

IPhO 2026

Theorieaufgaben und Lösungen · Bucaramanga, Kolumbien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2026/

Aufgabe 1: Drei Probleme (A: Hydrostatische Verschlussklappe; B: Elektron-Positron-Paar; C: Photodissoziation von Ozon)

AUFGABE T1 [10 Punkte]. Drei Probleme

Diese Aufgabe besteht aus drei unabhängigen Problemen.

T1-A [3.0 Punkte]. Hydrostatische Verschlussklappe

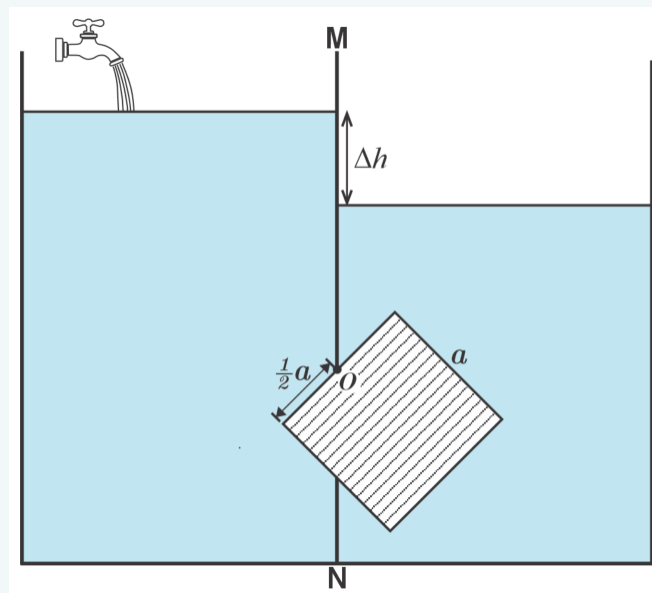


Abb. 1a.

Zwei Wasserreservoirs sind durch eine senkrechte Wand MN voneinander getrennt, wie in Abbildung 1a gezeigt. Dem linken Reservoir kann Wasser aus einer Quelle zufließen. Es muss sichergestellt werden, dass der größtmögliche Unterschied zwischen den Wasserständen $\Delta h = 1.41 \text{ m}$ beträgt. Dazu wird in MN ein Schlitz mit der vertikalen Ausdehnung $a\sqrt{2}/2$ ausgeschnitten und mit einem massiven würfelförmigen Block der Kantenlänge a verschlossen. Der Block hat die Dichte $3\rho_0$, wobei ρ_0 die Dichte von Wasser ist. Der Block ist vollständig eingetaucht, bei O an der Wand befestigt und kann sich reibungsfrei um die Achse drehen, die senkrecht zur Zeichenebene steht und durch den Punkt O verläuft.

T1-A1 [3.0 Punkte]. Berechnen Sie den Wert von a , der sicherstellt, dass der maximal zulässige Unterschied zwischen den Wasserständen nicht überschritten wird.

T1-B [3.5 Punkte]. Elektron-Positron-Paar

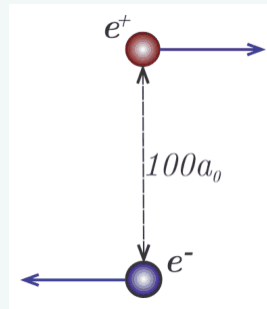


Abb. 1b.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich ein Positron e^+ im Abstand $100a_0$ von einem Elektron e^- . Die Teilchen bewegen sich so, dass ihre Geschwindigkeiten zu diesem Zeitpunkt antiparallel zueinander und senkrecht zu ihrer Verbindungslinie sind, wie in Abbildung 1b gezeigt. Es ist bekannt, dass jedes Teilchen bezüglich des Schwerpunkts des Systems einen Drehimpuls vom Betrag $\mu\hbar$ besitzt, wobei μ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Nehmen Sie an, dass die einzige Wechselwirkung zwischen e^+ und e^- elektrostatischer Natur ist (beide Teilchen haben dieselbe Masse m und betragsmäßig gleiche Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen). Nehmen Sie außerdem an, dass dieses System isoliert bleibt und seine Dynamik klassisch und nichtrelativistisch ist.

Der Bohr-Radius a_0 ist gegeben durch $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$.

T1-B1 [1.0 Punkte]. Für $\mu = 4$ ist das System gebunden, das heißt, die Teilchen bewegen sich auf einer geschlossenen Bahn um den Schwerpunkt des Systems. Bestimmen Sie den maximalen Abstand zwischen e^+ und e^- in Abhängigkeit von a_0 .

T1-B2 [2.5 Punkte]. Für $\mu = \frac{15}{2}$ ist das System ungebunden, das heißt, die Teilchen bewegen sich nicht mehr auf einer geschlossenen Bahn um den Schwerpunkt des Systems. Es sei $\vec{u}_\infty$ die Geschwindigkeit von e^+ relativ zu e^- , wenn ihr Abstand gegen unendlich geht. Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{u}_\infty$ und der anfänglichen Bewegungsgeraden von e^+ . Geben Sie Ihre Antwort in Grad an.

Hinweis 1: Die Exzentrizität ε einer Kegelschnittbahn ist im vorliegenden Fall gegeben durch

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2 E}{k^2 e^4 m}}$$

wobei E die Gesamtenergie und L den Betrag des Gesamtdrehimpulses bezeichnet. k ist die Coulomb-Konstante $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Hinweis 2: Die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten lautet

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

T1-C [3.5 Punkte]. Photodissoziation von Ozon

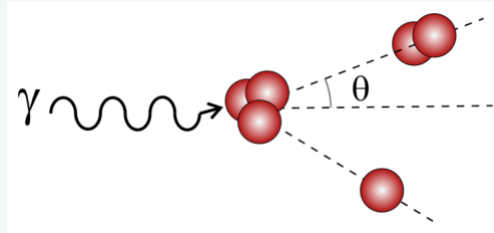


Abb. 1c.

Ein Photon mit der Kreisfrequenz ω trifft auf ein ruhendes Ozonmolekül O_3 und dissoziiert es (spaltet es auf) in ein Sauerstoffmolekül O_2 und ein Sauerstoffatom O , wie in Abbildung 1c gezeigt. Das Photon wird dabei absorbiert. Es seien U_i und U_f die Grundzustandsenergien des Ozonmoleküls beziehungsweise des Sauerstoffmoleküls. Nehmen Sie an, dass dieses System isoliert bleibt und seine Dynamik klassisch ist (potenzielle Energien tragen nicht zur Masse bei, und die Bewegung der Sauerstoffatome ist nichtrelativistisch). Verwenden Sie für den Impuls des Photons die Beziehung $p = E/c$, wobei E seine Energie ist.

T1-C1 [2.5 Punkte]. Wenn der Impuls des austretenden O_2 mit der Richtung des einfallenden Photons den Winkel θ bildet, bestimmen Sie die minimale Kreisfrequenz $\omega_{\min}$, die erforderlich ist, damit diese Dissoziation unter diesem Winkel stattfinden kann. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\hbar$, c , θ , $\Delta U = U_f - U_i$ und der Masse m eines Sauerstoffatoms an.

T1-C2 [1.0 Punkte]. Berechnen Sie für $\theta = \pi/6$ den Wert von $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$. Geben Sie Ihre Antwort in Elektronenvolt (eV) an. Verwenden Sie $\Delta U = 1.10 \text{ eV}$ und $m = 16.0 \text{ amu}$.

Hinweis:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Physikalische Konstanten

Referenzwerte ausgewählter physikalischer Konstanten.

Konstante	Symbol	Wert	Einheiten
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann-Konstante	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
Universelle Gaskonstante	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Universelle Gravitationskonstante	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

Konstante	Symbol	Wert	Einheiten
Masse des Elektrons	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^{-31}$	kg
Masse des Protons	m_p	$1.672621923(29) \times 10^{-27}$	kg
Atomare Masseneinheit	amu	$1.660539068(20) \times 10^{-27}$	kg

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **T1-A1:** Die größte zulässige Kantenlänge, bei der sich die Klappe beim angegebenen Wasserstandsunterschied öffnet, beträgt

$$a = \frac{\Delta h}{2\sqrt{2}} = 0.499 \text{ m.}$$

- **T1-B1:**

$$r_{\max} = \frac{1600}{9} a_0 \approx 178 a_0.$$

- **T1-B2:**

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ,$$

gerichtet zu der Seite der Bewegungsgeraden, auf der sich das Elektron anfangs befindet.

- **T1-C1:** Für $0 \leq \theta < \pi/2$, wie in der Abbildung, sei $F = 1 + 2 \sin^2 \theta$. Dann gilt

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar F} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right) = \frac{2\Delta U}{\hbar \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right)}.$$

Für $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ist F durch 3 zu ersetzen; das Ergebnis ist ein Infimum, dem man sich nähert, wenn der Impuls des austretenden O_2 gegen null geht.

- **T1-C2:**

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV.}$$

Lösung

T1-A1

Wir berechnen das Drehmoment um O beim Einsetzen des Öffnens. Die Lagerkraft erzeugt kein Drehmoment um O , und die Kontaktkraft am unteren Rand des Schlitzes verschwindet an dieser Schwelle.

Wir schreiben die Schlitzhöhe als

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Die eingezeichnete Strecke $a/2$ legt O auf den Mittelpunkt der linken oberen Seite des quadratischen Querschnitts fest. Folglich liegt der Mittelpunkt des Würfels rechts von O im horizontalen Abstand

$$d = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Wir zerlegen den Wasserdruck in zwei Beiträge. Zunächst stellen wir uns vor, dass beide Reservoirs den Wasserstand des rechten Reservoirs haben. Dieser hydrostatische Druck ergibt eine nach oben gerichtete Auftriebskraft

$$B = \rho_0 g a^3$$

mit Wirkungslinie durch den Mittelpunkt des Würfels. Seine Gewichtskraft beträgt

$$W = 3\rho_0 g a^3.$$

Das gemeinsame Drehmoment dieser beiden Kräfte im Uhrzeigersinn ist daher

$$\tau_{\text{closing}} = (W - B)d = 2\rho_0 g a^3 \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}}.$$

Eine Erhöhung des linken Wasserstands um Δh fügt auf der Oberfläche des Würfels links von der Wand den gleichförmigen Druck

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta h$$

hinzu.

Die resultierende Kraft und das Drehmoment dieses zusätzlichen Drucks sind gleich denen, die er auf ein senkrechtes, den Schlitz überspannendes Rechteck ausüben würde. Um dies einzusehen, schließen wir die hervorstehende Oberfläche mit diesem Rechteck: Ein gleichförmiger Druck auf der so entstehenden geschlossenen Oberfläche ergibt weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Drehmoment.

Der zusätzliche Druck erzeugt somit eine horizontale Kraft

$$F_{\Delta p} = \Delta p a H$$

die auf halber Höhe des Schlitzes angreift. Ihr gegen den Uhrzeigersinn wirkendes, öffnendes Drehmoment beträgt

$$\tau_{\text{opening}} = \Delta p a H \frac{H}{2} = \frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4}.$$

An der Öffnungsschwelle gilt

$$\frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}},$$

also

$$\Delta h = 2\sqrt{2} a.$$

Setzen wir diese Schwelle gleich dem zulässigen Wasserstandsunterschied, erhalten wir

$$a = \frac{1.41}{2\sqrt{2}} \text{ m} = 0.498510 \dots \text{ m} \approx 0.499 \text{ m}.$$

Bei kleineren Werten von a würde sich die Klappe bereits bei einem kleineren Wasserstandsunterschied öffnen.

T1-B1

Es sei r der Abstand der Teilchen, und wir definieren

$$\kappa = ke^2 = \frac{\hbar^2}{ma_0}.$$

Wir arbeiten im Schwerpunktsystem. Die reduzierte Masse beträgt $m/2$, und die beiden Drehimpulse haben dieselbe Richtung, sodass für den Betrag ihres Gesamtdrehimpulses gilt

$$L = 2\mu\hbar.$$

Aus der Erhaltung der mechanischen Energie folgt

$$E = \frac{m}{4}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

Anfangs steht die Relativgeschwindigkeit senkrecht zur Verbindungslinie, daher gilt $\dot{r} = 0$ bei $r_0 = 100a_0$. Somit ist

$$E = \frac{4\mu^2\hbar^2}{m(100a_0)^2} - \frac{\kappa}{100a_0} = \frac{\kappa}{a_0} \left(\frac{\mu^2}{2500} - \frac{1}{100} \right).$$

Für $\mu = 4$ gilt

$$E = -\frac{9}{2500} \frac{\kappa}{a_0} < 0.$$

Bei beiden Extremwerten des Abstands gilt $\dot{r} = 0$. Mit $x = r/a_0$ lautet die Gleichung für die Umkehrpunkte

$$-\frac{9}{2500} = \frac{64}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Äquivalent dazu ist

$$9x^2 - 2500x + 160000 = (x - 100)(9x - 1600) = 0.$$

Die beiden Umkehrpunkte sind daher

$$r_{\min} = 100a_0, \quad r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0.$$

Die gegebene Anfangskonfiguration entspricht somit dem Punkt des kleinsten Abstands, und es gilt

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

T1-B2

Für $\mu = 15/2$ ergeben dieselben Ausdrücke

$$L = 15\hbar, \quad E = \frac{\kappa}{80a_0} > 0.$$

Mit der angegebenen Formel für die Exzentrizität erhalten wir

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{m\kappa^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(15\hbar)^2}{m\kappa^2} \frac{\kappa}{80a_0}}.$$

Wegen $ma_0\kappa = \hbar^2$ gilt

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Wir wählen einen Polarwinkel φ , der von der Richtung zum Perizentrum aus gemessen wird und in Bewegungsrichtung zunimmt. Bei dieser Wahl lautet die Kegelschnittgleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{(m/2)\kappa} = 450a_0.$$

Der Abstand im Perizentrum beträgt

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{450a_0}{1 + 7/2} = 100a_0,$$

die Anfangsposition liegt also tatsächlich im Perizentrum.

Auf dem auslaufenden Ast gilt $r \rightarrow \infty$, wenn

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0,$$

woraus folgt

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{2}{7}.$$

Die transversale Relativgeschwindigkeit beträgt $L/[(m/2)r]$ und geht im Unendlichen gegen null. Daher zeigt die endgültige Relativgeschwindigkeit in die Grenzrichtung des Radiusvektors. Die Anfangsgeschwindigkeit steht senkrecht zur Richtung zum Perizentrum, sodass für den gesuchten Winkel gilt

$$\alpha = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2}.$$

Daraus folgt

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{7},$$

und somit

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ.$$

In der Abbildung zeigt die auslaufende Relativgeschwindigkeit unterhalb der anfänglichen horizontalen Bewegungsrichtung des Positrons.

T1-C1

Die Energie und der Impulsbetrag des Photons seien

$$E_\gamma = \hbar\omega, \quad P = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Wir wählen seine Richtung als x -Achse. Das austretende Sauerstoffmolekül habe den Impuls $q\hat{\mathbf{n}}$, wobei

$$q \geq 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos \theta.$$

Unter der angegebenen Annahme über die Massen hat das Sauerstoffmolekül die Masse $2m$ und das Atom die Masse m . Aus der Impulserhaltung folgt

$$\mathbf{p}_0 = P\hat{\mathbf{x}} - q\hat{\mathbf{n}}.$$

Bei der minimalen Photonenenergie ist keine zusätzliche innere Anregung erforderlich. Die Energieerhaltung lautet dann

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{q^2}{4m} + \frac{P^2 + q^2 - 2Pq \cos \theta}{2m}.$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{3}{4m} \left(q - \frac{2P \cos \theta}{3} \right)^2 + \frac{P^2}{6m} (3 - 2 \cos^2 \theta).$$

Bei Emission in Vorwärtsrichtung, $0 \leq \theta < \pi/2$, wird die kinetische Energie bei folgendem physikalisch zulässigen Impuls minimiert:

$$q_* = \frac{2P \cos \theta}{3} > 0.$$

Wir definieren

$$F = 3 - 2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta.$$

Die minimale kinetische Endenergie bei gegebener Photonenenergie beträgt daher

$$K_{\min} = \frac{FP^2}{6m} = \frac{FE_\gamma^2}{6mc^2}.$$

An der Dissoziationsschwelle gilt

$$E_{\gamma, \min} - \Delta U = \frac{FE_{\gamma, \min}^2}{6mc^2}.$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung und wählen die kleinere Lösung, so erhalten wir

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar(1 + 2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right].$$

Die andere Lösung hat eine Energie der Größenordnung mc^2 und liegt außerhalb des angenommenen nichtrelativistischen Bereichs.

Eine äquivalente Form, die für $\Delta U \ll mc^2$ nützlich ist, lautet

$$\omega_{\min} = \frac{2\Delta U}{\hbar \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right]}.$$

Ihre Reihenentwicklung lautet

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(1 + 2 \sin^2 \theta)(\Delta U)^2}{6mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2 c^4}\right).$$

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass die Aufgabenstellung den Winkelbereich nicht ausdrücklich einschränkt. Für $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ist die ohne Nebenbedingung minimierende Größe q_* nichtpositiv. Unter der Einschränkung $q \geq 0$ ergibt sich stattdessen

$$\inf K = \frac{P^2}{2m}.$$

Für diesen Winkel ist in der Schwellenformel also $F = 3$ zu verwenden. Bei einer vorgegebenen Austrittsrichtung handelt es sich lediglich um ein Infimum: Für $q = 0$ ist diese Richtung nicht definiert, während beliebig kleine positive Werte von q Energien beliebig nahe an der Schwelle ermöglichen.

T1-C2

Für $\theta = \pi/6$ gilt

$$F = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

Folglich ist

$$\hbar\omega_{\min} = 2mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{mc^2}} \right).$$

Mit dem angegebenen Wert der atomaren Masseneinheit erhalten wir

$$mc^2 = 16.0 (9.3149410372 \times 10^8) \text{ eV} = 1.49039 \times 10^{10} \text{ eV}.$$

Der Entwicklungsparameter ist

$$x = \frac{\Delta U}{mc^2} \approx 7.38 \times 10^{-11}.$$

Mit

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

erhalten wir

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

Somit gilt

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(1.10 \text{ eV})^2}{4(1.49039 \times 10^{10} \text{ eV})},$$

woraus sich

$$\boxed{\hbar\omega_{\min} - \Delta U = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}}$$

auf drei signifikante Stellen ergibt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Kochen mit Sonnenlicht?

AUFGABE T2 [10 Punkte]. Kochen mit Sonnenlicht?

Die Umverteilung des Lichtstroms in Bereiche hoher und niedriger Intensität durch Reflexion oder Brechung kann zur Entstehung von *Kaustiken* führen: Kurven, die durch die Schnittpunkte infinitesimal benachbarter Lichtstrahlen gebildet werden. Als Beispiel zeigt Abbildung 2a die Kaustik, die durch paraxial auf einen halbzylindrischen Spiegel einfallende Strahlen entsteht.

Abbildung 2b zeigt eine Fotografie der Kaustik, die durch die Reflexion von Licht am unteren Teil einer Kaffeetasse entsteht. Der hellste, in der Mitte liegende Punkt der Kaustik wird als *Spitze* bezeichnet; an diesem Punkt ist die Lichtintensität maximal.

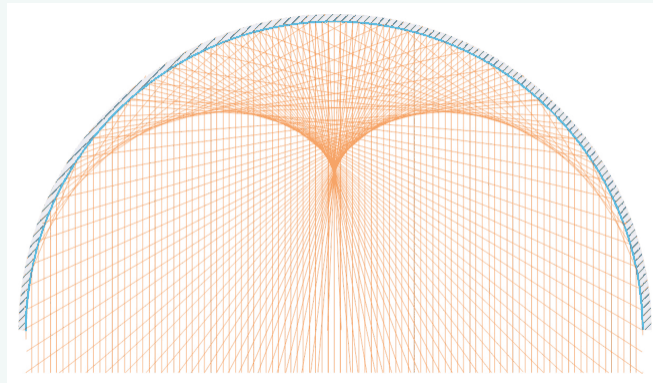


Abb. 2a.



Abb. 2b.

Kaustiken haben vielfältige Anwendungen in der Wissenschaft, von der Präzisionsoptik und Quantenoptik bis hin zur Astrophysik. In dieser Aufgabe untersuchen Sie die Entstehung einer Kaustik durch Lichtreflexion an einem halbzylindrischen Spiegel mit dem Radius R , wie in Abbildung 2c gezeigt. Außerdem untersuchen Sie weitere Aspekte dieses Spiegels, etwa seine Anwendung in *Solarkochern*.

Nehmen Sie in der gesamten Aufgabe an, dass die einfallenden Strahlen von einer weit entfernten äußeren Lichtquelle stammen und parallel zur optischen Achse des Spiegels verlaufen. Aufgrund der Symmetrie genügt es, die Reflexion in einer Ebene zu untersuchen. Abbildung 2d zeigt eine solche Ebene, den Spiegel und das in der gesamten Aufgabe verwendete Koordinatensystem.

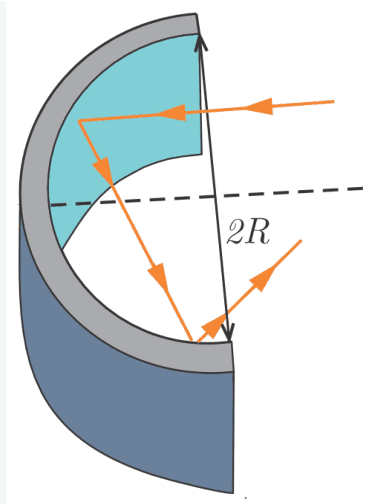


Abb. 2c.

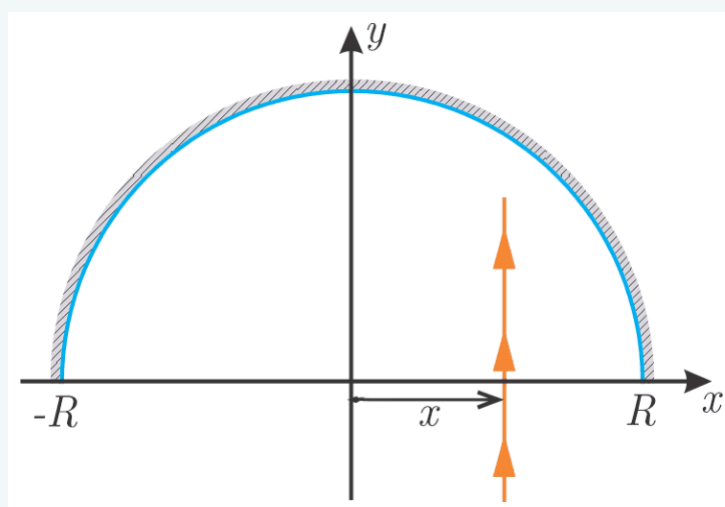


Abb. 2d.

T2-A [1.5 Punkte]. Mehrfachreflexionen

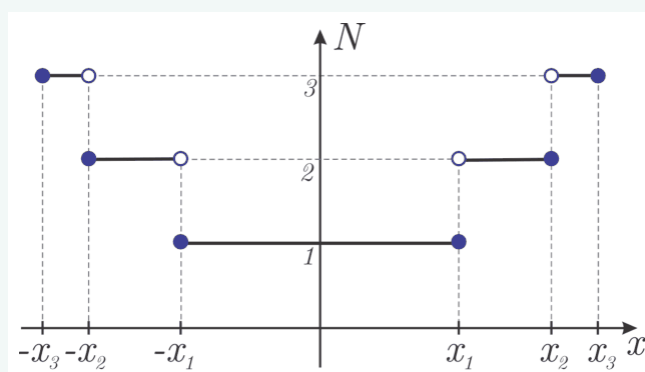


Abb.2e.

Abbildung 2e zeigt den Zusammenhang zwischen der x -Koordinate eines einfallenden Strahls und der Anzahl N seiner Reflexionen bis zu $N = 3$. Wenn x das Intervall $(-R, R)$ durchläuft, nimmt die Variable N alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 1 an. Der maximale Abstand von der optischen Achse, bei dem ein einfallender Strahl höchstens N -mal vom Spiegel reflektiert wird, wird mit x_N bezeichnet.

T2-A1 [1.5 Punkte]. Bestimmen Sie den allgemeinen Ausdruck für x_N in der unendlichen Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$, der die Koordinaten der Strahlen mit höchstens N Reflexionen begrenzt. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von R und N an.

T2-B [4.0 Punkte]. Solarkocher

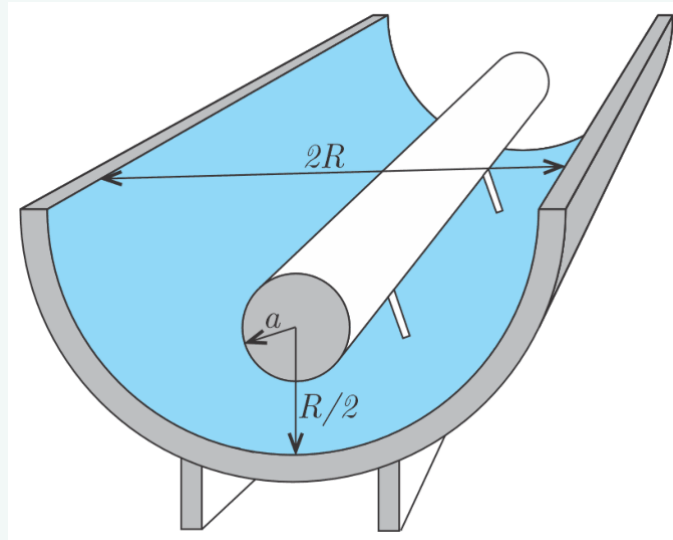


Abb.2f.

Betrachten Sie ein System aus einem Spiegel in Form eines halben Hohlzylinders und einem zylindrischen Behälter. Der Zylinder ist vollständig absorbierend: Jeder Lichtstrahl, der auf ihn trifft, wird absorbiert. Der Spiegelradius beträgt R . Der Behälterradius beträgt a . Die Achsen des Spiegels und des Behälters sind parallel. Der Mittelpunkt des Behälters liegt in der Symmetrieebene des Systems im Abstand $R/2$ vom Spiegel, wie in Abbildung 2f gezeigt. Der Spiegel nutzt die Sonnenstrahlung, um Lebensmittel im Behälter zu erwärmen. Nehmen Sie an, dass das Sonnenlicht eine zeitlich konstante und räumlich gleichmäßige Intensität (Leistung pro Flächeneinheit) hat und dass die Lichtstrahlen parallel zur optischen Achse des Spiegels verlaufen. Nehmen Sie ferner an, dass a so gewählt ist, dass jeder vom Zylinder absorbierte Strahl höchstens einmal am Spiegel reflektiert wird. Es sei $\theta_{\max}$ der größte Einfallswinkel am Spiegel (gemessen bezüglich der Normalen im Einfallspunkt) unter allen reflektierten Strahlen, die den Behälter treffen.

T2-B1 [2.0 Punkte]. Der Behälterradius ist $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$. Geben Sie α und β in Abhängigkeit von R an.

Falls Sie α und β nicht bestimmen können, verwenden Sie für den Rest der Aufgabe den angegebenen Ausdruck.

T2-B2 [1.5 Punkte]. Es sei P_0 die Leistung, die der Zylinder ohne den Spiegel aufnehmen würde. Geben Sie P/P_0 , das Verhältnis der tatsächlich aufgenommenen Leistung P zu P_0 , in Abhängigkeit von $\theta_{\max}$ an.

T2-B3 [0.5 Punkte]. Geben Sie für $R = 1.0$ m den Wert von a an, für den $P = 5P_0$ gilt. Geben Sie Ihre Antwort in cm an.

T2-C [4.5 Punkte]. Kaustiken und Spitze

T2-C1 [0.5 Punkte]. Betrachten Sie einen Strahl A , der unter einem Winkel θ auf den Spiegel trifft, wie in Abbildung 2g gezeigt. Nach der Reflexion lautet die Gleichung dieses Strahls in dem in Abbildung 2g definierten Koordinatensystem $y = m_A x + b_A$. Geben Sie m_A und b_A in Abhängigkeit von θ und R an.

Hinweis: Die erwartete Form lautet $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ und $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$, wobei K_i numerische Konstanten sind.

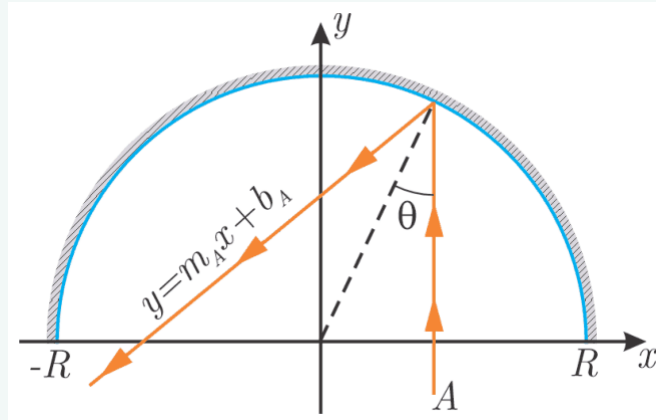


Abb. 2g.

T2-C2 [2.0 Punkte]. Betrachten Sie nun einen zu A parallelen Strahl B , der unter einem Winkel $\theta + \Delta\theta$ auf die Oberfläche trifft, wobei $\Delta\theta \ll \theta$ gilt. Nach der Reflexion lautet die Gleichung dieses Strahls $y = m_B x + b_B$. Geben Sie m_B und b_B in Abhängigkeit von θ , $\Delta\theta$ und R in einer Näherung erster Ordnung in $\Delta\theta$ an.

T2-C3 [1.0 Punkte]. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts (X_c, Y_c) der reflektierten Strahlen von A und B . Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von R und θ an.

T2-C4 [1.0 Punkte]. Für $\theta \ll 1$ gilt $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$. Geben Sie v und u in Abhängigkeit von R an und bestimmen Sie die Werte der ganzen Zahlen p und q (oder geben Sie gleichwertig die rationale Zahl p/q an).

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- T2-A1:

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

- T2-B1:

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

- T2-B2:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

- T2-B3:

$$a = 12 \text{ cm}.$$

- T2-C1:

$$m_A = \cot(2\theta), \quad b_A = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

- T2-C2: In erster Ordnung in $\Delta\theta$,

$$m_B \simeq \cot(2\theta) - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2(2\theta)}, \quad b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

- T2-C3: Im Grenzfall benachbarter Strahlen $\Delta\theta \rightarrow 0$,

$$X_c = R \sin^3 \theta, \quad Y_c = \frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

- T2-C4:

$$v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Lösung

T2-A1

Aufgrund der Symmetrie betrachten wir einen einfallenden Strahl mit $x \geq 0$. Es sei ϕ der von der positiven x -Achse aus gemessene Polarwinkel seines ersten Einfallspunkts. Dann gilt

$$x = R \cos \phi, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Da der einfallende Strahl vertikal verläuft, beträgt sein Einfallswinkel bezüglich der Normalen

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Nach dem Reflexionsgesetz bildet der reflektierte Strahl mit der radialen Normalen denselben Winkel θ . Eine Sehne, die zwei aufeinanderfolgende Reflexionspunkte verbindet, überspannt daher den Mittelpunktswinkel

$$\pi - 2\theta = 2\phi.$$

Das von dieser Sehne und den beiden Radien gebildete Dreieck ist gleichschenkelig, sodass der Einfallswinkel bei aufeinanderfolgenden Reflexionen gleich bleibt.

Folglich haben auf dem zugehörigen Vollkreis aufeinanderfolgende Auftreffpunkte die Polarwinkel

$$\phi, \quad 3\phi, \quad 5\phi, \quad \dots, \quad (2j-1)\phi.$$

Nur der obere Halbkreis ist ein Spiegel. Der Strahl tritt durch den Durchmesser aus, wenn der nächste Auftreffpunkt auf dem Vollkreis auf oder unter diesem Durchmesser liegen würde.

Bei der Grenzkoordinate x_N des einfallenden Strahls wird dieser N -mal reflektiert und erreicht anschließend den gegenüberliegenden Rand. Der hypothetische $(N + 1)$ -te Auftreffpunkt liegt somit beim Polarwinkel π :

$$(2N + 1)\phi_N = \pi.$$

Daraus folgt

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N + 1}\right).$$

Im Gleichheitsfall tritt der Strahl am Rand aus, in Übereinstimmung mit den in Abb.2e gezeigten Endpunkten. Die ersten Werte sind

$$x_1 = \frac{R}{2}, \quad x_2 \approx 0.8090R, \quad x_3 \approx 0.9010R,$$

und es gilt $x_N \rightarrow R$ für $N \rightarrow \infty$.

T2-B1

Wir verwenden die Koordinaten aus Abb.2d. Der Mittelpunkt des Behälters ist

$$C = \left(0, \frac{R}{2}\right).$$

Ein Strahl mit dem Einfallswinkel $\theta \geq 0$ trifft den Spiegel bei

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta).$$

Der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor ist dort

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

und die Ausbreitungsrichtung des einfallenden Strahls ist $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1)$.

Die Vektorform des Reflexionsgesetzes liefert den Einheitsrichtungsvektor des reflektierten Strahls:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= (0, 1) - 2 \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta). \end{aligned}$$

Der senkrechte Abstand von C zur Geraden des reflektierten Strahls ist der Betrag des zweidimensionalen Kreuzprodukts von $C - M$ mit $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} d(\theta) &= |(C_x - M_x)\hat{u}_y - (C_y - M_y)\hat{u}_x| \\ &= \left| -R \sin \theta + \frac{R}{2} \sin 2\theta \right| \\ &= R \sin \theta (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Für $0 \leq \theta < \pi/2$ wächst dieser Abstand mit θ , denn

$$d'(\theta) = R(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \geq 0.$$

Der reflektierte Grenzstrahl, der den Behälter gerade noch trifft, verläuft tangential zum Behälter, sodass $d(\theta_{\max}) = a$ gilt. Daher ist

$$a = R \sin \theta_{\max} - \frac{R}{2} \sin 2\theta_{\max}.$$

Der Vergleich mit dem angegebenen Ausdruck ergibt

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

T2-B2

Es seien I die gleichmäßige einfallende Intensität und L eine gemeinsame beleuchtete Länge entlang der Zylinderachsen. Ohne den Spiegel hat der Behälter die projizierte Fläche $2aL$, sodass

$$P_0 = 2aLI.$$

Der größte Abstand eines einfallenden Strahls von der optischen Achse, bei dem es zur Absorption kommt, ist

$$h_{\max} = R \sin \theta_{\max}.$$

Strahlen mit $|x| \leq a$ treffen den Behälter direkt. Strahlen mit

$$a < |x| \leq h_{\max}$$

erreichen den Spiegel und werden anschließend nach einer Reflexion absorbiert.

Die direkt absorbierten Strahlen schatten den entsprechenden Teil des Spiegels ab. Die direkten und reflektierten Beiträge sind daher

$$P_{\text{direct}} = 2aLI, \quad P_{\text{reflected}} = 2(h_{\max} - a)LI.$$

Aufgrund der angegebenen Einschränkung liefern Strahlen mit zwei oder mehr Reflexionen keinen zusätzlichen Beitrag zur absorbierten Leistung. Für den idealen Spiegel ergibt die Leistungserhaltung daher

$$P = 2h_{\max}LI = 2R \sin \theta_{\max} LI.$$

Somit gilt

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R \sin \theta_{\max}}{a}.$$

Einsetzen des Ergebnisses aus T2-B1 ergibt

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

T2-B3

Die Bedingung $P = 5P_0$ ergibt

$$1 - \cos \theta_{\max} = \frac{1}{5}, \quad \cos \theta_{\max} = \frac{4}{5}.$$

Damit ist

$$\sin \theta_{\max} = \frac{3}{5}$$

und

$$a = R \sin \theta_{\max} (1 - \cos \theta_{\max}) = R \frac{3}{5} \frac{1}{5} = \frac{3R}{25}.$$

Mit $R = 1.0 \text{ m}$ folgt

$$a = 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}.$$

T2-C1

Nach T2-B1 verläuft der reflektierte Strahl durch

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta)$$

und hat die Richtung

$$\hat{\mathbf{u}} = (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

Seine Steigung ist daher

$$m_A = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x} = \cot 2\theta.$$

Mit den Koordinaten von M ergibt sich

$$\begin{aligned} b_A &= R \cos \theta - R \sin \theta \cot 2\theta \\ &= R \cos \theta - \frac{R \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \\ &= \boxed{\frac{R}{2 \cos \theta}}. \end{aligned}$$

In der Notation des Hinweises gilt

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = \frac{1}{2}, \quad K_4 = 1.$$

Der zentrale reflektierte Strahl bei $\theta = 0$ ist die vertikale Gerade $x = 0$. Ergebnisse, die seine Steigung enthalten, sind im Sinne des Grenzwerts $\theta \rightarrow 0$ zu verstehen.

T2-C2

Für den Strahl B ersetzen wir θ durch $\theta + \Delta\theta$. Die Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung ergibt

$$m_B = m_A + \frac{dm_A}{d\theta} \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2).$$

Wegen

$$\frac{d}{d\theta} \cot 2\theta = -2 \csc^2 2\theta,$$

erhalten wir

$$m_B \simeq \cot 2\theta - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

Ebenso gilt

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R}{2 \cos \theta} \right) = \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta},$$

also

$$b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

Diese Entwicklungen berücksichtigen wie gefordert nur Terme bis zur ersten Ordnung in $\Delta\theta$.

T2-C3

Am Schnittpunkt der beiden reflektierten Strahlen gilt

$$m_A X_c + b_A = m_B X_c + b_B.$$

Folglich ist

$$(m_B - m_A)X_c + (b_B - b_A) = 0.$$

Mit den Differenzen erster Ordnung aus T2-C2 und im Grenzfall benachbarter Strahlen folgt

$$-\frac{2X_c}{\sin^2 2\theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = 0.$$

Daher ist

$$X_c = \frac{R \sin \theta \sin^2 2\theta}{4 \cos^2 \theta}.$$

Wegen $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ gilt

$$\boxed{X_c = R \sin^3 \theta}.$$

Einsetzen in die Gleichung des Strahls A ergibt

$$\begin{aligned} Y_c &= R \sin^3 \theta \cot 2\theta + \frac{R}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{R}{2 \cos \theta} (1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta) \\ &= \boxed{\frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta)}. \end{aligned}$$

Bei der Vereinfachung wird hier die folgende Identität verwendet:

$$1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

Diese Parameterdarstellung beschreibt die Kaustik. Der Ast auf der anderen Seite der optischen Achse ergibt sich aus der Symmetrie: X_c wechselt das Vorzeichen, während Y_c unverändert bleibt.

T2-C4

In der Nähe der optischen Achse verwenden wir die Entwicklungen für kleine Winkel

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4).$$

Die Koordinaten der Kaustik werden damit zu

$$X_c = R\theta^3 + O(R\theta^5)$$

und

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) (1 + 2\theta^2 + O(\theta^4)) \\ &= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4} \theta^2 + O(R\theta^4). \end{aligned}$$

Für beide symmetrischen Äste gilt

$$\theta^2 \simeq \left(\frac{|X_c|}{R} \right)^{2/3}.$$

Die Elimination von θ ergibt daher in führender Ordnung nahe der Spitze

$$Y_c \simeq \frac{R}{2} + \frac{3}{4} R^{1/3} |X_c|^{2/3}.$$

Somit gilt

$$v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Die Spitze liegt bei $(0, R/2)$. Ihre beiden symmetrischen Äste öffnen sich in Richtung zunehmender y -Werte und haben dort eine gemeinsame vertikale Tangente.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Auf der Jagd nach dem absoluten Nullpunkt

AUFGABE T3 [10 Punkte]. Auf der Jagd nach dem absoluten Nullpunkt

Ein Kältekreisprozess muss mit einem System durchgeführt werden, dessen Eigenschaften für die zu erreichenden Temperaturen geeignet sind. Vor hundert Jahren, im Jahr 1926, schlugen der Chemiker William Giauque und unabhängig von ihm der Physiker Peter Debye paramagnetische Salze als ideale Systeme vor, um Temperaturen weit unter 1 K zu erreichen. Tatsächlich wurden ab dem folgenden Jahrzehnt Temperaturen bis hinab zu 0.0044 K erreicht (Wander de Haas und Gerrit Wiersma, 1935, Leiden Cryogenic Laboratories). In dieser Aufgabe wird der paramagnetische Carnot-Kältekreisprozess untersucht.

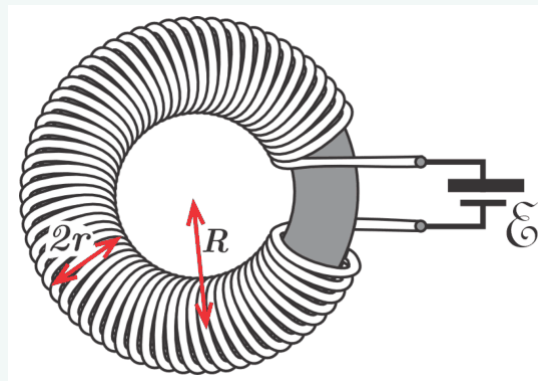


Abb. 3a.

Betrachten Sie einen Torus mit mittlerem Radius R und Innenradius r aus einem homogenen, isotropen paramagnetischen Material, um den ein isolierter leitender Draht gewickelt ist. Seine Enden sind an eine externe Spannungsquelle (EMK) angeschlossen, wie in Abbildung 3a gezeigt. Der Widerstand des Drahtes ist so gering, dass Energieverluste durch die Erwärmung des Drahtes vernachlässigt werden können. Die Wicklung ist dicht und umfasst insgesamt N Windungen. Es wird angenommen, dass $r \ll R$, sodass die Beträge der Felder $\vec{H}$ und $\vec{B}$ sowie der Magnetisierung $\vec{M}$ im gesamten Torus näherungsweise konstant sind. V und A bezeichnen das Volumen und die Querschnittsfläche des Torus. Im Folgenden wird der paramagnetische Torus mit Pm-T abgekürzt.

In paramagnetischen Materialien ist $\vec{M}$ parallel zu $\vec{H}$, und es gilt die folgende Beziehung:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

Vorzeichenkonvention für die Energieübertragung: In dieser Aufgabe werden Arbeit (W) und Wärme (Q) als positiv betrachtet, wenn sie dem System zugeführt werden, und als negativ, wenn sie vom System abgegeben werden.

T3-A [1.0 Punkte]. Arbeit im Pm-T

Hinweis: In magnetischen Materialien gilt $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, wobei I_C der gesamte vorzeichenbehaftete freie Strom durch die von der geschlossenen Kurve C begrenzte Fläche ist.

T3-A1 [0.2 Punkte]. H sei der Betrag von $\vec{H}$ im Torus. Drücken Sie H durch N , A , V und die momentane elektrische Stromstärke I im Draht aus.

T3-A2 [0.6 Punkte]. dW_{emf} sei die Arbeit, welche die externe Spannungsquelle verrichtet, um den Betrag von $\vec{B}$ um dB zu ändern. Drücken Sie dW_{emf} durch V , H und dB aus.

T3-A3 [0.2 Punkte]. Die gesamte von der Spannungsquelle verrichtete Arbeit dW_{emf} lässt sich in zwei Anteile aufteilen: die Arbeit dW_{vac} , die zur Änderung des Magnetfeldes verrichtet würde, wenn der Ringkern aus Vakuum bestünde, und die am paramagnetischen Material selbst verrichtete Arbeit dW . Drücken Sie dW durch μ_0 , H , V und dM aus.

T3-B [3.0 Punkte]. Wärme und Temperatur im Pm-T

Die folgende Tabelle vergleicht zwei thermodynamische Systeme: das ideale Gas und den Pm-T. Verwenden Sie diese Informationen und Ihre Antwort auf Frage T3-A3, um die folgenden Fragen zu lösen. Diese Informationen werden auch in Teil C verwendet. Falls Sie in Frage T3-A3 keinen Ausdruck für dW gefunden haben, dürfen Sie $dW = \alpha V \mu_0 H dM$ verwenden, wobei α eine Zahl ist. Das Volumen V des paramagnetischen Torus ist konstant, sodass keine Druckarbeit verrichtet wird. Im Folgenden bezeichnet T stets die Temperatur.

IDEALES GAS	PARAMAGNETISCHER TORUS
Zustandsgrößen: P , V und Temperatur T	Zustandsgrößen: H , M und Temperatur T
Konstanten: R , γ und Stoffmenge n	Konstanten: K , λ und Stoffmenge n
Zustandsgleichung: $PV = nRT$	Zustandsgleichung: $TMV = nKH$
Wärmekapazität bei konstantem V : $C_V = nR/(\gamma - 1)$	Wärmekapazität bei konstantem M : $C_M = n\lambda/T^2$
Für die innere Energie U gilt bei jedem Prozess $dU = C_V dT$	Für die innere Energie U gilt bei jedem Prozess $dU = C_M dT$

K und λ sind Konstanten, die durch das Material im Torus bestimmt werden. Sie dürfen die in der Tabelle angegebenen Gleichungen ohne Beweis direkt verwenden.

T3-B1 [1.5 Punkte]. Wenn sich der Betrag von $\vec{H}$ bei konstanter Temperatur T von H_i auf H_f ändert, wird zwischen dem Pm-T und seiner Umgebung eine Energie Q übertragen. Drücken Sie Q durch μ_0 , n , V , K , H_i , H_f und T aus.

T3-B2 [1.5 Punkte]. Wenn sich der Betrag von $\vec{H}$ adiabatisch von H_i auf H_f ändert, ändert sich die Temperatur des Pm-T von T_i auf T_f . Drücken Sie $\Delta T = T_f - T_i$ durch $\mu_0, V, n, K, \lambda, H_i, H_f$ und T_i aus.

T3-C [6.0 Punkte]. Carnot-Kältemaschine mit dem Pm-T

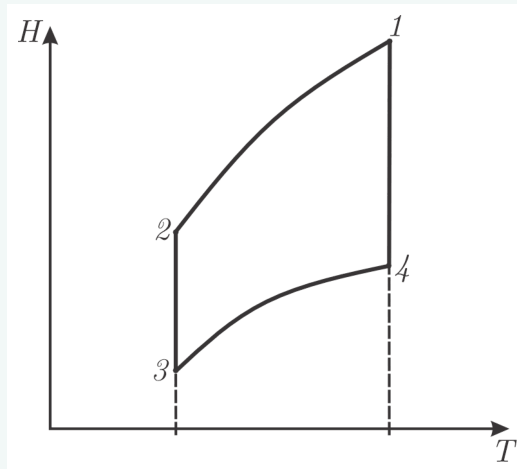


Abb. 3b.

Das H - T -Diagramm des vom Pm-T durchlaufenen Carnot-Kältezyklusprozesses $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ist in Abbildung 3b dargestellt. In diesem Kreisprozess bezeichnen:

- T_h : die Temperatur des warmen Reservoirs
- T_c : die Temperatur des kalten Reservoirs
- Q_h : den Betrag der an das warme Reservoir abgegebenen Wärme
- Q_c : den Betrag der aus dem kalten Reservoir aufgenommenen Wärme

T3-C1 [0.2 Punkte]. Markieren Sie T_h und T_c auf der T -Achse des H - T -Diagramms. Kennzeichnen Sie außerdem die Prozesse, bei denen jeweils die Wärmeübertragungen Q_h und Q_c stattfinden.

T3-C2 [1.5 Punkte]. M_1, M_2, M_3 und M_4 seien die Beträge von $\vec{M}$ an den Eckpunkten dieses Kreisprozesses. Drücken Sie M_1 durch M_2, M_3 und M_4 aus.

T3-C3 [0.8 Punkte]. Nehmen Sie an, dass wir zur Kühlung von 1.00 L flüssigem Helium mit einer Anfangstemperatur von 1.00 K einen Pm-T aus 2.0 mol *Kaliumchromat* verwenden. Für dieses Material gilt $K = 1.87 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$, seine Dichte beträgt 2730 kg/m^3 und seine molare Masse 0.19 kg/mole . Der Pm-T durchläuft einen Carnot-Kältezyklusprozess mit $H_1 = 411624 \text{ A/m}$, $H_2 = 311306 \text{ A/m}$, $H_3 = 204618 \text{ A/m}$ und $H_4 = 240446 \text{ A/m}$. Berechnen Sie die Endtemperatur des flüssigen Heliums nach einem Betriebszyklus. Nehmen Sie an, dass beim flüssigen Helium sowohl die spezifische Wärmekapazität $c = 100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ als auch die Dichte $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$ konstant bleiben.

T3-C4 [2.0 Punkte]. Um die Temperatur eines Körpers mit konstanter Wärmekapazität C_c kontinuierlich zu senken, werden im Laufe der Zeit Carnot-Kreisprozesse so durchgeführt, dass die der Kältemaschine zugeführte Leistung P konstant bleibt. Dabei wird angenommen, dass die Temperatur T_h des warmen Reservoirs konstant bleibt und dass die Temperatur T_c des gekühlten Körpers in jedem Betriebszyklus um dT_c abnimmt, wobei die Beziehung $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$

erfüllt ist. Wenn bei $t = 0$ gilt $T_c = T_0$, bestimmen Sie die Zeit t , während der die Carnot-Kältemaschine betrieben werden muss, damit der gekühlte Körper eine Temperatur $T < T_0$ erreicht. Drücken Sie Ihre Antwort durch C_c, T_h, P, T_0 und T aus.

T3-C5 [1.5 Punkte]. Die Effizienz einer Kältemaschine wird durch ihre *Leistungszahl* $\text{COP} = Q_c/W$ beschrieben. Bestimmen Sie die Gesamtleistungszahl der Kältemaschine aus Frage T3-C4 unter Berücksichtigung aller bis zum Zeitpunkt t durchgeführten Kreisprozesse. Drücken Sie Ihre Antwort durch T_0, T_h und T aus.

Physikalische Konstanten

Referenzwerte ausgewählter physikalischer Konstanten.

Konstante	Symbol	Wert	Einheiten
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann-Konstante	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
Universelle Gaskonstante	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Universelle Gravitationskonstante	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elektronenmasse	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
Protonenmasse	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
Atomare Masseneinheiten	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- T3-A1:

$$H = \frac{NAI}{V}.$$

- T3-A2:

$$dW_{emf} = VH dB.$$

- T3-A3:

$$dW = \mu_0 VH dM, \quad \alpha = 1.$$

- **T3-B1:**

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

- **T3-B2:**

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

- **T3-C1:** Die linke senkrechte Linie durch die Zustände 2, 3 liegt bei T_c ; die rechte senkrechte Linie durch die Zustände 1, 4 liegt bei T_h . Während $2 \rightarrow 3$ wird die Wärme Q_c aufgenommen, und während $4 \rightarrow 1$ wird die Wärme Q_h abgegeben.

- **T3-C2:**

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

- **T3-C3:** Mit $T_c \simeq 1.00 \text{ K}$ für den kalten Prozessabschnitt ergibt sich

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

Dies ist eine Abschätzung für eine geringe Abkühlung, bei der für die kalte Isotherme die Anfangstemperatur des Heliums angenommen wird; sie verwendet nur den kalten Prozessabschnitt $2 \rightarrow 3$ (siehe den Hinweis am Ende der Lösung zu T3-C3).

- **T3-C4:**

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

- **T3-C5:**

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Lösung

Wir verwenden durchgehend die vorgegebene Vorzeichenkonvention:

$$dU = dQ + dW,$$

wobei Wärme und Arbeit positiv sind, wenn sie dem paramagnetischen Material zugeführt werden. Die magnetischen Prozesse werden quasistatisch behandelt, mit der Näherung eines homogenen Feldes für $r \ll R$ und vernachlässigbaren ohmschen Verlusten.

T3-A1

Wir wählen einen ampereschen Integrationsweg in Form eines Kreises mit Radius R innerhalb des Torus. Er umfasst alle N Windungen, sodass der eingeschlossene freie Strom NI beträgt. Somit gilt

$$H(2\pi R) = NI.$$

Da das Torusvolumen $V = (2\pi R)A$ beträgt, folgt

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NAI}{V}.$$

T3-A2

Der magnetische Fluss durch jede Windung beträgt näherungsweise

$$\Phi = AB.$$

Das faradaysche Induktionsgesetz liefert eine induzierte EMK von $-NA dB/dt$. Bei vernachlässigbarem Widerstand gleicht die angelegte Quellenspannung diese aus:

$$\mathcal{E} = NA \frac{dB}{dt}.$$

Die während der Zeit dt zugeführte elektrische Arbeit beträgt daher

$$dW_{emf} = \mathcal{E} I dt = NAI dB.$$

Mit $NAI = VH$ aus A1 folgt

$$dW_{emf} = VH dB.$$

Dieser Ausdruck liefert auch dann das richtige Vorzeichen, wenn die Quelle während einer Abnahme des Feldes Energie aufnimmt.

T3-A3

Da die Felder und die Magnetisierung parallel sind, gilt

$$dB = \mu_0 dH + \mu_0 dM.$$

Folglich ist

$$dW_{emf} = \mu_0 VH dH + \mu_0 VH dM.$$

Für einen Vakuumkern gilt $B = \mu_0 H$, sodass für die mit derselben Änderung von H verbundene Arbeit gilt

$$dW_{vac} = \mu_0 VH dH = d\left(\frac{\mu_0 VH^2}{2}\right).$$

Subtrahiert man diesen Beitrag des Vakuumfeldes, verbleibt die am Material verrichtete Arbeit:

$$dW = dW_{emf} - dW_{vac} = \mu_0 VH dM.$$

Damit ist der als Ersatz vorgesehene Koeffizient $\alpha = 1$.

T3-B1

Aus der gegebenen Beziehung für die innere Energie folgt für einen isothermen Prozess

$$dU = \frac{n\lambda}{T^2} dT = 0.$$

Der erste Hauptsatz liefert dann

$$dQ = -dW = -\mu_0 VH dM.$$

Bei konstantem T ergibt die Zustandsgleichung

$$M = \frac{nKH}{VT}, \quad dM = \frac{nK}{VT} dH.$$

Daraus folgt

$$Q = -\frac{\mu_0 n K}{T} \int_{H_i}^{H_f} H dH,$$

und somit

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

Das Volumen kürzt sich heraus. Bei isothermer Entmagnetisierung, $H_f < H_i$, wird Wärme aufgenommen; bei isothermer Magnetisierung wird Wärme abgegeben.

T3-B2

Für einen adiabatischen Prozess gilt $dQ = 0$, also

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 V H dM.$$

Nun ändern sich sowohl H als auch T . Durch Differenzieren der Zustandsgleichung erhält man

$$dM = \frac{nK}{V} \left(\frac{dH}{T} - \frac{H}{T^2} dT \right).$$

Einsetzen in den ersten Hauptsatz ergibt

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 n K \left(\frac{H}{T} dH - \frac{H^2}{T^2} dT \right).$$

Somit gilt

$$(\lambda + \mu_0 K H^2) dT = \mu_0 K H T dH,$$

oder

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 K H}{\lambda + \mu_0 K H^2} dH.$$

Integration zwischen Anfangs- und Endzustand liefert

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}.$$

Daher ist

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}},$$

und

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

Bei positivem K und positiver Wärmekapazität führt eine Abnahme von H zu einer Abnahme von T : Dies ist die adiabatische Entmagnetisierung.

Eine äquivalente, im Folgenden nützliche Form ist die adiabatische Invariante

$$\frac{\lambda + \mu_0 K H^2}{T^2} = \text{konstant entlang einer Adiabate}.$$

T3-C1

Die horizontale Koordinate ist die Temperatur. Daher:

- Beschriften Sie die linke gestrichelte Projektion unterhalb der Zustände 2 und 3 mit T_c .
- Beschriften Sie die rechte gestrichelte Projektion unterhalb der Zustände 1 und 4 mit T_h .

Bei $2 \rightarrow 3$ nimmt das Feld bei konstantem T_c ab. Nach B1 nimmt der Torus Wärme auf; tragen Sie daher neben diesem senkrecht nach unten verlaufenden Prozessabschnitt Q_c mit einer in den Torus gerichteten Richtung ein.

Bei $4 \rightarrow 1$ nimmt das Feld bei konstantem T_h zu. Der Torus gibt Wärme ab; tragen Sie daher neben diesem senkrecht nach oben verlaufenden Prozessabschnitt Q_h mit einer aus dem Torus heraus gerichteten Richtung ein.

Die übrigen Prozessabschnitte sind $1 \rightarrow 2$, adiabatische Abkühlung, und $3 \rightarrow 4$, adiabatische Erwärmung.

T3-C2

Setzen wir

$$H = \frac{VTM}{nK}$$

in die adiabatische Invariante aus B2 ein:

$$\frac{\lambda}{T^2} + \frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} M^2 = \text{konstant}.$$

Für die Adiabate $1 \rightarrow 2$ gilt

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_1^2 - M_2^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Für die Adiabate $3 \rightarrow 4$ gilt

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_4^2 - M_3^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

Ihre rechten Seiten sind identisch, sodass

$$M_1^2 - M_2^2 = M_4^2 - M_3^2.$$

Da die M_j Beträge sind, ist die positive Wurzel zu wählen:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

T3-C3

Für die Abschätzung über einen Kreisprozess setzen wir die Temperatur des kalten Prozessabschnitts näherungsweise gleich der Anfangstemperatur des Heliums:

$$T_c \simeq 1.00 \text{ K}.$$

Die während $2 \rightarrow 3$ aufgenommene Wärme beträgt

$$Q_c = \frac{\mu_0 n K}{2T_c} (H_2^2 - H_3^2).$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich

$$Q_c = \frac{(1.25663706127 \times 10^{-6})(2.0)(1.87 \times 10^{-6})}{2(1.00)} (311306^2 - 204618^2) \text{ J},$$

woraus folgt

$$Q_c = 0.1293459 \dots \text{ J} \simeq 0.13 \text{ J}.$$

Die Masse und die Wärmekapazität des Heliums betragen

$$m_{\text{He}} = \rho V_{\text{He}} = (130)(1.00 \times 10^{-3}) = 0.130 \text{ kg},$$

$$C_{\text{He}} = m_{\text{He}} c = (0.130)(100) = 13.0 \text{ J K}^{-1}.$$

Die Energieerhaltung für das Helium liefert

$$C_{\text{He}}(T_{\text{He},f} - 1.00 \text{ K}) = -Q_c.$$

Somit gilt

$$T_{\text{He},f} = 1.00 \text{ K} - \frac{0.1293459 \dots \text{ J}}{13.0 \text{ J K}^{-1}} = 0.9900503 \dots \text{ K},$$

oder

$$\boxed{T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}}.$$

Die geschätzte Temperaturabnahme beträgt etwa 1%, was die Näherung einer kleinen Änderung für diese numerische Abschätzung stützt. Das Materialvolumen kürzt sich aus Q_c heraus, sodass seine Dichte und molare Masse hier nicht benötigt werden. Für einen exakten Kreisprozess sind die vier gegebenen Feldstärken nicht vollständig konsistent: Mit $M = nKH/(VT)$ auf den beiden Isothermen erfordert die Beziehung aus T3-C2 $T_h/T_c = \sqrt{(H_1^2 - H_4^2)/(H_2^2 - H_3^2)} \approx 1.42$, und die Adiabaten $1 \rightarrow 2$ und $3 \rightarrow 4$ sind dann nur mit $\lambda \approx -0.062 \text{ J K mol}^{-1}$ erfüllbar, also mit einer negativen Wärmekapazität $C_M = n\lambda/T^2$. Die obige Abschätzung verwendet nur den kalten Prozessabschnitt und hängt nicht von λ ab.

T3-C4

$dT_c < 0$ bezeichne die tatsächliche Temperaturänderung des gekühlten Körpers. Die ihm entzogene, positiv gezählte Wärme beträgt

$$dQ_c = -C_c dT_c.$$

Die vorgegebene Carnot-Beziehung liefert

$$dQ_h = \frac{T_h}{T_c} dQ_c.$$

Da die Kältemaschine nach jedem Kreisprozess in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehrt, verschwindet die Nettoänderung ihrer inneren Energie. Die erforderliche Arbeit beträgt daher

$$dW = dQ_h - dQ_c = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c.$$

Bei konstanter zugeführter Leistung gilt

$$P dt = dW = -C_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Durch Integration von $T_c = T_0$ bei $t = 0$ bis $T_c = T$ erhält man

$$Pt = -C_c \int_{T_0}^T \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

Daraus folgt

$$Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) + T - T_0 \right],$$

und

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

Für $0 < T < T_0 < T_h$ ist diese Zeit positiv. Außerdem gilt

$$T \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow \infty.$$

Im Rahmen des angegebenen Modells erfordert das Erreichen des absoluten Nullpunkts eine unendlich lange Betriebszeit.

T3-C5

Die dem gekühlten Körper insgesamt entzogene Wärme beträgt

$$Q_{c,\text{total}} = C_c(T_0 - T).$$

Die insgesamt zugeführte Arbeit beträgt

$$W_{\text{total}} = Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

Daher gilt

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{Q_{c,\text{total}}}{W_{\text{total}}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

Zur Kontrolle ergibt sich für eine infinitesimale Temperaturabnahme

$$\lim_{T \rightarrow T_0^-} \text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0}{T_h - T_0},$$

was der üblichen Leistungszahl einer Carnot-Kältemaschine bei der kalten Temperatur T_0 entspricht.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.