

IPhO 2025

理论题与解答 · 法国巴黎 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2025/

题目 1: 氢与星系

本题旨在研究星系独特的物理性质，例如其动力学和结构。具体而言，我们将说明如何从银河系内部测量其质量分布。为此，我们将着重研究银河系的主要组成成分——氢。

本题始终只使用 $\hbar$ ，其定义为 $\hbar = h/2\pi$ 。

部分 A – 引言

玻尔模型

我们假设氢原子由一个质量为 m_e 的非相对论性电子绕一个固定的质子运动而构成。在本部分中，我们始终假设电子沿圆形轨道运动。

A.1 — 0.2 分

求电子在半径为 r 的圆形轨道上的速率 v 。

在玻尔模型中，我们假设电子角动量 L 的大小是量子化的，即 $L = n\hbar$ ，其中 $n > 0$ 为整数。定义

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}.$$

A.2 — 0.5 分

证明各轨道的半径为 $r_n = n^2 r_1$ ，其中 r_1 称为玻尔半径。用 α 、 m_e 、 c 和 $\hbar$ 表示 r_1 ，并计算其数值，保留 3 位有效数字。用 α 和 c 表示半径为 r_1 的轨道上的速率 v_1 。

A.3 — 0.5 分

用 e 、 ϵ_0 、 r_1 和 n 表示电子在半径为 r_n 的轨道上的机械能 E_n 。用 α 、 m_e 和 c 表示基态能量 E_1 。计算其数值，以 eV 为单位。

氢的精细结构和超精细结构

电子自旋罕见的自发翻转会导致光子发射，平均每个氢原子每 1000 万年发生一次。这种辐射可用于示踪宇宙中的氢，因此在天体物理学中具有根本性的重要意义。我们将分两步研究产生这种辐射的跃迁。

首先，考虑电子自旋与电子和质子相对运动之间的相互作用。在电子参考系中，质子在距电子 r_1 处绕电子运动。这会产生磁场 $\vec{B}_1$ 。

A.4 — 0.5 分

用 μ_0 、 e 、 α 、 c 和 r_1 表示电子所在位置处 $\vec{B}_1$ 的大小 B_1 。

其次，电子自旋产生磁矩 $\vec{\mathcal{M}}_s$ 。其大小约为 $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$ 。精细 (F) 结构与电子磁矩 $\vec{\mathcal{M}}_s$ 平行于 $\vec{B}_1$ 和反平行于 $\vec{B}_1$ 时的能量差 ΔE_F 有关。类似地，超精细 (HF) 结构与能量差 ΔE_{HF} 有关，这一能量差源于电子和质子的磁矩在平行与反平行两种取向下的相互作用。已知其近似为 $\Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ ，其中 m_p 为质子质量。

A.5 — 0.5 分

将 ΔE_F 表示为 α 和 E_1 的函数。

写出超精细结构的两个状态之间发生跃迁时所发射光子的波长 λ_{HF} ，并给出其数值，保留两位有效数字。

部分 B – 星系的旋转曲线

数据

- 千秒差距：1 kpc = 3.09×10^{19} m
- 太阳质量：1 $M_\odot$ = 1.99×10^{30} kg

考虑一个以固定点 O 为中心的球对称星系。在任意点 P 处，设 $\rho = \rho(P)$ 为体积质量密度，

$\varphi = \varphi(P)$ 为相应的引力势（即单位质量的势能）。 ρ 和 φ 都仅依赖于 $r = \|\vec{OP}\|$ 。位于 P 处、质量为 m 的物体在势场 φ 中的运动局限于一个包含 O 的平面内。

B.1 — 0.2 分

对于圆形轨道，用 r 和 $\frac{d\varphi}{dr}$ 表示沿经过 P 点的圆形轨道运动的物体的速率 v_c 。

图 1(A) 是旋涡星系 NGC 6946 的可见光图像（由亚利桑那州莱蒙山天空中心的 0.8m 舒尔曼望远镜拍摄）。图 1(B) 中的小椭圆表示该星系 v_c 的实验测量结果。中心区域 ($r < 1$ kpc) 称为核球。在这一区域内，质量分布近似均匀。红色曲线表示假设系统在核球内均匀分布、在核球外遵循开普勒模型 ($\varphi(r) = -\beta/r$ ，其中 $\beta > 0$) 时对 v_c 的预测，即认为星系的全部质量都集中在核球中。

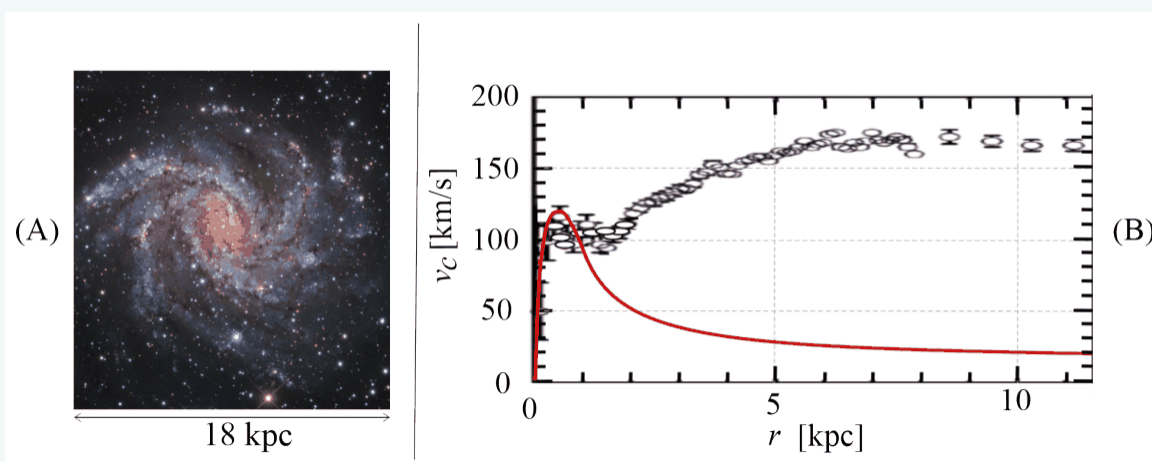


图 1: NGC 6946 星系：图像 (A) 和旋转曲线 (B)。

B.2 — 0.5 分

根据图 1(B) 中的红色旋转曲线，推算 NGC 6946 核球的质量 M_b ，以太阳质量为单位。

对比开普勒模型和实验数据，使天文学家确信有一部分质量在图像中不可见。因此，他们假设星系的实际质量密度为

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

其中 $C_m > 0$ 和 $r_m > 0$ 为常量。

B.3 — 1.8 分

证明，与式 1 中的质量密度对应的速率分布 $v_{c,m}(r)$ 可写为

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}.$$

用 C_m 、 r_m 和 G 表示 k_1 和 k_2 。

(提示: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, 以及: 当 $x \ll 1$ 时, $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$.)

分别在 $r \ll r_m$ 和 $r \gg r_m$ 时化简 $v_{c,m}(r)$ 。

证明，当 $r \gg r_m$ 时，质量密度由式 1 给出的半径为 r 的球内所包含的质量 $M_m(r)$ 可化简为仅依赖于 C_m 和 r 的表达式。

估算图 1(A) 所示范围内 NGC 6946 星系实际包含的质量。

部分 C – 银河系中的质量分布

对于旋涡星系，需要修正式 1 所对应的模型，通常认为引力势为

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

其中 z 为到银道面（定义为 $z = 0$ ）的距离， $r < r_0$ 现在表示到对称轴的径向距离， $\varphi_0 > 0$ 为待确定的常量。 r_0 和 z_0 为常量。

C.1 — 0.5 分

假设 r 保持不变，求质量为 m 的质点在此势场中沿竖直方向运动时关于 z 的运动方程。给出质点在银道面附近小振动的角频率 ω_0 ，从而证明当 $r < r_0$ 时，银道面对应稳定平衡状态。

从此处起，令 $z = 0$ 。

C.2 — 0.6 分

判断在 $r \gg r_m$ 和 $r \ll r_m$ 这两种情形中的哪一种下，通过适当定义 φ_0 ，式 1 的模型可得到形式为 $\varphi_G(r, 0)$ 的势。

在此条件下， $v_c(r)$ 不再依赖于 r 。用 φ_0 表示它。

因此，在核球以外，速率 v_c 与到银心的距离无关。我们将像天文学家那样，利用这一事实从银河系内部测量其质量分布。

这里用于天文观测的所有银河系天体，例如恒星或星云，都主要由氢构成。在核球以外，我们假设它们沿圆形轨道绕银心 C 运动。 S 为太阳的位置， E 为某个发射氢光谱辐射的银河系天体的位置。在银道面内，考虑一条与观测方向对应的视线 SE ，其方向沿单位矢量 $\hat{u}_v$ （见图 2）。

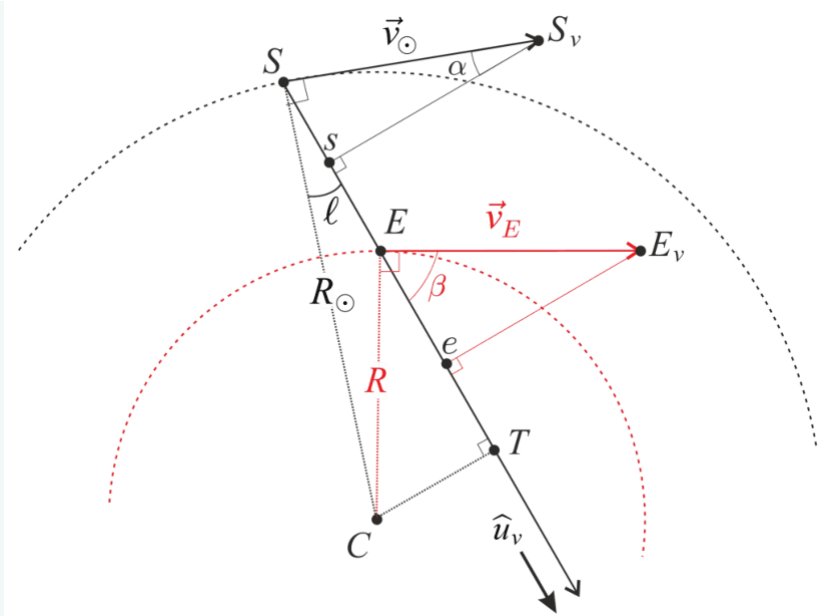


图 2：测量的几何关系

设 ℓ 为银经，即 SC 与 SE 之间的夹角。太阳在半径为 $R_{\odot} = 8.00 \text{ kpc}$ 的圆形轨道上的速度记为 $\vec{v}_{\odot}$ 。位于 E 的银河系天体以速度 $\vec{v}_E$ 沿另一个半径为 R 的圆形轨道运动。利用前面研究的 21cm 谱线的多普勒效应，可以获得辐射源 E 相对于太阳 S 的相对径向速度 $v_{rE/S}$ ：它是 $\vec{v}_E - \vec{v}_{\odot}$ 在视线方向上的投影。

C.3 — 0.7 分

用 ℓ 、 R 、 $R_{\odot}$ 和 $v_{\odot}$ 表示 $v_{rE/S}$ 。然后，用 $R_{\odot}$ 、 $v_{\odot}$ 、 ℓ 和 $v_{rE/S}$ 表示 R 。

使用射电望远镜，在银道面内朝银经 $\ell = 30^\circ$ 的方向进行观测。所用频段包含 21cm 谱线，其频率为 $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$ 。结果如图 3 所示。

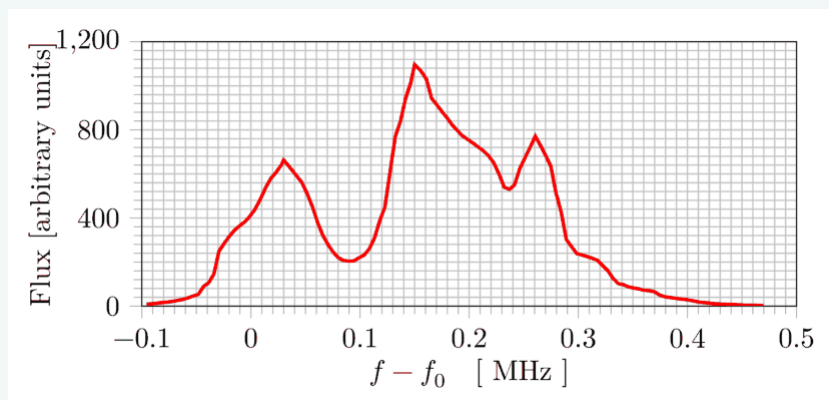


图 3：使用 EU-HOU RadioAstronomy 在 $\ell = 30^\circ$ 方向的射电频段测得的电磁信号随频移的变化

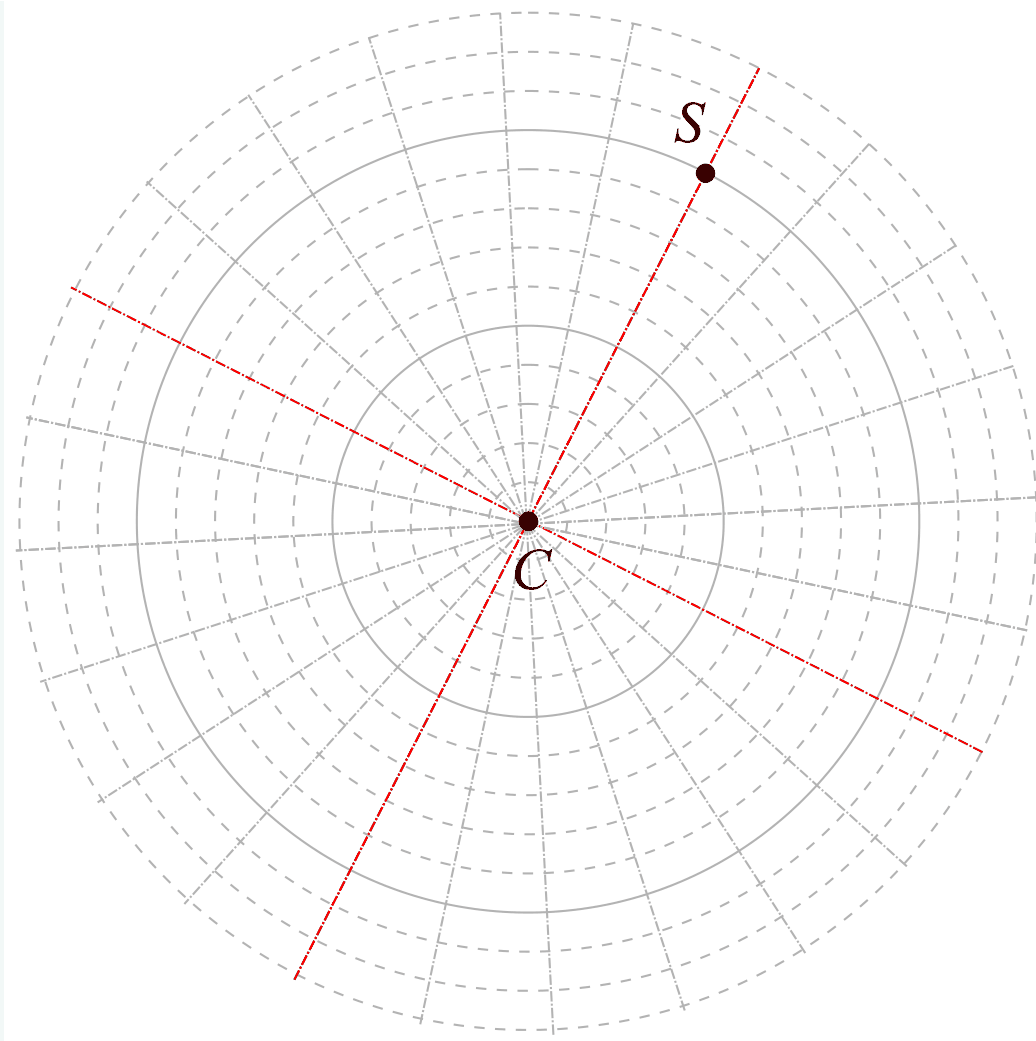
C.4 — 0.6 分

在银河系中， $v_{\odot} = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求图 3 中观测到的 3 个辐射源的相对径向速度（保留 3 位有效数字）和到银心的距离（保留 2 位有效数字）。距离应表示为 $R_{\odot}$ 的倍数。

C.5 — 0.6 分

在银河系俯视图（答题框内）上标出图 3 中观测到的辐射源的位置。

改变 ℓ 并重复测量，可以推断出什么？



部分 D – 塔利–费舍尔关系与 MOND 理论

图 1 中 NGC 6946 的外部速度曲线呈平坦形态，这是旋涡星系共同性质，如图 4（左）所示。将各星系外部的恒定速率值 $v_{c,\infty}$ 作为测得的总质量 M_{tot} 的函数作图，可得到一个有趣的相关关系，称为塔利–费舍尔关系，见图 4（右）。

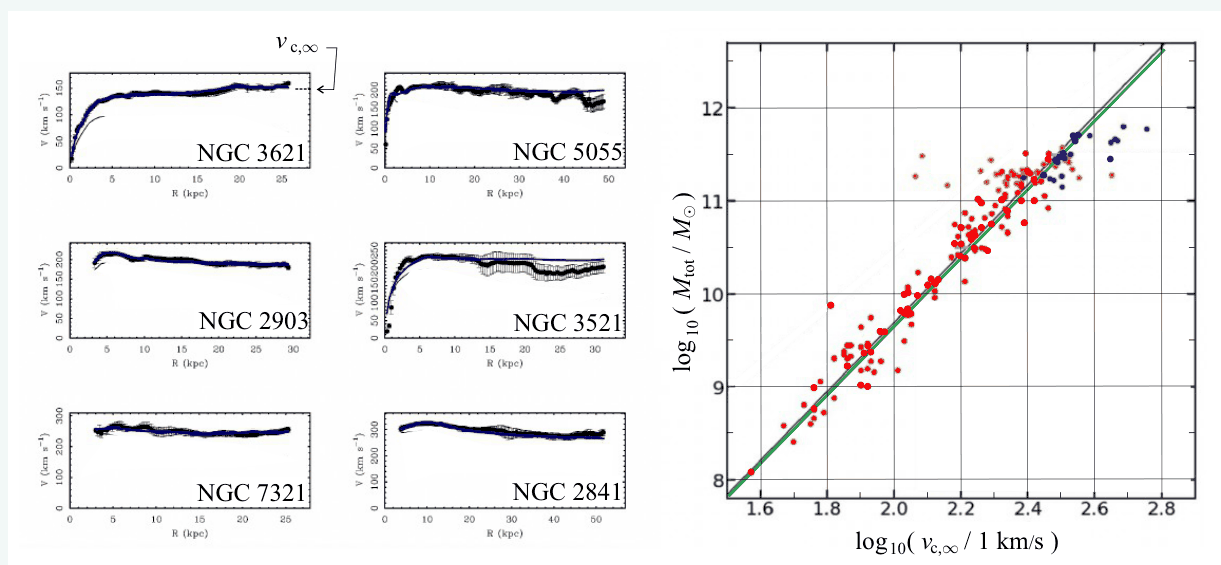


图 4。左：典型旋涡星系的旋转曲线；右：在线性坐标轴上绘制的 $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ 随 $\log_{10}(v_{c,\infty})$ 的变化。彩色点对应不同的星系和不同的巡天观测。绿色直线表示塔利—费舍尔关系，与数据的最佳拟合直线（黑色）非常吻合。

D.1 — 0.4 分

假设星系半径 R 与其质量无关，证明式 1 的模型（部分 B）给出形如 $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ 的关系，并确定 γ 和 η 。

通过计算 γ_{TF} ，将此表达式与塔利—费舍尔关系进行比较。

在加速度极低、量级为 $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的情形下，修正牛顿动力学（MOND）理论提出，可以将牛顿第二定律修正为

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$$

其中 $a = \|\vec{a}\|$ 为加速度的大小，函数 μ 定义为 $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ 。

D.2 — 0.2 分

利用图 1 中 NGC 6946 的数据，在牛顿理论框架内估算 NGC 6946 外部区域中一个物体的加速度大小 a_m 。

D.3 — 0.8 分

设质量为 m 的物体在一个固定质量 M 的引力场中，以速率 $v_{c,\infty}$ 沿半径为 r 的圆形轨道运动。

在 MOND 理论中，当 $a \ll a_0$ 时，求塔利—费舍尔关系的指数。

利用 NGC 6946 的数据和/或塔利—费舍尔定律，计算 a_0 ，以说明 MOND 适用于恰当的加速度范围。

D.4 — 0.9 分

考虑相关的不同情形，在 MOND 理论中，求由半径为 R_b 、总质量为 M 的均匀质量分布产生的引力场中，对所有 r 值均适用的 $v_c(r)$ 。

通用数据表

常量	符号	数值	单位
真空光速	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
普朗克常量	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
约化普朗克常量	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
玻尔兹曼常量	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
摩尔气体常量	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
元电荷	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
万有引力常量	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
标准重力加速度	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
斯特藩—玻尔兹曼常量	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
真空磁导率（磁学常量）	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

常量	符号	数值	单位
真空介电常数 (电学常量)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
里德伯常量	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
电子质量	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
质子质量	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
中子质量	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
原子质量常量	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
电子伏特	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

- A.2

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad v_1 = \alpha c.$$

- A.3

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

- A.4

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

- A.5

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1, \quad \lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c} \simeq 0.21 \text{ m}.$$

- B.1

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

- B.2

$$M_b \sim 1 \times 10^9 M_\odot.$$

• B.3

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m,$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3} \frac{r}{r_m}}, \quad v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq \sqrt{4\pi G C_m},$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq 4\pi C_m r, \quad M_{\text{图示范围内}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

• C.1

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

• C.2

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m, \quad v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

• C.3

$$v_{rE/S} = v_{\odot} \left(\frac{R_{\odot}}{R} - 1 \right) \sin \ell, \quad R = \frac{R_{\odot} v_{\odot} \sin \ell}{v_{\odot} \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

• C.4 按频移递增的顺序给各峰编号：

$$(v_{r,1}, v_{r,2}, v_{r,3}) = (6.33, 31.7, 54.9) \text{ km s}^{-1},$$

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.95, 0.78, 0.67) R_{\odot}.$$

• C.5 在 $\ell = 30^\circ$ 的视线上，标出它与半径分别为 $0.95R_{\odot}$ 、 $0.78R_{\odot}$ 和 $0.67R_{\odot}$ 的三个圆各自的两个交点。距太阳的近、远两组距离为

$$\frac{(d_{1,-}, d_{2,-}, d_{3,-})}{R_{\odot}} \simeq (0.0635, 0.272, 0.424),$$

$$\frac{(d_{1,+}, d_{2,+}, d_{3,+})}{R_{\odot}} \simeq (1.67, 1.46, 1.31).$$

反复进行银经扫描可揭示氢的分布和旋臂结构，但受到这种近远距离二义性的限制。

• D.1

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_{TF} \approx 3.7 \quad (\text{从图上看接近 } 4).$$

• D.2

$$a_m \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}.$$

• D.3

$$v_{c,\infty}^4 = G M a_0, \quad \gamma_{\text{MOND}} = 4, \quad a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

这是相关的加速度尺度；仅凭图中 NGC 6946 的数据，不能确立更强的不等式 $a \ll a_0$ 。

• D.4

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GM r^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GM r}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

连续延拓到原点的极限为 $v_c(0) = 0$ 。

解答

计算原子相关的数值时，我根据 α 的定义式和所给常量求得：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29735 \times 10^{-3}.$$

这与题目中印出的近似值略有不同。

A.1

库仑吸引力提供向心力：

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因此，

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2

玻尔量子化条件给出

$$m_e v_n r_n = n\hbar.$$

将此式平方，并利用 A.1 中的受力关系，得到

$$n^2 \hbar^2 = m_e^2 v_n^2 r_n^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}.$$

于是，

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 \frac{\hbar}{m_e \alpha c}.$$

因此

$$r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

对于基态轨道，

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e r_1} = \boxed{\alpha c}.$$

更一般地, $v_n = \alpha c/n$ 。由于 $\alpha \ll 1$, 非相对论近似是自治的。

A.3

取无穷远处的静电势能为零,

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

由受力关系可得

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

因此总机械能为

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

在 $r_n = n^2 r_1$ 处,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}.$$

特别地,

$$E_1 = -\frac{\alpha\hbar c}{2r_1} = -\frac{1}{2}m_e\alpha^2 c^2.$$

数值为

$$E_1 = -2.17987 \times 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}.$$

A.4

在题设的电子参考系图景中, 质子以速率 $v_1 = \alpha c$ 做圆周运动。其轨道周期和等效电流为

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}.$$

圆形电流环中心处的磁场为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_1}.$$

因此,

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

A.5

磁偶极子在磁场中的能量为

$$U = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}_1.$$

因此, 平行态和反平行态的能量分别为 $-\mathcal{M}_s B_1$ 和 $+\mathcal{M}_s B_1$ 。两者之间的正能量差为

$$\Delta E_F = 2\mathcal{M}_s B_1.$$

使用题目给定的磁矩,

$$\Delta E_F = 2 \frac{e\hbar}{m_e} \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

利用 $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ 和 $e^2/(4\pi\varepsilon_0) = \alpha\hbar c$,

$$\Delta E_F = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m_e r_1^2} = 2m_e \alpha^4 c^2.$$

由于 $E_1 = -m_e \alpha^2 c^2/2$,

$$\boxed{\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1}.$$

超精细跃迁光子满足

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\text{HF}}} = \Delta E_{\text{HF}} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F.$$

因此

$$\boxed{\lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c}}.$$

中间计算结果为

$$\Delta E_F \simeq 2.898 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad \lambda_{\text{HF}} \simeq 0.21116 \text{ m}.$$

保留两位有效数字,

$$\boxed{\lambda_{\text{HF}} = 0.21 \text{ m} = 21 \text{ cm}}.$$

B.1

引力加速度为

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

令它等于圆周运动指向内侧的加速度,

$$-\frac{v_c^2}{r} \hat{r} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

因此,

$$\boxed{v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}}.$$

B.2

在球对称核球之外, 由球壳定理可得

$$\varphi(r) = -\frac{GM_b}{r} + \text{常量}.$$

由此得到

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r}, \quad M_b = \frac{rv_c^2}{G}.$$

从红色曲线上方便读取的一组近似值为

$$r \simeq 10 \text{ kpc}, \quad v_c \simeq 20 \text{ km s}^{-1}.$$

于是

$$M_b \simeq \frac{(10 \times 3.09 \times 10^{19})(2.0 \times 10^4)^2}{6.67430 \times 10^{-11}} = 1.85 \times 10^{39} \text{ kg}.$$

以太阳质量为单位, 这约为 $9.3 \times 10^8 M_{\odot}$ 。考虑到读图精度,

$$M_b \sim 10^9 M_{\odot}.$$

B.3

半径 r 内包含的质量为

$$M_m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(x) x^2 dx = 4\pi C_m \int_0^r \frac{x^2}{r_m^2 + x^2} dx.$$

利用给定的积分公式,

$$M_m(r) = 4\pi C_m \left[r - r_m \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

由球对称性,

$$v_{c,m}^2(r) = \frac{GM_m(r)}{r} = 4\pi G C_m \left[1 - \frac{r_m}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

与题目要求的形式比较, 得到

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m.$$

对于 $r \ll r_m$, 令 $x = r/r_m$ 。则

$$1 - \frac{\arctan x}{x} \simeq 1 - \frac{x - x^3/3}{x} = \frac{x^2}{3}.$$

因此,

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3}} \frac{r}{r_m}.$$

中心区域的旋转曲线呈线性上升, 这与近似均匀密度的预期一致。

对于 $r \gg r_m$, $\arctan(r/r_m) \rightarrow \pi/2$, 而 $r_m/r \rightarrow 0$ 。因此

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{4\pi G C_m} \equiv v_{c,\infty},$$

并且

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r = \frac{v_{c,\infty}^2 r}{G}.$$

图示范围的直径约为 18 kpc, 因此取包围该范围的半径为 9 kpc。观测到的外部速率约为 170 km s^{-1} 。于是

$$M_{\text{图示范围内}} \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2 (9 \times 3.09 \times 10^{19})}{6.67430 \times 10^{-11}} \simeq 1.20 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

因此,

$$M_{\text{图示范围内}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

C.1

对于固定的 r , 竖直方向的运动方程为

$$m\ddot{z} = -m \frac{\partial \varphi_G}{\partial z}.$$

对题设引力势求导，得到

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}.$$

在 $z = 0$ 处，力为零。对于小振动， $|z| \ll z_0$ ，所以

$$e^{-z^2/z_0^2} \simeq 1.$$

线性化后的方程为

$$\ddot{z} + \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) z = 0.$$

对于 $r < r_0$ ，该系数为正。因此银道面对应稳定平衡，其小振动角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

C.2

当 $r \gg r_m$ 时，B.3 给出

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r.$$

因此，势的径向梯度为

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_m(r)}{r^2} \simeq \frac{4\pi G C_m}{r}.$$

积分并适当选取加法常量，得到

$$\varphi(r) \simeq 4\pi G C_m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

所以所需的适用情形和系数为

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m.$$

在银道面内，

$$v_c^2 = r \frac{\partial \varphi_G(r, 0)}{\partial r} = r \frac{\varphi_0}{r} = \varphi_0,$$

所以

$$v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

C.3

设 T 为从 C 向视线作垂线的垂足。由几何关系可得

$$CT = R_\odot \sin \ell.$$

太阳的切向速度在视线上的投影为

$$\vec{v}_\odot \cdot \hat{u}_v = v_\odot \sin \ell.$$

对于辐射源，其切向速度垂直于 CE 。它在视线上的投影为

$$\vec{v}_E \cdot \hat{u}_v = v_E \frac{CT}{R} = v_E \frac{R_\odot}{R} \sin \ell.$$

平坦的旋转曲线意味着 $v_E = v_\odot$ 。因此，

$$v_{rE/S} = (\vec{v}_E - \vec{v}_\odot) \cdot \hat{u}_v = \boxed{v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell}.$$

解出 R ,

$$\boxed{R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}}.$$

C.4

按照题目预期且与答案表一致的约定，使用

$$v_r = +c \frac{f - f_0}{f_0},$$

其中正值表示远离。因此，图中印出的 $f - f_0$ 轴的符号与通常约定下正的退行速度所对应频移的符号相反。

三个峰大致位于

$$\Delta f_1 = 0.030 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 0.150 \text{ MHz}, \quad \Delta f_3 = 0.260 \text{ MHz}.$$

由于

$$v_\odot \sin \ell = 220 \sin 30^\circ = 110 \text{ km s}^{-1},$$

半径公式变为

$$\frac{R}{R_\odot} = \frac{110}{110 + v_r},$$

其中 v_r 以 km s^{-1} 为单位。

辐射源，按峰频率递增排列	Δf (MHz)	v_r (km s^{-1}) , 3 位有效数字	$R/R_\odot$, 2 位有效数字
1	0.030	+6.33	0.95
2	0.150	+31.7	0.78
3	0.260	+54.9	0.67

C.5

在答题纸的示意图上，从 S 出发，在图 2 所示的一侧画出与 SC 成 30° 角的观测射线。画出或找出以 C 为圆心、半径分别为

$$0.95R_\odot, \quad 0.78R_\odot, \quad 0.67R_\odot.$$

的圆。每个圆都与观测射线相交两次。

为定量确定位置，令 $d = SE$ 。由余弦定理可得

$$R^2 = R_\odot^2 + d^2 - 2R_\odot d \cos \ell.$$

因此

$$\boxed{d_\pm = R_\odot \cos \ell \pm \sqrt{R^2 - R_\odot^2 \sin^2 \ell}}.$$

在 $\ell = 30^\circ$ 时，视线距银心最近处满足

$$CT = 0.50R_{\odot}, \quad ST = R_{\odot} \cos 30^{\circ} = 0.866R_{\odot}.$$

推算出的三个半径均大于 CT 且小于 $R_{\odot}$ ，所以每个圆的两个交点都位于从太阳出发的观测方向上。

使用 C.4 中未经舍入的半径：

辐射源	近端位置 $d_-/R_{\odot}$	远端位置 $d_+/R_{\odot}$
1	0.0635	1.67
2	0.272	1.46
3	0.424	1.31

沿射线从 S 向外移动，各候选点依次为

$$1_{\text{near}}, \quad 2_{\text{near}}, \quad 3_{\text{near}}, \quad T, \quad 3_{\text{far}}, \quad 2_{\text{far}}, \quad 1_{\text{far}}.$$

光谱可以确定每个辐射源到银心的距离，但无法区分其近端和远端位置。在不同银经重复观测，可以绘制富氢结构的分布并揭示银河系的旋臂；要消除各个辐射源的近远距离二义性，还需要额外信息。

D.1

在 B.3 的外部区域极限下，

$$M_{\text{tot}} \simeq 4\pi C_m R, \quad v_{c,\infty}^2 = 4\pi G C_m.$$

消去 C_m ，

$$M_{\text{tot}} \simeq \frac{R}{G} v_{c,\infty}^2.$$

当半径与质量无关时，

$$\boxed{\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2.}$$

对于经验幂律关系，取对数可得

$$\log_{10} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_{\odot}} \right) = \gamma_{TF} \log_{10} \left(\frac{v_{c,\infty}}{1 \text{ km s}^{-1}} \right) + \text{常量}.$$

因此， γ_{TF} 就是图 4 中的斜率。

从绿色直线上读取的近似坐标为

$$(x, y) \simeq (1.6, 8.2), \quad (2.8, 12.6).$$

由此得到

$$\boxed{\gamma_{TF} \simeq \frac{12.6 - 8.2}{2.8 - 1.6} \simeq 3.7.}$$

观测到的标度关系接近四次幂定律，明显比固定半径牛顿模型预测的二次幂关系更陡。

D.2

圆周运动的加速度大小为

$$a_m = \frac{v_c^2}{r}.$$

选取一个外部观测点，

$$v_c \simeq 170 \text{ km s}^{-1}, \quad r \simeq 10 \text{ kpc},$$

可得

$$a_m \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2}{10 \times 3.09 \times 10^{19}} = \boxed{9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}}.$$

D.3

在深 MOND 极限 $a \ll a_0$ 下,

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a/a_0}{1 + a/a_0} \simeq \frac{a}{a_0}.$$

在质量 M 产生的牛顿引力场中, 修正后的运动方程变为

$$\frac{GMm}{r^2} \simeq m \frac{a^2}{a_0}.$$

对于圆形轨道, $a = v_{c,\infty}^2/r$, 所以

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v_{c,\infty}^4}{a_0 r^2}.$$

半径消去后得到:

$$\boxed{v_{c,\infty}^4 = GMa_0}.$$

因此,

$$M = \frac{1}{Ga_0} v_{c,\infty}^4, \quad \boxed{\gamma_{\text{MOND}} = 4}.$$

这也解释了为什么渐近圆周速率与半径无关。

为通过读图估算 a_0 , 从图 4 可近似读出

$$v_{c,\infty} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}, \quad M \simeq 4 \times 10^9 M_\odot.$$

因此,

$$a_0 \simeq \frac{(1.0 \times 10^5)^4}{(6.67430 \times 10^{-11})(4 \times 10^9)(1.99 \times 10^{30})} \simeq 1.9 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

按图的精度,

$$\boxed{a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}}.$$

这与题述的 $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$ 量级一致。与 D.2 比较可得 $a_m/a_0 \sim 0.5$: 图示的星系外部数据探测到了 MOND 的加速度尺度, 但并不能确立 $a_m \ll a_0$ 。

对于 170 km s^{-1} 的渐近平坦速率, 严格的深 MOND 条件为

$$r \gg \frac{v_{c,\infty}^2}{a_0} \sim 5 \text{ kpc}.$$

越往外, 这一近似就越准确。在过渡区域附近, 必须使用完整的插值函数, 如 D.4 所示。

D.4

均匀球体的密度为

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_b^3}.$$

其内部包含的质量为

$$M(< r) = \begin{cases} M(r/R_b)^3, & r \leq R_b, \\ M, & r \geq R_b. \end{cases}$$

在题目指定的修正第二定律表述中，引力仍然服从牛顿引力定律。将单位试验质量所受引力的大小定义为

$$g_N(r) = \frac{GM(< r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GMr}{R_b^3}, & r \leq R_b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

使用完整的插值函数，

$$g_N = \mu \left(\frac{a}{a_0} \right) a = \frac{a^2}{a + a_0}.$$

于是

$$a^2 - g_N a - g_N a_0 = 0.$$

符合物理要求的非负根为

$$a = \frac{g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N}}{2}.$$

由于 $v_c^2 = ra$,

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{2} \left(g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N} \right) \right]^{1/2}.$$

代入后，得到在内外两个区域均适用的表达式：

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

这两个表达式在 $r = R_b$ 处相等，且中心处的极限为 $v_c(0) = 0$ 。

各极限情形说明了旋转曲线的形状：

区域	加速度范围	圆周速率
内部, $r < R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_b^3}} r$
内部, $r < R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq \left(\frac{GMa_0}{R_b^3} \right)^{1/4} r^{3/4}$
外部, $r > R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}$
外部, $r > R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq (GMa_0)^{1/4}$

因此，曲线从零开始，在足够接近中心处按 $r^{3/4}$ 变化，并在远处趋于常量。只有当球体表面的加速度 GM/R_b^2 比 a_0 大得足够多时，才会出现服从牛顿动力学的中间区域。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：考克斯的时钟

1765 年，英国钟表匠詹姆斯·考克斯发明了一种仅以大气压波动为能源的时钟。考克斯的时钟使用两个装有汞的容器。大气压的变化使汞在两个容器之间流动，并使两个容器发生相对运动。这种运动为时钟本身提供能量。

我们将对这一装置进行分析。在整个问题中，假设

- 地球重力场 $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ 是均匀的，其中 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ， $\vec{u}_z$ 为单位矢量；
- 所有液体均不可压缩，其密度记为 ρ ；
- 不考虑表面张力效应；
- 忽略大气压随高度的变化；
- 周围环境温度 T_a 均匀，所有过程均为等温过程。



图 1. 考克斯时钟的艺术示意图 ¹

部分 A – 拉起浸没的管子

首先考虑占据半无限空间 $z \leq 0$ 的水浴。其上方空气的压强为 $P_a = P_0$ 。将一根长度为 $H = 1 \text{ m}$ 、横截面积为 $S = 10 \text{ cm}^2$ 、质量为 $m = 0.5 \text{ kg}$ 的竖直圆柱形管浸入水浴。管子下端开口，上端封闭。管子顶端的高度记为 h ，管内水面的高度记为 z_ℓ 。忽略管壁厚度。

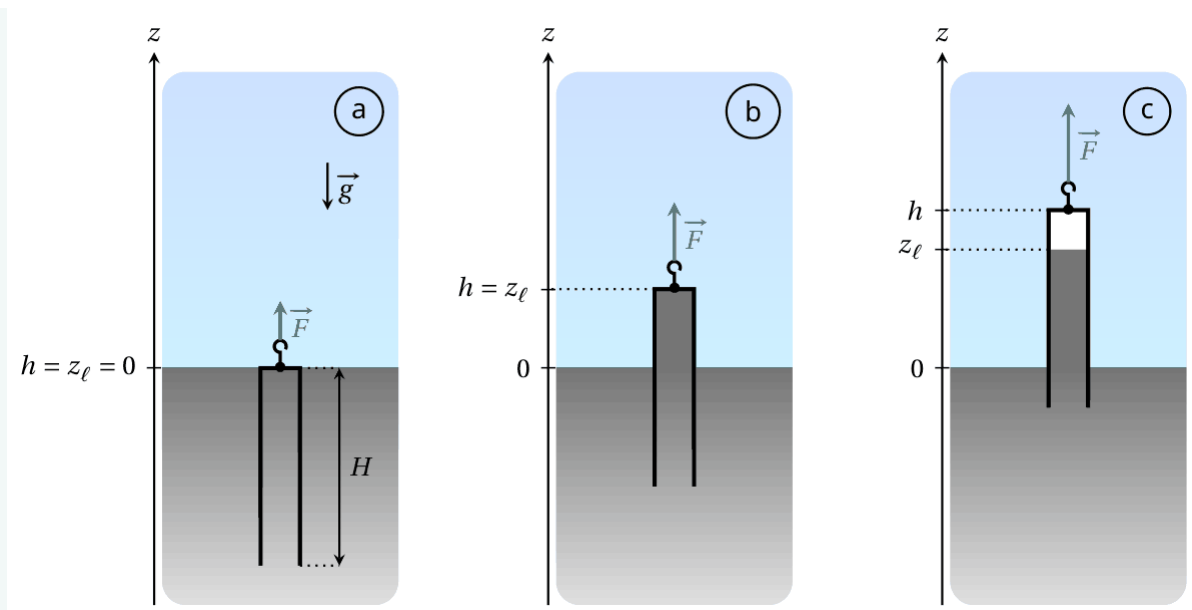


图 2. 管子在不同状态下的示意图

初始时，图 2 中的管子内没有气体，且管子顶端与水浴液面齐平：换言之， $h = 0$ 且 $z_\ell = 0$ （情形 a）。随后缓慢提起管子，直到其下端到达水浴液面。施加在管子上的拉力记为 $\vec{F} = F\vec{u}_z$ 。

A.1 — 0.2 分

对于图 2（情形 b）所示的状态，写出管子顶端处水的压强 P_w 的表达式。再写出使管子保持在该位置所需的力 $\vec{F}$ 的表达式。表达式须用 P_0, ρ, m, S, h, g 和 $\vec{u}_z$ 表示。

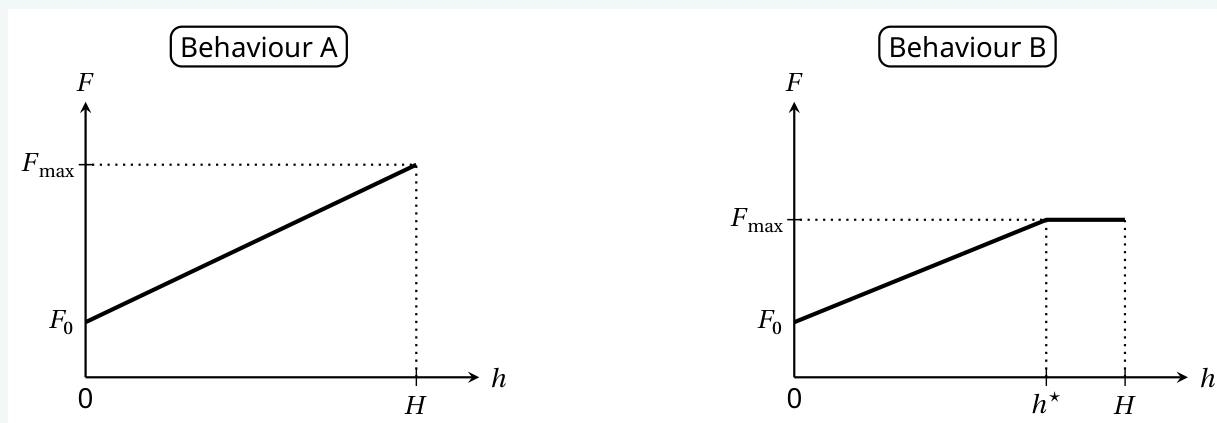
进行三次实验。每次实验均在表 1 指定的条件下，从图 2(a) 所示的初始状态开始提起管子。

实验	液体	T_a (° C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	水	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	水	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	水	99	0.96×10^3	99.8×10^3

表 1. 各次实验的实验条件及物理量数值

（ P_{sat} 表示纯流体的饱和蒸气压）

在每种情况下，研究为使管子在高度 h 处保持平衡而必须施加的力 F 的变化，外界压强固定为 $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa。可能出现两种不同的变化情况



A.2 — 0.8 分

对于每次实验，填写答题纸上的表格，指出预期出现的变化情况，并给出 $F_{\max}$ 和 h^* （适用时）的数值，其中 $F_{\max}$ 和 h^* 的定义见展示这两种变化情况的图。

Experiment	Behaviour (A or B ?)	h^* (cm)	$F_{\max}$ (N)
1			
2			
3			

当用液态汞（其性质如下表所示）替代水时，观察到变化情况 B。

液体	T_a (° C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
汞	20	13.5×10^3	0.163

A.3 — 0.3 分

在计算最大力 $F_{\max}$ 时，若相对于 P_0 忽略 P_{sat} ，写出由此产生的相对误差 ε 的表达式。给出 ε 的数值。

部分 B – 两段式气压管

从现在起，使用环境温度 $T_a = 20^\circ\text{C}$ 下的汞（密度 $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ），并取 $P_{\text{sat}} = 0$ 。

考虑一根顶部带有储液室的管子，将其建模为上下叠置的两个尺寸不同的圆柱体，如图 3 所示。

- 下部（仍称为管子）的横截面积为 S_t ，高度为 $H_t = 80 \text{ cm}$ ；
- 上部（称为膨大部）的横截面积为 $S_b > S_t$ ，高度为 $H_b = 20 \text{ cm}$ 。

将这根两段式管浸入半无限的液浴中。

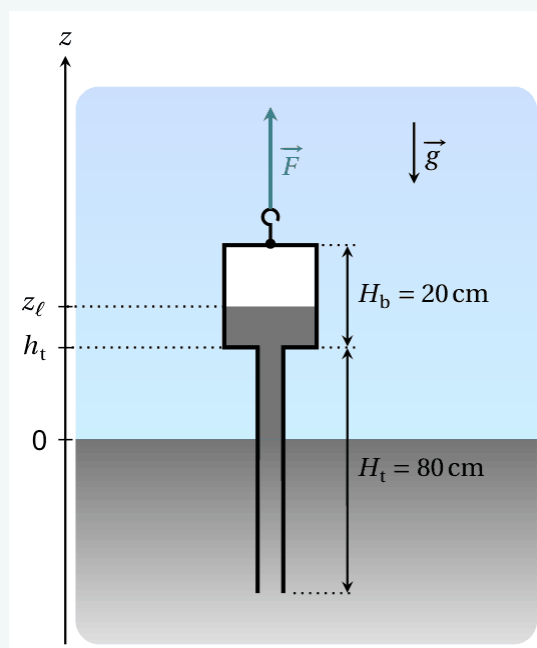


图 3. 两段式气压管示意图

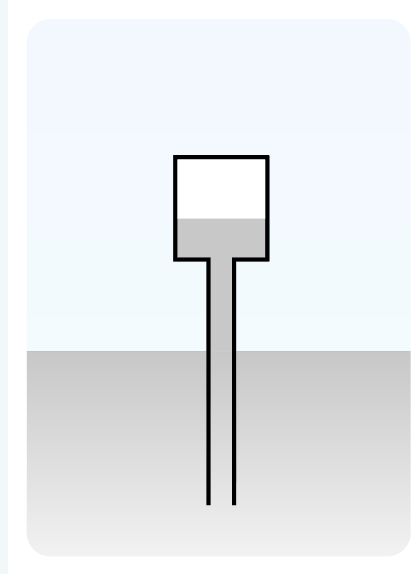
与部分 A 一样，制备系统，使管内不含空气。用管子与膨大部连接处的高度 h_t 表示管子的竖直位置。汞柱的高度仍记为 z_ℓ 。为使管子 in 图 3 所示状态下保持平衡而必须施加的力 $\vec{F}$ ，现在可以写成

$$\vec{F} = (m_{tb} + m_{add})g\vec{u}_z \quad (1)$$

其中 m_{tb} 是两段式管（未装汞时）的总质量。

B.1 — 0.3 分

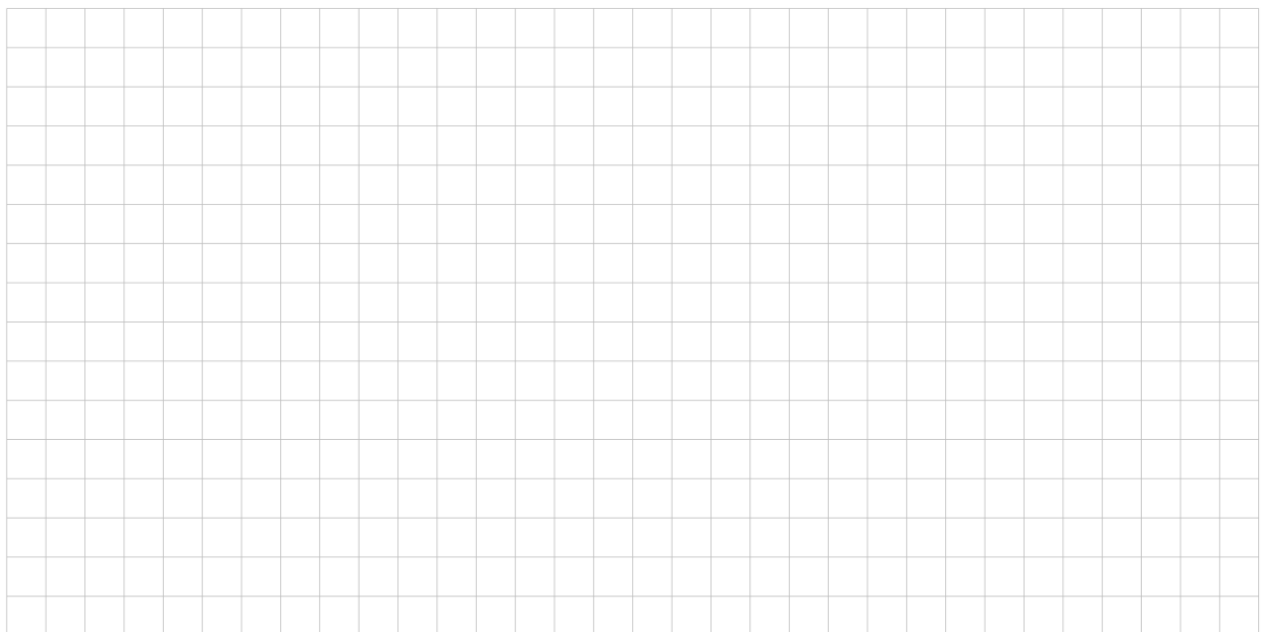
在答题纸上，将与方程 (1) 中 m_{add} 项对应的液态汞所占区域涂色。



质量 m_{add} 同时取决于高度 h_t 和大气压 P_a 。在下一问中，假设大气压固定为 $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。从系统完全浸没的状态开始，缓慢提起管子，直到其底端与液浴液面齐平。

B.2 — 1.4 分

在 $h_t \in [-H_b, H_t]$ 范围内，画出质量 m_{add} 随 h_t 变化的示意图。在图上给出各线段斜率的表达式，以及所有折点的 h_t 解析值，用 $P_0, \rho, g, S_b, S_t, H_b$ 和 H_t 表示。



在 $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ 时提起系统，当液体自由表面位于膨大部中部时停止。固定 h_t 的值，然后观察大气压变化引起的质量 m_{add} 的变化，其中大气压的变化描述为

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

其中 P_0 表示平均值， P_1 为扰动项。将 P_1 建模为振幅为 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 、周期 τ_1 为 1 周的周期性三角波函数。

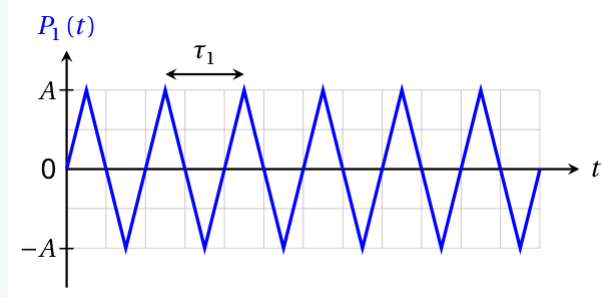


图 4. 扰动项 $P_1(t)$ 的简化模型

B.3 — 0.3 分

已知 $S_t = 5 \text{ cm}^2$ 且 $S_b = 200 \text{ cm}^2$ ，写出质量 m_{add} 随时间变化的振幅 Δm_{add} 的表达式，并给出其数值。假设液面始终位于膨大部内。

部分 C – 考克斯的时钟

考克斯设计的实际机构很复杂（图 5）。我们研究图 6 所示的简化版本，其构成如下

- 下方一个圆柱形储液槽，内装汞浴；
- 一根与部分 B 中所研究的相同的两段式气压管，管内仍完全排尽空气，浸入汞浴中；
- 储液槽和两段式管各由一根绳索悬挂。两根绳索（假设不可伸长且质量可忽略）均穿过一个理想滑轮系统，末端分别连接在同一质量为 M 的物块两侧，物块可在水平面上滑动；
- 系统内液态汞的总体积为 $V_\ell = 5 \text{ L}$ 。

各部分的高度、横截面积和质量见表 2。质量为 M 的物块的位置由其质心坐标 x 表示。考虑水平支承面与物块 M 之间的干摩擦，不区分静摩擦系数和动摩擦系数；滑动时该摩擦力的大小记为 F_s 。

两个限位挡块限制物块 M 的位移，使其满足 $-X \leq x \leq X$ （其中 $X > 0$ ）。假设 X 的取值保证

- 两段式管的底端既不会接触储液槽底部，也不会露出液浴；
- 汞柱液面的高度 z_ℓ 始终位于上方的膨大部内。



图 5. 实际的考克斯时钟²（未装汞）

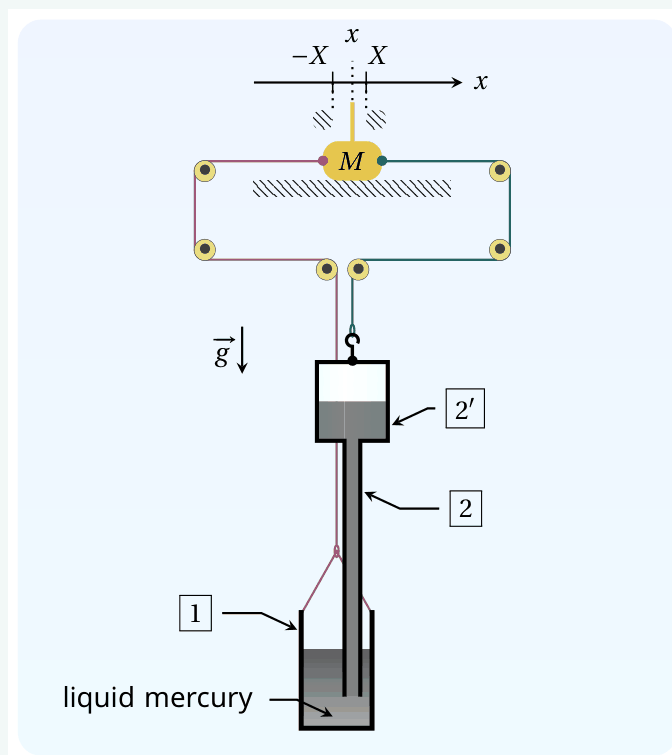


图 6. 时钟模型系统示意图

标号	名称	高度	横截面积	空载质量
[1]	储液槽	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
[2]	气压管的细管部分	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	气压管的总质量: m_{tb}
[2']	气压管的膨大部	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

表 2. 模型系统的尺寸与符号

系统在与大气接触的条件下演化，大气压如图 4 所示波动（振幅仍为 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ ，周期 $\tau_1 = 1$ 周）。初始时刻 $t = 0$ ，物块 M 静止于 $x = 0$ ，两根绳索在物块 M 两侧施加的张力平衡，此时 $P_1(0) = 0$ 。定义

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

其中最后一个表达式利用了 $S_t \ll S_b, S_c$ （在本题余下部分均假设此条件成立）。

C.1 — 1 分

求阈值 ξ^* ，使得当 $\xi > \xi^*$ 时， M 始终保持静止。

仅在下一问中，假设物块 M 暂时被固定在 $x = X$ 处。

C.2 — 1 分

当 $P_1 = 0$ 时，写出物块 M 在该位置受到的两根绳索张力的合力 $\vec{T} = T\vec{u}_x$ 的表达式，用 ρ, g, X 和相关横截面积表示。

当 $\xi < \xi^*$ 时，再次从 $x = 0$ 且 $P_1 = 0$ 出发，对于 $t \geq 0$ 可以观察到两种不同的运动状态。为区分这两种状态，需要引入另一个参数

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

C.3 — 2 分

填写答题纸上的表格，指出出现每种运动状态的条件。条件须表示为关于 ξ 和/或 λ 的不等式。此外，根据已给出的 $P_1(t)/A$ 的变化，在 $t \in [0, 3\tau_1]$ 范围内画出相应的 $x(t)/X$ 变化示意图。不要标明特殊点的坐标。

	Condition for observation	Graph of $x(t)/X$
Regime 1		
Regime 2		

在实际的考克斯时钟中，机构提供的能量通过棘轮系统储存起来，并像传统时钟那样用于提升重锤。在这里研究的简化模型中，时钟回收的能量对应于水平面施加在物块 M 上的摩擦力所耗散的能量。从现在起，假设系统的尺寸参数使其工作在能够让时钟回收能量的运动状态下。同时假设系统已进入稳定运行状态。用 W 表示干摩擦力在一个周期 τ_1 内耗散的能量，它可以仅用 F_s 和 X 表示。

在其他条件相同的情况下，可以调节 F_s 和 X ，使能量 W 最大；将最优情况下二者的值分别记为 F_s^* 和 X^* 。

C.4 — 1 分

考虑 $S_b \simeq S_c$ 且 $S_t \ll S_b$ ，求 F_s^* 和 X^* 关于 ρ, g, S_c 和 A 的表达式。写出相应的最大能量 W^* ，然后取 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 计算其数值。

用 W_{pr}^* 表示在最优情况下，大气压力在一个周期 τ_1 内对系统所做的功。

C.5 — 1.7 分

写出 W_{pr}^* 的表达式，然后计算比值 W^*/W_{pr}^* 。在 (P, V) 图上表示系统的演化过程可能有所帮助，其中 V 为系统体积。

图片来源：

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: 伦敦维多利亚与艾伯特博物馆。

题目译自官方英文原文。

答案

定义

$$L = \frac{P_0}{\rho g}, \quad D = S_b + S_c - S_t, \quad q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

• A.1

$$P_w = P_0 - \rho g h, \quad \vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

• A.2

实验	变化情况	h^* (cm), 适用时	F_{max} (N)
1	A	—	14.7
2	A	—	14.4
3	B	2.13	5.10

• A.3

$$\varepsilon = \frac{S P_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

忽略汞蒸气压会高估该力。

- B.1 将管子和膨大部内部、高于外部液浴液面的所有汞涂色。在图示状态下，

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

- B.2

$$m_{\text{add}}(h_t) = \begin{cases} \rho S_b (h_t + H_b), & -H_b \leq h_t \leq 0, \\ \rho (S_b H_b + S_t h_t), & 0 \leq h_t \leq L - H_b, \\ \rho [S_b L - (S_b - S_t) h_t], & L - H_b \leq h_t \leq L, \\ \rho S_t L, & L \leq h_t \leq H_t. \end{cases}$$

各段斜率依次为

$$\rho S_b, \quad \rho S_t, \quad -\rho (S_b - S_t), \quad 0.$$

折点位于

$$h_t = 0, \quad L - H_b \simeq 0.556 \text{ m}, \quad L \simeq 0.756 \text{ m}.$$

- B.3

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g} = 1.02 \text{ kg}.$$

- C.1

$$\xi^* = 2.$$

- C.2

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

- C.3, 对于 $\xi < 2$:

运动状态	条件	$x(t)/X$ 的变化描述
1: 停留在一个挡块处	$q > 1$, 等价于 $\xi + 2\lambda > 2$	初始为 0, 随后迅速升至 +1, 并保持不变。
2: 反复往复运动	$q < 1$, 等价于 $\xi + 2\lambda < 2$	初始为 0, 随后在 +1 和 -1 两个平台之间切换。

第一次正向行程在 $P_1/A = \xi/2$ 时开始。此后的负向行程在压强下降至 $P_1/A = -q$ 时开始，正向行程在压强上升至 $P_1/A = q$ 时开始。边界 $q = 1$ 是临界情形；理想静摩擦允许物块停留在挡块处。

- C.4 理想极限下的最优值为

$$F_s^* = \frac{S_c A}{2} \simeq 5.25 \text{ N}, \quad X^* = \frac{A}{4\rho g} \simeq 0.945 \text{ mm},$$

$$W^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g} \simeq 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} \simeq 3.97 \times 10^{-2} \text{ J},$$

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{1}{2}.$$

解答

A.1

由流体静力平衡可得

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

管内的水与水浴相连，水浴中 $z = 0$ 处有 $P = P_0$ 。因此，只要水仍与封闭顶端接触，就有

$$P_w = P_0 - \rho g h.$$

顶端外侧的压强产生向下的力 $P_0 S$ ，而下方的水产生向上的力 $P_w S$ 。竖直管壁不产生竖直方向的压力，且忽略其厚度。因此，平衡条件要求

$$F + P_w S - P_0 S - mg = 0.$$

于是

$$\vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

A.2

当顶端处的压强达到饱和蒸气压时，会出现蒸气空腔：

$$P_0 - \rho g h^* = P_{\text{sat}}.$$

因此

$$h^* = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}.$$

在此之前， $F = mg + \rho g S h$ 。蒸气空腔形成后，在给定温度下，其压强保持为 P_{sat} ，所以

$$F = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

将这些表达式合并得

$$F(h) = mg + S \min\{\rho g h, P_0 - P_{\text{sat}}\}, \quad 0 \leq h \leq H.$$

因此：

- 若 $h^* \geq H$ ，则出现变化情况 A，且 $F_{\text{max}} = mg + \rho g S H$ ；
- 若 $h^* < H$ ，则出现变化情况 B，且 $F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})$ 。

代入 $S = 10^{-3} \text{ m}^2$ 、 $H = 1 \text{ m}$ 和 $mg = 4.90 \text{ N}$ ：

实验	计算得到的饱和高度	与 H 的比较	结果
1	$\frac{100000 - 2340}{1000(9.8)} = 9.97 \text{ m}$	高于 H	A; $F_{\text{max}} = 14.7 \text{ N}$
2	$\frac{100000 - 47400}{970(9.8)} = 5.53 \text{ m}$	高于 H	A; $F_{\text{max}} = 14.406 \text{ N} \simeq 14.4 \text{ N}$

实验	计算得到的饱和高度	与 H 的比较	结果
3	$\frac{100000 - 99800}{960(9.8)} = 0.02126 \text{ m}$	低于 H	B; $h^* = 2.13 \text{ cm}$, $F_{\max} = 5.10 \text{ N}$

两幅图均从 $F_0 = mg = 4.90 \text{ N}$ 开始。

A.3

对于汞，实际最大力及其近似值为

$$F_{\max} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad F_{\max}^{(0)} = mg + SP_0.$$

近似值比实际值大 SP_{sat} 。相对于实际力的误差为

$$\varepsilon = \frac{F_{\max}^{(0)} - F_{\max}}{F_{\max}} = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})}.$$

数值上，

$$\varepsilon = \frac{10^{-3}(0.163)}{0.5(9.8) + 10^{-3}(100000 - 0.163)} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

这约为 0.000155%。

B.1

附加载荷是被提升到外部液浴液面以上的汞的重量。低于该液面的汞由液浴通过静水压力支承。

因此，在答题纸的图中，应涂色的区域为：

- 细管内从外部液浴液面到管子与膨大部连接处之间的汞；
- 膨大部内从其底部到内部自由表面之间的全部汞。

不要给外部液浴液面以下的汞涂色。对于图示状态，

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t h_t + S_b(z_\ell - h_t)].$$

由于内部液面上方的压强为零，

$$z_\ell = \frac{P_a}{\rho g}.$$

因此，一个等价且有用的表达式为

$$m_{\text{add}} = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t$$

该式适用于自由表面位于膨大部内、且连接处高于外部液浴液面的情形。

B.2

引入气压高度

$$L = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 0.75586 \text{ m}.$$

对于给定的尺寸，

$$0 < L - H_b < L < H_t.$$

在顶端到达 L 之前，管内始终完全充满液体。此后，内部自由表面保持在 $z_\ell = L$ ，而管子继续上升。
从几何关系上可分为四个不同区间。

1. $-H_b \leq h_t \leq 0$ 。

只有膨大部中高度为 $h_t + H_b$ 的部分位于液浴液面以上：

$$m_{\text{add}} = \rho S_b (h_t + H_b).$$

图线从 $(-H_b, 0)$ 开始，斜率为 ρS_b 。

2. $0 \leq h_t \leq L - H_b$ 。

整个膨大部以及长度为 h_t 的细管位于液浴液面以上，且都充满汞：

$$m_{\text{add}} = \rho (S_b H_b + S_t h_t).$$

图线继续上升，但斜率减小为 ρS_t 。

3. $L - H_b \leq h_t \leq L$ 。

汞上方形成真空，汞的液面保持在膨大部内的高度 L 处：

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (L - h_t)].$$

斜率为 $-\rho(S_b - S_t)$ ，所以图线下降。

4. $L \leq h_t \leq H_t$ 。

膨大部内已无汞，内部自由表面位于细管内：

$$m_{\text{add}} = \rho S_t L = \frac{S_t P_0}{g}.$$

图线为水平线。

图线连续，其顶点和端点如下：

h_t	m_{add}
$-H_b$	0
0	$\rho S_b H_b$
$L - H_b$	$\rho [S_b H_b + S_t (L - H_b)]$ ，最大值
L	$\rho S_t L$
H_t	$\rho S_t L$

三个折点的横坐标为

$$0, \quad \frac{P_0}{\rho g} - H_b, \quad \frac{P_0}{\rho g},$$

数值分别为 0、55.6 cm 和 75.6 cm。

B.3

在指定的固定位置，自由表面始终位于膨大部内。因此

$$m_{\text{add}}(t) = \frac{S_b [P_0 + P_1(t)]}{g} - \rho (S_b - S_t) h_t.$$

只有第一项发生变化，所以振幅为

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g}.$$

代入 $S_b = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$,

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{0.0200(500)}{9.8} = 1.02 \text{ kg}.$$

这是相对于平均值的振幅；峰峰值为 2.04 kg 。相应的液面高度振幅为

$$\frac{A}{\rho g} = 3.78 \text{ mm},$$

远小于膨大部中点到任一端的距离 10 cm 。

C.1

首先求任意 x 和 P_1 下的绳索张力差。

用 z_s 表示外部汞液面的高度， z_c 表示储液槽底部的高度。由绳索的布置可知，物块向右位移 x 时：

- 储液槽上升 x ；
- 气压管下降 x 。

因此

$$z_c = z_{c0} + x, \quad h_t = h_{t0} - x.$$

由流体静力平衡可得

$$z_\ell - z_s = \frac{P_a}{\rho g}.$$

外部液面以上的汞的质量为

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t(h_t - z_s) + S_b(z_\ell - h_t)] = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)(h_t - z_s).$$

由于管壁体积可忽略，汞的体积守恒可写为

$$V_\ell = S_c(z_s - z_c) + \frac{m_{\text{add}}}{\rho}.$$

记 $\delta m = m_{\text{add}} - m_{\text{add},0}$ ，由此可得

$$\delta z_s = x - \frac{\delta m}{\rho S_c}.$$

用当前的 m_{add} 表达式减去初始表达式，得到

$$\delta m = \frac{S_b P_1}{g} + \rho(S_b - S_t)(x + \delta z_s).$$

因此，

$$\delta m = \frac{S_b S_c}{(S_b + S_c - S_t)g} P_1 + \frac{2\rho S_c(S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} x.$$

在静止状态下，管子一侧的绳索张力为

$$T_{\text{tb}} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g,$$

而储液槽一侧的张力为

$$T_c = (m_c + \rho V_\ell - m_{\text{add}})g.$$

二者的初始差值为零。因此，以向右为正，作用在 M 上的带符号的力为

$$T = T_{\text{tb}} - T_c = 2g\delta m.$$

定义

$$K = \frac{S_b S_c}{S_b + S_c - S_t}, \quad \alpha = \frac{2\rho g(S_b - S_t)}{S_b}.$$

所得的力的关系式为

$$\boxed{T = 2K(P_1 + \alpha x)}.$$

给定的参数满足

$$F_s = KA\xi, \quad \alpha X = A\lambda.$$

在 $x = 0$ 处，整个大气压变化周期中力的最大大小为 $2KA$ 。静摩擦力可在整个周期内平衡该力，条件是

$$F_s \geq 2KA \iff \xi \geq 2.$$

因此，所求阈值为

$$\boxed{\xi^* = 2}.$$

C.2

在力的关系式中令 $P_1 = 0$ 且 $x = X$ ，得到

$$\boxed{\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x}.$$

利用 $S_t \ll S_b, S_c$,

$$\boxed{\vec{T} \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x}.$$

正号具有重要意义：向右的位移会产生进一步向右的力。一旦摩擦力无法再使物块保持静止，该平衡在力学上就是不稳定的。

C.3

画示意图时，采用大气压缓慢驱动的极限：与一周的压强变化周期相比，挡块之间的运动非常迅速。挡块使运动中的系统停止。

记

$$p = \frac{P_1}{A}, \quad y = \frac{x}{X}.$$

则

$$\frac{T}{KA} = 2(p + \lambda y), \quad \frac{F_s}{KA} = \xi.$$

初始时 $y = 0$ ，且 p 从零开始增大。物块开始向右运动时， p 超过的阈值为

$$p = \frac{\xi}{2}.$$

由于 $\partial T / \partial x = 2K\alpha > 0$ ，向右运动会使驱动力增大。物块迅速到达 $y = +1$ 。

在右侧挡块处，物块向左脱离挡块需要满足

$$T < -F_s.$$

因此

$$2(p + \lambda) < -\xi \iff p < -\left(\lambda + \frac{\xi}{2}\right).$$

定义

$$q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

若 $q > 1$ ，压强永远不会降到足以使物块脱离挡块的程度。若 $q < 1$ ，则在每个压强下降的半周期内，物块都会脱离挡块。类似地，在左侧挡块处的脱离条件为 $p > q$ 。

因此，两种运动状态为：

运动状态	条件	示意图的精确描述
1: 始终停留在右侧挡块处	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda > 2$	初始画为 $x/X = 0$ ，随后在第一次压强上升段的 $p = \xi/2$ 处迅速升至 $+1$ 。此后在 $+1$ 处保持水平，直到 $3\tau_1$ 。
2: 在挡块之间反复运动	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda < 2$	开始时画出相同的初始上升过程。随后画出位于 $+1$ 和 -1 的水平平台；每当下降的压强达到 $p = -q$ 时，以迅速向下的跃迁连接，每当上升的压强达到 $p = q$ 时，以迅速向上的跃迁连接。

为明确标出跃迁位置，令 $s = t/\tau_1$ 。第一次正向跃迁发生在

$$s = \frac{\xi}{8}.$$

在循环运动状态下，所要求的时间区间内，负向跃迁发生在

$$s = \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{3}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{5}{2} + \frac{q}{4},$$

此后的正向跃迁发生在

$$s = 1 + \frac{q}{4}, \quad 2 + \frac{q}{4}.$$

这些信息完整确定了所要求的三个周期的示意图。

在 $q = 1$ 时，只有在压强极值处才恰好达到脱离阈值。严格理想的静摩擦可以使物块保持在挡块处；严格不等式 $q < 1$ 保证持续的循环运动。

C.4

在稳定的循环运动状态下，物块每个周期从一个挡块运动到另一个挡块，再返回。总滑动路程为 $4X$ ，所以

$$\boxed{W = 4F_s X}.$$

在 $S_b \simeq S_c$ 且 $S_t \ll S_b$ 时，

$$\xi \simeq \frac{2F_s}{S_c A}, \quad \lambda \simeq \frac{2\rho g X}{A}.$$

循环运动条件变为

$$\xi + 2\lambda < 2 \iff F_s < S_c(A - 2\rho g X).$$

对于固定的 X ，当 F_s 趋近这一上界时，能量趋近可达到的最大值。其极限包络为

$$W(X) = 4S_c X(A - 2\rho g X).$$

求导得

$$\frac{dW}{dX} = 4S_c(A - 4\rho g X).$$

因此，最优值为

$$\boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g}, \quad F_s^* = \frac{S_c A}{2}}.$$

等价地，

$$\xi_{\text{opt}} = 1, \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}.$$

于是

$$\boxed{W^* = 4F_s^* X^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g}}.$$

代入 $S_c = 0.0210 \text{ m}^2$,

$$F_s^* = \frac{0.0210(500)}{2} = 5.25 \text{ N},$$

$$X^* = \frac{500}{4(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m},$$

以及

$$\boxed{W^* = \frac{0.0210(500)^2}{2(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}}.$$

严格来说，这些数值位于切换的临界边界上。它们给出的是从循环运动一侧趋近时的理想极限最大值；为确保可靠运行，需要在该边界内留出少量裕度。

C.5

与大气压力做功有关的体积包括汞上方封闭的真空空间。液体体积和容器材料的体积均为常量，所以

$$V = V_{\text{constant}} + V_{\text{vac}}, \quad V_{\text{vac}} = S_b(h_t + H_b - z_\ell).$$

采用与 C.4 相同的近似：

$$S_b = S_c = S, \quad S_t = 0.$$

于是，C.1 中推导的守恒关系与流体静力学关系给出

$$\delta z_s = -\frac{P_1}{2\rho g}, \quad \delta z_\ell = \frac{P_1}{2\rho g}.$$

由于 $\delta h_t = -x$,

$$\boxed{V = V_{\text{ref}} - Sx - \frac{S}{2\rho g} P_1}.$$

大气压力对系统所做的功为

$$W_{\text{pr}} = - \oint P_a dV.$$

代入得

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_a dx + \frac{S}{2\rho g} \oint P_a dP_1.$$

第二个积分在一个闭合循环上为零。此外， $P_0 \oint dx = 0$ 。因此

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_1 dx.$$

在极限最优情况下， $q = 1$ 。正向行程发生在 $P_1 = +A$ 时，位移为 $\Delta x = 2X^*$ ；负向行程发生在 $P_1 = -A$ 时，位移为 $\Delta x = -2X^*$ 。因此，

$$W_{\text{pr}}^* = S[A(2X^*) + (-A)(-2X^*)] = 4SAX^*.$$

于是

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

在以 V 为横轴、 P_a 为纵轴的图中，循环是一个平行四边形：

- 在每个固定挡块处， $dV/dP_a = -S_c/(2\rho g)$ ，得到两条相互平行的倾斜分支；
- 两条分支的水平间距为 $2S_c X^*$ ；
- 在 $P_0 + A$ 和 $P_0 - A$ 处，等压行程将它们连接起来；
- 循环沿逆时针方向进行，系统获得的功为正，等于该平行四边形的面积，

$$(2A)(2S_c X^*) = 4S_c A X^*.$$

最后，

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{S_c A^2/(2\rho g)}{S_c A^2/(\rho g)} = \frac{1}{2}.$$

另一半能量在快速行程中转化为动能，并在运动系统被挡块制停时耗散。

解答已与官方解答核对。

题目 3：香槟！

警告： 过量饮酒有害健康，未达到法定饮酒年龄者禁止饮酒。

香槟是一种法国起泡葡萄酒。糖的发酵在瓶中产生二氧化碳 (CO_2)。液相中 CO_2 的摩尔浓度 c_ℓ 与气相中的分压 P_{CO_2} 满足关系 $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$ ，这称为亨利定律，其中 k_H 称为亨利常数。

数据

- 香槟的表面张力 $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- 液体密度 $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 时的亨利常数， $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 时的亨利常数， $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- 大气压 $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- 气体均为理想气体，绝热指数为 $\gamma = 1.3$



图 1. 一杯香槟。

部分 A. 气泡的成核、生长和上升

打开一瓶温度为 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 的香槟后，立即将其倒入杯中。液体中的压强为 P_0 ，温度保持为 T_0 不变。溶解的 CO_2 的浓度 c_ℓ 超过平衡浓度，我们研究一个 CO_2 气泡的成核过程。记其半径为 a ，内部压强为 P_b 。

A.1 — 0.2 分

用 P_0 、 a 和 σ 表示压强 P_b 。

在液体中，溶解的 CO_2 的浓度随到气泡的距离而变化。在远离气泡处，浓度恢复为 c_ℓ ，记气泡表面附近的浓度为 c_b 。根据亨利定律， $c_b = k_H P_b$ 。此外，在整道题中均假设气泡只含有 CO_2 。

由于 $c_\ell \neq c_b$ ， CO_2 分子从高浓度区域向低浓度区域扩散。我们还假设，液相中任何到达气泡表面的分子都会转移到气相中。

A.2 — 0.5 分

用 P_0 、 σ 、 c_ℓ 和 c_0 表示临界半径 a_c ，半径超过该值的气泡预期会生长，其中 $c_0 = k_H P_0$ 。计算 $c_\ell = 4c_0$ 时 a_c 的数值。

实际上，气泡主要从预先存在的气穴生长而来。因此，考虑一个初始半径为 $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$ 的气泡。记单位时间、单位面积内通过气泡表面转移的 CO_2 的物质的量为 j 。对于 j ，有两种可能的模型。

- 模型 (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$ ，其中 D 是 CO_2 在液体中的扩散系数。
- 模型 (2) $j = K(c_\ell - c_b)$ ，其中 K 在此为常数。

实验发现，气泡半径 $a(t)$ 随时间的变化如图 2 所示。这里 $c_\ell \approx 4c_0$ ，且由于气泡足够大，已经肉眼可见，表面张力引起的附加压强可以忽略，因而 $P_b \approx P_0$ 。

A.3 — 1.2 分

用 a 、 P_0 、 T_0 和理想气体常数 R 表示气泡中 CO_2 的物质的量 n_c 。分别求出两种模型下的 $a(t)$ 。指出哪种模型能够解释图 2 中的实验结果。根据你的回答，计算 K 或 D 的数值。

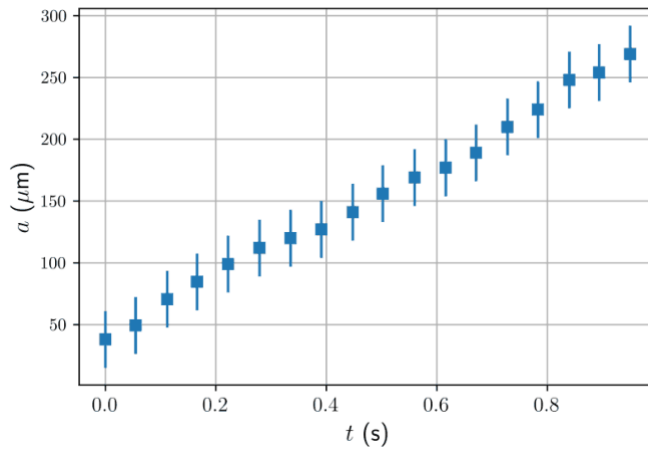


图 2. 一杯香槟中 CO_2 气泡半径随时间的变化（改编自 [1]）。

最终，气泡脱离杯底，并在上升过程中继续生长。图 3 展示了一列气泡。这列气泡具有相同的初始半径，并以恒定频率 $f_b = 20 \text{ Hz}$ 产生。

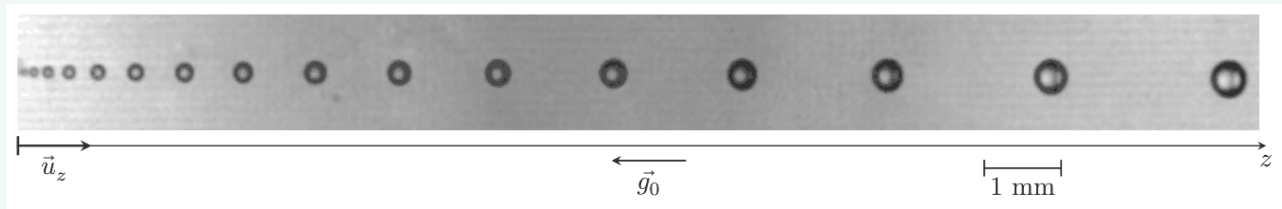


图 3. 一系列气泡。为适应页面布局，照片已旋转至水平方向（改编自 [1]）。

在此处研究的速度范围内，半径为 a 的气泡以速度 v 在动力黏度为 η 的液体中运动时，所受的阻力 F 由斯托克斯定律 $F = 6\pi\eta av$ 给出。测量表明，在任意时刻，都可以认为气泡以其终端速度运动。

A.4 — 0.8 分

写出竖直上升的气泡所受主要力的表达式。求出 $v(a)$ 的表达式。利用 ρ_ℓ 、 g_0 以及从图 3 中测得的量，估算 η 的数值。

气泡以速率 $q_a = \frac{da}{dt}$ 准稳态生长的规律在上升过程中仍然适用。

A.5 — 0.5 分

用上升高度 H_ℓ 、生长速率 $q_a = \frac{da}{dt}$ 以及所需的任何常数，表示气泡到达自由液面时的半径 a_{H_ℓ} 。假设 $a_{H_\ell} \gg a_0$ 且 q_a 为常数，给出 $H_\ell = 10 \text{ cm}$ 、 q_a 取图 2 所对应值时 a_{H_ℓ} 的数值。

气泡的成核位点共有 N_b 个。假设气泡以恒定频率 f_b 在一杯香槟的杯底成核（液体高度为 H_ℓ ，体积为 V_ℓ ），且 a_0 仍可忽略。忽略 CO_2 在自由液面处的扩散。

A.6 — 1.1 分

写出 $c_\ell(t)$ 的微分方程。由此方程求出液体中溶解的 CO_2 浓度衰减的特征时间 τ 。

部分 B. 气泡破裂时的声发射

小气泡到达自由液面时近似为球形。当隔开气泡与空气的液膜变得足够薄时，液膜上形成一个半径为 r 的圆孔，并在表面张力驱动下迅速扩大（图 4 左）。圆孔以恒定速率 v_f 扩大（图 4 右）。孔缘外侧的液膜保持静止，厚度 h 恒定。

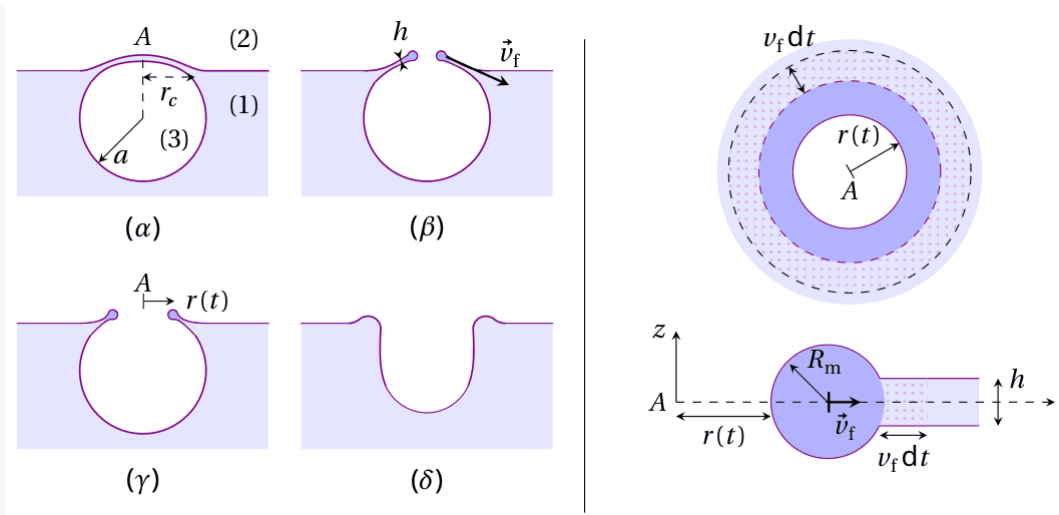


图 4. (左) (α) 液面处的气泡：(1) 液体，(2) 压强为 P_0 的空气，(3) 压强为 P_b 的 CO_2 ；(β) 和 (γ) 液膜回缩，其中孔缘用深蓝色表示；(δ) 气泡塌陷。(右) t 时刻液膜的回缩。上：从上方观察已穿孔液膜的示意图。下：孔缘及回缩液膜的截面。在 dt 内，孔缘收集附近的液体（虚线所示）。

由于耗散过程，孔缘及被收集液体在 t 与 $t + dt$ 之间的表面能之差仅有一半转化为动能。我们进一步假设，与液膜表面积的变化相比，孔缘表面积的变化可以忽略。

B.1 — 1.1 分

用 ρ_ℓ, σ 和 h 表示 v_f 。

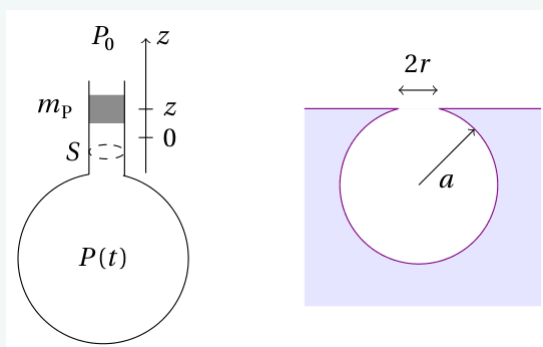


图 5. (左) 亥姆霍兹共振器。(右) 作为振子的气泡。

液膜破裂时，气泡释放内部压力并发出声音。我们用亥姆霍兹共振器来模拟这一声发射过程：一个空腔通过截面积为 S 的颈部开口与压强为 P_0 的大气相通（图 5 左）。颈部中有一个质量为 m_p 的物体，空腔内的气体绝热膨胀或压缩时产生的压力使其做小振幅的位移振荡。与压力相比，作用在 m_p 上的重力可以忽略。设 $z = 0$ 、 $P = P_0$ 时，质量为 m_p 的物体下方气体的体积为 V_0 。

B.2 — 1.1 分

写出 m_p 的振动频率 f_0 的表达式。提示：当 $\varepsilon \ll 1$ 时， $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ 。

亥姆霍兹模型可用于半径为 a 的气泡。 V_0 为封闭气泡的体积。根据文献，等效活塞的质量为 $m_p = 8\rho_g r^3/3$ ，其中 r 为圆形开口的半径， $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 为气体密度（图 5 右）。在破裂过程中， r 从 0 增大到 r_c ，其中

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

与此同时，发出的声音的频率不断增大，直至最大值 40 kHz ，破裂时间为 $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$ 。

B.3 — 1.1 分

求气泡半径 a 以及将气泡与大气隔开的香槟液膜厚度 h 。

部分 C. 开启香槟

一瓶香槟中， CO_2 的总物质的量为 $n_T = 0.2 \text{ mol}$ ，其中一部分溶解在体积为 $V_L = 750 \text{ mL}$ 的香槟液体中，另一部分以气体形式存在于瓶塞下方体积为 $V_G = 25 \text{ mL}$ 的空间内（图 6 左）。 V_G 中只含有 CO_2 。 CO_2 两相之间的平衡遵循亨利定律。假设开瓶时气态 CO_2 的快速膨胀是绝热可逆的。环境温度 T_0 和压强 $P_0 = 1 \text{ bar}$ 保持不变。

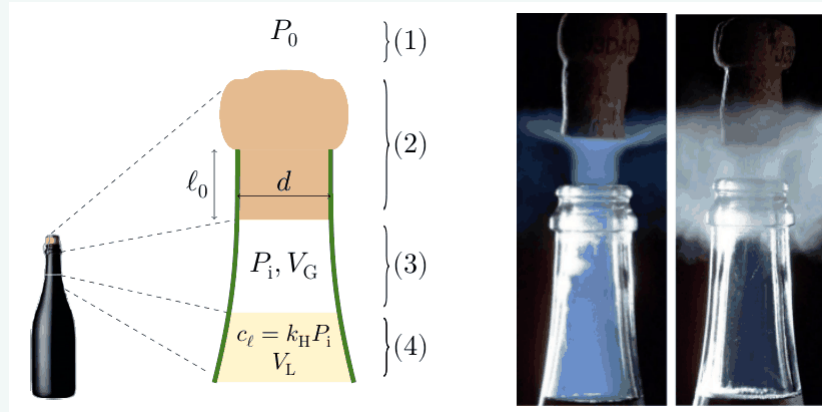


图 6. 左：传统瓶颈：(1) 周围空气，(2) 软木塞，(3) 顶部气相空间，(4) 香槟液体。右：在两种不同温度下开瓶时观察到的两种现象（改编自 [2]）。

C.1 — 0.4 分

给出 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 和 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 时瓶内气态 CO_2 压强 P_i 的数值。

香槟生产中的另一个步骤（此处未作描述）使 P_i 取下列数值，后续问题中将使用这些数值：在 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 时， $P_i = 4.69 \text{ bar}$ ；在 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 时， $P_i = 7.45 \text{ bar}$ 。

开瓶时，根据 T_0 的不同，可以观察到两种不同的现象（图 6 右）。

- 或者出现蓝色雾，这是由于形成了固态 CO_2 晶体（但水的凝结受到抑制）；
- 或者出现灰白色雾，这是由于瓶颈周围空气中的水蒸气凝结。在后一种情况下，不形成 CO_2 固体晶体。

CO_2 固气相变的饱和蒸气压 $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ 满足：

$$\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$$

其中 T 的单位为 K， $A = 6.81$ 、 $B = 1.30 \times 10^3 \text{ K}$ 、 $C = -3.49 \text{ K}$ 。

C.2 — 0.7 分

假设没有发生相变，分别给出 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 和 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 时，开瓶后膨胀结束时 CO_2 气体温度 T_f 的数值。

选出正确的陈述（可多选）：

1. 在 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 时，开瓶会出现灰白色雾。
2. 在 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 时，开瓶会出现蓝色雾。

3. 在 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 时, 开瓶会出现灰白色雾。
4. 在 $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 时, 开瓶会出现蓝色雾。

开瓶时, 软木塞弹出。现在确定它所能达到的最大高度 H_c 。假设瓶颈对软木塞的摩擦力 F 为 $F = \alpha A$, 其中 A 为接触面积, α 为待定常数。初始时, 压力略大于摩擦力。软木塞的质量为 $m = 10\text{ g}$, 直径为 $d = 1.8\text{ cm}$, 最初嵌在瓶颈中的圆柱部分长度为 $\ell_0 = 2.5\text{ cm}$ 。软木塞离开瓶颈后, 可以忽略压力的合力。

C.3 — 1.3 分

给出外界温度为 $T_0 = 6^\circ\text{C}$ 时 H_c 的数值。

[1] Liger-Belair 等, Am. J. Enol. Vitic., 第 50 卷, 第 3 期 (1999) 。

[2] Liger-Belair 等, Sc. Reports 7, 10938 (2017) 。

通用数据表

常数	符号	数值	单位
真空中的光速	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
普朗克常数	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
约化普朗克常数	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
玻尔兹曼常数	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
摩尔气体常数	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
元电荷	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
万有引力常数	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
标准重力加速度	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
斯特藩—玻尔兹曼常数	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
真空磁导率 (磁常数)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
真空介电常数 (电常数)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
里德伯常数	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
电子质量	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
质子质量	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
中子质量	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
原子质量常数	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
电子伏特	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

题目译自官方英文原文。

答案

这里 $\Delta c = c_\ell - c_0$, g_0 为数据表中给出的重力加速度。

• A.1

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

• A.2

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

当 $c_\ell = 4c_0$ 时,

$$a_c = 3.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.31 \mu\text{m}.$$

• A.3

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0},$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0\Delta c}{P_0}t},$$

$$a_{(2)}(t) = a_0 + \frac{KRT_0\Delta c}{P_0}t.$$

模型 (2) 符合近似线性的生长规律:

$$q_a \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1},$$

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

• A.4 浮力 $4\pi\rho_\ell g_0 a^3/3$ 方向向上; 斯托克斯阻力 $6\pi\eta a v$ 和可忽略的气泡重力方向向下。

$$v(a) \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta},$$

$$\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

由图 3 中的近似测量值求得。

• A.5

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

• A.6

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0),$$

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

• B.1

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

• B.2

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

• B.3

$$a \approx 5.3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.53 \text{ mm},$$

$$h \approx 3.8 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.8 \mu\text{m}.$$

• C.1

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

• C.2 使用本部分指定的替代压强：

$$T_f(6^\circ\text{C}) \approx 195.4 \text{ K } (-77.7^\circ\text{C}),$$

$$T_f(20^\circ\text{C}) \approx 184.4 \text{ K } (-88.7^\circ\text{C}).$$

正确的陈述为 **1** 和 **4**：6°C 时出现灰白色雾，20°C 时出现蓝色雾。

• C.3

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

解答

A.1

杨-拉普拉斯定律给出弯曲液气界面两侧的压强差：

$$P_b - P_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

对于球形气泡，两个主曲率半径均为 a 。因此

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

浸没在液体中的气泡周围只有一个液气界面。

A.2

在气泡表面应用亨利定律，得到

$$c_b = k_H P_b = k_H \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) = c_0 + \frac{2\sigma c_0}{P_0 a}.$$

当 $c_\ell > c_b$ 时，气体扩散进入气泡，使其生长。因此临界条件满足

$$c_\ell - c_0 = \frac{2\sigma c_0}{P_0 a_c},$$

所以

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0 (c_\ell - c_0)}.$$

对于过饱和液体，满足 $a > a_c$ 的气泡会生长，而较小的气泡则趋于溶解。

当 $c_\ell = 4c_0$ 时，

$$a_c = \frac{2\sigma}{3P_0} = \frac{2(47 \times 10^{-3})}{3(1.0 \times 10^5)} = 3.13 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

因此

$$a_c \approx 0.31 \mu\text{m}.$$

A.3

在题设近似 $P_b \simeq P_0$ 下，由理想气体状态方程得

$$P_0 \frac{4\pi a^3}{3} = n_c RT_0,$$

因而

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0}.$$

通过气泡表面流入的物质的量速率为

$$\frac{dn_c}{dt} = 4\pi a^2 j.$$

在 P_0, T_0 不变时，对理想气体表达式求导，得

$$\frac{4\pi P_0 a^2}{RT_0} \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 j,$$

化简为

$$\frac{da}{dt} = \frac{RT_0}{P_0} j.$$

对于短时间的生长实验，将主体液体的浓度视为常数，并取 $c_b \simeq c_0$ 。

对于**模型 (1)**,

$$\frac{da}{dt} = \frac{DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0 a}.$$

在初始条件 $a(0) = a_0$ 下积分，得到

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t}.$$

该模型预言生长速率逐渐减小，且半径渐近地按 $t^{1/2}$ 变化。

对于**模型 (2)**,

$$\frac{da}{dt} = \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} = q_a,$$

所以

$$a(t) = a_0 + \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t.$$

图 2 中的斜率近似恒定，支持**模型 (2)**。由图大致读出， $t = 0$ 时 $a = 40 \mu\text{m}$ ， $t = 0.95 \text{ s}$ 时 $a = 270 \mu\text{m}$ ，于是

$$q_a \approx \frac{(270 - 40) \times 10^{-6}}{0.95} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

在 20°C 时，

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad c_0 = k_H P_0 = 33 \text{ mol m}^{-3},$$

且 $c_\ell - c_0 \simeq 3c_0 = 99 \text{ mol m}^{-3}$ 。因此

$$K = \frac{P_0 q_a}{RT_0(c_\ell - c_0)} \approx \frac{10^5(2.4 \times 10^{-4})}{8.31446(293.15)(99)}.$$

于是

$$\boxed{K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}}.$$

A.4

令 $\mathbf{u}_z$ 竖直向上。气泡所受的力为浮力

$$\mathbf{F}_B = \rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z,$$

斯托克斯阻力

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta a v \mathbf{u}_z,$$

以及气泡的重力

$$\mathbf{W} = -\rho_g \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z.$$

以终端速度运动时，合力为零：

$$6\pi\eta a v = (\rho_\ell - \rho_g) \frac{4\pi a^3}{3} g_0.$$

由于 $\rho_g \ll \rho_\ell$,

$$\boxed{v(a) = \frac{2(\rho_\ell - \rho_g)g_0 a^2}{9\eta} \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}}.$$

相邻气泡沿同一轨迹运动，其形成时间相差

$$\Delta t = \frac{1}{f_b}.$$

因此，由它们的中心间距 Δz 可得

$$v \simeq \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_b \Delta z,$$

该速度近似对应于这两个气泡的平均半径。

利用图 3 中的标尺，由靠近右端的两个气泡大致得到

$$a \simeq 0.24 \text{ mm}, \quad \Delta z \simeq 2.3 \text{ mm}.$$

因此，

$$v \simeq 20(2.3 \times 10^{-3}) = 4.6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1},$$

且

$$\eta \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9f_b \Delta z} = \frac{2(10^3)(9.80665)(0.24 \times 10^{-3})^2}{9(20)(2.3 \times 10^{-3})}.$$

由图估算得

$$\boxed{\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}}.$$

A.5

将上升的终端速度与恒定的径向生长速率联立：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta} a^2, \quad \frac{da}{dt} = q_a.$$

消去时间，得到

$$\frac{dz}{da} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta q_a} a^2.$$

从杯底到自由液面积分，得到

$$H_\ell = \frac{2\rho_\ell g_0}{27\eta q_a} (a_{H_\ell}^3 - a_0^3).$$

因此，保留初始半径的表达式为

$$a_{H_\ell} = \left(a_0^3 + \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

当 $a_{H_\ell} \gg a_0$ 时，

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

取 $H_\ell = 0.10 \text{ m}$ 、 $q_a \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ ，并使用上面估算的黏度，得到

$$a_{H_\ell} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

A.6

在浓度衰减的时间尺度上，对气泡列采用准稳态描述。以均匀的主体浓度 $c_\ell(t)$ 描述液体，并在损失量平衡中忽略仍在上升的气泡内气体总量的变化。

每个到达液面的气泡携带的物质的量为

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} a_{H_\ell}^3.$$

在 a_0 可忽略的情况下，利用 A.5 的结果得到

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} = \frac{18\pi\eta H_\ell P_0}{\rho_\ell g_0 RT_0} q_a.$$

随着液体中溶解气体的流失，模型 (2) 给出

$$q_a(t) = \frac{KRT_0}{P_0} (c_\ell(t) - c_0).$$

因此

$$n_{\text{out}} = \frac{18\pi\eta K H_\ell}{\rho_\ell g_0} (c_\ell - c_0).$$

单位时间内产生 $N_b f_b$ 个气泡。由 CO_2 守恒可得

$$V_\ell \frac{dc_\ell}{dt} = -N_b f_b n_{\text{out}},$$

因此

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0).$$

其解为

$$c_{\ell}(t) = c_0 + [c_{\ell}(0) - c_0]e^{-t/\tau},$$

其中

$$\tau = \frac{\rho_{\ell} g_0 V_{\ell}}{18\pi\eta K H_{\ell} N_b f_b}.$$

按指数规律衰减的是超过 c_0 的那部分浓度。

B.1

在 dt 内，回缩的孔缘扫过一个面积为下式的圆环：

$$dA = 2\pi r v_f dt.$$

液膜有两个液气表面，因此表面能的减少量为

$$-dE_s = 2\sigma dA.$$

根据题设的耗散规律，其中一半转化为动能：

$$dE_k = \sigma dA.$$

新收集的液体质量为

$$dm = \rho_{\ell} h dA.$$

由于孔缘速率保持不变，其动能增加量为

$$dE_k = \frac{1}{2} v_f^2 dm = \frac{1}{2} \rho_{\ell} h v_f^2 dA.$$

令两个表达式相等，得

$$\frac{1}{2} \rho_{\ell} h v_f^2 = \sigma,$$

所以

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_{\ell} h}}.$$

B.2

活塞向上位移 z 后，封闭气体的体积变为

$$V = V_0 + Sz.$$

对于可逆绝热压缩或膨胀，

$$PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}.$$

因此

$$P = P_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}.$$

当 $|Sz| \ll V_0$ 时，

$$P \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0}\right).$$

按题意忽略活塞的重力，其运动方程为

$$m_p \ddot{z} = (P - P_0)S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} z.$$

这是简谐运动，且

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}.$$

因此

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

B.3

对于气泡，

$$S = \pi r^2, \quad V_0 = \frac{4\pi a^3}{3}, \quad m_p = \frac{8\rho_g r^3}{3}.$$

代入 B.2，得到

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma P_0 \pi^2 r^4}{(8\rho_g r^3/3)(4\pi a^3/3)} = \frac{9\gamma P_0 r}{128\pi \rho_g a^3}.$$

因此 $f_0 \propto \sqrt{r}$ ，且在 $r = r_c$ 时频率达到最大。利用题给的 r_c 表达式，得

$$f_{\max}^2 = \frac{9\gamma P_0}{128\pi \rho_g a^3} \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g a} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

因此

$$a = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g f_{\max}^2} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

取 $f_{\max} = 4.0 \times 10^4 \text{ Hz}$,

$$a = \frac{3\sqrt{3}(1.3)(10^5)}{64\pi(1.8)(4.0 \times 10^4)^2} \sqrt{\frac{10^3(9.80665)}{47 \times 10^{-3}}} = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

因此

$$a \approx 0.53 \text{ mm}.$$

最终的开口半径为

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} \approx 1.50 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

由于开口以恒定速率扩大，

$$v_f = \frac{r_c}{t_b}, \quad t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms} = 3 \times 10^{-5} \text{ s},$$

所以

$$v_f \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}.$$

最后，由 B.1 得

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_\ell v_f^2} = \frac{2\sigma t_b^2}{\rho_\ell r_c^2} \approx 3.77 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

于是

$$\boxed{h \approx 3.8 \mu\text{m}}.$$

C.1

溶解态和气态 CO_2 的物质的量分别为

$$n_L = k_H P_i V_L, \quad n_G = \frac{P_i V_G}{RT_0}.$$

由总物质的量守恒可得

$$n_T = P_i \left(k_H V_L + \frac{V_G}{RT_0} \right).$$

因此,

$$\boxed{P_i = \frac{n_T}{k_H V_L + V_G/(RT_0)}}.$$

取

$$V_L = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad V_G = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

在 6°C 时, $T_0 = 279.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(5.4 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 279.15)} \approx 4.81 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

在 20°C 时, $T_0 = 293.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(3.3 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 293.15)} \approx 7.76 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

这些均为绝对压强:

$$\boxed{P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}}, \quad \boxed{P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}}.$$

C.2

本部分中, 题目指定使用以下替代压强:

$$P_i(6^\circ\text{C}) = 4.69 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) = 7.45 \text{ bar}.$$

对于理想气体的可逆绝热膨胀,

$$PV^\gamma = \text{常数}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{常数}.$$

消去 V , 并取最终压强为 P_0 , 得到

$$\boxed{T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

因此

$$T_f(6^\circ\text{C}) = 279.15 \left(\frac{1}{4.69} \right)^{0.3/1.3} \approx 195.4 \text{ K},$$

且

$$T_f(20^\circ\text{C}) = 293.15 \left(\frac{1}{7.45} \right)^{0.3/1.3} \approx 184.4 \text{ K}.$$

为判断是否形成固态 CO_2 ，先求出压强 P_0 下的升华平衡温度。令 $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2} = P_0$ ，得

$$0 = A - \frac{B}{T_s + C},$$

所以

$$T_s = \frac{B}{A} - C = \frac{1300}{6.81} + 3.49 \approx 194.4 \text{ K}.$$

对于初始温度较低的酒瓶，

$$195.4 \text{ K} > T_s.$$

事实上，由给定的蒸气压表达式得到

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(195.4 \text{ K}) \approx 1.09 \text{ bar} > P_0.$$

在这一膨胀过程中，气体未达到固气饱和状态。根据题目给出的两种情形，会形成**灰白色雾**。

对于初始温度较高的酒瓶，

$$184.4 \text{ K} < T_s,$$

且

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(184.4 \text{ K}) \approx 0.422 \text{ bar} < P_0.$$

若膨胀过程不发生相变， CO_2 将处于过饱和状态，因此会形成固体晶体，产生**蓝色雾**。

因此

陈述 1 和 4 正确。

计算得到的 T_f 是题目要求的不发生相变时的假想温度；对于初始温度较高的酒瓶，固体的形成会改变实际的热学演化过程。

C.3

使用题目指定的 6°C 时的压强：

$$P_i = 4.69 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

设 x 为软木塞相对于初始位置的向上位移，并令

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

为其横截面积。

当 $0 \leq x \leq \ell_0$ 时，接触面积为

$$A(x) = \pi d(\ell_0 - x),$$

所以摩擦力为

$$F_{\text{fr}}(x) = \alpha \pi d(\ell_0 - x).$$

初始时，压力的合力与摩擦力近似平衡：

$$(P_i - P_0)S \simeq \alpha \pi d \ell_0.$$

软木塞的重力仅为 0.098 N ，而初始压力的合力约为 94 N ，因此在估算 α 时可以忽略重力。于是

$$\alpha \simeq \frac{(P_i - P_0)d}{4\ell_0} \approx 6.64 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

参与快速膨胀的是最初位于顶部气相空间中的气体。在软木塞运动过程中，其体积和压强为

$$V(x) = V_G + Sx, \quad P(x) = P_i \left(\frac{V_G}{V_G + Sx} \right)^\gamma.$$

当软木塞离开瓶颈时，

$$V_e = V_G + S\ell_0.$$

内部气体所做的功为

$$W_{\text{gas}} = \int_0^{\ell_0} P(x)S \, dx = \int_{V_G}^{V_e} P_i \left(\frac{V_G}{V} \right)^\gamma dV,$$

得到

$$W_{\text{gas}} = \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_e} \right)^{\gamma-1} \right].$$

克服大气压力所做的功为

$$W_{\text{atm}} = P_0 S \ell_0,$$

而摩擦耗散的能量为

$$W_{\text{fr}} = \int_0^{\ell_0} \alpha \pi d (\ell_0 - x) \, dx = \frac{1}{2} \alpha \pi d \ell_0^2 \simeq \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0.$$

软木塞离开瓶颈后，按题意忽略压力的合力。忽略空气阻力，剩余的机械能在最高点全部转化为重力势能。从软木塞初始位置起计量 H_c ，得

$$mg_0 H_c = W_{\text{gas}} - W_{\text{atm}} - W_{\text{fr}}.$$

因此

$$H_c = \frac{1}{mg_0} \left\{ \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_G + S\ell_0} \right)^{\gamma-1} \right] - P_0 S \ell_0 - \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0 \right\}.$$

代入数值得

$$S = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad V_e = 3.1362 \times 10^{-5} \text{ m}^3,$$

且

$$W_{\text{gas}} \approx 2.570 \text{ J}, \quad W_{\text{atm}} \approx 0.636 \text{ J}, \quad W_{\text{fr}} \approx 1.174 \text{ J}.$$

因此

$$H_c \approx \frac{2.570 - 0.636 - 1.174}{0.010(9.80665)} \approx 7.75 \text{ m}.$$

取合理精度，

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

若从软木塞刚离开瓶颈时的位置起测量高度，则应减去 $\ell_0 = 0.025 \text{ m}$ ；舍入后的答案仍为 7.7 m 。

解答已与官方解答核对。