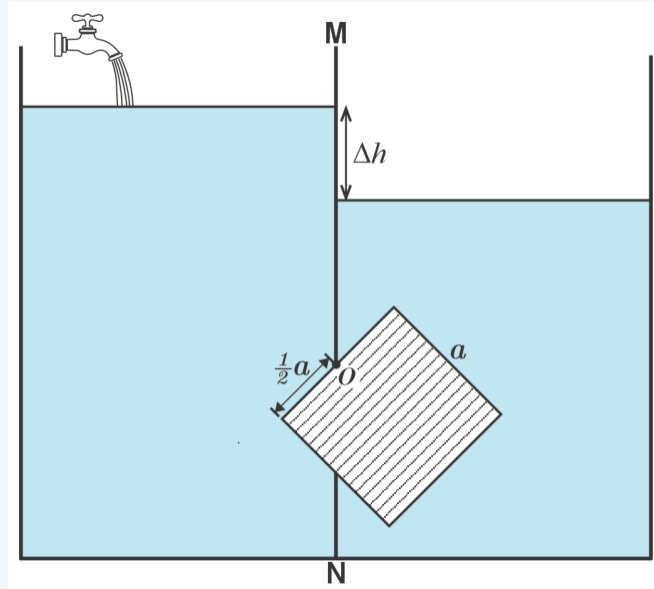


المسألة 1: ثلاث مسائل (A: بوابة هيدروستاتيكية؛ B: زوج إلكترون وبوزيترون؛ C: التفكك الضوئي للأوزون)

السؤال T1 [10 درجات]. ثلاث مسائل

يتكون هذا السؤال من ثلاث مسائل مستقلة.

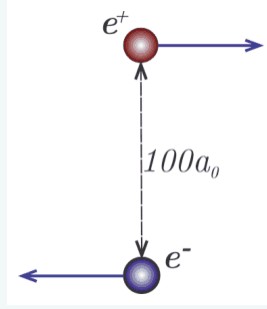
T1-A [3.0 درجات]. بوابة هيدروستاتيكية



الشكل 1a.

يفصل بين خزانَي ماء جدار رأسي MN، كما هو موضح في الشكل 1a. يمكن أن يتلقى الخزان الأيسر الماء من مصدر. ويجب ضمان أن يكون أقصى فرق ممكن بين منسوبَي الماء هو $\Delta h = 1.41 \text{ m}$. ولتحقيق ذلك، تُفتح في MN فتحة بارتفاع رأسي $a\sqrt{2}/2$ ، وتُسد بكتلة مكعبة مصممة طول ضلعها a . كثافة الكتلة هي $3\rho_0$ ، حيث ρ_0 كثافة الماء. الكتلة مغمورة بالكامل، ومثبتة بالجدار عند O، ويمكنها الدوران دون احتكاك حول المحور العمودي على مستوى الشكل والمار بالنقطة O.

T1-A1 [3.0 درجات]. احسب قيمة a التي تضمن عدم تجاوز أقصى فرق مسموح به بين منسوبَي الماء.



الشكل 1b.

في لحظة زمنية معينة، يوجد بوزيترون e^+ على مسافة $100a_0$ من إلكترون e^- . يتحرك الجسيمان بحيث تكون سرعتاهما في تلك اللحظة متوازيتين ومتعاكستين الاتجاه، وعموديتين على الخط الواصل بينهما، كما هو موضح في الشكل 1b. من المعلوم أن لكل جسيم زخمًا زاويًا مقداره $\mu\hbar$ بالنسبة إلى مركز كتلة النظام، حيث μ عامل عددي عديم الأبعاد. افترض أن التفاعل الوحيد بين e^- و e^+ هو التفاعل الكهروستاتيكي (للجسيمين الكتلة نفسها m ، وشحنتان متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الإشارة). وافترض أيضًا أن هذا النظام يظل معزولًا، وأن ديناميكيته كلاسيكية وغير نسبية.

يُعطى نصف قطر بور a_0 بالعلاقة $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$.

T1-B1 [1.0 درجة]. إذا كان $\mu = 4$ ، يكون النظام مقيدًا، أي إن الجسيمين يتحركان في مدار مغلق حول مركز كتلة النظام. أوجد أقصى مسافة فصل بين e^- و e^+ بدلالة a_0 .

T1-B2 [2.5 درجة]. إذا كان $\mu = \frac{15}{2}$ ، يكون النظام غير مقيد، أي إن الجسيمين لا يعودان في مدار مغلق حول مركز كتلة النظام. لتكن $\vec{u}_\infty$ سرعة e^+ بالنسبة إلى e^- عندما تؤول مسافة الفصل بينهما إلى ما لا نهاية. احسب الزاوية بين $\vec{u}_\infty$ وخط الحركة الابتدائي لـ e^+ . أعط إجابتك بالدرجات.

تلميح 1: يُعطى الاختلاف المركزي ε لمسار مخروطي في الحالة الحالية بالعلاقة

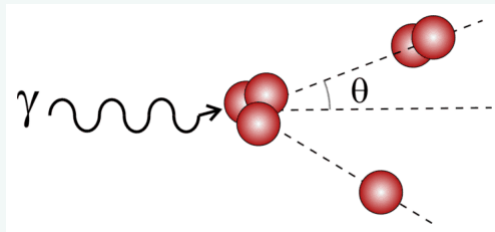
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2E}{k^2e^4m}}$$

حيث E و L هما الطاقة الكلية ومقدار الزخم الزاوي الكلي، على الترتيب. و k هو ثابت كولوم $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

تلميح 2: معادلة القطع المخروطي بالإحداثيات القطبية هي

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$$

T1-C [3.5 درجات]. التفكك الضوئي للأوزون



الشكل 1c.

يصطدم فوتون ذو تردد زاوي ω بجزيء أوزون O_3 ساكن، فيفككه (يشطره) إلى جزيء أكسجين O_2 وذرة أكسجين O ، كما هو موضح في الشكل 1c. يُمتص الفوتون في هذه العملية. لتكن U_i و U_f طاقتي الحالة القاعية لجزيئي الأوزون والأكسجين، على الترتيب. افترض أن هذا النظام يظل معزولًا، وأن ديناميكيته كلاسيكية (لا تسهم طاقات الوضع في الكتلة، وحركة ذرات الأكسجين غير نسبية). استخدم العلاقة $p = E/c$ للزخم الخطي للفوتون، حيث E طاقته.

T1-C1 [2.5 درجة]. إذا كانت الزاوية التي يصنعها زخم O_2 الناتج مع اتجاه الفوتون الساقط هي θ ، فحدد أدنى تردد زاوي $\omega_{\min}$ يلزم لحدوث هذا التفكك عند هذه الزاوية. اكتب إجابتك بدلالة $\hbar$ ، c ، و θ ، و $\Delta U = U_f - U_i$ ، وكتلة ذرة الأكسجين m .

T1-C2 [1.0 درجة]. إذا كانت $\theta = \pi/6$ ، فاحسب قيمة $\hbar\omega_{\min} - \Delta U$. أعط إجابتك بوحدة الإلكترون فولت (eV). خذ $m = 16.0 \text{ amu}$ و $\Delta U = 1.10 \text{ eV}$.

تلميح:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

الثوابت الفيزيائية

قيم مرجعية لبعض الثوابت الفيزيائية المختارة.

الثابت	الرمز	القيمة	الوحدات
سرعة الضوء في الفراغ	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
ثابت بلانك	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
ثابت بلانك المختزل	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
عدد أفوغادرو	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
ثابت بولتزمان	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
ثابت الغاز المثالي	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
الشحنة الأولية	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
ثابت الجذب العام	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
ثابت ستيفان-بولتزمان	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
نفاذية الفراغ	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
سمحية الفراغ	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
كتلة الإلكترون	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^5$	eV/c^2
كتلة البروتون	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
وحدات الكتلة الذرية	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **T1-A1**: أكبر طول ضلع مسموح به، والذي يجعل البوابة تفتح عند فرق المنسوب المحدد، هو

$$a = \frac{\Delta h}{2\sqrt{2}} = 0.499 \text{ m.}$$

• **T1-B1**:

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

• T1-B2:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ,$$

باتجاه الجانب من خط الحركة الذي كان الإلكترون فيه ابتداءً.

• T1-C1: عندما يكون $0 \leq \theta < \pi/2$ ، كما في الشكل، لتكن $F = 1 + 2 \sin^2 \theta$. عندئذٍ

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar F} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right) = \frac{2\Delta U}{\hbar \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F\Delta U}{3mc^2}} \right)}.$$

عندما يكون $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ، استبدل F بـ3؛ وتكون النتيجة حدًا سفليًا أعظم يُقترَب منه عندما يؤوَل زخم O_2 الناتج إلى الصفر.

• T1-C2:

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}.$$

الحل

T1-A1

نحسب عزم القوة حول O عند بدء الفتح. ليس لقوة المفصل عزم حول O ، وتنعدم قوة التلامس عند الحافة السفلى للفتحة عند هذه العتبة. نكتب ارتفاع الفتحة على الصورة

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

تحدد المسافة المشار إليها بـ $a/2$ موضع O في منتصف الضلع العلوي الأيسر للمقطع المربع. ومن ثم، يقع مركز المكعب أفقيًا إلى يمين O بمقدار

$$d = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

نحلل ضغط الماء إلى مساهمتين. أولاً، نتخيل أن الماء في كلا الخزانين عند المنسوب الموجود في الخزان الأيمن. ينشأ عن هذا الضغط الهيدروستاتيكي قوة طفو نحو الأعلى

$$B = \rho_0 g a^3$$

تمر بمركز المكعب. ووزنه هو

$$W = 3\rho_0 g a^3.$$

وعليه، فإن مجموع عزميهما في اتجاه عقارب الساعة هو

$$\tau_{\text{closing}} = (W - B)d = 2\rho_0 g a^3 \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}}.$$

يضيف رفع منسوب الماء في اليسار بمقدار Δh ضغطاً منتظماً

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta h$$

على سطح المكعب الواقع إلى يسار الجدار.

تكافئ محصلة القوة وعزم القوة الناتجتان عن هذا الضغط الإضافي نظيرتيهما المؤثرتين على مستطيل رأسي يغطي الفتحة. ولتبيّن ذلك، نغلق السطح البارز بذلك المستطيل: فالضغط المنتظم على السطح المغلق الناتج تكون محصلة قوته وعزم قوته صفريتين.

وهكذا، يُولد الضغط الإضافي قوة أفقية

$$F_{\Delta p} = \Delta p a H$$

تؤثر عند منتصف ارتفاع الفتحة. وعزمها الذي يفتح البوابة، بعكس اتجاه عقارب الساعة، هو

$$\tau_{\text{opening}} = \Delta p a H \frac{H}{2} = \frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4}.$$

عند عتبة الفتح،

$$\frac{\rho_0 g \Delta h a^3}{4} = \frac{\rho_0 g a^4}{\sqrt{2}},$$

ومن ثم

$$\Delta h = 2\sqrt{2} a.$$

بمساواة هذه العتبة بفرق المنسوب المسموح به نحصل على

$$a = \frac{1.41}{2\sqrt{2}} \text{ m} = 0.498510 \dots \text{ m} \approx 0.499 \text{ m}.$$

تؤدي القيم الأصغر لـ a إلى فتح البوابة عند فرق منسوب أصغر.

T1-B1

لتكن r مسافة الفصل بين الجسيمين، ولنعرّف

$$\kappa = k e^2 = \frac{\hbar^2}{m a_0}.$$

نعمل في الإطار المرجعي لمركز الكتلة. الكتلة المختزلة هي $m/2$ ، والزمان الزاويان لهما الاتجاه نفسه، لذا فإن مقدارهما الكلي هو

$$L = 2\mu\hbar.$$

يعطي انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$E = \frac{m}{4} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m r^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

تكون السرعة النسبية ابتداءً عمودية على الخط الواصل بين الجسيمين، ومن ثم $\dot{r} = 0$ عند $r_0 = 100a_0$. لذلك،

$$E = \frac{4\mu^2 \hbar^2}{m(100a_0)^2} - \frac{\kappa}{100a_0} = \frac{\kappa}{a_0} \left(\frac{\mu^2}{2500} - \frac{1}{100} \right).$$

عندما يكون $\mu = 4$ ،

$$E = -\frac{9}{2500} \frac{\kappa}{a_0} < 0.$$

عند كل من القيمتين القصويتين لمسافة الفصل، يكون $\dot{r} = 0$. ويكتابة $x = r/a_0$ ، تكون معادلة نقطة الانقلاب

$$-\frac{9}{2500} = \frac{64}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

وبصورة مكافئة،

$$9x^2 - 2500x + 160000 = (x - 100)(9x - 1600) = 0.$$

إنن نقطتا الانقلاب هما

$$r_{\min} = 100a_0, \quad r_{\max} = \frac{1600}{9} a_0.$$

وعليه، فإن الوضع الابتدائي المعطى هو نقطة أدنى مسافة فصل، و

$$r_{\max} = \frac{1600}{9}a_0 \approx 178a_0.$$

T1-B2

عندما يكون $\mu = 15/2$ ، تعطي العبارات نفسها

$$L = 15\hbar, \quad E = \frac{\kappa}{80a_0} > 0.$$

باستخدام صيغة الاختلاف المركزي المعطاة،

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4L^2 E}{m\kappa^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(15\hbar)^2}{m\kappa^2} \frac{\kappa}{80a_0}}.$$

وبما أن $ma_0\kappa = \hbar^2$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = \frac{7}{2}.$$

نختار زاوية قطبية φ تُقاس من اتجاه الحضيض، وتزداد في اتجاه الحركة. بهذا الاختيار، تكون معادلة القطع المخروطي

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{(m/2)\kappa} = 450a_0.$$

مسافة الفصل عند الحضيض هي

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{450a_0}{1 + 7/2} = 100a_0,$$

إنّ الموضع الابتدائي يقع بالفعل عند الحضيض.

على الفرع المتجه إلى الخارج، يكون $r \rightarrow \infty$ عندما

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty = 0,$$

مما يعطي

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{2}{7}.$$

مقدار السرعة النسبية المستعرضة هو $L/[(m/2)r]$ ، وهو يؤوّل إلى الصفر عند اللانهاية. لذلك تتجه السرعة النسبية النهائية على امتداد الاتجاه الشعاعي الحدي. والسرعة الابتدائية عمودية على اتجاه الحضيض، لذا فإن الزاوية المطلوبة هي

$$\alpha = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2}.$$

ينتج عن ذلك أن

$$\sin \alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{7},$$

ومن ثم

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 16.6^\circ.$$

في الشكل، تتجه السرعة النسبية عند الابتعاد إلى أسفل الاتجاه الأفقي الابتدائي للبوزيترون.

T1-C1

لتكن طاقة الفوتون ومقدار زخمه

$$E_\gamma = \hbar\omega, \quad P = \frac{E_\gamma}{c}.$$

نتخذ اتجاهه محور x . وليكن زخم جزيء الأكسجين الناتج $q\hat{n}$ ، حيث

$$q \geq 0, \quad \hat{n} \cdot \hat{x} = \cos \theta.$$

وفق الافتراض المذكور بشأن الكتلة، تبلغ كتلة جزيء الأكسجين $2m$ ، وكتلة الذرة m . يعطي انحفاظ الزخم

$$\mathbf{p}_0 = P\hat{x} - q\hat{n}.$$

عند أدنى طاقة للفوتون، لا تلزم أي إثارة داخلية إضافية. عندئذ يكون انحفاظ الطاقة على الصورة

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{q^2}{4m} + \frac{P^2 + q^2 - 2Pq \cos \theta}{2m}.$$

بإكمال المربع،

$$E_\gamma - \Delta U = \frac{3}{4m} \left(q - \frac{2P \cos \theta}{3} \right)^2 + \frac{P^2}{6m} (3 - 2 \cos^2 \theta).$$

في حالة الانبعاث إلى الأمام، $0 \leq \theta < \pi/2$ ، تبلغ الطاقة الحركية قيمتها الدنيا عند الزخم المسموح به فيزيائياً

$$q_* = \frac{2P \cos \theta}{3} > 0.$$

نعرف

$$F = 3 - 2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta.$$

إذن أدنى طاقة حركية نهائية عند طاقة فوتون معطاة هي

$$K_{\min} = \frac{FP^2}{6m} = \frac{FE_\gamma^2}{6mc^2}.$$

عند عتبة التفكك،

$$E_{\gamma, \min} - \Delta U = \frac{FE_{\gamma, \min}^2}{6mc^2}.$$

بحل هذه المعادلة التربيعية وأخذ الجذر الأصغر نحصل على

$$\omega_{\min} = \frac{3mc^2}{\hbar(1 + 2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right].$$

للجذر الآخر طاقة من رتبة mc^2 ، وهو يقع خارج نطاق الحركة غير النسبية المفترض.

صيغة مكافئة، مفيدة عندما يكون $\Delta U \ll mc^2$ ، هي

$$\omega_{\min} = \frac{2\Delta U}{\hbar \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta U}{3mc^2}} \right]}.$$

ومتسلسلة هذه الصيغة هي

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(1 + 2 \sin^2 \theta)(\Delta U)^2}{6mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2 c^4}\right).$$

استكمالاً للحل، لا يقيّد نص المسألة المجال الزاوي صراحةً. إذا كان $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ، فإن القيمة q_* التي تصغر الطاقة دون قيود تكون غير موجبة. وبتطبيق القيد $q \geq 0$ بدلاً من ذلك نحصل على

$$\inf K = \frac{P^2}{2m}.$$

لذلك نستخدم صيغة العتبة $F = 3$ لهذه الزوايا. وهي مجرد حد سفلي أعظم عند تحديد اتجاه خروج معين: فعند $q = 0$ يكون ذلك الاتجاه غير معروف، بينما تتيح قيم q الموجبة الصغيرة كيفما شئنا طاقات قريبة من العتبة كيفما شئنا.

عندما تكون $\theta = \pi/6$ ،

$$F = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

وبالتالي،

$$\hbar\omega_{\min} = 2mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{mc^2}} \right).$$

باستخدام وحدة الكتلة الذرية المعطاة،

$$mc^2 = 16.0 (9.3149410372 \times 10^8) \text{ eV} = 1.49039 \times 10^{10} \text{ eV}.$$

معامل التوسع هو

$$x = \frac{\Delta U}{mc^2} \approx 7.38 \times 10^{-11}.$$

وباستخدام

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

نحصل على

$$\hbar\omega_{\min} = \Delta U + \frac{(\Delta U)^2}{4mc^2} + O\left(\frac{(\Delta U)^3}{m^2c^4}\right).$$

إذن

$$\hbar\omega_{\min} - \Delta U \approx \frac{(1.10 \text{ eV})^2}{4(1.49039 \times 10^{10} \text{ eV})},$$

مما يعطي

$$\boxed{\hbar\omega_{\min} - \Delta U = 2.03 \times 10^{-11} \text{ eV}}$$

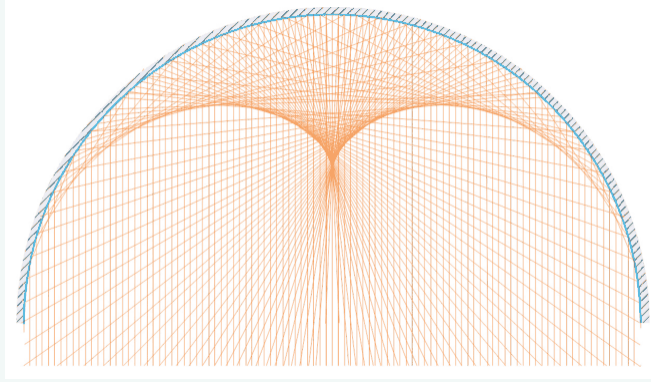
إلى ثلاثة أرقام معنوية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: الطهي بضوء الشمس؟

السؤال T2 [10 درجات]: الطهي بضوء الشمس؟

يمكن أن تؤدي إعادة توزيع التدفق الضوئي إلى مناطق ذات شدة عالية وأخرى ذات شدة منخفضة بفعل الانعكاس أو الانكسار إلى تكون الكاويات: وهي منحنيات تتشكل من تقاطع أشعة ضوئية متناهية التقارب. على سبيل المثال، يبين الشكل 2a الكاوية التي تشكلها أشعة ساقطة سقوطاً شبه محوري على مرآة نصف أسطوانية. ويعرض الشكل 2b صورة فوتوغرافية للكاوية التي يشكلها انعكاس الضوء على الجزء السفلي من فنجان قهوة. وتسمى النقطة المركزية الأشد سطوعاً في الكاوية نقطة الاستدقاق؛ وتكون شدة الضوء عند هذه النقطة عظيمة.



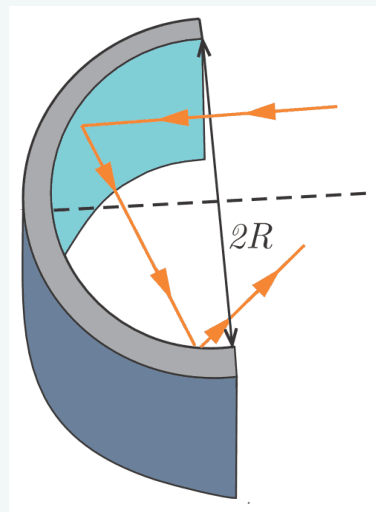
الشكل 2a.



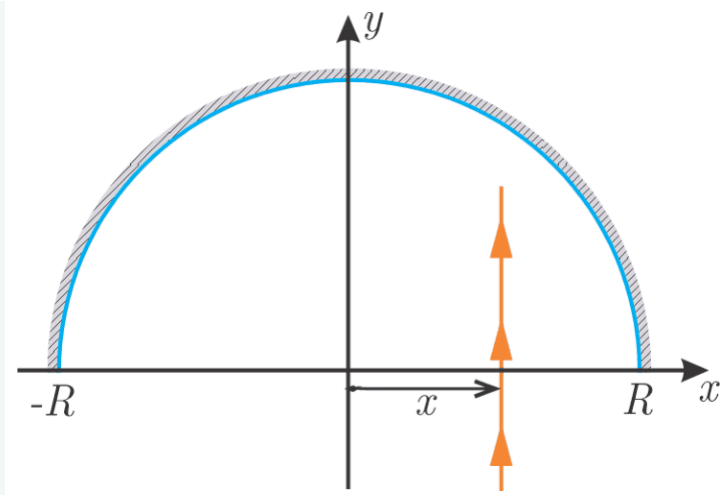
الشكل 2b.

للكاويات تطبيقات علمية متنوعة، تمتد من البصريات عالية الدقة والبصريات الكمومية إلى الفيزياء الفلكية. في هذا السؤال، ستدرس تكوّن الكاوية بفعل انعكاس الضوء على مرآة نصف أسطوانية نصف قطرها R ، كما هو موضح في الشكل 2c. وستبحث أيضاً جوانب أخرى لهذه المرآة، مثل استخدامها في المواقد الشمسية.

افترض طوال المسألة أن الأشعة الساقطة تأتي من مصدر ضوئي خارجي بعيد، وأنها موازية للمحور البصري للمرآة. ويفضل التناظر، تكفي دراسة الانعكاس في مستوى واحد. يبيّن الشكل 2d هذا المستوى والمرآة ونظام الإحداثيات المستخدم طوال المسألة.

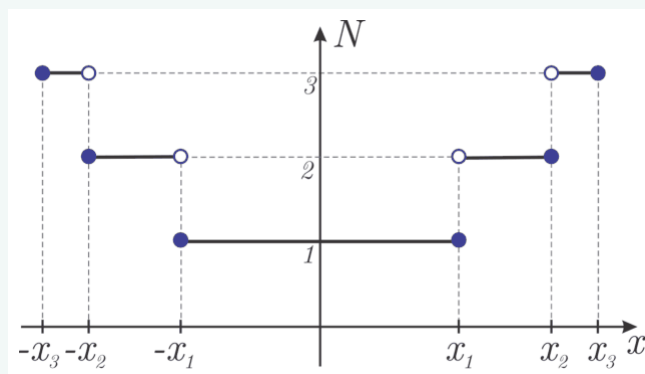


الشكل 2c.



الشكل 2d.

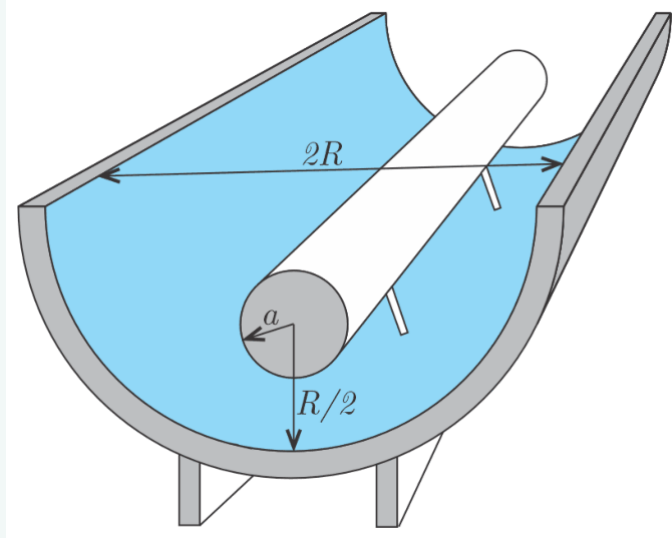
T2-A [1.5 درجة]. الانعكاسات المتعددة



الشكل 2e.

يبين الشكل 2e العلاقة بين الإحداثي x لشعاع ساقط وعدد الانعكاسات N التي يخضع لها، حتى $N = 3$. عندما يتغير x ضمن المجال $(-R, R)$ ، يأخذ المتغير N جميع قيم الأعداد الطبيعية الأكبر من أو المساوية لـ 1. ويُرمز بـ x_N إلى أكبر مسافة عن المحور البصري تسمح للشعاع الساقط بأن ينعكس عن المرآة N مرة على الأكثر.

T2-A1 [1.5 درجة]. أوجد التعبير العام لـ x_N في المتتالية اللانهائية $x_1, x_2, x_3, \dots$ التي تحدّ إحداثيات الأشعة التي تخضع لـ N انعكاساً على الأكثر. عبّر عن إجابتك بدلالة R و N .



الشكل 2f.

اعتبر نظاماً يتألف من مرآة على شكل نصف أسطوانة مجوّفة ووعاء أسطواني. الأسطوانة ماصّة تماماً: أي إن كل شعاع ضوئي يصطدم بها يُمتص. نصف قطر المرآة هو R . ونصف قطر الوعاء هو a . محورا المرآة والوعاء متوازيان. يقع مركز الوعاء على بُعد $R/2$ من المرآة في مستوى تناظر النظام، كما هو موضح في الشكل 2f. تستغل المرآة الإشعاع الشمسي لتسخين الطعام داخل الوعاء. افترض أن ضوء الشمس ذو شدة ثابتة ومنتظمة (قدرة لكل وحدة مساحة)، وأن أشعته موازية للمحور البصري للمرآة. وافترض كذلك أن a بحيث إن أي شعاع تمتصه الأسطوانة ينعكس عن المرآة مرة واحدة على الأكثر. لتكن أكبر زاوية سقوط على المرآة (مقاسة بالنسبة إلى العمود المقام عند نقطة السقوط) لأي شعاع منعكس يصطدم بالوعاء.

T2-B1 [2.0 درجتان]. نصف قطر الوعاء هو $a = \alpha \sin(\theta_{\max}) + \beta \sin(2\theta_{\max})$. اكتب α و β بدلالة R .

إذا لم تتمكن من إيجاد α و β ، فاستخدم التعبير المعطى في بقية المسألة.

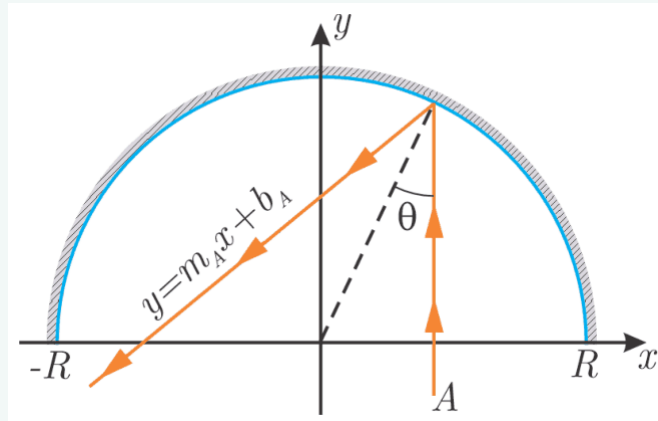
T2-B2 [1.5 درجة]. لتكن القدرة التي كانت ستلتقها الأسطوانة لو لم تكن المرآة موجودة. اكتب P/P_0 ، أي نسبة القدرة المستقبلية فعلياً P إلى P_0 ، بدلالة $\theta_{\max}$.

T2-B3 [0.5 درجة]. إذا كان $R = 1.0 \text{ m}$ ، فاكتب قيمة a التي تحقق $P = 5P_0$. أعط إجابتك بوحدة cm.

T2-C [4.5 درجات]. الكاويات ونقطة الاستدقاق

T2-C1 [0.5 درجة]. اعتبر شعاعاً A يسقط على المرآة بزاوية θ ، كما هو موضح في الشكل 2g. بعد الانعكاس، تكون المعادلة الموافقة لهذا الشعاع، في نظام الإحداثيات المحدد في الشكل 2g، هي $y = m_A x + b_A$. اكتب m_A و b_A بدلالة θ و R .

تلميح: الصيغة المتوقعة هي $m_A = K_1 \cot(K_2 \theta)$ و $b_A = R \frac{K_3}{\cos(K_4 \theta)}$ ، حيث K_i ثوابت عددية.



الشكل 2g.

T2-C2 [2.0 درجة]. اعتبر الآن شعاعاً B ، موازياً للشعاع A ، يسقط على السطح بزاوية $\theta + \Delta\theta$ ، حيث $\Delta\theta \ll \theta$. بعد الانعكاس، تكون المعادلة الموافقة لهذا الشعاع هي $y = m_B x + b_B$. اكتب m_B و b_B بدلالة θ و $\Delta\theta$ و R ، بالتقريب حتى الرتبة الأولى في $\Delta\theta$.

T2-C3 [1.0 درجة]. أوجد إحداثيي نقطة التقاطع (X_c, Y_c) بين الشعاعين المنعكسين الموافقين لـ A و B . اكتب إجابتك بدلالة R و θ .

T2-C4 [1.0 درجة]. عندما يكون $\theta \ll 1$ ، يكون لدينا $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$. اكتب v و u بدلالة R ، وأوجد قيمتي العددين الصحيحين p و q (أو، على نحو مكافئ، أعطِ العدد النسبي p/q).

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• T2-A1:

$$x_N = R \cos\left(\frac{\pi}{2N+1}\right), \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

• T2-B1:

$$\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}.$$

• T2-B2:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}.$$

• T2-B3:

$$a = 12 \text{ cm}.$$

• T2-C1:

$$m_A = \cot(2\theta), \quad b_A = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

• T2-C2: حتى الرتبة الأولى في $\Delta\theta$ ،

$$m_B \simeq \cot(2\theta) - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2(2\theta)}, \quad b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta\theta.$$

• T2-C3: في نهاية تقارب الشعاعين $\Delta\theta \rightarrow 0$ ،

$$X_c = R \sin^3 \theta, \quad Y_c = \frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

• T2-C4:

$$v = \frac{3}{4} R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

بفضل التناظر، نعتبر شعاعاً ساقطاً إحداثيه $x \geq 0$. لتكن ϕ الزاوية القطبية لنقطة سقوطه الأولى، مقيسة من الاتجاه الموجب للمحور x . عندئذٍ

$$x = R \cos \phi, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

بما أن الشعاع الساقط ينتشر رأسياً، فإن زاوية سقوطه بالنسبة إلى العمود المقام هي

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

يجعل قانون الانعكاس الشعاع المنعكس يصنع الزاوية نفسها θ مع العمود المقام الشعاعي. ولذلك يقابل الوتر الواصل بين نقطتي انعكاس متتاليتين زاوية مركزية مقدارها

$$\pi - 2\theta = 2\phi.$$

المثلث الذي يشكله ذلك الوتر ونصف القطر متساوي الساقين، ومن ثم تظل زاوية السقوط نفسها عند الانعكاسات المتتالية.

وبالتالي، تكون الزوايا القطبية لنقاط التماس المتتالية على الدائرة الكاملة الموافقة هي

$$\phi, \quad 3\phi, \quad 5\phi, \quad \dots, \quad (2j-1)\phi.$$

نصف الدائرة العلوي وحده هو المرآة. ويخرج الشعاع عبر القطر عندما تكون نقطة التماس التالية مع الدائرة الكاملة واقعة على القطر أو أسفله.

عند الإحداثي الحدي للسقوط x_N ، يخضع الشعاع لـ N انعكاساً ثم يصل إلى الحافة البعيدة. ولذلك تقع نقطة التماس المفترضة ذات الترتيب $(N+1)$ عند الزاوية القطبية π :

$$(2N+1)\phi_N = \pi.$$

ومن ذلك ينتج

$$x_N = R \cos \left(\frac{\pi}{2N+1} \right).$$

عند تحقق المساواة، يخرج الشعاع عند الحافة، بما يتفق مع نقاط الأطراف الموضحة في الشكل 2e. القيم الأولى هي

$$x_1 = \frac{R}{2}, \quad x_2 \approx 0.8090R, \quad x_3 \approx 0.9010R,$$

و $x_N \rightarrow R$ عندما $N \rightarrow \infty$.

T2-B1

نستخدم إحداثيات الشكل 2d. مركز الوعاء هو

$$C = \left(0, \frac{R}{2} \right).$$

يسقط شعاع زاوية سقوطه $\theta \geq 0$ على المرآة عند

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta).$$

متجه الوحدة العمودي المتجه إلى الخارج عند هذه النقطة هو

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

واتجاه انتشار الشعاع الساقط هو $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1)$.

تعطي الصيغة المتجهة لقانون الانعكاس متجه الوحدة في اتجاه الشعاع المنعكس:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{k}} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ &= (0, 1) - 2 \cos \theta (\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).\end{aligned}$$

المسافة العمودية من C إلى خط الشعاع المنعكس هذا هي مقدار الضرب الاتجاهي ثنائي الأبعاد للمتجه $C - M$ في $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned}d(\theta) &= |(C_x - M_x)\hat{u}_y - (C_y - M_y)\hat{u}_x| \\ &= \left| -R \sin \theta + \frac{R}{2} \sin 2\theta \right| \\ &= R \sin \theta (1 - \cos \theta).\end{aligned}$$

عندما $0 \leq \theta < \pi/2$ ، تزداد هذه المسافة بازدياد θ ، لأن

$$d'(\theta) = R(1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \geq 0.$$

يكون الشعاع المنعكس الحدي الذي يستقبله الوعاء مماساً له، ومن ثم $d(\theta_{\max}) = a$. لذلك

$$a = R \sin \theta_{\max} - \frac{R}{2} \sin 2\theta_{\max}.$$

بالمقارنة مع التعبير المعطى نحصل على

$$\boxed{\alpha = R, \quad \beta = -\frac{R}{2}}.$$

T2-B2

لتكن I شدة الإشعاع الساقط المنتظمة، و L طولاً مضاعفاً مشتركاً على امتداد محوري الأسطوانتين. في غياب المرآة، تكون مساحة مسقط الوعاء $2aL$ ، ومن ثم

$$P_0 = 2aLI.$$

أكبر مسافة لشعاع وارد عن المحور البصري تؤدي إلى امتصاصه هي

$$h_{\max} = R \sin \theta_{\max}.$$

الأشعة التي تحقق $|x| \leq a$ تصطدم بالوعاء مباشرة. أما الأشعة التي تحقق

$$a < |x| \leq h_{\max}$$

فتصل إلى المرآة ثم تُمتص بعد انعكاس واحد.

تجنب الأشعة الممتصة مباشرة الضوء عن الجزء الموافق لها من المرآة. ولذلك تكون مساهمتا الإشعاع المباشر والمنعكس

$$P_{\text{direct}} = 2aLI, \quad P_{\text{reflected}} = 2(h_{\max} - a)LI.$$

وفقاً للقيد المذكور، لا تأتي أي قدرة ممتصة إضافية من أشعة تخضع لانعكاسين أو أكثر. ولذلك، بالنسبة إلى المرآة المثالية، يعطي انخفاض القدرة

$$P = 2h_{\max}LI = 2R \sin \theta_{\max}LI.$$

ومن ثم

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R \sin \theta_{\max}}{a}.$$

بالتعويض بنتيجة T2-B1،

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1 - \cos \theta_{\max}}}.$$

T2-B3

يعطي الشرط $P = 5P_0$

$$1 - \cos \theta_{\max} = \frac{1}{5}, \quad \cos \theta_{\max} = \frac{4}{5}.$$

وبالتالي

$$\sin \theta_{\max} = \frac{3}{5}$$

و

$$a = R \sin \theta_{\max} (1 - \cos \theta_{\max}) = R \frac{3}{5} \frac{1}{5} = \frac{3R}{25}.$$

عند $R = 1.0 \text{ m}$

$$\boxed{a = 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}}.$$

T2-C1

من T2-B1، يمر الشعاع المنعكس بالنقطة

$$M = (R \sin \theta, R \cos \theta)$$

ويكون اتجاهه

$$\hat{\mathbf{u}} = (-\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

ولذلك يكون ميله

$$\boxed{m_A = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x} = \cot 2\theta}.$$

باستخدام إحداثيي M ،

$$\begin{aligned} b_A &= R \cos \theta - R \sin \theta \cot 2\theta \\ &= R \cos \theta - \frac{R \cos 2\theta}{2 \cos \theta} \\ &= \boxed{\frac{R}{2 \cos \theta}}. \end{aligned}$$

وفق رموز التلميح،

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad K_3 = \frac{1}{2}, \quad K_4 = 1.$$

الشعاع المنعكس المركزي، عند $\theta = 0$ ، هو المستقيم الرأسي $x = 0$. وتُفهم النتائج التي تتضمن ميله من خلال النهاية $\theta \rightarrow 0$.

T2-C2

بالنسبة إلى الشعاع B ، نستبدل θ بـ $\theta + \Delta\theta$. يعطي توسع تايلور حتى الرتبة الأولى

$$m_B = m_A + \frac{dm_A}{d\theta} \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2).$$

بما أن

$$\frac{d}{d\theta} \cot 2\theta = -2 \csc^2 2\theta,$$

فإننا نحصل على

$$\boxed{m_B \simeq \cot 2\theta - \frac{2\Delta\theta}{\sin^2 2\theta}}.$$

وبالمثل،

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R}{2 \cos \theta} \right) = \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta},$$

ومن ثم

$$b_B \simeq \frac{R}{2 \cos \theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \Delta \theta.$$

لا تحتفظ هذه التوسعات إلا بالحدود حتى الرتبة الأولى في $\Delta \theta$ ، كما هو مطلوب.

T2-C3

عند تقاطع الشعاعين المنعكسين،

$$m_A X_c + b_A = m_B X_c + b_B.$$

وبالتالي،

$$(m_B - m_A) X_c + (b_B - b_A) = 0.$$

باستخدام الفروق من الرتبة الأولى الواردة في T2-C2 وأخذ نهاية تقارب الشعاعين،

$$-\frac{2X_c}{\sin^2 2\theta} + \frac{R \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = 0.$$

لذلك

$$X_c = \frac{R \sin \theta \sin^2 2\theta}{4 \cos^2 \theta}.$$

بما أن $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$$X_c = R \sin^3 \theta.$$

بالتعويض في معادلة الشعاع A نحصل على

$$\begin{aligned} Y_c &= R \sin^3 \theta \cot 2\theta + \frac{R}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{R}{2 \cos \theta} (1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta) \\ &= \frac{R}{2} \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

يستخدم التبسيط هنا العلاقة

$$1 + \sin^2 \theta \cos 2\theta = \cos^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta).$$

تصف هاتان المعادلتان الوسيطيتان الكاوية. ويُستنتج الفرع الواقع على الجانب الآخر من المحور البصري بالتناظر: تتغير إشارة X_c ، بينما يبقى Y_c دون تغيير.

T2-C4

بالقرب من المحور البصري، نستخدم توسعات الزوايا الصغيرة

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4).$$

عندئذٍ يصبح إحداثيا الكاوية

$$X_c = R\theta^3 + O(R\theta^5)$$

و

$$Y_c = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right) (1 + 2\theta^2 + O(\theta^4))$$

$$= \frac{R}{2} + \frac{3R}{4}\theta^2 + O(R\theta^4).$$

لكلا الفرعين المتناظرين،

$$\theta^2 \simeq \left(\frac{|X_c|}{R} \right)^{2/3}.$$

بحذف θ ، نحصل إذن، في الرتبة الرائدة بالقرب من نقطة الاستدقاق، على

$$Y_c \simeq \frac{R}{2} + \frac{3}{4}R^{1/3}|X_c|^{2/3}.$$

وبالتالي

$$v = \frac{3}{4}R^{1/3}, \quad u = \frac{R}{2}, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

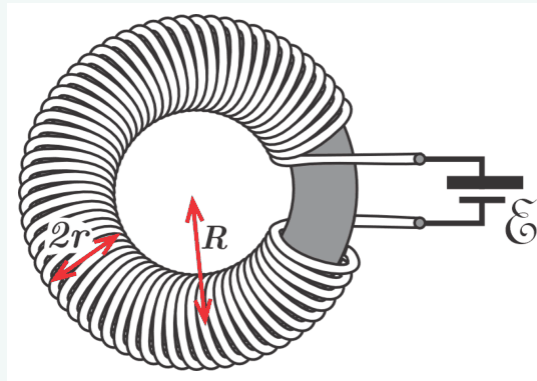
تقع نقطة الاستدقاق عند $(0, R/2)$. وينفتح فرعاه المتناظران في اتجاه تزايد y ، ويشتركان عندها في مماس رأسي.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: السعي إلى الصفر المطلق

السؤال T3 [10 درجات]: السعي إلى الصفر المطلق

يجب تنفيذ دورة التبريد بواسطة نظام ذي خصائص ملائمة لدرجات الحرارة المراد بلوغها. قبل مئة عام، في عام 1926، اقترح الكيميائي ويليام جيوك، وبصورة مستقلة عنه الفيزيائي بيتر ديبياي، استخدام الأملاح البارامغناطيسية بوصفها أنظمة مثالية لخفض درجات الحرارة إلى ما دون 1 K بكثير. وبالفعل، بدءًا من العقد التالي، أُحرزت درجات حرارة منخفضة بلغت 0.0044 K (فاندر دي هاس وغيريت فيرسما، 1935، مختبرات لايدن لدرجات الحرارة المنخفضة). تُدرّس في هذا السؤال دورة كارنو للتبريد البارامغناطيسي.



الشكل 3a.

اعتبر جسمًا حلقيًا نصف قطره المتوسط R ونصف قطره الداخلي r ، مصنوعًا من مادة بارامغناطيسية متجانسة ومتساوية الخواص، لُفَّ حوله سلك موصل معزول، ووُصل طرفاه بمصدر جهد خارجي (قوة دافعة كهربائية)، كما يوضح الشكل 3a. مقاومة السلك صغيرة إلى حد يسمح بإهمال فقد الطاقة الناجم عن تسخينه. اللّف كثيف، وعدد لفاته الكلي N ، ويُفترض أن $r \ll R$ ، بحيث تكون مقادير المجالين $\vec{H}$ و $\vec{B}$ والمغنطة $\vec{M}$ ثابتة تقريبًا في جميع أنحاء الجسم الحلقي. ليكن V حجم الجسم الحلقي و A مساحة مقطعه العرضي. فيما يلي، يُستخدم الاختصار Pm-T للإشارة إلى الجسم الحلقي البارامغناطيسي.

في المواد البارامغناطيسية، تكون $\vec{M}$ موازية لـ $\vec{H}$ ، وتتحقق العلاقة الآتية:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

اصطلاح الإشارة لانتقال الطاقة: في هذه المسألة، يُعدّ الشغل (W) والحرارة (Q) موجبين عند انتقالهما إلى داخل النظام، وسالبين عند انتقالهما إلى خارجه.

T3-A [1.0 درجة]. الشغل في Pm-T

تلميح: في المواد المغناطيسية، $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$ ، حيث I_C هو صافي التيار الحر المار عبر المساحة التي يحدها المنحنى المغلق C .

T3-A1 [0.2 درجة]. ليكن H مقدار $\vec{H}$ في الجسم الحلقي. اكتب H بدلالة N و A و V والتيار الكهربائي اللحظي I في السلك.

T3-A2 [0.6 درجة]. ليكن dW_{emf} الشغل الذي يبذله مصدر الجهد الخارجي لتغيير مقدار $\vec{B}$ بمقدار dB . اكتب dW_{emf} بدلالة V و H و dB .

T3-A3 [0.2 درجة]. يمكن تقسيم الشغل الكلي الذي يبذله مصدر الجهد، dW_{emf} ، إلى جزأين: الشغل الذي سيُبدل لتغيير المجال المغناطيسي لو كان قلب الملف الحلقي فراغاً، dW_{vac} ، والشغل المبذول على المادة البارامغناطيسية نفسها، dW . اكتب dW بدلالة μ_0 و H و V و dM .

T3-B [3.0 درجات]. الحرارة ودرجة الحرارة في Pm-T

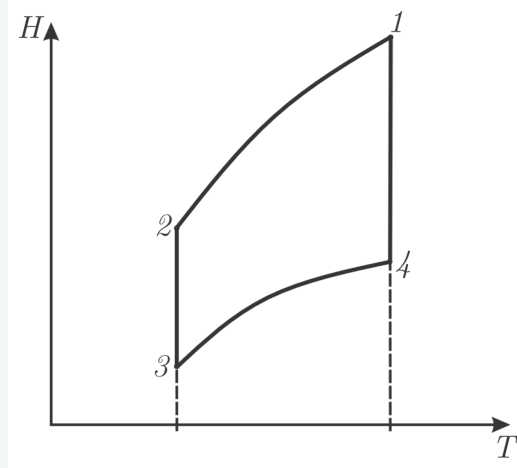
يقارن الجدول الآتي بين نظامين ديناميكين حراريين: الغاز المثالي و Pm-T. استخدم هذه المعلومات وإجابتك عن السؤال T3-A3 لحل الأسئلة الآتية. ستُستخدم هذه المعلومات أيضاً في الجزء C. إذا لم تجد إجابة لـ dW في السؤال T3-A3، فيمكنك استخدام $dW = \alpha V \mu_0 H dM$ ، حيث α عدد. حجم الجسم الحلقي البارامغناطيسي V ثابت، ولذلك لا يوجد شغل ناتج عن الضغط. فيما يلي، يرمز T إلى درجة الحرارة في جميع المواضع.

الغاز المثالي	الجسم الحلقي البارامغناطيسي
دوال الحالة: P, V ودرجة الحرارة T	دوال الحالة: H, M ودرجة الحرارة T
الثوابت: R, γ وعدد المولات n	الثوابت: K, λ وعدد المولات n
معادلة الحالة: $PV = nRT$	معادلة الحالة: $TMV = nKH$
السعة الحرارية عند ثبوت V : $C_V = nR/(\gamma - 1)$	السعة الحرارية عند ثبوت M : $C_M = n\lambda/T^2$
تحقق الطاقة الداخلية U في أي عملية العلاقة $dU = C_V dT$	تحقق الطاقة الداخلية U في أي عملية العلاقة $dU = C_M dT$

K و λ ثابتان تحددان مادة الجسم الحلقي. يمكنك استخدام المعادلات الواردة في الجدول مباشرةً دون إثباتها.

T3-B1 [1.5 درجة]. إذا تغير مقدار $\vec{H}$ من H_i إلى H_f عند درجة حرارة ثابتة T ، تنتقل طاقة Q بين Pm-T ووسطه المحيط. اكتب Q بدلالة μ_0 و n و V و K و H_i و H_f و T .

T3-B2 [1.5 درجة]. إذا تغير مقدار $\vec{H}$ أديباتياً من H_i إلى H_f ، تتغير درجة حرارة Pm-T من T_i إلى T_f . اكتب $\Delta T = T_f - T_i$ بدلالة μ_0 و n و V و K و λ و H_i و H_f و T_i .



الشكل 3b.

يوضح الشكل 3b مخطط H بدلالة T لدورة كارنو للتبريد $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ التي ينفذها Pm-T. في هذه الدورة، لتكن:

- T_h : درجة حرارة الخزان الساخن
- T_c : درجة حرارة الخزان البارد
- Q_h : القيمة المطلقة للحرارة المنتقلة إلى الخزان الساخن
- Q_c : القيمة المطلقة للحرارة الممتصة من الخزان البارد

T3-C1 [0.2 درجة]. حدّد T_h و T_c على محور T في مخطط H بدلالة T . وبين أيضاً العمليتين اللتين يحدث فيهما انتقال Q_h و Q_c ، على الترتيب.

T3-C2 [1.5 درجة]. لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 مقادير $\vec{M}$ عند رؤوس هذه الدورة. اكتب M_1 بدلالة M_2 و M_3 و M_4 .

T3-C3 [0.8 درجة]. افترض أننا نستخدم Pm-T يحتوي على 2.0 مول من كرومات البوتاسيوم لتبريد 1.00 L من الهيليوم السائل، الذي تكون درجة حرارته الابتدائية 1.00 K. لهذه المادة، $K = 1.87 \times 10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$ ، وكثافتها 2730 kg/m^3 ، وكتلتها المولية 0.19 kg/mole. ينفذ Pm-T دورة كارنو للتبريد، حيث $H_1 = 411624 \text{ A/m}$ و $H_2 = 311306 \text{ A/m}$ و $H_3 = 204618 \text{ A/m}$ و $H_4 = 240446 \text{ A/m}$. احسب درجة الحرارة النهائية للهيليوم السائل بعد دورة تشغيل واحدة. افترض أن كلاً من السعة الحرارية النوعية للهيليوم السائل $c = 100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ وكثافته $\rho = 130 \text{ kg/m}^3$ يظل ثابتاً.

T3-C4 [2.0 درجتان]. لخفض درجة حرارة جسم ذي سعة حرارية ثابتة C_c باستمرار، تُنفذ دورات كارنو مع مرور الزمن بحيث تظل القدرة P المنقولة إلى الثلاجة ثابتة. ويُفترض عندئذٍ أن درجة حرارة الخزان الساخن T_h تظل ثابتة، وأن درجة حرارة الجسم المبرد T_c تنخفض في كل دورة تشغيل بمقدار dT_c ، مع تحقق العلاقة $dQ_c/dQ_h = T_c/T_h$. إذا كان لدينا عند $t = 0$ أن $T_c = T_0$ ، فحدّد الزمن t الذي يجب أن تعمل خلاله ثلاجة كارنو حتى يصل الجسم المبرد إلى درجة حرارة $T < T_0$. عبّر عن إجابتك بدلالة C_c و T_h و P و T_0 و T .

T3-C5 [1.5 درجة]. تُقاس كفاءة الثلاجة بواسطة معامل أدائها $\text{COP} = Q_c/W$. حدّد معامل الأداء الكلي للثلاجة في السؤال T3-C4، مع احتساب جميع الدورات المنفذة حتى الزمن t . اكتب إجابتك بدلالة T_0 و T_h و T .

الثوابت الفيزيائية

قيم مرجعية لثوابت فيزيائية مختارة.

الثابت	الرمز	القيمة	الوحدات
سرعة الضوء في الفراغ	c	2.99792458×10^8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
ثابت بلانك	h	$4.135667696 \dots \times 10^{-15}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$

الثابت	الرمز	القيمة	الوحدات
ثابت بلانك المختزل	$\hbar = h/2\pi$	$6.582119569 \dots \times 10^{-16}$	$\text{eV} \cdot \text{s}$
عدد أفوغادرو	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
ثابت بولتزمان	k_B	$8.617333262 \times 10^{-5}$	$\text{eV} \cdot \text{K}^{-1}$
ثابت الغاز المثالي	R	8.31446261815324	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
الشحنة الأولية	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
ثابت الجذب العام	G	$6.67430(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
ثابت ستيفان-بولتزمان	σ	$5.670374419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
نفاذية الفراغ	μ_0	$1.25663706127(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
سمحية الفراغ	ϵ_0	$8.8541878188(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
كتلة الإلكترون	m_e	$5.1099895069(16) \times 10^{-5}$	eV/c^2
كتلة البروتون	m_p	$9.3827208943(29) \times 10^8$	eV/c^2
وحدات الكتلة الذرية	amu	$9.3149410372(29) \times 10^8$	eV/c^2

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• T3-A1 :

$$H = \frac{NAI}{V}.$$

• T3-A2 :

$$dW_{emf} = VH dB.$$

• T3-A3 :

$$dW = \mu_0 VH dM, \quad \alpha = 1.$$

• T3-B1 :

$$Q = \frac{\mu_0 n K}{2T} (H_i^2 - H_f^2).$$

• T3-B2 :

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

• T3-C1 : يقع الخط الرأسي الأيسر، المار بالحالتين 2، 3، عند T_c ؛ ويقع الخط الرأسي الأيمن، المار بالحالتين 1، 4، عند T_h . تُمتص الحرارة Q_c أثناء $3 \rightarrow 2$ ، وتُطرح الحرارة Q_h أثناء $4 \rightarrow 1$.

• T3-C2 :

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

• **T3-C3:** باستخدام $T_c \simeq 1.00 \text{ K}$ لمرحلة التبريد،

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

هذا تقدير يفترض انخفاضاً طفيفاً في درجة الحرارة، وتؤخذ فيه درجة حرارة المسار البارد المتساوي الحرارة مساويةً لدرجة حرارة الهيليوم الابتدائية؛ ولا يستخدم إلا مرحلة التبريد $2 \rightarrow 3$ (انظر الملاحظة في نهاية حل T3-C3).

• **T3-C4:**

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

• **T3-C5:**

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

الحل

نستخدم اصطلاح الإشارة المحدد في جميع ما يأتي:

$$dU = dQ + dW,$$

حيث تكون الحرارة والشغل موجبين عند تزويد المادة البارامغناطيسية بهما. تُعالج العمليات المغناطيسية بوصفها عمليات شبه ساكنة، مع تقريب المجال المنتظم $r \ll R$ وإهمال الفقد الناجم عن المقاومة.

T3-A1

نختار مساراً أمبيرياً دائرياً نصف قطره R داخل الجسم الحلقي. يرتبط هذا المسار بجميع اللفات البالغ عددها N ، لذا يكون التيار الحر المحاط به NI . ومن ثم،

$$H(2\pi R) = NI.$$

بما أن حجم الجسم الحلقي هو $V = (2\pi R)A$ ،

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = \frac{NAI}{V}.$$

T3-A2

الفيض المغناطيسي عبر كل لفة يساوي تقريباً

$$\Phi = AB.$$

يعطي قانون فاراداي قوة دافعة كهربائية مستحثة مقدارها $-NA dB/dt$. وبإهمال المقاومة، توازن القوة الدافعة الكهربائية المطبقة من المصدر هذه القوة:

$$\mathcal{E} = NA \frac{dB}{dt}.$$

وعليه، فإن الشغل الكهربائي المقدم خلال الزمن dt هو

$$dW_{emf} = \mathcal{E} I dt = NAI dB.$$

وباستخدام $NAI = VH$ من A1،

$$dW_{emf} = VH dB.$$

يعطي هذا التعبير أيضاً الإشارة الصحيحة عندما يستقبل المصدر طاقة أثناء تناقص المجال.

T3-A3

لأن المجالين والمغنطة متوازيتين،

$$dB = \mu_0 dH + \mu_0 dM.$$

وبالتالي،

$$dW_{emf} = \mu_0 V H dH + \mu_0 V H dM.$$

إذا كان القلب فراغاً، فإن $B = \mu_0 H$ ، ومن ثم يكون الشغل المرتبط بالتغير نفسه في H هو

$$dW_{vac} = \mu_0 V H dH = d\left(\frac{\mu_0 V H^2}{2}\right).$$

بطرح هذه المساهمة الخاصة بالمجال في الفراغ، يتبقى الشغل المبذول على المادة:

$$\boxed{dW = dW_{emf} - dW_{vac} = \mu_0 V H dM}.$$

إذاً، المعامل الوارد في الصيغة البديلة هو $\alpha = 1$.

T3-B1

تقتضي علاقة الطاقة الداخلية المعطاة أنه في عملية متساوية الحرارة يكون

$$dU = \frac{n\lambda}{T^2} dT = 0.$$

وعندئذٍ يعطي القانون الأول

$$dQ = -dW = -\mu_0 V H dM.$$

عند ثبوت T ، تعطي معادلة الحالة

$$M = \frac{nKH}{VT}, \quad dM = \frac{nK}{VT} dH.$$

ومن ثم

$$Q = -\frac{\mu_0 nK}{T} \int_{H_i}^{H_f} H dH,$$

وبالتالي

$$\boxed{Q = \frac{\mu_0 nK}{2T} (H_i^2 - H_f^2)}.$$

يُختزل الحجم من التعبير. تمتص إزالة المغنطة المتساوية الحرارة، $H_f < H_i$ ، حرارة؛ أما المغنطة المتساوية الحرارة فتطلق حرارة.

T3-B2

في العملية الأديباتية يكون $dQ = 0$ ، لذا

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 V H dM.$$

يتغير الآن كل من H و T . وبأخذ تفاضل معادلة الحالة نحصل على

$$dM = \frac{nK}{V} \left(\frac{dH}{T} - \frac{H}{T^2} dT \right).$$

وبالتعويض في القانون الأول نحصل على

$$\frac{n\lambda}{T^2} dT = \mu_0 nK \left(\frac{H}{T} dH - \frac{H^2}{T^2} dT \right).$$

إذاً

$$(\lambda + \mu_0 K H^2) dT = \mu_0 K H T dH,$$

أو

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 K H}{\lambda + \mu_0 K H^2} dH.$$

بالتكامل بين الحالتين الابتدائية والنهائية،

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}.$$

وعليه،

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}},$$

و

$$\Delta T = T_i \left[\sqrt{\frac{\lambda + \mu_0 K H_f^2}{\lambda + \mu_0 K H_i^2}} - 1 \right].$$

عندما يكون كل من K والسعة الحرارية موجباً، يؤدي خفض H إلى خفض T : وهذه هي إزالة المغنطة الأديباتية.

ومن الصيغ المكافئة، التي ستكون مفيدة فيما يلي، الكمية الثابتة على طول المسار الأديباتي

$$\frac{\lambda + \mu_0 K H^2}{T^2} = \text{ثابت على طول مسار أديباتي}.$$

T3-C1

الإحداثي الأفقي هو درجة الحرارة. لذلك:

- سمّ الإسقاط المتقطع الأيسر، أسفل الحالتين 2 و3، بالرمز T_c .
- سمّ الإسقاط المتقطع الأيمن، أسفل الحالتين 1 و4، بالرمز T_h .

في $3 \rightarrow 2$ ، يتناقص المجال عند ثبوت T_c . وفقاً لـ B1، يمتص الجسم الحلقي حرارة، لذا ضع Q_c ، باتجاه داخل الجسم الحلقي، بجانب هذا الجزء الرأسي المتجه إلى أسفل.

في $1 \rightarrow 4$ ، يزداد المجال عند ثبوت T_h . يُطلق الجسم الحلقي حرارة، لذا ضع Q_h ، باتجاه خارج الجسم الحلقي، بجانب هذا الجزء الرأسي المتجه إلى أعلى.

أما المرحلتان المتبقيتان فهما $1 \rightarrow 2$ ، وهي تبريد أديباتي، و $3 \rightarrow 4$ ، وهي تسخين أديباتي.

T3-C2

نعوّض

$$H = \frac{VTM}{nK}$$

في الكمية الثابتة على طول المسار الأديباتي المستنتجة في B2:

$$\frac{\lambda}{T^2} + \frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} M^2 = \text{ثابت}.$$

للمسار الأديباتي $1 \rightarrow 2$ ،

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_1^2 - M_2^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

وللمسار الأديباتي 3 → 4،

$$\frac{\mu_0 V^2}{n^2 K} (M_4^2 - M_3^2) = \lambda \left(\frac{1}{T_c^2} - \frac{1}{T_h^2} \right).$$

الطرفان الأيمنان متطابقان، لذا

$$M_1^2 - M_2^2 = M_4^2 - M_3^2.$$

وبما أن M_j مقادير، فيلزم أخذ الجذر الموجب:

$$M_1 = \sqrt{M_2^2 + M_4^2 - M_3^2}.$$

T3-C3

لإجراء التقدير لدورة واحدة، نأخذ درجة حرارة مرحلة التبريد مساوية تقريباً لدرجة حرارة الهيليوم الابتدائية:

$$T_c \simeq 1.00 \text{ K}.$$

الحرارة الممتصة أثناء 2 → 3 هي

$$Q_c = \frac{\mu_0 n K}{2 T_c} (H_2^2 - H_3^2).$$

وباستخدام القيم المعطاة،

$$Q_c = \frac{(1.25663706127 \times 10^{-6})(2.0)(1.87 \times 10^{-6})}{2(1.00)} (311306^2 - 204618^2) \text{ J},$$

فنحصل على

$$Q_c = 0.1293459 \dots \text{ J} \simeq 0.13 \text{ J}.$$

كتلة الهيليوم وسعته الحرارية هما

$$m_{\text{He}} = \rho V_{\text{He}} = (130)(1.00 \times 10^{-3}) = 0.130 \text{ kg},$$

$$C_{\text{He}} = m_{\text{He}} c = (0.130)(100) = 13.0 \text{ J K}^{-1}.$$

يعطي انخفاض الطاقة للهيليوم

$$C_{\text{He}}(T_{\text{He},f} - 1.00 \text{ K}) = -Q_c.$$

إذاً

$$T_{\text{He},f} = 1.00 \text{ K} - \frac{0.1293459 \dots \text{ J}}{13.0 \text{ J K}^{-1}} = 0.9900503 \dots \text{ K},$$

أو

$$T_{\text{He},f} \simeq 0.990 \text{ K}.$$

يبلغ الانخفاض المقدّر في درجة الحرارة نحو 1%، مما يدعم تقريب التغيّر الطفيف في هذا التقدير العددي. يُختزل حجم المادة من Q_c ،

ولذلك لا حاجة هنا إلى كثافتها وكتلتها المولية. وفي دورة دقيقة لا تكون قيم المجال الأربع المعطاة متسقة تماماً: فباستخدام

$M = nKH/(VT)$ على المسارين المتساويين الحرارة، تقتضي العلاقة في T3-C2 أن يكون

$$T_h/T_c = \sqrt{(H_1^2 - H_4^2)/(H_2^2 - H_3^2)} \approx 1.42, \text{ وعندئذٍ لا يمكن تحقيق المسارين الأديباتيين } 1 \rightarrow 2 \text{ و } 3 \rightarrow 4 \text{ إلا عند}$$

$C_M = n\lambda/T^2$ سالبة $\lambda \approx -0.062 \text{ J K mol}^{-1}$. ولا يستخدم التقدير أعلاه إلا مرحلة التبريد، ولا يعتمد على λ .

T3-C4

ليكن $dT_c < 0$ هو التغير الفعلي في درجة حرارة الجسم المبرّد. تكون الحرارة الموجبة المستخرجة منه

$$dQ_c = -C_c dT_c.$$

تعطي علاقة كارنو المحددة

$$dQ_h = \frac{T_h}{T_c} dQ_c.$$

بما أن الثلاجة تعود إلى حالتها الأصلية بعد كل دورة، فإن صافي التغير في طاقتها الداخلية يساوي صفرًا. لذا يكون الشغل المطلوب

$$dW = dQ_h - dQ_c = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c.$$

وعند ثبوت القدرة الداخلة،

$$P dt = dW = -C_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

بالتكامل من $T_c = T_0$ عند $t = 0$ إلى $T_c = T$ ،

$$Pt = -C_c \int_{T_0}^T \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dT_c.$$

ومن ثم

$$Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) + T - T_0 \right],$$

و

$$t = \frac{C_c}{P} \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

عندما $0 < T < T_0 < T_h$ ، يكون هذا الزمن موجبًا. علاوة على ذلك،

$$T \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow \infty.$$

ضمن النموذج المذكور، يتطلب بلوغ الصفر المطلق زمن تشغيل لا نهائيًا.

T3-C5

الحرارة الكلية المستخرجة من الجسم المبرّد هي

$$Q_{c,\text{total}} = C_c(T_0 - T).$$

والشغل الكلي المقدم هو

$$W_{\text{total}} = Pt = C_c \left[T_h \ln \left(\frac{T_0}{T} \right) - (T_0 - T) \right].$$

وعليه،

$$\text{COP}_{\text{overall}} = \frac{Q_{c,\text{total}}}{W_{\text{total}}} = \frac{T_0 - T}{T_h \ln(T_0/T) - (T_0 - T)}.$$

للتحقق، عند انخفاض متناهٍ في الصغر في درجة الحرارة،

$$\lim_{T \rightarrow T_0^-} \text{COP}_{\text{overall}} = \frac{T_0}{T_h - T_0},$$

وهو معامل الأداء المعتاد لثلاجة كارنو عند درجة حرارة الخزان البارد T_0 .

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.