una pared vertical MN, como se muestra en la figura 1a. El depósito izquierdo puede recibir agua de una fuente. Debe garantizarse que la máxima diferencia posible entre los niveles del agua sea $\Delta h = 1.41$ m. Para conseguirlo, se practica en MN una abertura de altura $a\sqrt{2}/2$ que se sella con un bloque cúbico macizo de arista a . El bloque tiene una densidad de $3\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad del agua. El bloque está completamente sumergido, está sujeto a la pared en O y puede girar sin rozamiento alrededor del eje perpendicular al plano de la figura que pasa por el punto O .

T1-A1 [3.0 pts]. Calcule el valor de a que garantiza que no se supere la máxima diferencia admisible entre los niveles del agua.

T1-B [3.5 pts]. Par electrón-positrón

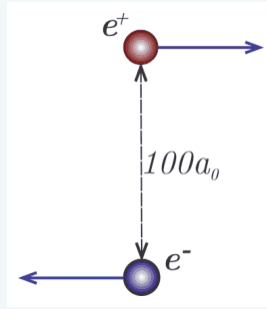


Fig. 1b.

En un cierto instante, un positrón e^+ se encuentra a una distancia de $100a_0$ de un electrón e^- . Las partículas se mueven de tal manera que sus velocidades son antiparalelas en ese instante y perpendiculares a la línea que las une, como se muestra en la figura 1b. Se sabe que cada partícula tiene un momento angular de módulo $\mu\hbar$ respecto al centro de masas del sistema, donde μ es un factor numérico adimensional. Suponga que la única interacción entre e^+ y e^- es electrostática (ambas partículas tienen la misma masa m y cargas de igual módulo, pero de signo opuesto). Suponga, además, que este sistema permanece aislado y que su dinámica es clásica y no relativista.

El radio de Bohr a_0 viene dado por $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$.

T1-B1 [1.0 pts]. Si $\mu = 4$, el sistema está ligado, lo que significa que las partículas se mueven en una órbita cerrada alrededor del centro de masas del sistema. Determine la distancia máxima de separación entre e^+ y e^- en función de a_0 .

T1-B2 [2.5 pts]. Si $\mu = \frac{15}{2}$, el sistema no está ligado, lo que significa que las partículas ya no describen una órbita cerrada alrededor del centro de masas del sistema. Sea $\vec{u}_\infty$ la velocidad de e^+ respecto a e^- cuando la distancia de separación entre ambas tiende a infinito. Calcule el ángulo entre $\vec{u}_\infty$ y la línea de movimiento inicial de e^+ . Exprese su respuesta en grados.

Pista 1: La excentricidad ε de una trayectoria cónica en este caso viene dada por

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{k^2e^4m}}$$

donde E y L son la energía total y el módulo del momento angular total, respectivamente. k es la constante de Coulomb $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Pista 2: La ecuación de una cónica en coordenadas polares es

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

T1-C [3.5 pts]. Fotodisociación del ozono

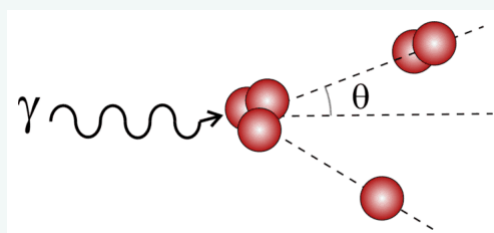


Fig. 1c.

Un fotón de frecuencia angular ω incide sobre una molécula de ozono O_3 en reposo y la disocia (la descompone) en una molécula de oxígeno O_2 y un átomo de oxígeno O , como se muestra en la figura 1c. El fotón se absorbe en este proceso. Sean U_i y U_f las energías del estado fundamental de las moléculas de ozono y de oxígeno, respectivamente. Suponga que este sistema permanece aislado y que su dinámica es clásica (las energías potenciales no contribuyen a la masa y el movimiento de los átomos de oxígeno es no relativista). Utilice la relación $p = E/c$ para el momento lineal del fotón, donde E es su energía.

T1-C1 [2.5 pts]. Si el ángulo que forma el momento lineal de la molécula de O_2 saliente con la dirección del fotón incidente es θ , determine la frecuencia angular mínima $\omega_{\min}$ necesaria para que esta disociación se produzca con dicho ángulo. Expresé su respuesta en función de $\hbar$, c , θ , $\Delta U = U_f - U_i$ y la masa m de un átomo de oxígeno.

T1-C2 [1.0 pts]. Si $\theta = \pi/6$, calcule el valor de $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$. Expresé su respuesta en electronvoltios (eV). Tome $\Delta U = 1.10$ eV y $m = 16.0$ amu.

Pista:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Constantes físicas

Valores de referencia de algunas constantes físicas.

Constante	Notación	Valor	Unidades
Velocidad de la luz en el vacío	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Constante de Planck reducida	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de los gases ideales	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Carga elemental	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de gravitación universal	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Permeabilidad del vacío	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Masa del electrón	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
Masa del protón	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
Unidades de masa atómica	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

Respuestas

- **T1-A1:** La mayor longitud de arista admisible, que hace que la compuerta se abra con la diferencia de niveles especificada, es

$$a = \frac{\Delta h}{2\sqrt{2}} = 0.499 \text{ m.}$$

- **T1-B1:**

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

- **T1-B2:**

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ,$$

dirigido hacia el lado de la línea de movimiento en el que se encontraba inicialmente el electrón.

- **T1-C1:** Para $0 \leq \theta < \pi/2$, como en la figura, sea $F = 1 + 2 \sin^2 \theta$. Entonces

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar F} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right) = \frac{2\Delta U}{\hbar \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right)}.$$

Para $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, sustituya F por 3; el resultado es un ínfimo al que se tiende cuando el momento lineal de la molécula de O_2 saliente tiende a cero.

- **T1-C2:**

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV.}$$

Solución

T1-A1

Calculamos el momento de las fuerzas respecto a O cuando la compuerta está a punto de abrirse. La fuerza de la articulación no produce momento respecto a O , y la fuerza de contacto en el borde inferior de la abertura se anula en este umbral.

Escribimos la altura de la abertura como

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La distancia indicada $a/2$ sitúa O en el punto medio del lado superior izquierdo de la sección transversal cuadrada. Por consiguiente, el centro del cubo se encuentra a la derecha de O , a una distancia horizontal

$$d = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Descomponemos la presión del agua en dos contribuciones. Primero, imaginemos que ambos depósitos tienen el nivel de agua del depósito derecho. Esta presión hidrostática produce un empuje ascendente

$$B = \rho_0 g a^3$$

cuya línea de acción pasa por el centro del cubo. Su peso es

$$W = 3\rho_0 g a^3.$$

Por tanto, el momento conjunto de estas fuerzas, en sentido horario, es

$$\tau_{\text{closing}} = (W - B)d = 2\rho_0 g a^3 \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}}.$$

Elevar el nivel del agua del depósito izquierdo en Δh añade la presión uniforme

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta h$$

sobre la superficie del cubo situada a la izquierda de la pared.

La fuerza resultante y el momento de esta presión adicional equivalen a los que actuarían sobre un rectángulo vertical que cubriera la abertura. Para verlo, cerremos la superficie que sobresale con dicho rectángulo: una presión uniforme sobre la superficie cerrada resultante tiene una fuerza neta y un momento neto nulos.

Así, la presión adicional produce una fuerza horizontal

$$F_{\Delta p} = \Delta p a H$$

que actúa a media altura de la abertura. Su momento de apertura, en sentido antihorario, es

$$\tau_{\text{opening}} = \Delta p a H \frac{H}{2} = \frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4}.$$

En el umbral de apertura,

$$\frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}},$$

de modo que

$$\Delta h = 2\sqrt{2} a.$$

Al igualar este umbral a la diferencia de niveles permitida, obtenemos

$$a = \frac{1.41}{2\sqrt{2}} \text{ m} = 0.498510 \dots \text{ m} \approx 0.499 \text{ m}.$$

Valores menores de a harían que la compuerta se abriera con una diferencia de niveles menor.

T1-B1

Sea r la separación entre las partículas y definamos

$$\kappa = k e^2 = \frac{\hbar^2}{m a_0}.$$

Trabajamos en el sistema de referencia del centro de masas. La masa reducida es $m/2$, y los dos momentos angulares tienen la misma dirección y sentido, por lo que el módulo de su suma es

$$L = 2\mu\hbar.$$

La conservación de la energía mecánica da

$$E = \frac{m}{4}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

Inicialmente, la velocidad relativa es perpendicular a la línea que une las partículas; por tanto, $\dot{r} = 0$ cuando $r_0 = 100a_0$. Por consiguiente,

$$E = \frac{4\mu^2\hbar^2}{m(100a_0)^2} - \frac{\kappa}{100a_0} = \frac{\kappa}{a_0} \left(\frac{\mu^2}{2500} - \frac{1}{100} \right).$$

Para $\mu = 4$,

$$E = -\frac{9}{2500} \frac{\kappa}{a_0} < 0.$$

En cualquiera de los extremos de la separación, $\dot{r} = 0$. Escribiendo $x = r/a_0$, la ecuación de los puntos de retorno es

$$-\frac{9}{2500} = \frac{64}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

De forma equivalente,

$$9x^2 - 2500x + 160000 = (x - 100)(9x - 1600) = 0.$$

Por tanto, los dos puntos de retorno son

$$r_{\min} = 100a_0, \quad r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0.$$

Así, la configuración inicial dada corresponde al punto de separación mínima, y

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

T1-B2

Para $\mu = 15/2$, las mismas expresiones dan

$$L = 15\hbar, \quad E = \frac{\kappa}{80a_0} > 0.$$

Utilizando la fórmula de la excentricidad proporcionada,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{m\kappa^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(15\hbar)^2}{m\kappa^2} \frac{\kappa}{80a_0}}.$$

Puesto que $ma_0\kappa = \hbar^2$,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Elegimos un ángulo polar φ medido desde la dirección del periastro, que aumenta en el sentido del movimiento. Con esta elección, la ecuación de la cónica es

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{(m/2)\kappa} = 450a_0.$$

La separación en el periastro es

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{450a_0}{1 + 7/2} = 100a_0,$$

por lo que la posición inicial está, efectivamente, en el periastro.

En la rama saliente, $r \rightarrow \infty$ cuando

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0,$$

lo que da

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{2}{7}.$$

La rapidez relativa transversal es $L/[(m/2)r]$, que tiende a cero en el infinito. Por tanto, la velocidad relativa final apunta en la dirección radial límite. La velocidad inicial es perpendicular a la dirección del periastro, de modo que el ángulo solicitado es

$$\alpha = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2}.$$

Se deduce que

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{7},$$

y, por tanto,

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ.$$

En la figura, la velocidad relativa saliente apunta por debajo de la dirección horizontal inicial del positrón.

T1-C1

Sean la energía del fotón y el módulo de su momento lineal

$$E_\gamma = \hbar\omega, \quad P = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Tomamos su dirección como eje x . Sea $q\hat{\mathbf{n}}$ el momento lineal de la molécula de oxígeno saliente, donde

$$q \geq 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos \theta.$$

Según la convención sobre las masas indicada en el enunciado, la molécula de oxígeno tiene masa $2m$, y el átomo tiene masa m . La conservación del momento lineal da

$$\mathbf{p}_O = P\hat{\mathbf{x}} - q\hat{\mathbf{n}}.$$

Para la energía mínima del fotón, no se necesita ninguna excitación interna adicional. La conservación de la energía se expresa entonces como

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{q^2}{4m} + \frac{P^2 + q^2 - 2Pq \cos \theta}{2m}.$$

Completando el cuadrado,

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{3}{4m} \left(q - \frac{2P \cos \theta}{3} \right)^2 + \frac{P^2}{6m} (3 - 2 \cos^2 \theta).$$

Para la geometría de emisión hacia delante, $0 \leq \theta < \pi/2$, la energía cinética se minimiza para el momento lineal físicamente permitido

$$q_* = \frac{2P \cos \theta}{3} > 0.$$

Definimos

$$F = 3 - 2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta.$$

Por tanto, la energía cinética final mínima para una energía dada del fotón es

$$K_{\min} = \frac{FP^2}{6m} = \frac{FE_\gamma^2}{6mc^2}.$$

En el umbral de disociación,

$$E_{\gamma, \min} - \Delta U = \frac{FE_{\gamma, \min}^2}{6mc^2}.$$

Al resolver esta ecuación cuadrática y tomar la raíz menor, se obtiene

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar(1 + 2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta)\Delta U}{3mc^2}} \right].$$

La otra raíz corresponde a una energía del orden de mc^2 y queda fuera del régimen no relativista supuesto.

Una forma equivalente, útil cuando $\Delta U \ll mc^2$, es

$$\omega_{\min} = \frac{2\Delta U}{\hbar \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta)\Delta U}{3mc^2}} \right]}.$$

Su desarrollo es

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(1 + 2 \sin^2 \theta)(\Delta U)^2}{6mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

Para completar el análisis, el enunciado no restringe explícitamente el intervalo angular. Si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, el valor q_* que minimiza la energía sin restricciones es no positivo. Al imponer la restricción $q \geq 0$, se obtiene en cambio

$$\inf K = \frac{P^2}{2m}.$$

Por tanto, la fórmula del umbral utiliza $F = 3$ para estos ángulos. Se trata únicamente de un ínfimo para una dirección de salida especificada: cuando $q = 0$, esa dirección no está definida, mientras que valores positivos de q arbitrariamente pequeños permiten energías arbitrariamente próximas al umbral.

T1-C2

Para $\theta = \pi/6$,

$$F = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

En consecuencia,

$$\hbar\omega_{\min} = 2mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{mc^2}} \right).$$

Utilizando la unidad de masa atómica proporcionada,

$$mc^2 = 16.0 (9.3149410372 \times 10^8) \text{ eV} = 1.49039 \times 10^{10} \text{ eV}.$$

El parámetro del desarrollo es

$$x = \frac{\Delta U}{mc^2} \approx 7.38 \times 10^{-11}.$$

Utilizando

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

obtenemos

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

Así,

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(1.10 \text{ eV})^2}{4(1.49039 \times 10^{10} \text{ eV})},$$

lo que da

$$\boxed{\hbar\omega_{\min} - \Delta U = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}}$$

con tres cifras significativas.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: ¿Cocinar con la luz del Sol?

PREGUNTA T2 [10 pts]. ¿Cocinar con la luz del Sol?

La redistribución del flujo luminoso en regiones de alta y baja intensidad debida a la reflexión o la refracción puede dar lugar a la formación de *cáusticas*: curvas formadas por la intersección de rayos de luz infinitesimalmente próximos. Como ejemplo, la figura 2a muestra la cáustica formada por rayos que inciden paraxialmente sobre un espejo semicilíndrico. La figura 2b muestra una fotografía de la cáustica formada por la reflexión de la luz en la parte inferior de una taza de café. El punto central y más brillante de la cáustica se denomina *cúspide*; en este punto, la intensidad luminosa es máxima.

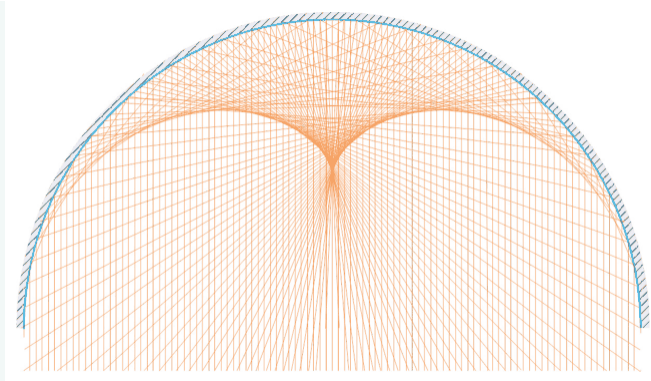


Fig. 2a.



Fig. 2b.

Las cáusticas tienen diversas aplicaciones científicas, desde la óptica de alta precisión y la óptica cuántica hasta la astrofísica. En esta pregunta, estudiará la formación de cáusticas por reflexión de la luz en un espejo semicilíndrico de radio R , como se muestra en la figura 2c. También investigará otros aspectos de este espejo, como su aplicación en *cocinas solares*.

En todo el problema, suponga que los rayos incidentes proceden de una fuente de luz externa lejana y son paralelos al eje óptico del espejo. Por simetría, basta con estudiar la reflexión en un plano. La figura 2d muestra dicho plano, el espejo y el sistema de coordenadas utilizado en todo el problema.

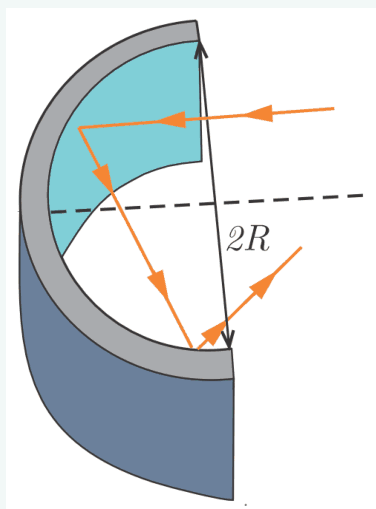


Fig. 2c.

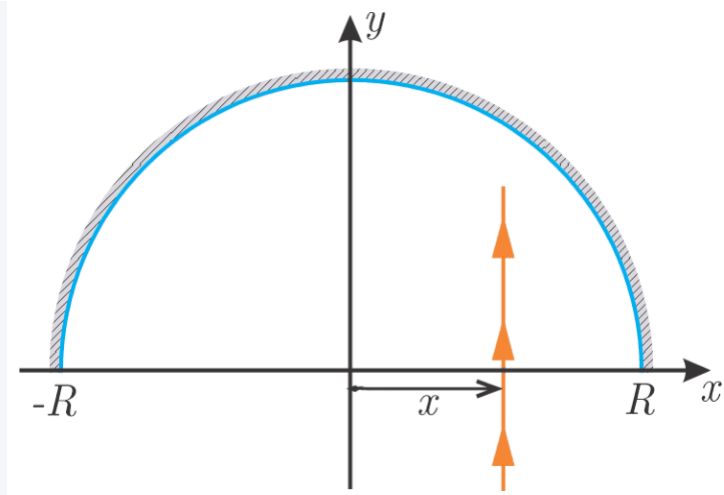


Fig. 2d.

T2-A [1.5 pts]. Reflexiones múltiples

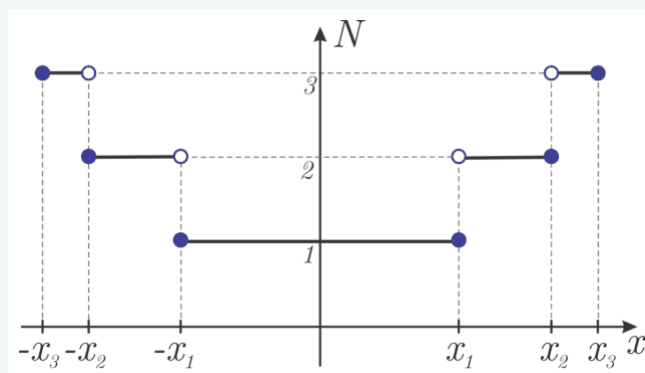


Fig.2e.

La figura 2e muestra la relación entre la coordenada x de un rayo incidente y el número N de reflexiones que experimenta, hasta $N = 3$. Cuando x varía en el intervalo $(-R, R)$, la variable N recorre todos los números naturales mayores o iguales que 1. La distancia máxima al eje óptico que permite que un rayo incidente se refleje en el espejo como máximo N veces se denota por x_N .

T2-A1 [1.5 pts]. Halle la expresión general de x_N en la sucesión infinita $x_1, x_2, x_3, \dots$ que delimita las coordenadas de los rayos con un máximo de N reflexiones. Expresé su respuesta en función de R y N .

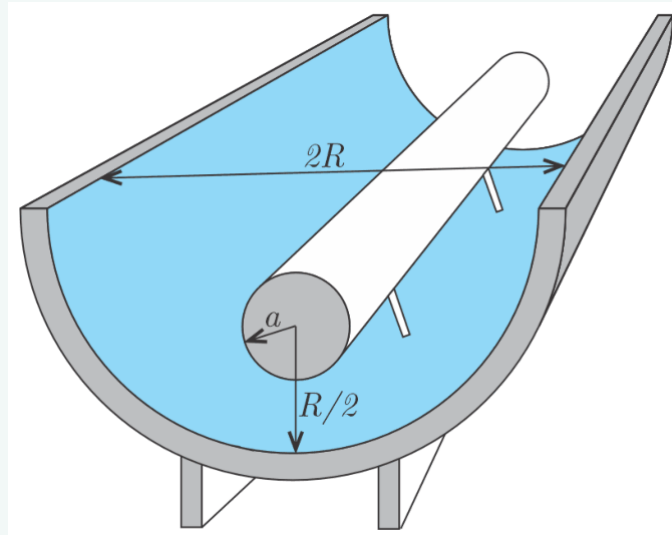
T2-B [4.0 pts]. Cocina solar

Fig.2f.

Considere un sistema formado por un espejo con forma de medio cilindro hueco y un recipiente cilíndrico. El cilindro es totalmente absorbente: cualquier rayo de luz que incida sobre él será absorbido. El radio del espejo es R . El radio del recipiente es a . Los ejes del espejo y del recipiente son paralelos. El centro del recipiente se encuentra a una distancia $R/2$ del espejo en el plano de simetría del sistema, como se muestra en la figura 2f. El espejo aprovecha la radiación solar para calentar los alimentos dentro del recipiente. Suponga que la luz solar tiene una intensidad (potencia por unidad de área) constante y uniforme, y que los rayos de luz son paralelos al eje óptico del espejo. Además, suponga que a es tal que cualquier rayo absorbido por el cilindro se refleja en el espejo como máximo una vez. Sea $\theta_{\max}$ el ángulo máximo de incidencia sobre el espejo (medido respecto a la normal trazada en el punto de incidencia) de los rayos reflejados que inciden sobre el recipiente.

T2-B1 [2.0 pts]. El radio del recipiente es $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$. Escriba α y β en función de R .

Si no encuentra α y β , utilice la expresión dada para el resto del problema.

T2-B2 [1.5 pts]. Sea P_0 la potencia que recibiría el cilindro si no estuviera presente el espejo. Escriba P/P_0 , el cociente entre la potencia realmente recibida P y P_0 , en función de $\theta_{\max}$.

T2-B3 [0.5 pts]. Si $R = 1.0$ m, escriba el valor de a tal que $P = 5P_0$. Dé su respuesta en cm.

T2-C [4.5 pts]. Cáusticas y cúspide

T2-C1 [0.5 pts]. Considere un rayo A que incide sobre el espejo con un ángulo θ , como se muestra en la figura 2g. Tras la reflexión, la ecuación correspondiente a este rayo en el sistema de coordenadas definido en la figura 2g es $y = m_A x + b_A$. Escriba m_A y b_A en función de θ y R

Pista: la forma esperada es $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ y $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$, donde K_i son constantes numéricas.

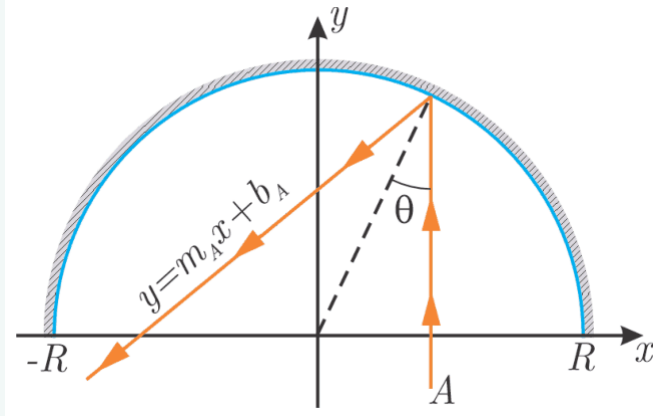


Fig. 2g.

T2-C2 [2.0 pts]. Considere ahora un rayo B , paralelo a A , que incide sobre la superficie con un ángulo $\theta + \Delta\theta$, con $\Delta\theta \ll \theta$. Tras la reflexión, la ecuación correspondiente a este rayo es $y = m_B x + b_B$. Escriba m_B y b_B en función de θ , $\Delta\theta$ y R , aproximando a primer orden en $\Delta\theta$.

T2-C3 [1.0 pts]. Halle las coordenadas del punto de intersección (X_c, Y_c) entre los rayos reflejados de A y B . Escriba su respuesta en función de R y θ .

T2-C4 [1.0 pts]. Para $\theta \ll 1$, se tiene $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$. Escriba v y u en función de R y halle los valores de los enteros p y q (o, de forma equivalente, dé el número racional p/q).

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- T2-A1:

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

- T2-B1:

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

- T2-B2:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

- T2-B3:

$$a = 12 \text{ cm}.$$

- T2-C1:

$$m_A = \cot(2\theta), \quad b_A = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

- **T2-C2:** A primer orden en $\Delta\theta$,

$$m_B \simeq \cot(2\theta) - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2(2\theta)}, \quad b_B \simeq \frac{R}{2\cos\theta} + \frac{R\sin\theta}{2\cos^2\theta}\Delta\theta.$$

- **T2-C3:** En el límite de rayos vecinos $\Delta\theta \rightarrow 0$,

$$X_c = R\sin^3\theta, \quad Y_c = \frac{R}{2}\cos\theta(1 + 2\sin^2\theta).$$

- **T2-C4:**

$$v = \frac{3}{4}R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Solución

T2-A1

Por simetría, consideremos un rayo incidente con $x \geq 0$. Sea ϕ el ángulo polar de su primer punto de incidencia, medido desde el semieje positivo x . Entonces

$$x = R\cos\phi, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Como el rayo incidente se propaga verticalmente, su ángulo de incidencia respecto a la normal es

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

La ley de la reflexión hace que el rayo reflejado forme el mismo ángulo θ con la normal radial. Por tanto, una cuerda que une dos puntos de reflexión sucesivos subtiende el ángulo central

$$\pi - 2\theta = 2\phi.$$

El triángulo formado por esa cuerda y los dos radios es isósceles, por lo que el ángulo de incidencia se mantiene igual en las reflexiones sucesivas.

En consecuencia, en la circunferencia completa correspondiente, los puntos de contacto sucesivos tienen ángulos polares

$$\phi, \quad 3\phi, \quad 5\phi, \quad \dots, \quad (2j-1)\phi.$$

Solo la semicircunferencia superior es un espejo. El rayo sale por el diámetro cuando el siguiente contacto con la circunferencia completa tendría lugar sobre el diámetro o por debajo de él.

Para la coordenada incidente límite x_N , el rayo experimenta N reflexiones y después alcanza el borde opuesto. Así, el contacto que sería el $(N+1)$ -ésimo se encuentra en el ángulo polar π :

$$(2N+1)\phi_N = \pi.$$

De ello se deduce que

$$x_N = R\cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right).$$

En el caso de igualdad, el rayo sale por el borde, de acuerdo con los extremos mostrados en la Fig.2e. Los primeros valores son

$$x_1 = \frac{R}{2}, \quad x_2 \approx 0.8090R, \quad x_3 \approx 0.9010R,$$

y $x_N \rightarrow R$ cuando $N \rightarrow \infty$.

T2-B1

Utilicemos las coordenadas de la Fig.2d. El centro del recipiente es

$$C = \left(0, \frac{R}{2}\right).$$

Un rayo con ángulo de incidencia $\theta \geq 0$ incide sobre el espejo en

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta).$$

El vector normal unitario hacia el exterior en ese punto es

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

y la dirección de propagación incidente es $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1)$.

La forma vectorial de la ley de la reflexión proporciona el vector unitario de la dirección reflejada:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= (0, 1) - 2 \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta). \end{aligned}$$

La distancia perpendicular de C a la recta del rayo reflejado es el módulo del producto vectorial bidimensional de $C - M$ con $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} d(\theta) &= |(C_x - M_x)\hat{u}_y - (C_y - M_y)\hat{u}_x| \\ &= \left| -R \sin \theta + \frac{R}{2} \sin 2\theta \right| \\ &= R \sin \theta (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Para $0 \leq \theta < \pi/2$, esta distancia aumenta con θ , ya que

$$d'(\theta) = R(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \geq 0.$$

El rayo reflejado límite que alcanza el recipiente es tangente a él, por lo que $d(\theta_{\max}) = a$. Por tanto,

$$a = R \sin \theta_{\max} - \frac{R}{2} \sin 2\theta_{\max}.$$

Al comparar con la expresión dada, se obtiene

$$\boxed{\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}}.$$

T2-B2

Sea I la intensidad incidente uniforme y L una longitud iluminada común a lo largo de los ejes de los cilindros. Sin el espejo, el recipiente presenta un área proyectada $2aL$, por lo que

$$P_0 = 2aLI.$$

La distancia máxima al eje óptico de un rayo incidente que acaba siendo absorbido es

$$h_{\max} = R \sin \theta_{\max}.$$

Los rayos con $|x| \leq a$ inciden directamente sobre el recipiente. Los rayos con

$$a < |x| \leq h_{\max}$$

llegan al espejo y son absorbidos después de una reflexión.

Los rayos absorbidos directamente dejan en sombra la parte correspondiente del espejo. Por tanto, las contribuciones directa y reflejada son

$$P_{\text{direct}} = 2aLI, \quad P_{\text{reflected}} = 2(h_{\text{max}} - a)LI.$$

Por la restricción indicada, los rayos que experimentan dos o más reflexiones no aportan potencia absorbida adicional. Para el espejo ideal, la conservación de la potencia da, por tanto,

$$P = 2h_{\text{max}}LI = 2R \sin \theta_{\text{max}}LI.$$

Así,

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R \sin \theta_{\text{max}}}{a}.$$

Sustituyendo el resultado de T2-B1,

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\text{max}}}}.$$

T2-B3

La condición $P = 5P_0$ da

$$1 - \cos \theta_{\text{max}} = \frac{1}{5}, \quad \cos \theta_{\text{max}} = \frac{4}{5}.$$

Por tanto,

$$\sin \theta_{\text{max}} = \frac{3}{5}$$

y

$$a = R \sin \theta_{\text{max}}(1 - \cos \theta_{\text{max}}) = R \frac{3}{5} \frac{1}{5} = \frac{3R}{25}.$$

Con $R = 1.0$ m,

$$\boxed{a = 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}}.$$

T2-C1

Según T2-B1, el rayo reflejado pasa por

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta)$$

y tiene dirección

$$\hat{\mathbf{u}} = (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

Su pendiente es, por tanto,

$$\boxed{m_A = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x} = \cot 2\theta}.$$

Utilizando las coordenadas de M ,

$$\begin{aligned}
b_A &= R \cos \theta - R \sin \theta \cot 2\theta \\
&= R \cos \theta - \frac{R \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \\
&= \boxed{\frac{R}{2 \cos \theta}}.
\end{aligned}$$

En la notación de la pista,

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = \frac{1}{2}, \quad K_4 = 1.$$

El rayo reflejado central, para $\theta = 0$, es la recta vertical $x = 0$. Los resultados que contienen su pendiente se interpretan mediante el límite $\theta \rightarrow 0$.

T2-C2

Para el rayo B , sustituimos θ por $\theta + \Delta\theta$. El desarrollo de Taylor a primer orden da

$$m_B = m_A + \frac{dm_A}{d\theta} \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2).$$

Como

$$\frac{d}{d\theta} \cot 2\theta = -2 \csc^2 2\theta,$$

obtenemos

$$m_B \simeq \cot 2\theta - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

Análogamente,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R}{2 \cos \theta} \right) = \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta},$$

de modo que

$$b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

Estos desarrollos conservan únicamente los términos hasta primer orden en $\Delta\theta$, como se pide.

T2-C3

En la intersección de los dos rayos reflejados,

$$m_A X_c + b_A = m_B X_c + b_B.$$

En consecuencia,

$$(m_B - m_A) X_c + (b_B - b_A) = 0.$$

Utilizando las diferencias a primer orden de T2-C2 y tomando el límite de rayos vecinos,

$$-\frac{2X_c}{\sin^2 2\theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = 0.$$

Por tanto,

$$X_c = \frac{R \sin \theta \sin^2 2\theta}{4 \cos^2 \theta}.$$

Como $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$,

$$\boxed{X_c = R \sin^3 \theta}.$$

Al sustituir en la ecuación del rayo A , se obtiene

$$\begin{aligned} Y_c &= R \sin^3 \theta \cot 2\theta + \frac{R}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{R}{2 \cos \theta} (1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta) \\ &= \boxed{\frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta)}. \end{aligned}$$

Aquí, para simplificar se utiliza

$$1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

Estas ecuaciones paramétricas describen la cáustica. La rama al otro lado del eje óptico se obtiene por simetría: X_c cambia de signo mientras que Y_c permanece inalterada.

T2-C4

Cerca del eje óptico, utilizamos los desarrollos para ángulos pequeños

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4).$$

Las coordenadas de la cáustica quedan entonces

$$X_c = R\theta^3 + O(R\theta^5)$$

y

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) (1 + 2\theta^2 + O(\theta^4)) \\ &= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} \theta^2 + O(R\theta^4). \end{aligned}$$

Para ambas ramas simétricas,

$$\theta^2 \simeq \left(\frac{|X_c|}{R} \right)^{2/3}.$$

Por tanto, al eliminar θ , se obtiene, al orden dominante cerca de la cúspide,

$$\boxed{Y_c \simeq \frac{R}{2} + \frac{3}{4} R^{1/3} |X_c|^{2/3}}.$$

Así,

$$\boxed{v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3}.$$

La cúspide se encuentra en $(0, R/2)$. Sus dos ramas simétricas se abren hacia valores crecientes de y y comparten allí una tangente vertical.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: En busca del cero absoluto

PREGUNTA T3 [10 pts]. En busca del cero absoluto

Un ciclo de refrigeración debe realizarse mediante un sistema cuyas características sean adecuadas para las temperaturas que se pretenden alcanzar. Hace cien años, en 1926, el químico William Giauque y, de manera independiente, el físico Peter Debye propusieron las sales paramagnéticas como sistemas ideales para reducir la temperatura muy por debajo de 1 K. En efecto, a partir de la década siguiente se alcanzaron temperaturas tan bajas como 0.0044 K (Wander de Haas y Gerrit Wiersma, 1935, Laboratorios Criogénicos de Leiden). En esta pregunta se estudia el ciclo de refrigeración de Carnot paramagnético.

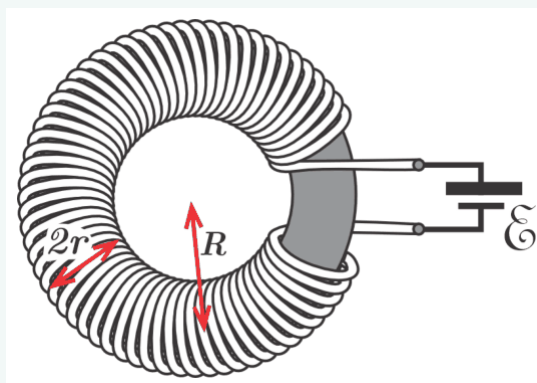


Fig. 3a.

Considere un toro de radio medio R y radio interior r , hecho de un material paramagnético homogéneo e isotrópico, alrededor del cual se enrolla un hilo conductor aislado, cuyos extremos están conectados a una fuente externa de tensión (fem), como se muestra en la figura 3a. La resistencia del hilo es tan baja que pueden despreciarse las pérdidas de energía debidas a su calentamiento. El devanado es denso, con un total de N espiras, y se supone que $r \ll R$, de modo que los campos $\vec{H}$ y $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ tienen módulos aproximadamente constantes en todo el toro. Sean V y A el volumen y el área de la sección transversal del toro. En adelante se utiliza la abreviatura Pm-T para referirse al toro paramagnético.

En los materiales paramagnéticos, $\vec{M}$ es paralela a $\vec{H}$ y se cumple la siguiente relación:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

Convenio de signos para la transferencia de energía: en este problema, el trabajo (W) y el calor (Q) se consideran positivos cuando entran en el sistema y negativos cuando salen de él.

T3-A [1.0 pts]. Trabajo en el Pm-T

Indicación: en los materiales magnéticos, $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, donde I_C es la corriente libre neta que atraviesa el área delimitada por la curva cerrada C .

T3-A1 [0.2 pts]. Sea H el módulo de $\vec{H}$ en el toro. Expresa H en función de N , A , V y la corriente eléctrica instantánea I en el hilo.

T3-A2 [0.6 pts]. Sea dW_{emf} el trabajo que realiza la fuente externa de tensión para modificar el módulo de $\vec{B}$ en dB . Expresa dW_{emf} en función de V , H y dB .

T3-A3 [0.2 pts]. El trabajo total realizado por la fuente de tensión, dW_{emf} , puede dividirse en dos partes: el trabajo que se realizaría para modificar el campo magnético si el toroide tuviera un núcleo vacío, dW_{vac} , y el trabajo realizado sobre el propio material paramagnético, dW . Expresé dW en función de μ_0 , H , V y dM .

T3-B [3.0 pts]. Calor y temperatura en el Pm-T

La siguiente tabla compara dos sistemas termodinámicos: el gas ideal y el Pm-T. Utilice esta información y su respuesta a la pregunta T3-A3 para resolver las siguientes preguntas. Esta información también se utilizará en la parte C. Si no encontró una expresión para dW en la pregunta T3-A3, puede utilizar $dW = \alpha V \mu_0 H dM$, donde α es un número. El volumen V del toro paramagnético es constante, por lo que no hay trabajo debido a la presión. A continuación, T representa la temperatura en todos los casos.

GAS IDEAL	TORO PARAMAGNÉTICO
Funciones de estado: P , V y temperatura T	Funciones de estado: H , M y temperatura T
Constantes: R , γ y número de moles n	Constantes: K , λ y número de moles n
Ecuación de estado: $PV = nRT$	Ecuación de estado: $TMV = nKH$
Capacidad calorífica a V constante: $C_V = nR/(\gamma - 1)$	Capacidad calorífica a M constante: $C_M = n\lambda/T^2$
La energía interna U satisface $dU = C_V dT$ en cualquier proceso	La energía interna U satisface $dU = C_M dT$ en cualquier proceso

K y λ son constantes determinadas por el material del toro. Puede utilizar directamente las ecuaciones proporcionadas en la tabla sin demostrarlas.

T3-B1 [1.5 pts]. Si el módulo de $\vec{H}$ cambia de H_i a H_f a una temperatura constante T , se transfiere una energía Q entre el Pm-T y su entorno. Expresé Q en función de μ_0 , n , V , K , H_i , H_f y T .

T3-B2 [1.5 pts]. Si el módulo de $\vec{H}$ cambia adiabáticamente de H_i a H_f , la temperatura del Pm-T cambia de T_i a T_f . Expresé $\Delta T = T_f - T_i$ en función de μ_0 , V , n , K , λ , H_i , H_f y T_i .

T3-C [6.0 pts]. Refrigerador de Carnot del Pm-T

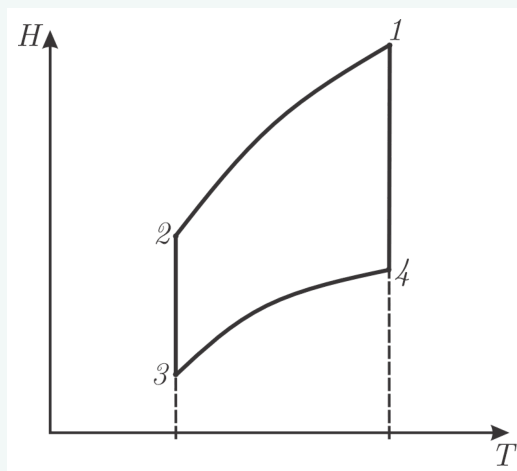


Fig.3b.

El diagrama de H frente a T del ciclo de refrigeración de Carnot $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ realizado por el Pm-T se muestra en la figura 3b. En este ciclo, sean:

- T_h : temperatura del foco caliente
- T_c : temperatura del foco frío
- Q_h : valor absoluto del calor transferido al foco caliente
- Q_c : valor absoluto del calor absorbido del foco frío

T3-C1 [0.2 pts]. Marque T_h y T_c en el eje T del diagrama de H frente a T . Indique también los procesos en los que se producen las transferencias de Q_h y Q_c , respectivamente.

T3-C2 [1.5 pts]. Sean M_1 , M_2 , M_3 y M_4 los módulos de $\vec{M}$ en los vértices de este ciclo. Exprese M_1 en función de M_2 , M_3 y M_4 .

T3-C3 [0.8 pts]. Suponga que, para enfriar 1.00 L de helio líquido inicialmente a 1.00 K, utilizamos un Pm-T de 2.0 moles hecho de *cromato de potasio*. Para este material, $K = 1.87 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$, su densidad es 2730 kg/m^3 y su masa molar es 0.19 kg/mole . El Pm-T realiza un ciclo de refrigeración de Carnot con $H_1 = 411624 \text{ A/m}$, $H_2 = 311306 \text{ A/m}$, $H_3 = 204618 \text{ A/m}$ y $H_4 = 240446 \text{ A/m}$. Tras un ciclo de funcionamiento, calcule la temperatura final del helio líquido. Suponga que, para el helio líquido, tanto el calor específico $c = 100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ como la densidad $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$ permanecen constantes.

T3-C4 [2.0 pts]. Para reducir continuamente la temperatura de un cuerpo de capacidad calorífica constante C_c , se realizan ciclos de Carnot a lo largo del tiempo de tal manera que la potencia P transferida al refrigerador permanece constante. Se supone entonces que la temperatura T_h del foco caliente permanece constante y que, en cada ciclo de funcionamiento, la temperatura T_c del cuerpo enfriado disminuye en dT_c , satisfaciendo la relación $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$. Si en $t = 0$ tenemos $T_c = T_0$, determine el tiempo t durante el cual debe funcionar el refrigerador de Carnot para que el cuerpo enfriado alcance una temperatura $T < T_0$. Exprese su respuesta en función de C_c , T_h , P , T_0 y T .

T3-C5 [1.5 pts]. La eficiencia de un refrigerador se cuantifica mediante su *coeficiente de rendimiento* $\text{COP} = Q_c/W$. Determine el COP global del refrigerador de la pregunta T3-C4 considerando todos los ciclos realizados hasta el instante t . Exprese su respuesta en función de T_0 , T_h y T .

Constantes físicas

Valores de referencia de algunas constantes físicas.

Constante	Notación	Valor	Unidades
Velocidad de la luz en el vacío	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Constante reducida de Planck	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante	Notación	Valor	Unidades
Constante de los gases ideales	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Carga elemental	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de gravitación universal	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Permeabilidad del vacío	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Masa del electrón	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^{-5}$	eV/c^2
Masa del protón	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^{-8}$	eV/c^2
Unidades de masa atómica	amu	$9.3149410372(29) \times 10^{-8}$	eV/c^2

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- T3-A1:

$$H = \frac{NAI}{V}.$$

- T3-A2:

$$dW_{emf} = VH dB.$$

- T3-A3:

$$dW = \mu_0 VH dM, \quad \alpha = 1.$$

- T3-B1:

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

- T3-B2:

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

- T3-C1: La línea vertical izquierda, que pasa por los estados 2, 3, está a T_c ; la línea vertical derecha, que pasa por los estados 1, 4, está a T_h . El calor Q_c se absorbe durante $2 \rightarrow 3$, y el calor Q_h se cede durante $4 \rightarrow 1$.

- T3-C2:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

- **T3-C3:** Utilizando $T_c \simeq 1.00 \text{ K}$ para la etapa fría,

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

Esta estimación supone un enfriamiento pequeño y toma la isoterma fría a la temperatura inicial del helio; solo utiliza la etapa fría $2 \rightarrow 3$ (véase la nota al final de la solución de T3-C3).

- **T3-C4:**

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

- **T3-C5:**

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Solución

Utilizamos en todo momento el convenio de signos indicado:

$$dU = dQ + dW,$$

donde el calor y el trabajo son positivos cuando se suministran al material paramagnético. Los procesos magnéticos se tratan como cuasiestáticos, con la aproximación de campo uniforme $r \ll R$ y pérdidas resistivas despreciables.

T3-A1

Elijamos una circunferencia amperiana de radio R dentro del toro. Enlaza las N espiras, por lo que la corriente libre encerrada es NI . Así,

$$H(2\pi R) = NI.$$

Como el volumen del toro es $V = (2\pi R)A$,

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NAI}{V}.$$

T3-A2

El flujo magnético a través de cada espira es aproximadamente

$$\Phi = AB.$$

La ley de Faraday da una fem inducida $-NA dB/dt$. Si la resistencia es despreciable, la fem aplicada por la fuente la compensa:

$$\mathcal{E} = NA \frac{dB}{dt}.$$

Por tanto, el trabajo eléctrico suministrado en el tiempo dt es

$$dW_{emf} = \mathcal{E} I dt = NAI dB.$$

Utilizando $NAI = VH$, obtenido en A1,

$$dW_{emf} = VH dB.$$

Esta expresión también da el signo correcto cuando la fuente recibe energía durante una disminución del campo.

T3-A3

Como los campos y la magnetización son paralelos,

$$dB = \mu_0 dH + \mu_0 dM.$$

En consecuencia,

$$dW_{emf} = \mu_0 V H dH + \mu_0 V H dM.$$

Para un núcleo vacío, $B = \mu_0 H$, de modo que el trabajo asociado al mismo cambio de H es

$$dW_{vac} = \mu_0 V H dH = d\left(\frac{\mu_0 V H^2}{2}\right).$$

Al restar esta contribución del campo en el vacío, queda el trabajo sobre el material:

$$\boxed{dW = dW_{emf} - dW_{vac} = \mu_0 V H dM}.$$

Por tanto, el coeficiente de la expresión alternativa es $\alpha = 1$.

T3-B1

La relación dada para la energía interna implica que, en un proceso isoterma,

$$dU = \frac{n\lambda}{T^2} dT = 0.$$

La primera ley da entonces

$$dQ = -dW = -\mu_0 V H dM.$$

A T constante, la ecuación de estado proporciona

$$M = \frac{nKH}{VT}, \quad dM = \frac{nK}{VT} dH.$$

Así,

$$Q = -\frac{\mu_0 nK}{T} \int_{H_i}^{H_f} H dH,$$

y, por tanto,

$$\boxed{Q = \frac{\mu_0 nK}{2T} (H_i^2 - H_f^2)}.$$

El volumen se cancela. La desmagnetización isoterma, $H_f < H_i$, absorbe calor; la magnetización isoterma libera calor.

T3-B2

En un proceso adiabático se cumple $dQ = 0$, de modo que

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 V H dM.$$

Ahora varían tanto H como T . Al diferenciar la ecuación de estado se obtiene

$$dM = \frac{nK}{V} \left(\frac{dH}{T} - \frac{H}{T^2} dT \right).$$

Al sustituir en la primera ley se obtiene

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 n K \left(\frac{H}{T} dH - \frac{H^2}{T^2} dT \right).$$

Así,

$$(\lambda + \mu_0 K H^2) dT = \mu_0 K H T dH,$$

o bien

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 K H}{\lambda + \mu_0 K H^2} dH.$$

Integrando entre los estados inicial y final,

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}.$$

Por tanto,

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}},$$

y

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

Para K y capacidad calorífica positivas, una disminución de H reduce T : esto es la desmagnetización adiabática.

Una forma equivalente, que será útil más adelante, es el invariante adiabático

$$\frac{\lambda + \mu_0 K H^2}{T^2} = \text{constante a lo largo de una adiabática}.$$

T3-C1

La coordenada horizontal es la temperatura. Por tanto:

- Marque con T_c la proyección discontinua izquierda, situada debajo de los estados 2 y 3.
- Marque con T_h la proyección discontinua derecha, situada debajo de los estados 1 y 4.

En $2 \rightarrow 3$, el campo disminuye a T_c constante. Según B1, el toro absorbe calor, por lo que se debe colocar Q_c , dirigido hacia el interior del toro, junto a esta etapa vertical descendente.

En $4 \rightarrow 1$, el campo aumenta a T_h constante. El toro libera calor, por lo que se debe colocar Q_h , dirigido hacia el exterior del toro, junto a esta etapa vertical ascendente.

Las etapas restantes son $1 \rightarrow 2$, enfriamiento adiabático, y $3 \rightarrow 4$, calentamiento adiabático.

T3-C2

Sustituimos

$$H = \frac{VTM}{nK}$$

en el invariante adiabático de B2:

$$\frac{\lambda}{T^2} + \frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} M^2 = \text{constante}.$$

Para la adiabática $1 \rightarrow 2$,

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_1^2 - M_2^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Para la adiabática $3 \rightarrow 4$,

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_4^2 - M_3^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Los miembros derechos son idénticos, por lo que

$$M_1^2 - M_2^2 = M_4^2 - M_3^2.$$

Como los M_j son módulos, se debe tomar la raíz positiva:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

T3-C3

Para la estimación de un solo ciclo, tomamos la temperatura de la etapa fría como aproximadamente igual a la temperatura inicial del helio:

$$T_c \simeq 1.00 \text{ K}.$$

El calor absorbido durante $2 \rightarrow 3$ es

$$Q_c = \frac{\mu_0 n K}{2T_c} (H_2^2 - H_3^2).$$

Utilizando los valores proporcionados,

$$Q_c = \frac{(1.25663706127 \times 10^{-6})(2.0)(1.87 \times 10^{-6})}{2(1.00)} (311306^2 - 204618^2) \text{ J},$$

lo que da

$$Q_c = 0.1293459 \dots \text{ J} \simeq 0.13 \text{ J}.$$

La masa y la capacidad calorífica del helio son

$$m_{\text{He}} = \rho V_{\text{He}} = (130)(1.00 \times 10^{-3}) = 0.130 \text{ kg},$$

$$C_{\text{He}} = m_{\text{He}} c = (0.130)(100) = 13.0 \text{ J K}^{-1}.$$

La conservación de la energía para el helio da

$$C_{\text{He}}(T_{\text{He},f} - 1.00 \text{ K}) = -Q_c.$$

Así,

$$T_{\text{He},f} = 1.00 \text{ K} - \frac{0.1293459 \dots \text{ J}}{13.0 \text{ J K}^{-1}} = 0.9900503 \dots \text{ K},$$

o bien

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

La disminución de temperatura estimada es de aproximadamente un 1%, lo que respalda la aproximación de variación pequeña para esta estimación numérica. El volumen del material se cancela en Q_c , por lo que su densidad y su masa molar no son necesarias aquí. Para un ciclo exacto, los cuatro campos dados no son del todo coherentes: con $M = nKH/(VT)$ en las dos isothermas, la relación de T3-C2 exige $T_h/T_c = \sqrt{(H_1^2 - H_4^2)/(H_2^2 - H_3^2)} \approx 1.42$, y entonces las adiabáticas $1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4$ solo pueden cumplirse con $\lambda \approx -0.062 \text{ J K mol}^{-1}$, es decir, con una capacidad calorífica negativa $C_M = n\lambda/T^2$. La estimación anterior solo utiliza la etapa fría y no depende de λ .

T3-C4

Sea $dT_c < 0$ la variación real de temperatura del cuerpo enfriado. El calor positivo extraído de él es

$$dQ_c = -C_c dT_c.$$

La relación de Carnot especificada da

$$dQ_h = \frac{T_h}{T_c} dQ_c.$$

Como el refrigerador vuelve a su estado original después de cada ciclo, su variación neta de energía interna es nula. Por tanto, el trabajo necesario es

$$dW = dQ_h - dQ_c = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c.$$

Con una potencia de entrada constante,

$$P dt = dW = -C_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Integrando desde $T_c = T_0$ en $t = 0$ hasta $T_c = T$,

$$Pt = -C_c \int_{T_0}^T \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Así,

$$Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) + T - T_0 \right],$$

y

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

Para $0 < T < T_0 < T_h$, este tiempo es positivo. Además,

$$T \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow \infty.$$

Dentro del modelo planteado, alcanzar el cero absoluto requiere un tiempo de funcionamiento infinito.

T3-C5

El calor total extraído del cuerpo enfriado es

$$Q_{c,\text{total}} = C_c(T_0 - T).$$

El trabajo total suministrado es

$$W_{\text{total}} = Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{Q_{c,\text{total}}}{W_{\text{total}}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}}.$$

Como comprobación, para una disminución infinitesimal de temperatura,

$$\lim_{T \rightarrow T_0^-} \text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0}{T_h - T_0},$$

que es el COP habitual de un refrigerador de Carnot con una temperatura del foco frío T_0 .

La solución se comprobó con la solución oficial.