

IPhO 2025

Teorik sorular ve çözümler · Paris, Fransa · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2025/

Soru 1: Hidrojen ve galaksiler

Bu soru, galaksilerin dinamikleri ve yapıları gibi kendilerine özgü fiziksel özelliklerini incelemeyi amaçlamaktadır. Özellikle, galaksimizin kütle dağılımının içeriden nasıl ölçüleceğini açıklıyoruz. Bunun için galaksimizin başlıca bileşeni olan hidrojene odaklanacağız.

Bu soru boyunca yalnızca $\hbar = h/2\pi$ olarak tanımlanan $\hbar$ kullanacağız.

Bölüm A - Giriş

Bohr modeli

Hidrojen atomunun, sabit bir protonun çevresinde dolanan, kütlesi m_e olan göreceli olmayan bir elektrondan oluştuğunu varsayıyoruz. Bu bölüm boyunca elektronun dairesel bir yörüngede hareket ettiğini varsayıyoruz.

A.1 — 0.2 puan

Elektronun, yarıçapı r olan dairesel bir yörüngedeki v hızını belirleyiniz.

Bohr modelinde, elektronun açısal momentumunun büyüklüğü L 'nin kuantumlandığını, yani $n > 0$ bir tam sayı olmak üzere $L = n\hbar$ olduğunu varsayıyoruz. $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$ tanımını yapıyoruz.

A.2 — 0.5 puan

Her bir yörüngenin yarıçapının, r_1 Bohr yarıçapı olarak adlandırılmak üzere, $r_n = n^2 r_1$ ile verildiğini gösteriniz. r_1 'i α , m_e , c ve $\hbar$ cinsinden ifade ediniz ve sayısal değerini 3 basamakla hesaplayınız. Yarıçapı r_1 olan yörüngedeki hız v_1 'i, α ve c cinsinden ifade ediniz.

A.3 — 0.5 puan

Elektronun, yarıçapı r_n olan bir yörüngedeki mekanik enerjisi E_n 'yi e , ϵ_0 , r_1 ve n cinsinden belirleyiniz. Temel durumdaki E_1 'i α , m_e ve c cinsinden belirleyiniz. Sayısal değerini eV cinsinden hesaplayınız.

Hidrojenin ince ve aşırı ince yapıları

Elektron spininin nadiren gerçekleşen kendiliğinden ters dönmesi, hidrojen atomu başına ortalama 10 milyon yılda bir foton yayılmasına neden olur. Bu ışıma, evrendeki hidrojenin izini sürmeye yarar ve dolayısıyla astrofizikte temel bir öneme sahiptir. Bu ışımının kaynağı olan geçiş iki adımda inceleyeceğiz.

İlk olarak, elektron spini ile elektron ve protonun bağıl hareketi arasındaki etkileşimi ele alalım. Elektronun referans çerçevesinde proton, elektrondan r_1 uzaklıkta onun çevresinde dolar. Bu, bir $\vec{B}_1$ manyetik alanı oluşturur.

A.4 — 0.5 puan

Elektronun bulunduğu konumda $\vec{B}_1$ 'in büyüklüğü B_1 'i μ_0 , e , α , c ve r_1 cinsinden belirleyiniz.

İkinci olarak, elektron spini bir $\vec{\mathcal{M}}_s$ manyetik momentini oluşturur. Bunun büyüklüğü yaklaşık olarak $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$ 'tır. *İnce* (F) yapı, manyetik momentini $\vec{\mathcal{M}}_s$, $\vec{B}_1$ 'e paralel olan bir elektron ile $\vec{\mathcal{M}}_s$ 'si $\vec{B}_1$ 'e antiparalel olan bir elektron arasındaki ΔE_F enerji farkıyla ilişkilidir. Benzer şekilde, *aşırı ince* (HF) yapı, elektron ve protonun paralel ve antiparalel manyetik momentleri arasındaki etkileşimden kaynaklanan ΔE_{HF} enerji farkıyla ilişkilidir. Bu farkın, m_p protonun kütlesi olmak üzere, yaklaşık olarak $\Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ olduğu bilinmektedir.

A.5 — 0.5 puan

ΔE_F 'yi α ve E_1 'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

Aşırı ince yapının iki durumu arasındaki geçiş sırasında yayılan bir fotonun dalga boyu λ_{HF} 'yi ifade ediniz ve sayısal değerini iki basamakla veriniz.

Bölüm B - Galaksilerin dönme eğrileri

Veriler

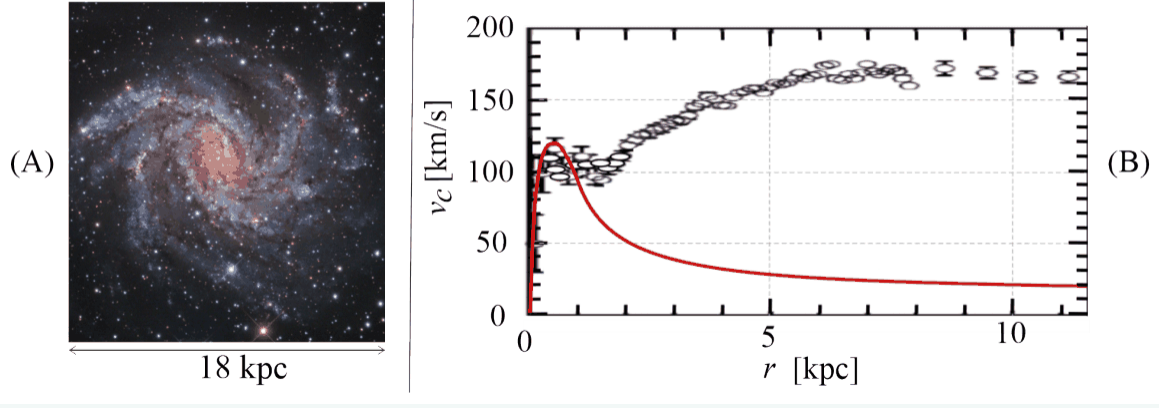
- Kiloparsek: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- Güneş kütlesi: $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Merkezi sabit bir O noktası olan küresel bir galaksiyi ele alıyoruz. Herhangi bir P noktasında hacimsel kütle yoğunluğu $\rho = \rho(P)$, buna karşılık gelen kütleçekim potansiyeli (yani birim kütle başına potansiyel enerji) ise $\varphi = \varphi(P)$ olsun. Hem ρ hem de φ yalnızca $r = \|\vec{OP}\|$ 'ye bağlıdır. P 'de bulunan m kütlelerinin φ alanından kaynaklanan hareketi, O 'yu içeren bir düzlemle sınırlıdır.

B.1 — 0.2 puan

Dairesel bir yörünge durumunda, P 'den geçen dairesel bir yörüngedeki cismin v_c hızını r ve $\frac{d\varphi}{dr}$ cinsinden belirleyiniz.

Şekil 1(A), sarmal galaksi NGC 6946'nın görünür banttaki bir görüntüsüdür (Arizona'daki Mount Lemmon Sky Center'da bulunan 0.8 m'lik Schulman Teleskobu ile alınmıştır). Şekil 1(B)'deki küçük elipsler, bu galaksi için v_c 'nin deneysel ölçümlerini göstermektedir. Merkezdeki bölge ($r < 1 \text{ kpc}$) şişkinlik olarak adlandırılır. Bu bölgede kütle dağılımı yaklaşık olarak homojendir. Kırmızı eğri, sistemin şişkinlikte homojen, şişkinliğin dışında ise Kepler tipi ($\beta > 0$ olmak üzere $\varphi(r) = -\beta/r$) olduğu, yani galaksinin toplam kütlelerinin şişkinlikte toplandığı kabul edilirse v_c için elde edilen bir öngörüdür.



Şekil 1: NGC 6946 galaksisi: Görüntü (A) ve dönme eğrisi (B).

B.2 — 0.5 puan

Şekil 1(B)'deki kırmızı dönme eğrisinden NGC 6946'nın şişkinliğinin M_b kütlesini Güneş kütlesi biriminde çıkarınız.

Kepler tipi model ile deneysel verilerin karşılaştırılması, gökbilimcileri kütlenin bir kısmının görüntüde görünmez olduğuna ikna etmektedir. Bu nedenle galaksinin gerçek kütle yoğunluğunun

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

ile verildiğini varsayarlar; burada $C_m > 0$ ve $r_m > 0$ sabitlerdir.

B.3 — 1.8 puan

Denklem 1'deki kütle yoğunluğuna karşılık gelen $v_{c,m}(r)$ hız profilinin

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}$$

biçiminde yazılabileceğini gösteriniz. k_1 ve k_2 'yi C_m , r_m ve G cinsinden ifade ediniz.

(İpuçları: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$ ve $x \ll 1$ için $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$.)

$r \ll r_m$ ve $r \gg r_m$ durumlarında $v_{c,m}(r)$ 'yi sadeleştiriniz.

$r \gg r_m$ ise, kütle yoğunluğu Denklem 1 ile verilen, yarıçapı r olan bir kürenin içerdiği $M_m(r)$ kütlesinin ifadesinin sadeleştiğini ve yalnızca C_m ile r 'ye bağlı olduğunu gösteriniz.

NGC 6946 galaksisinin Şekil 1(A)'daki görüntünün kapsadığı bölgede gerçekte bulunan kütlesini tahmin ediniz.

Bölüm C - Galaksimizdeki kütle dağılımı

Sarmal bir galaksi için Denklem 1'deki model değiştirilir ve genellikle kütleçekim potansiyelinin

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

ile verildiği kabul edilir; burada z , ($z = 0$ ile tanımlanan) galaksi düzlemine olan uzaklıktır, $r < r_0$ artık eksene olan uzaklığı belirten yarıçaptır ve $\varphi_0 > 0$ belirlenecek bir sabittir. r_0 ve z_0 sabit değerlerdir.

C.1 — 0.5 puan

r 'nin sabit olduğunu varsayarak, böyle bir potansiyelde m noktasal kütesinin düşey hareketi için z 'ye ilişkin hareket denklemini bulunuz. $r < r_0$ ise, galaksi düzlemi çevresindeki küçük salınımların ω_0 açısal frekansını vererek bu düzlemin kararlı bir denge durumu olduğunu gösteriniz.

Bundan sonra $z = 0$ alıyoruz.

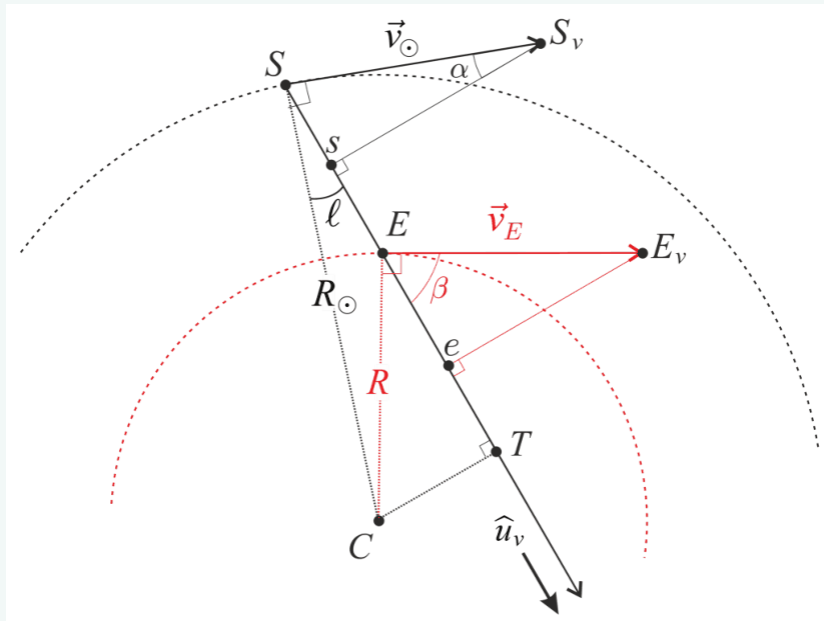
C.2 — 0.6 puan

φ_0 'ın uygun bir tanımıyla, Denklem 1'deki modelin $\varphi_G(r, 0)$ biçiminde bir potansiyel verdiği rejimin $r \gg r_m$ mi yoksa $r \ll r_m$ mi olduğunu belirleyiniz.

Bu koşul altında $v_c(r)$ artık r 'ye bağlı değildir. Bunu φ_0 cinsinden ifade ediniz.

Dolayısıyla, şişkinliğin dışında hızın büyüklüğü v_c , galaksi merkezine olan uzaklığa bağlı değildir. Gökbilimcilerin yaptığı gibi, bu olguyu galaksinin kütle dağılımını içeriden ölçmek için kullanacağız.

Burada astronomik gözlemler için ele alınan yıldızlar veya bulutsular gibi tüm galaktik cisimler, başlıca hidrojen den oluşur. Şişkinliğin dışında bunların galaksi merkezi C çevresinde dairesel yörüngelerde döndüklerini varsayıyoruz. S , Güneş'in; E ise hidrojen tayfında ışıma yapan belirli bir galaktik cismin konumudur. Galaksi düzleminde, bir gözlemin yönüne karşılık gelen ve $\hat{u}_v$ birim vektörü doğrultusundaki SE görüş hattını ele alıyoruz (bkz. Şekil 2).



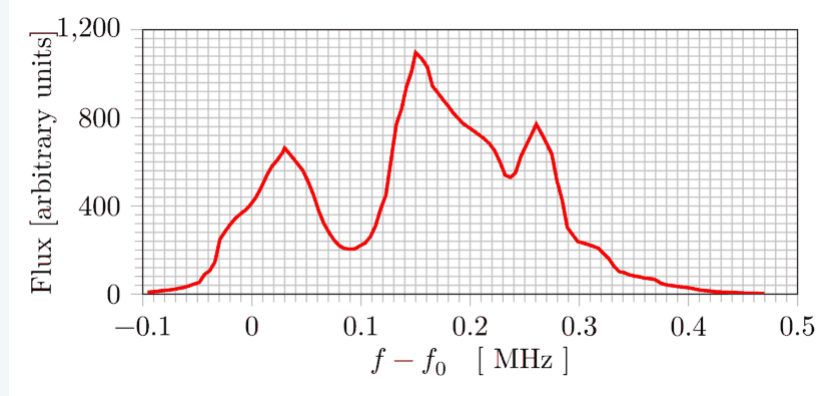
Şekil 2: Ölçümün geometrisi

ℓ , SC ile SE arasındaki açıyı ölçen galaktik boylam olsun. Güneş'in, yarıçapı $R_\odot = 8.00$ kpc olan dairesel yörüngesindeki hızı $\vec{v}_\odot$ ile gösterilir. E 'deki bir galaktik cisim, yarıçapı R olan başka bir çember üzerinde $\vec{v}_E$ hızıyla dolandır. Daha önce incelenen 21 cm çizgisindeki Doppler etkisi kullanılarak, ışımayı yapan E 'nin Güneş S 'ye göre bağıl radyal hızı $v_{rE/S}$ elde edilebilir: bu, $\vec{v}_E - \vec{v}_\odot$ 'nin görüş hattı üzerindeki izdüşümüdür.

C.3 — 0.7 puan

$v_{rE/S}$ 'yi ℓ , R , $R_\odot$ ve $v_\odot$ cinsinden belirleyiniz. Ardından R 'yi $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ ve $v_{rE/S}$ cinsinden ifade ediniz.

Bir radyo teleskop kullanarak galaksimizin düzleminde $\ell = 30^\circ$ boylamına doğru gözlemler yapıyoruz. Kullanılan frekans bandı, frekansı $f_0 = 1.42$ GHz olan 21 cm çizgisini içermektedir. Sonuçlar Şekil 3'te verilmiştir.



Şekil 3: EU-HOU RadioAstronomy kullanılarak $\ell = 30^\circ$ 'de radyo frekansı bandında ölçülen, frekans kaymasının fonksiyonu olarak elektromanyetik sinyal

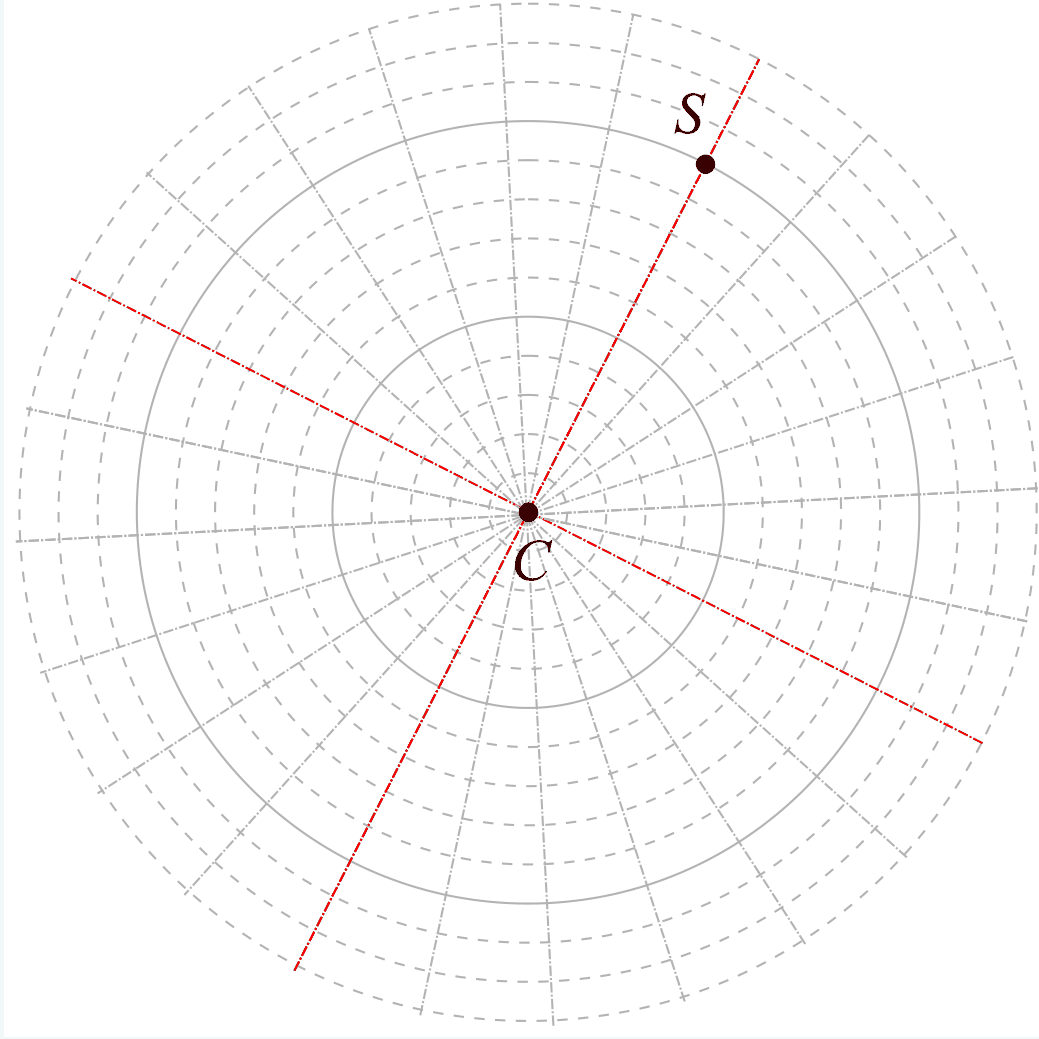
C.4 — 0.6 puan

Galaksimizde $v_\odot = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 'dir. Şekil 3'te gözlenen 3 kaynağın bağıl radyal hızlarını (3 anlamlı basamakla) ve galaksi merkezine uzaklıklarını (2 anlamlı basamakla) belirleyiniz. Uzaklıklar $R_\odot$ 'in katları olarak ifade edilmelidir.

C.5 — 0.6 puan

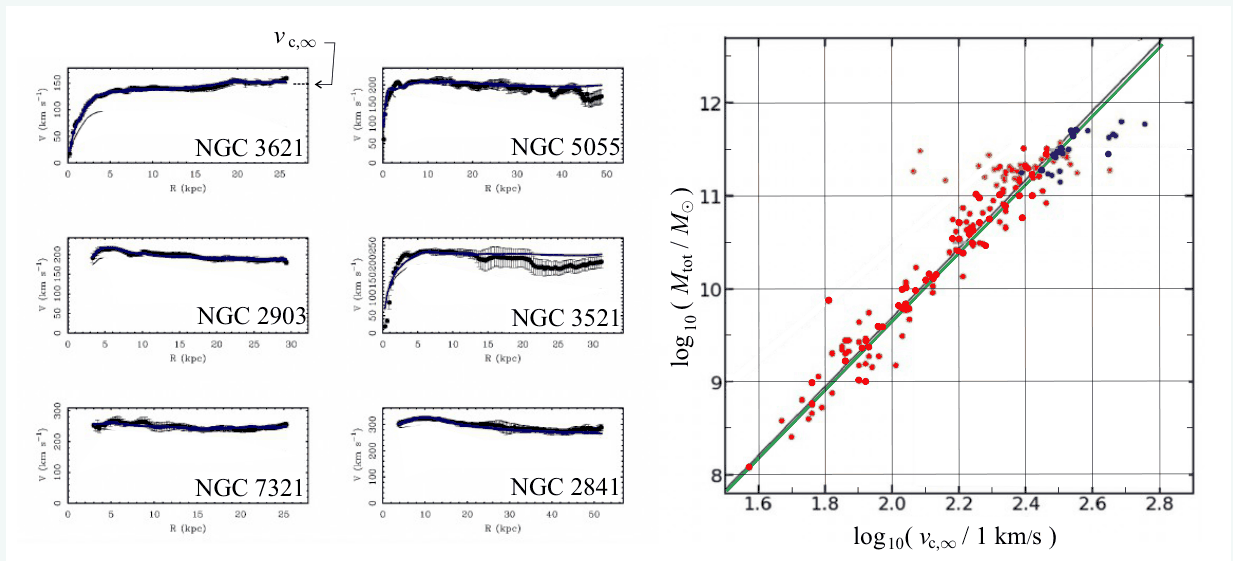
Galaksimizin üstten görünümü üzerinde (cevap kutusunda), Şekil 3'te gözlenen kaynakların konumlarını belirtiniz.

ℓ değiştirilerek tekrarlanan ölçümlerden ne çıkarılabilir?



Bölüm D - Tully-Fisher bağıntısı ve MOND kuramı

NGC 6946'nın Şekil 1'deki dış bölgelerde yatay seyreden hız eğrisi, Şekil 4'te (solda) görülebileceği gibi, sarmal galaksilerin ortak bir özelliğidir. Her galaksinin dış bölgelerindeki sabit hız değeri $v_{c,\infty}$ 'nin, ölçülen toplam kütlesi M_{tot} 'un bir fonksiyonu olarak grafiğe geçirilmesi, Tully-Fisher bağıntısı adı verilen ilginç bir korelasyon verir; bkz. Şekil 4 (sağ).



Şekil 4. Sol: Tipik sarmal galaksilerin dönme eğrileri - Sağ: Doğrusal ölçeklerde $\log_{10}(v_{c,\infty})$ 'nin fonksiyonu olarak $\log_{10}(M_{\text{tot}})$. Renkli noktalar farklı galaksilere ve farklı gökyüzü taramalarına karşılık gelir. Yeşil doğru, verilere en iyi uyan doğruyla (siyah) çok iyi bir uyum gösteren Tully-Fischer bağıntısıdır.

D.1 — 0.4 puan

Bir galaksinin R yarıçapının kütesine bağlı olmadığını varsayarak, Denklem 1'deki modelin (bölüm B) $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ biçiminde bir bağıntı verdiğini gösteriniz; γ ve η belirlenmelidir.

γ_{TF} 'yi hesaplayarak bu ifadeyi Tully-Fischer bağıntısıyla karşılaştırınız.

$a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ mertebesindeki son derece düşük ivme rejiminde, Değiştirilmiş Newton Dinamiği (MOND) kuramı, Newton'un ikinci yasasının

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$$

kullanılarak değiştirilebileceğini öne sürer; burada $a = \|\vec{a}\|$ ivmenin büyüklüğüdür ve μ fonksiyonu $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ ile tanımlanır.

D.2 — 0.2 puan

Şekil 1'deki NGC 6946 verilerini kullanarak, Newton kuramı çerçevesinde, NGC 6946'nın dış bölgelerindeki bir kütlenin ivmesinin a_m büyüklüğünü tahmin ediniz.

D.3 — 0.8 puan

m , sabit bir M kütesinin kütleçekim alanında, yarıçapı r olan dairesel bir yörüngede $v_{c,\infty}$ hızıyla hareket eden bir kütle olsun.

MOND kuramı çerçevesinde, $a \ll a_0$ iken Tully-Fischer üssünü belirleyiniz.

NGC 6946 verilerini ve/veya Tully-Fischer yasasını kullanarak, MOND'un doğru rejimde işlediğini göstermek için a_0 'ı hesaplayınız.

D.4 — 0.9 puan

İlgili durumları ele alarak, yarıçapı R_b olan ve homojen olarak dağılmış M kütesinin oluşturduğu kütleçekim alanı için MOND kuramında tüm r değerlerinde $v_c(r)$ 'yi belirleyiniz.

Genel Veri Tablosu

Sabit	Gösterim	Değer	Birim
Işığın boşluktaki hızı	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck sabiti	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Boltzmann sabiti	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Avogadro sabiti	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Molar gaz sabiti	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Temel yük	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Evrensel kütleçekim sabiti	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Sabit	Gösterim	Değer	Birim
Standart yerçekimi ivmesi	g	9.806 65	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan Boltzmann sabiti	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektriksel sabit)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Rydberg sabiti	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Elektronun kütlesi	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Protonun kütlesi	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Nötronun kütlesi	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Atomik kütle sabiti	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Elektronvolt	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• A.1

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

• A.2

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad v_1 = \alpha c.$$

• A.3

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

• A.4

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

• A.5

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1, \quad \lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c} \simeq 0.21 \text{ m}.$$

• B.1

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

• B.2

$$M_b \sim 1 \times 10^9 M_\odot.$$

• B.3

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m,$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3} \frac{r}{r_m}}, \quad v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq \sqrt{4\pi G C_m},$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq 4\pi C_m r, \quad M_{\text{şekildeki}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_\odot.$$

• C.1

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

• C.2

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m, \quad v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

• C.3

$$v_{rE/S} = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell, \quad R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

• C.4 Tepeler artan frekans kaymasına göre numaralandırıldığında:

$$(v_{r,1}, v_{r,2}, v_{r,3}) = (6.33, 31.7, 54.9) \text{ km s}^{-1},$$

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.95, 0.78, 0.67) R_\odot.$$

• C.5 $\ell = 30^\circ$ görüş hattı üzerinde, yarıçapları $0.95R_\odot$, $0.78R_\odot$ ve $0.67R_\odot$ olan üç çemberin her biriyle oluşan iki kesişimi de işaretleyiniz. Güneş'e olan yakın ve uzak mesafeler

$$\frac{(d_{1,-}, d_{2,-}, d_{3,-})}{R_\odot} \simeq (0.0635, 0.272, 0.424),$$

$$\frac{(d_{1,+}, d_{2,+}, d_{3,+})}{R_\odot} \simeq (1.67, 1.46, 1.31).$$

biçimindedir. Tekrarlanan boylam taramaları, bu yakın–uzak belirsizliğine tabi olarak, hidrojen dağılımını ve sarmal yapıyı ortaya çıkarır.

• D.1

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_{TF} \approx 3.7 \text{ (grafiksel olarak 4'e yakın)}.$$

• D.2

$$a_m \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}.$$

• D.3

$$v_{c,\infty}^4 = GMa_0, \quad \gamma_{\text{MOND}} = 4, \quad a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

İlgili ivme ölçeği budur; grafikteki NGC 6946 verileri tek başına daha güçlü olan $a \ll a_0$ eşitsizliğini doğrulamaz.

• D.4

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Süreklili limit $v_c(0) = 0$ 'dır.

Çözüm

Atomla ilgili sayısal değerler için α 'yı tanım bağıntısından ve verilen sabitlerden hesaplıyorum:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29735 \times 10^{-3}.$$

Bu, soru metninde basılı olan yaklaşık değerden biraz farklıdır.

A.1

Çekici Coulomb kuvveti, merkezci kuvveti sağlar:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Dolayısıyla,

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2

Bohr kuantumlama koşulu

$$m_e v_n r_n = n\hbar$$

bağıntısını verir. Bunun karesini alıp A.1'deki kuvvet eşitliğini kullanırsak,

$$n^2 \hbar^2 = m_e^2 v_n^2 r_n^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}.$$

Böylece,

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 \frac{\hbar}{m_e \alpha c}.$$

O hâlde

$$r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Temel durum yörüngesi için,

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e r_1} = \boxed{\alpha c}.$$

Daha genel olarak, $v_n = \alpha c/n$ 'dir. $\alpha \ll 1$ olduğundan, görelî olmayan yaklaşım tutarlıdır.

A.3

Elektrostatik potansiyel enerjiyi sonsuzda sıfır alırsak,

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Kuvvet eşitliği

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

sonucunu verir. Böylece toplam mekanik enerji

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

olur. $r_n = n^2 r_1$ 'de,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}.$$

Özel olarak,

$$E_1 = -\frac{\alpha \hbar c}{2r_1} = \boxed{-\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2}.$$

Sayısal olarak,

$$E_1 = -2.17987 \times 10^{-18} \text{ J} = \boxed{-13.6 \text{ eV}}.$$

A.4

Verilen elektron referans çerçevesi tasvirinde proton, $v_1 = \alpha c$ süratiyle dolandır. Yörünge periyodu ve eşdeğer akımı

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}$$

şeklindedir. Dairesel bir akım halkasının merkezindeki manyetik alan

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_1}$$

ile verilir. Dolayısıyla,

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

A.5

Bir alan içindeki manyetik dipolün enerjisi

$$U = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}_1$$

ile verilir. Dolayısıyla paralel ve antiparalel durumların enerjileri $-\mathcal{M}_s B_1$ ve $+\mathcal{M}_s B_1$ 'dir. Aralarındaki pozitif enerji farkı

$$\Delta E_F = 2\mathcal{M}_s B_1$$

olur. Soruda belirtilen manyetik momenti kullanırsak,

$$\Delta E_F = 2 \frac{e\hbar}{m_e} \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ve $e^2/(4\pi\epsilon_0) = \alpha\hbar c$ ile,

$$\Delta E_F = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m_e r_1^2} = 2m_e \alpha^4 c^2.$$

$E_1 = -m_e \alpha^2 c^2/2$ olduğundan,

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1.$$

Aşırı ince geçişte yayılan foton

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{HF}} = \Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$$

bağıntısını sağlar. Böylece

$$\lambda_{HF} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c}.$$

Ara sayısal değerler

$$\Delta E_F \simeq 2.898 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad \lambda_{HF} \simeq 0.21116 \text{ m}$$

şeklindedir. İki anlamlı basamakla,

$$\lambda_{HF} = 0.21 \text{ m} = 21 \text{ cm}.$$

B.1

Kütleçekim ivmesi

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}$$

ile verilir. Bunu dairesel bir yörüngenin içe doğru ivmesine eşitlersek,

$$-\frac{v_c^2}{r} \hat{r} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Dolayısıyla,

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

B.2

Küresel bir şişkinliğin dışında, kabuk teoremi

$$\varphi(r) = -\frac{GM_b}{r} + \text{sabit}$$

sonucunu verir. Buradan

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r}, \quad M_b = \frac{rv_c^2}{G}$$

elde edilir.

Kırmızı eğriden okunabilecek uygun yaklaşık değerler

$$r \simeq 10 \text{ kpc}, \quad v_c \simeq 20 \text{ km s}^{-1}$$

şeklindedir. Böylece

$$M_b \simeq \frac{(10 \times 3.09 \times 10^{19})(2.0 \times 10^4)^2}{6.67430 \times 10^{-11}} = 1.85 \times 10^{39} \text{ kg}.$$

Güneş kütlesi biriminde bu, yaklaşık $9.3 \times 10^8 M_\odot$ 'tir. Grafiğin hassasiyeti göz önüne alındığında,

$$M_b \sim 10^9 M_\odot.$$

B.3

r yarıçapı içinde kalan kütle

$$M_m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(x) x^2 dx = 4\pi C_m \int_0^r \frac{x^2}{r_m^2 + x^2} dx$$

ile verilir. Verilen integrali uygularsak,

$$M_m(r) = 4\pi C_m \left[r - r_m \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

Küresel simetriden,

$$v_{c,m}^2(r) = \frac{GM_m(r)}{r} = 4\pi G C_m \left[1 - \frac{r_m}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

İstenen biçimle karşılaştırma

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m$$

sonucunu verir.

$r \ll r_m$ için $x = r/r_m$ alalım. O zaman

$$1 - \frac{\arctan x}{x} \simeq 1 - \frac{x - x^3/3}{x} = \frac{x^2}{3}.$$

Dolayısıyla,

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3} \frac{r}{r_m}}.$$

Merkezdeki dönme eğrisi, yaklaşık olarak düzgün bir yoğunluk için beklendiği gibi doğrusal olarak yükselir.

$r \gg r_m$ için $\arctan(r/r_m) \rightarrow \pi/2$ iken $r_m/r \rightarrow 0$ olur. Böylece

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{4\pi G C_m} \equiv v_{c,\infty},$$

ve

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r = \frac{v_{c,\infty}^2 r}{G}.$$

Görüntüdeki çap yaklaşık 18 kpc olduğundan, bölgeyi çevreleyen yarıçapı 9 kpc alalım. Gözlenen dış bölge sürati yaklaşık 170 km s^{-1} 'dir. Böylece

$$M_{\text{şekildeki}} \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2 (9 \times 3.09 \times 10^{19})}{6.67430 \times 10^{-11}} \simeq 1.20 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

Dolayısıyla,

$$M_{\text{şekildeki}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

C.1

Sabit r için düşey hareket denklemi

$$m\ddot{z} = -m \frac{\partial \varphi_G}{\partial z}$$

şeklindedir. Verilen potansiyelin türevi alınırsa

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}$$

elde edilir.

$z = 0$ 'da kuvvet sıfır olur. Küçük salınımlar için $|z| \ll z_0$ olduğundan

$$e^{-z^2/z_0^2} \simeq 1.$$

Doğrusallaştırılmış denklem

$$\ddot{z} + \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) z = 0$$

hâline gelir. $r < r_0$ için katsayı pozitifdir. Dolayısıyla düzlem kararlı bir dengedir ve açısal frekans

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}$$

olur.

C.2

$r \gg r_m$ için B.3,

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r$$

sonucunu verir. Dolayısıyla potansiyelin radyal gradyanı

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_m(r)}{r^2} \simeq \frac{4\pi G C_m}{r}$$

olur. İntegral alıp toplamsal sabiti uygun seçersek,

$$\varphi(r) \simeq 4\pi G C_m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

Böylece istenen rejim ve katsayı

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m$$

olarak bulunur.

Düzlemde,

$$v_c^2 = r \frac{\partial \varphi_G(r, 0)}{\partial r} = r \frac{\varphi_0}{r} = \varphi_0,$$

olduğundan

$$v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

C.3

T , C 'den görüş hattına indirilen dikmenin ayağı olsun. Geometriden

$$CT = R_\odot \sin \ell$$

elde edilir. Güneş'in teğetsel hızının görüş hattı üzerindeki izdüşümü

$$\vec{v}_\odot \cdot \hat{u}_v = v_\odot \sin \ell$$

şeklinde dir.

Işıma yapan cismin teğetsel hızı CE 'ye diktir. Görüş hattı üzerindeki izdüşümü

$$\vec{v}_E \cdot \hat{u}_v = v_E \frac{CT}{R} = v_E \frac{R_\odot}{R} \sin \ell$$

olur. Yatay dönme eğrisi $v_E = v_\odot$ olduğunu gösterir. Böylece,

$$v_{rE/S} = (\vec{v}_E - \vec{v}_\odot) \cdot \hat{u}_v = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell.$$

R için çözersek,

$$R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

C.4

Cevap kâğıdıyla tutarlı olan, amaçlanan işaret kuralına uyarak,

$$v_r = +c \frac{f - f_0}{f_0},$$

bağıntısını kullanalım; pozitif değerler uzaklaşmayı belirtir. Dolayısıyla basılı $f - f_0$ eksen, pozitif uzaklaşma için alışılmış frekans kaymasının ters işaretine sahiptir.

Üç tepe yaklaşık olarak

$$\Delta f_1 = 0.030 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 0.150 \text{ MHz}, \quad \Delta f_3 = 0.260 \text{ MHz}$$

değerlerinde oluşur.

$$v_\odot \sin \ell = 220 \sin 30^\circ = 110 \text{ km s}^{-1},$$

olduğundan, yarıçap bağıntısı

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{110}{110 + v_r},$$

hâline gelir; burada v_r , km s^{-1} cinsinden ifade edilir.

Artan tepe frekansına göre kaynak	Δf (MHz)	v_r (km s^{-1}), 3 anlamlı basamak	$R/R_{\odot}$, 2 anlamlı basamak
1	0.030	+6.33	0.95
2	0.150	+31.7	0.78
3	0.260	+54.9	0.67

C.5

Cevap kâğıdındaki şema üzerinde, S' 'den başlayan ve Şekil 2'de belirtilen tarafta SC ile 30° yapan gözlem ışını çiziniz. Merkezi C olan ve yarıçapları

$$0.95R_{\odot}, \quad 0.78R_{\odot}, \quad 0.67R_{\odot}.$$

olan çemberleri çiziniz veya belirleyiniz. Her çember gözlem ışınıyla iki kez kesişir.

Konumları nicel olarak belirtmek için $d = SE$ olsun. Kosinüs teoremi

$$R^2 = R_{\odot}^2 + d^2 - 2R_{\odot}d \cos \ell$$

bağıntısını verir. Böylece

$$d_{\pm} = R_{\odot} \cos \ell \pm \sqrt{R^2 - R_{\odot}^2 \sin^2 \ell}.$$

$\ell = 30^\circ$ 'de görüş hattının merkeze en yakın olduğu nokta için

$$CT = 0.50R_{\odot}, \quad ST = R_{\odot} \cos 30^\circ = 0.866R_{\odot}$$

elde edilir. Çıkarılan üç yarıçapın tümü CT 'den büyük ve $R_{\odot}$ 'ten küçüktür; dolayısıyla her iki kesişim de Güneş'ten bakıldığında ileri yöndedir.

C.4'teki yuvarlanmamış yarıçaplar kullanıldığında:

Kaynak	Yakın konum $d_-/R_{\odot}$	Uzak konum $d_+/R_{\odot}$
1	0.0635	1.67
2	0.272	1.46
3	0.424	1.31

Işın boyunca S' 'den uzaklaşırken olası noktalar şu sırayla karşımıza çıkar:

$$1_{\text{near}}, \quad 2_{\text{near}}, \quad 3_{\text{near}}, \quad T, \quad 3_{\text{far}}, \quad 2_{\text{far}}, \quad 1_{\text{far}}.$$

Tayf, her kaynağın galaksi merkezine olan uzaklığını belirler, ancak yakın ve uzak konumlarını ayırt edemez. Gözlemlerin farklı boylamlarda tekrarlanması, hidrojen bakımından zengin yapıların haritasını çıkarır ve galaksinin sarmal kollarını ortaya koyar; tek tek kaynakların yakın–uzak belirsizliklerini gidermek için ek bilgi gerekir.

D.1

B.3'teki dış bölge rejiminde,

$$M_{\text{tot}} \simeq 4\pi C_m R, \quad v_{c,\infty}^2 = 4\pi G C_m.$$

C_m 'yi yok edersek,

$$M_{\text{tot}} \simeq \frac{R}{G} v_{c,\infty}^2.$$

Kütleden bağımsız bir yarıçap için,

$$\boxed{\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2.}$$

Ampirik bir kuvvet yasasının logaritması alınırsa

$$\log_{10} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_{\odot}} \right) = \gamma_{TF} \log_{10} \left(\frac{v_{c,\infty}}{1 \text{ km s}^{-1}} \right) + \text{sabit}$$

elde edilir. Dolayısıyla γ_{TF} , Şekil 4'teki eğimdir.

Yeşil doğrudan yaklaşık olarak okunan değerler

$$(x, y) \simeq (1.6, 8.2), \quad (2.8, 12.6)$$

şeklindedir. Bunlar

$$\boxed{\gamma_{TF} \simeq \frac{12.6 - 8.2}{2.8 - 1.6} \simeq 3.7}$$

sonucunu verir. Gözlenen ölçeklenme, dördüncü kuvvet yasasına yakındır ve sabit yarıçaplı Newton modelinin ikinci kuvvet öngörüsünden belirgin biçimde daha diktir.

D.2

Dairesel bir yörüngedeki ivmenin büyüklüğü

$$a_m = \frac{v_c^2}{r}$$

ile verilir. Dış bölgede gözlenen bir nokta için

$$v_c \simeq 170 \text{ km s}^{-1}, \quad r \simeq 10 \text{ kpc},$$

değerlerinin kullanılması

$$a_m \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2}{10 \times 3.09 \times 10^{19}} = \boxed{9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}}$$

sonucunu verir.

D.3

Derin MOND limitinde, $a \ll a_0$ iken,

$$\mu \left(\frac{a}{a_0} \right) = \frac{a/a_0}{1 + a/a_0} \simeq \frac{a}{a_0}.$$

M 'nin Newton tipi kütleçekim alanındaki değiştirilmiş hareket denklemi

$$\frac{GMm}{r^2} \simeq m \frac{a^2}{a_0}$$

hâline gelir. Dairesel bir yörünge için $a = v_{c,\infty}^2/r$ olduğundan

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v_{c,\infty}^4}{a_0 r^2}.$$

Yarıçap sadeleşir:

$$v_{c,\infty}^4 = GMa_0.$$

Böylece,

$$M = \frac{1}{Ga_0} v_{c,\infty}^4, \quad \boxed{\gamma_{\text{MOND}} = 4}.$$

Bu aynı zamanda asimptotik dairesel yörünge süratinin neden yarıçaptan bağımsız olduğunu da açıklar.

a_0 'ın grafiksel bir tahmini için Şekil 4 yaklaşık olarak

$$v_{c,\infty} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}, \quad M \simeq 4 \times 10^9 M_\odot$$

değerlerini verir. Dolayısıyla,

$$a_0 \simeq \frac{(1.0 \times 10^5)^4}{(6.67430 \times 10^{-11})(4 \times 10^9)(1.99 \times 10^{30})} \simeq 1.9 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

Grafiğin hassasiyeti düzeyinde,

$$\boxed{a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}}.$$

Bu, belirtilen $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$ mertebesinde. D.2 ile karşılaştırma $a_m/a_0 \sim 0.5$ verir: gösterilen dış galaksi verileri MOND ivme ölçeğini yoklar, ancak $a_m \ll a_0$ olduğunu doğrulamaz.

Asimptotik olarak sabit 170 km s^{-1} sürat için, derin MOND rejiminin kesin koşulu

$$r \gg \frac{v_{c,\infty}^2}{a_0} \sim 5 \text{ kpc}$$

şeklinde. Daha dışarı gidildikçe yaklaşımın doğruluğu artar. Geçişin yakınında, D.4'te olduğu gibi tam ara değerlendirme fonksiyonu kullanılmalıdır.

D.4

Homojen kürenin yoğunluğu

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_b^3}$$

ile verilir. İçerdiği kütle

$$M(< r) = \begin{cases} M(r/R_b)^3, & r \leq R_b, \\ M, & r \geq R_b. \end{cases}$$

şeklinde. Soruda belirtilen değiştirilmiş ikinci yasa formülasyonunda kütleçekim kuvveti Newton tipi olarak kalır. Birim deneme kütlesi başına büyüklüğünü

$$g_N(r) = \frac{GM(< r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GMr}{R_b^3}, & r \leq R_b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Tam ara değerlendirme fonksiyonunu kullanırsak,

$$g_N = \mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a = \frac{a^2}{a + a_0}.$$

Böylece

$$a^2 - g_N a - g_N a_0 = 0.$$

Fiziksel, negatif olmayan kök

$$a = \frac{g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N}}{2}$$

olur. $v_c^2 = ra$ olduğundan,

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{2} \left(g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N} \right) \right]^{1/2}.$$

Yerine koyma işlemi, her iki bölgenin tamamında geçerli olan ifadeyi verir:

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GM r^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GM r}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

İki ifade $r = R_b$ 'de aynı değeri verir ve merkezdeki limit $v_c(0) = 0$ 'dır.

Limit durumları dönme eğrisinin biçimini açıklığa kavuşturur:

Bölge	İvme rejimi	Dairesel yörünge sürati
İçeride, $r < R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_b^3}} r$
İçeride, $r < R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq \left(\frac{GM a_0}{R_b^3} \right)^{1/4} r^{3/4}$
Dışarıda, $r > R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}$
Dışarıda, $r > R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq (GM a_0)^{1/4}$

Dolayısıyla eğri sıfırdan başlar, merkeze yeterince yakinken $r^{3/4}$ gibi davranır ve çok uzak dış bölgelerde sabit bir değere yaklaşır. Newton tipi ara bölgeler, yalnızca kürenin yüzeyindeki GM/R_b^2 ivmesi a_0 'dan yeterince büyükse oluşur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümünden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Cox'un Saati

1765 yılında İngiliz saat ustası James Cox, tek enerji kaynağı atmosfer basıncındaki dalgalanmalar olan bir saat icat etti. Cox'un saatinde cıva içeren iki kap kullanılıyordu. Atmosfer basıncındaki değişimler, cıvanın kaplar arasında hareket etmesine ve iki kabın birbirine göre yer değiştirmesine

neden oluyordu. Bu hareket, saatin kendisi için bir enerji kaynağı görevi görüyordu.

Bu düzeneğin bir analizini yapmayı öneriyoruz. Problem boyunca şu varsayımları kullanacağız:

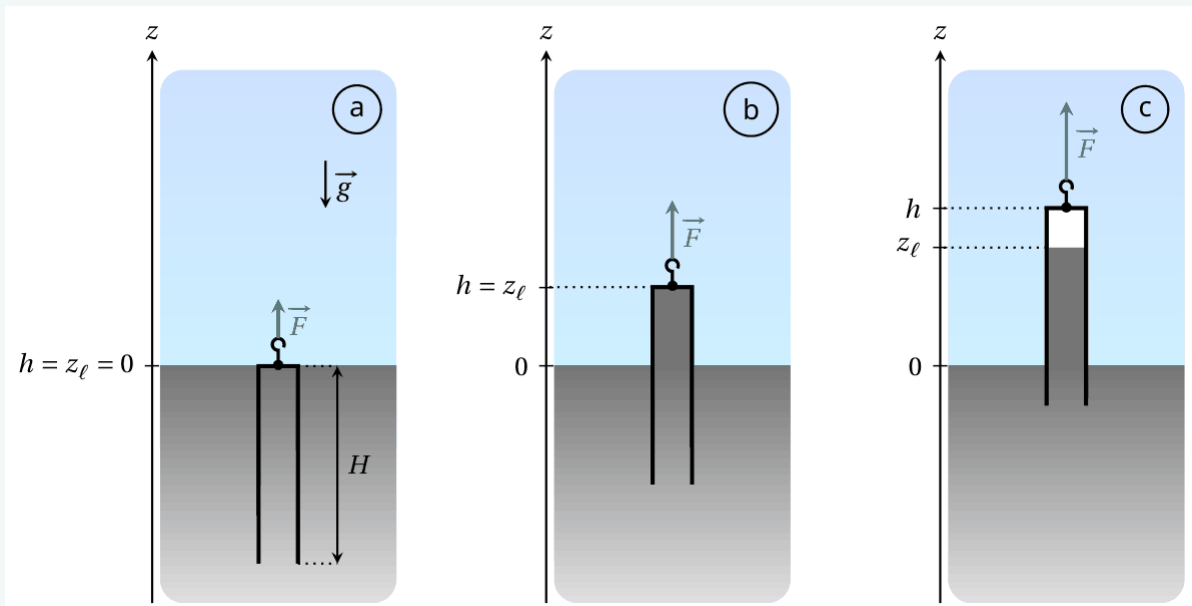
- Dünya'nın yer çekimi alanı $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ düzgündür; burada $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ve $\vec{u}_z$ birim vektördür;
- tüm sıvılar sıkıştırılmazdır ve yoğunlukları ρ ile gösterilir;
- yüzey gerilimi etkileri dikkate alınmayacaktır;
- atmosfer basıncının yükseklikle değişimi ihmal edilir;
- çevre sıcaklığı T_a düzgündür ve tüm dönüşümler izotermaldir.



Şekil 1. Cox'un saatinin sanatsal bir tasviri ¹

Bölüm A - Sıvıya batırılmış bir boruyu çekmek

Önce $z \leq 0$ yarı sonsuz uzayını kaplayan bir su banyosunu ele alalım. Üzerindeki havanın basıncı $P_a = P_0$ 'dır. Uzunluğu $H = 1 \text{ m}$, kesit alanı $S = 10 \text{ cm}^2$ ve kütlesi $m = 0.5 \text{ kg}$ olan düşey, silindirik bir boru banyoya daldırılır. Borunun alt ucu açık, üst ucu kapalıdır. Borunun üst ucunun yüksekliğini h , borunun içindeki suyun yüksekliğini ise z_ℓ ile gösteriyoruz. Boru duvarlarının kalınlığı ihmal edilir.



Şekil 2. Borunun farklı durumlarının şematik gösterimi

Şekil 2'deki borunun hiç gaz içermediği ve üst ucunun banyo seviyesinde olduğu durumdan başlıyoruz: başka bir deyişle, $h = 0$ ve $z_\ell = 0$ (a durumu). Ardından boru, alt ucu banyo seviyesine ulaşınca kadar yavaşça kaldırılır. Boruya uygulanan çekme kuvveti $\vec{F} = F\vec{u}_z$ ile gösterilir.

A.1 — 0.2 puan

Şekil 2'de gösterilen durum (b durumu) için, borunun üst ucundaki suyun basıncı P_w 'yi ifade ediniz. Ayrıca boruyu bu konumda tutmak için gerekli $\vec{F}$ kuvvetini ifade ediniz. İfadeler P_0, ρ, m, S, h, g ve $\vec{u}_z$ cinsinden yazılmalıdır.

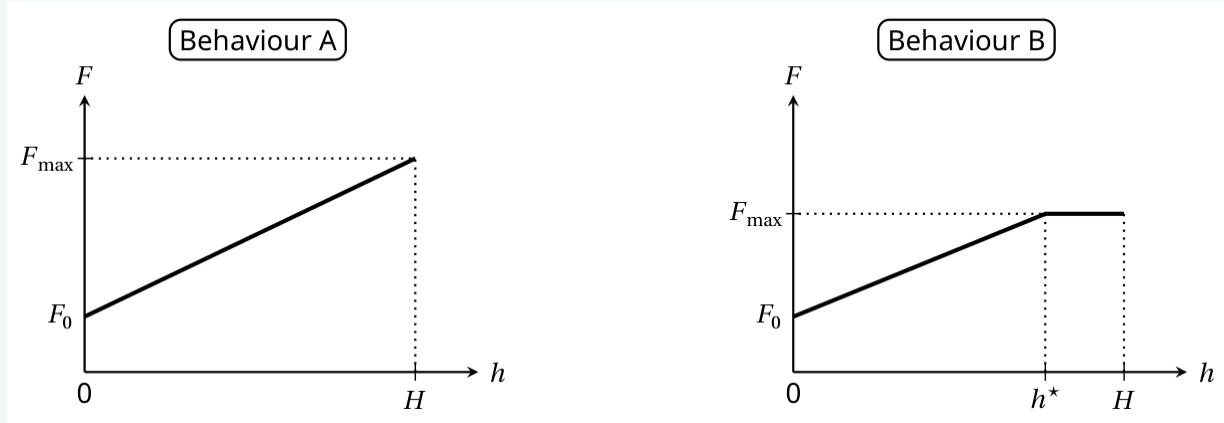
Üç deney yapılır. Her birinde boru, Tablo 1'de belirtilen koşullar altında, Şekil 2(a)'da gösterilen başlangıç durumundan itibaren kaldırılır.

Deney	Sıvı	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	Su	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Su	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Su	99	0.96×10^3	99.8×10^3

Tablo 1. Her deney için deney koşulları ve fiziksel niceliklerin sayısal değerleri

(P_{sat} , saf akışkanın doymuş buhar basıncını gösterir)

Her durumda, dış basınç $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa değerinde sabit tutulurken, boruyu h yüksekliğinde dengede tutmak için uygulanması gereken F kuvvetinin değişimini inceliyoruz. İki farklı davranış mümkündür



A.2 — 0.8 puan

Her deney için cevap kâğıdındaki tabloyu doldurarak beklenen davranışı ve F_{max} ile (uygun olduğunda) h^* 'in sayısal değerlerini belirtiniz; burada F_{max} ve h^* , iki davranışı gösteren şekillerde tanımlanmıştır.

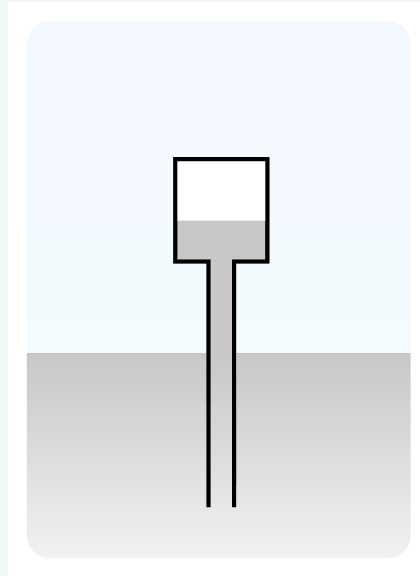
Bölüm A'da olduğu gibi, sistem borunun içinde hiç hava bulunmayacak şekilde hazırlanır. Borunun düşey konumunu, boru ile haznenin birleşim yerinin h_t yüksekliğiyle belirtiyoruz. Cıva sütununun yüksekliği yine z_ℓ ile gösterilir. Boruyu Şekil 3'te gösterilen durumda dengede tutmak için uygulanması gereken $\vec{F}$ kuvveti artık şöyle yazılabilir:

$$\vec{F} = (m_{tb} + m_{add})g\vec{u}_z \quad (1)$$

Burada m_{tb} , iki parçalı borunun (içinde cıva yokken) toplam kütlesidir.

B.1 — 0.3 puan

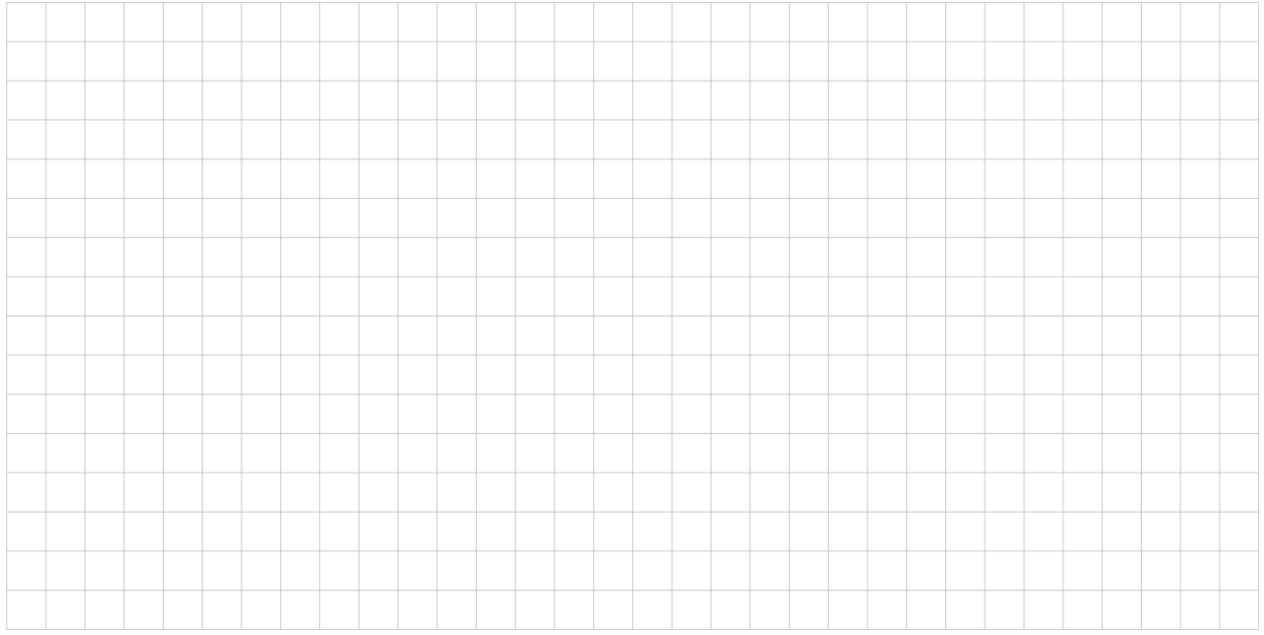
Cevap kâğıdında, (1) denkleminde yer alan m_{add} terimine karşılık gelen sıvı cıva hacminin bulunduğu bölgeyi boyayınız.



m_{add} kütlesi hem h_t yüksekliğine hem de P_a atmosfer basıncına bağlıdır. Sonraki soru için atmosfer basıncının $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa değerinde sabit olduğunu varsayınız. Sistemin tamamen sıvıya batırılmış olduğu durumdan başlanarak boru, tabanı sıvı banyosuyla aynı seviyeye gelinceye kadar yavaşça kaldırılır.

B.2 — 1.4 puan

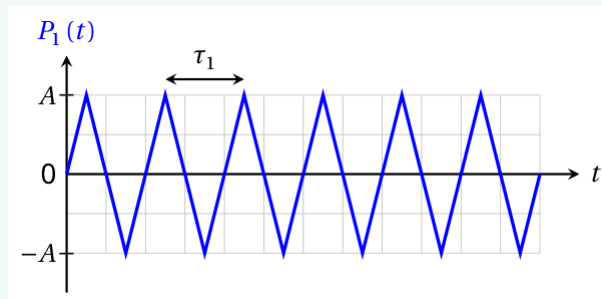
$h_t \in [-H_b, H_t]$ için m_{add} kütesinin h_t 'ye bağlı değişiminin grafiğini çiziniz. Grafikte, farklı doğru parçalarının eğimlerinin ifadelerini ve tüm köşe noktalarının h_t koordinatlarının analitik değerlerini $P_0, \rho, g, S_b, S_t, H_b$ ve H_t cinsinden veriniz.



Sistem $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ iken kaldırılırken, sıvının serbest yüzeyi haznenin ortasına geldiğinde duruyoruz. h_t değeri sabit tutulur ve ardından atmosfer basıncının

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

ile tanımlanan değişimlerinden kaynaklanan m_{add} kütleindeki değişimler gözlenir. Burada P_0 ortalama değeri, P_1 ise bir pertürbasyon terimini gösterir. P_1 'i, genliği $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ ve periyodu τ_1 1 hafta olan periyodik bir üçgen fonksiyonla modelliyoruz.



Şekil 4. $P_1(t)$ pertürbasyon teriminin basitleştirilmiş modeli

B.3 — 0.3 puan

$S_t = 5 \text{ cm}^2$ ve $S_b = 200 \text{ cm}^2$ verildiğine göre, m_{add} kütlelerinin zaman içindeki değişimlerinin genliği Δm_{add} 'i ifade ediniz, ardından sayısal değerini veriniz. *Sıvı yüzeyinin daima haznenin içinde kaldığını varsayınız.*

Bölüm C - Cox'un saati

Cox'un geliştirdiği gerçek mekanizma karmaşıktır (Şekil 5). Şekil 6'da gösterilen ve aşağıda açıklanan basitleştirilmiş bir modeli inceliyoruz:

- cıva banyosu içeren silindirik bir alt kap;
- Bölüm B'de incelenenle özdeş ve içindeki hava yine tamamen boşaltılmış olan iki parçalı bir barometre borusu banyoya daldırılmıştır;

- kap ve iki parçalı boru, ayrı ayrı birer kabloyla asılmıştır. Her iki kablo da (uzamaz ve kütleleri ihmal edilebilir kabul edilir) ideal makaralardan oluşan bir sistemden geçer ve uçları yatay bir yüzey üzerinde kayabilen aynı M kütlelerinin iki yanına bağlanır;
- sistemde bulunan toplam sıvı cıva hacmi $V_\ell = 5 \text{ L}$ 'dir.

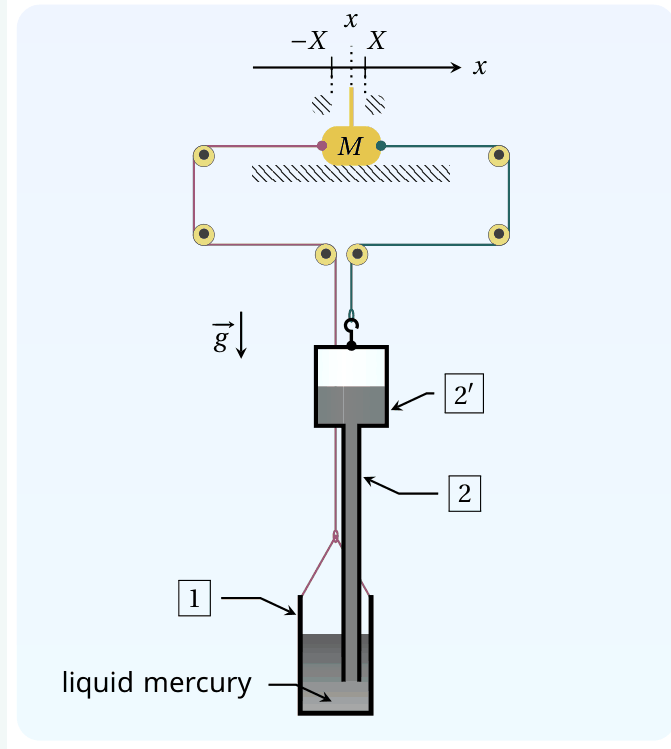
Her parçanın yüksekliği, kesit alanı ve kütlesi Tablo 2'de verilmiştir. M kütlelerinin konumu, kütle merkezinin x koordinatıyla belirtilir. Yatay destek ile M kütlesi arasındaki kuru sürtünmeyi, statik ve kinetik sürtünme katsayıları arasında ayırım yapmadan ele alıyoruz; kayma sırasında bu kuvvetin büyüklüğü F_s ile gösterilir.

İki durdurucu, M kütlelerinin yer değiştirmesini $-X \leq x \leq X$ olacak şekilde sınırlar ($X > 0$). X değerinin şu koşulları sağladığını varsayınız:

- iki parçalı borunun alt ucu hiçbir zaman kabın tabanına değmez ve sıvı banyosunun dışına çıkmaz;
- cıva sütununun z_ℓ yüksekliği daima üst haznenin içindedir.



Şekil 5. Gerçek Cox saati ² (cıva olmadan)



Şekil 6. Saati modelleyen sistemin şematik gösterimi

Referans	Adı	Yükseklik	Kesit alanı	Boş kütle
[1]	kap	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
[2]	barometre borusunun boru kısmı	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	barometre borusunun toplam kütlesi: m_{tb}
[2']	barometre borusunun haznesi	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Tablo 2. Model sistemin boyutları ve kullanılan gösterimler

Sistem, basıncı Şekil 4'teki gibi dalgalanan atmosferle temas hâlinde değişim geçirir (genlik yine $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$, periyot ise $\tau_1 = 1$ haftadır). Başlangıçta, $t = 0$ anında, M kütlesi $x = 0$ konumunda durmaktadır ve $P_1(0) = 0$ iken iki kablonun M kütlesinin iki yanına uyguladığı gerilme kuvvetleri dengededir. Şu tanımları yapıyoruz:

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

Burada son ifadede $S_t \ll S_b, S_c$ olduğu kullanılmıştır (bu varsayımın problemin sonuna kadar geçerli olduğunu kabul edeceğiz).

C.1 – 1 puan

$\xi > \xi^*$ olduğunda M 'nin süresiz olarak hareketsiz kalmasını sağlayan ξ^* eşik değerini belirleyiniz.

Yalnızca sonraki soru için, M kütlesinin geçici olarak $x = X$ konumunda sabitlendiğini varsayınız.

C.2 – 1 puan

Bu konumda, $P_1 = 0$ iken iki kablonun gerilmesinden dolayı M kütlesine etki eden toplam gerilme kuvveti $\vec{T} = T\vec{u}_x$ için ρ, g, X ve ilgili kesit alanları cinsinden bir ifade veriniz.

$\xi < \xi^*$ olduğunda, yine $x = 0$ ve $P_1 = 0$ durumundan başlanırsa $t \geq 0$ için iki farklı davranış gözlemlenebilir. Bunları ayırt etmek için başka bir parametre tanımlamamız gerekir:

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

C.3 — 2 puan

Cevap kâğıdındaki tabloyu doldurarak her rejimin hangi koşul altında ortaya çıktığını belirtiniz. Koşullar, ξ ve/veya λ için eşitsizlikler olarak ifade edilmelidir. Ayrıca $t \in [0, 3\tau_1]$ için $x(t)/X$ 'in değişimini, önceden verilmiş olan $P_1(t)/A$ değişimleriyle uyumlu olacak şekilde çiziniz. *Önemli noktaların koordinatlarının belirtilmesi gerekli değildir.*

	Condition for observation	Graph of $x(t)/X$
Regime 1		
Regime 2		

Gerçek Cox saatinde, mekanizmanın sağladığı enerji bir mandal sistemi kullanılarak depolanır ve geleneksel bir saatte olduğu gibi bir karşı ağırlığı kaldırmak için kullanılır. Burada incelenen basitleştirilmiş modelde, saatin elde ettiği enerji, yatay yüzeyin M kütlesine uyguladığı sürtünme kuvvetiyle harcanan enerjiye karşılık gelir. Bundan sonra, sistemin saatin enerji elde etmesini sağlayan rejimde çalışacak şekilde boyutlandırıldığını varsayıyoruz. Ayrıca kalıcı rejimin oluştuğunu da varsayıyoruz. Bir τ_1 periyodu boyunca kuru sürtünme kuvvetiyle harcanan enerjiyi W ile gösteriyoruz; bu enerji yalnızca F_s ve X cinsinden ifade edilebilir.

Diğer her şey aynı kalmak üzere, W enerjisini en büyük yapmak için F_s ve X ayarlanabilir; optimum durumdaki değerlerini sırasıyla F_s^* ve X^* ile gösteriyoruz.

C.4 — 1 puan

$S_b \simeq S_c$ ve $S_t \ll S_b$ olduğunu dikkate alarak, F_s^* ve X^* ifadelerini ρ , g , S_c ve A 'nın fonksiyonları olarak belirleyiniz. Buna karşılık gelen en büyük enerji W^* 'ı ifade ediniz, ardından $A = 5 \times 10^2$ Pa için sayısal değerini hesaplayınız.

Optimum durumda, bir τ_1 periyodu boyunca atmosfer basıncı kuvvetlerinin sistem üzerinde yaptığı işi W_{pr}^* ile gösteriyoruz.

C.5 — 1.7 puan

W_{pr}^* 'ı ifade ediniz, ardından W^*/W_{pr}^* oranını hesaplayınız. Sistemin değişimini, V 'nin sistemin hacmi olduğu bir (P, V) diyagramında göstermek yararlı olabilir.

Görsel kaynakları:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Victoria and Albert Museum, Londra.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Şu tanımları yapalım:

$$L = \frac{P_0}{\rho g}, \quad D = S_b + S_c - S_t, \quad q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

- A.1

$$P_w = P_0 - \rho g h, \quad \vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

- A.2

Deney	Davranış	h^* (cm), uygun olduğunda	F_{max} (N)
1	A	—	14.7
2	A	—	14.4
3	B	2.13	5.10

- A.3

$$\varepsilon = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Cıvanın buhar basıncının ihmal edilmesi, kuvvetin olduğundan büyük hesaplanmasına yol açar.

- B.1 Boru ve haznenin içinde, dış banyo seviyesinin üzerinde bulunan cıvanın tamamını tarayınız. Gösterilen durumda,

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

• B.2

$$m_{\text{add}}(h_t) = \begin{cases} \rho S_b(h_t + H_b), & -H_b \leq h_t \leq 0, \\ \rho(S_b H_b + S_t h_t), & 0 \leq h_t \leq L - H_b, \\ \rho[S_b L - (S_b - S_t)h_t], & L - H_b \leq h_t \leq L, \\ \rho S_t L, & L \leq h_t \leq H_t. \end{cases}$$

Ardışık eğimler şöyledir:

$$\rho S_b, \quad \rho S_t, \quad -\rho(S_b - S_t), \quad 0.$$

Köşe noktaları şu konumlardadır:

$$h_t = 0, \quad L - H_b \simeq 0.556 \text{ m}, \quad L \simeq 0.756 \text{ m}.$$

• B.3

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g} = 1.02 \text{ kg}.$$

• C.1

$$\xi^* = 2.$$

• C.2

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c(S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

• C.3, $\xi < 2$ için:

Rejim	Koşul	$x(t)/X$ 'in betimlemesi
1: bir durdurucuda kalır	$q > 1$, eşdeğer olarak $\xi + 2\lambda > 2$	Başlangıçta 0'dır, ardından hızla +1'e yükselir ve orada kalır.
2: tekrarlanan hareketler	$q < 1$, eşdeğer olarak $\xi + 2\lambda < 2$	Başlangıçta 0'dır, ardından +1 ve -1 düzeylerindeki platolar arasında geçiş yapar.

İlk pozitif yöndeki hareket $P_1/A = \xi/2$ olduğunda başlar. Sonraki negatif yöndeki hareketler, basınç azalırken $P_1/A = -q$ olduğunda; pozitif yöndeki hareketler ise basınç artarken $P_1/A = q$ olduğunda başlar. $q = 1$ sınırı kritik durumdur; ideal statik sürtünme kütlenin durdurucuda kalmasına izin verir.

• C.4 İdeal sınırdaki optimum değerler şöyledir:

$$F_s^* = \frac{S_c A}{2} \simeq 5.25 \text{ N}, \quad X^* = \frac{A}{4\rho g} \simeq 0.945 \text{ mm},$$

$$W^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g} \simeq 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

• C.5

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} \simeq 3.97 \times 10^{-2} \text{ J},$$

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{1}{2}.$$

Çözüm

A.1

Hidrostatik denge şu bağıntıyı verir:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Su, $z = 0$ seviyesinde $P = P_0$ olan banyoya bağlantılıdır. Dolayısıyla, su kapalı üst uçla temas hâlinde kaldığı sürece,

$$P_w = P_0 - \rho g h.$$

Üst ucun dış tarafındaki basınç aşağı yönlü $P_0 S$ kuvvetini oluştururken, altındaki su yukarı yönlü $P_w S$ kuvvetini oluşturur. Düşey duvarların düşey basınç kuvvetine katkısı yoktur ve kalınlıkları ihmal edilir. Bu nedenle denge koşulu şöyledir:

$$F + P_w S - P_0 S - mg = 0.$$

Böylece

$$\vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

A.2

Üst uçtaki basınç doymuş buhar basıncına ulaştığında bir buhar boşluğu oluşur:

$$P_0 - \rho g h^* = P_{\text{sat}}.$$

Buradan

$$h^* = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}.$$

Bu gerçekleşmeden önce $F = mg + \rho g S h$ 'dir. Buhar boşluğu oluşuktan sonra, basıncı belirtilen sıcaklıkta P_{sat} değerinde kalır; dolayısıyla

$$F = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

Bu ifadeler birleştirilirse

$$F(h) = mg + S \min\{\rho g h, P_0 - P_{\text{sat}}\}, \quad 0 \leq h \leq H.$$

Dolayısıyla:

- $h^* \geq H$ ise A davranışı ortaya çıkar ve $F_{\text{max}} = mg + \rho g S H$ olur;
- $h^* < H$ ise B davranışı ortaya çıkar ve $F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})$ olur.

$S = 10^{-3} \text{ m}^2$, $H = 1 \text{ m}$ ve $mg = 4.90 \text{ N}$ kullanılarak:

Deney	Hesaplanan doyma yüksekliği	H ile karşılaştırma	Sonuç
1	$\frac{100000 - 2340}{1000(9.8)} = 9.97 \text{ m}$	H'nin üzerinde	A; $F_{\text{max}} = 14.7 \text{ N}$

Deney	Hesaplanan doyma yüksekliği	H ile karşılaştırma	Sonuç
2	$\frac{100000 - 47400}{970(9.8)} = 5.53 \text{ m}$	H'nin üzerinde	A; $F_{\max} = 14.406 \text{ N} \simeq 14.4 \text{ N}$
3	$\frac{100000 - 99800}{960(9.8)} = 0.02126 \text{ m}$	H'nin altında	B; $h^* = 2.13 \text{ cm}$, $F_{\max} = 5.10 \text{ N}$

Her iki grafik de $F_0 = mg = 4.90 \text{ N}$ değerinden başlar.

A.3

Cıva için gerçek en büyük kuvvet ve bunun yaklaşık değeri şöyledir:

$$F_{\max} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad F_{\max}^{(0)} = mg + SP_0.$$

Yaklaşım, kuvveti SP_{sat} kadar fazla verir. Gerçek kuvvete göre bağıl hata,

$$\varepsilon = \frac{F_{\max}^{(0)} - F_{\max}}{F_{\max}} = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})}.$$

Sayısal olarak,

$$\varepsilon = \frac{10^{-3}(0.163)}{0.5(9.8) + 10^{-3}(100000 - 0.163)} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Bu, yaklaşık 0.000155%'tir.

B.1

Ek yük, dış banyo yüzeyinin üzerine kaldırılmış cıvanın ağırlığıdır. Bu seviyenin altındaki cıva, banyo tarafından hidrostatik olarak desteklenir.

Bu nedenle cevap kâğıdındaki şekilde şunları tarayınız:

- dış banyo seviyesinden boru–hazne birleşim yerine kadar dar boruda bulunan cıva;
- haznenin tabanından iç serbest yüzeyine kadar haznede bulunan cıvanın tamamı.

Dış banyo seviyesinin altındaki cıvayı taramayınız. Gösterilen durum için,

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

İç yüzeyin üzerindeki basınç sıfır olduğundan,

$$z_\ell = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Dolayısıyla, serbest yüzey haznenin içindeyken ve birleşim yeri dış banyonun üzerindeyken kullanılabilecek eşdeğer bir ifade şöyledir:

$$m_{\text{add}} = \frac{S_b P_a}{g} - \rho (S_b - S_t) h_t$$

B.2

Barometrik yüksekliği tanımlayalım:

$$L = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 0.75586 \text{ m}.$$

Verilen boyutlar için,

$$0 < L - H_b < L < H_t.$$

Üst uç L 'ye ulaşıncaya kadar boru tamamen dolu kalır. Bundan sonra boru yükselmeye devam ederken iç serbest yüzey $z_\ell = L$ seviyesinde kalır.

Geometrik olarak birbirinden farklı dört aralık vardır.

1. $-H_b \leq h_t \leq 0$.

Haznenin yalnızca $h_t + H_b$ yüksekliğindeki kısmı banyonun üzerindedir:

$$m_{\text{add}} = \rho S_b (h_t + H_b).$$

Grafik, $(-H_b, 0)$ noktasından ρS_b eğimiyle başlar.

2. $0 \leq h_t \leq L - H_b$.

Haznenin tamamı ve dar borunun h_t uzunluğundaki kısmı banyonun üzerindedir ve hepsi cıvayla doludur:

$$m_{\text{add}} = \rho (S_b H_b + S_t h_t).$$

Grafik, daha küçük olan ρS_t eğimiyle yükselmeye devam eder.

3. $L - H_b \leq h_t \leq L$.

Yüzeyi haznenin içinde L seviyesinde kalan cıvanın üzerinde vakum oluşur:

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (L - h_t)].$$

Eğim $-\rho(S_b - S_t)$ olduğundan grafik azalır.

4. $L \leq h_t \leq H_t$.

Hazne boştur ve iç serbest yüzey dar borunun içindedir:

$$m_{\text{add}} = \rho S_t L = \frac{S_t P_0}{g}.$$

Grafik yatayıdır.

Grafik süreklidir; köşe ve uç noktaları şöyledir:

h_t	m_{add}
$-H_b$	0
0	$\rho S_b H_b$
$L - H_b$	$\rho [S_b H_b + S_t (L - H_b)]$, en büyük değer
L	$\rho S_t L$
H_t	$\rho S_t L$

Üç köşe noktasının yatay koordinatları

$$\left[0, \quad \frac{P_0}{\rho g} - H_b, \quad \frac{P_0}{\rho g} \right],$$

sayısal olarak ise 0, 55.6 cm ve 75.6 cm'dir.

B.3

Belirtilen sabit konumda serbest yüzey haznenin içinde kalır. Böylece

$$m_{\text{add}}(t) = \frac{S_b[P_0 + P_1(t)]}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t.$$

Yalnızca ilk terim değiştiğinden genlik şöyledir:

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g}.$$

$S_b = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$ ile,

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{0.0200(500)}{9.8} = 1.02 \text{ kg}.$$

Bu, ortalama etrafındaki genliktir; tepeden tepeye değişim 2.04 kg'dır. Buna karşılık gelen yüzey yüksekliği genliği

$$\frac{A}{\rho g} = 3.78 \text{ mm},$$

olup haznenin ortasından her iki ucuna olan 10 cm uzaklığın oldukça altındadır.

C.1

Önce herhangi bir x ve P_1 için kablo kuvvetleri arasındaki farkı elde edelim.

Dış cıva yüzeyini z_s , kabın tabanını ise z_c ile gösterelim. Kablo düzenine göre, kütlenin sağa doğru x kadar yer değiştirmesi:

- kabı x kadar yükseltir;
- barometre borusunu x kadar alçaltır.

Dolayısıyla

$$z_c = z_{c0} + x, \quad h_t = h_{t0} - x.$$

Hidrostatik denge şu bağıntıyı verir:

$$z_\ell - z_s = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Dış yüzeyin üzerindeki cıvanın kütlesi şöyledir:

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t(h_t - z_s) + S_b(z_\ell - h_t)] = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)(h_t - z_s).$$

Boru duvarlarının hacmi ihmal edilebilir olduğundan, cıvanın korunumu şöyle yazılabilir:

$$V_\ell = S_c(z_s - z_c) + \frac{m_{\text{add}}}{\rho}.$$

$\delta m = m_{\text{add}} - m_{\text{add},0}$ yazıldığında buradan

$$\delta z_s = x - \frac{\delta m}{\rho S_c}.$$

m_{add} 'in başlangıç ifadesi mevcut değerinden çıkarıldığında

$$\delta m = \frac{S_b P_1}{g} + \rho(S_b - S_t)(x + \delta z_s).$$

Sonuç olarak,

$$\delta m = \frac{S_b S_c}{(S_b + S_c - S_t)g} P_1 + \frac{2\rho S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} x.$$

Durgun bir durumda, boru tarafındaki kablonun gerilmesi

$$T_{tb} = (m_{tb} + m_{add})g,$$

iken kap tarafındaki gerilme

$$T_c = (m_c + \rho V_\ell - m_{add})g.$$

Başlangıçtaki farkları sıfırdır. Dolayısıyla M 'ye etki eden, sağ yön pozitif kabul edilerek işaretlendirilmiş kuvvet şöyledir:

$$T = T_{tb} - T_c = 2g \delta m.$$

Şu tanımları yapalım:

$$K = \frac{S_b S_c}{S_b + S_c - S_t}, \quad \alpha = \frac{2\rho g (S_b - S_t)}{S_b}.$$

Elde edilen kuvvet bağıntısı şöyledir:

$$T = 2K(P_1 + \alpha x).$$

Verilen parametreler şu bağıntıları sağlar:

$$F_s = KA\xi, \quad \alpha X = A\lambda.$$

$x = 0$ 'da atmosfer basıncı çevrimi boyunca kuvvetin en büyük büyüklüğü $2KA$ 'dır. Statik sürtünme, aşağıdaki koşul sağlanırsa çevrim boyunca bu kuvveti dengeleyebilir:

$$F_s \geq 2KA \iff \xi \geq 2.$$

Dolayısıyla istenen eşik değeri

$$\xi^* = 2.$$

C.2

Kuvvet bağıntısında $P_1 = 0$ ve $x = X$ konularak,

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x.$$

$S_t \ll S_b, S_c$ kullanılarak,

$$\vec{T} \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

Pozitif işaret önemlidir: sağa doğru bir yer değiştirme, yine sağa doğru ek bir kuvvet oluşturur. Sürtünme artık kütleyi tutamadığında denge mekanik olarak kararsızdır.

C.3

Grafikleri çizerken atmosferik zorlamanın yavaş olduğu sınırı kullanınız: durdurucular arasındaki geçiş, bir haftalık basınç periyoduna kıyasla hızlıdır. Durdurucular, hareket eden sistemi durdurur.

Şöyle yazalım:

$$p = \frac{P_1}{A}, \quad y = \frac{x}{X}.$$

Böylece

$$\frac{T}{KA} = 2(p + \lambda y), \quad \frac{F_s}{KA} = \xi.$$

Başlangıçta $y = 0$ 'dır ve p sıfırdan itibaren artar. Sağa doğru hareket, p aşağıdaki değeri aştığında başlar:

$$p = \frac{\xi}{2}.$$

$\partial T / \partial x = 2K\alpha > 0$ olduğundan, sağa doğru hareket itici kuvveti artırır. Kütle hızla $y = +1$ 'e ulaşır.

Sağ durdurucudan sola doğru ayrılma koşulu şudur:

$$T < -F_s.$$

Böylece

$$2(p + \lambda) < -\xi \quad \Longleftrightarrow \quad p < -\left(\lambda + \frac{\xi}{2}\right).$$

Şu tanımları yapalım:

$$q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

$q > 1$ ise basınç hiçbir zaman kütlelerin durdurucudan ayrılmasını sağlayacak kadar düşmez. $q < 1$ ise basıncın azaldığı her yarım çevrimde durdurucudan ayrılma gerçekleşir. Sol durdurucudaki benzer ayrılma koşulu $p > q$ 'dur.

Dolayısıyla iki rejim şöyledir:

Rejim	Koşul	Grafiğin ayrıntılı betimlemesi
1: sağ durdurucuda sürekli kalma	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda > 2$	Başlangıçta $x/X = 0$ çiziniz; ardından basıncın ilk yükselen kolunda $p = \xi/2$ olduğunda $+1$ 'e hızlı bir yükseliş çiziniz. $3\tau_1$ 'e kadar $+1$ düzeyinde yatay olarak devam ediniz.
2: durdurucular arasında tekrarlanan hareket	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda < 2$	Aynı başlangıç yükselişiyle başlayınız. Ardından $+1$ ve -1 düzeylerinde yatay platolar çiziniz; bunları, azalan basınç $p = -q$ 'ya her ulaştığında hızlı aşağı geçişlerle, artan basınç $p = q$ 'ya her ulaştığında ise hızlı yukarı geçişlerle birleştiriniz.

Geçişlerin yerlerini açıkça belirlemek için $s = t/\tau_1$ olsun. İlk pozitif yöndeki geçiş şu anda gerçekleşir:

$$s = \frac{\xi}{8}.$$

Çevrimsel rejimde, istenen aralık içindeki negatif yöndeki geçişler şu anlardadır:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{3}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{5}{2} + \frac{q}{4},$$

ve sonraki pozitif yöndeki geçişler şu anlardadır:

$$s = 1 + \frac{q}{4}, \quad 2 + \frac{q}{4}.$$

Bunlar, istenen üç periyotluk grafiği tamamen belirler.

$q = 1$ olduğunda ayrılma eşiğine yalnızca basıncın bir uç değerinde ulaşılır. Tam ideal statik sürtünme kütleyi durdurucuda tutabilir; sürekli çevrimsel hareket $q < 1$ kesin eşitsizliğiyle garanti edilir.

C.4

Kalıcı çevrimsel rejimde kütle, her periyotta bir durdurucudan diğerine gidip geri döner. Toplam kayma mesafesi $4X$ olduğundan,

$$\boxed{W = 4F_s X}.$$

$S_b \simeq S_c$ ve $S_t \ll S_b$ ile,

$$\xi \simeq \frac{2F_s}{S_c A}, \quad \lambda \simeq \frac{2\rho g X}{A}.$$

Çevrimsel hareket koşulu şu hâle gelir:

$$\xi + 2\lambda < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad F_s < S_c(A - 2\rho g X).$$

Sabit bir X için, F_s bu üst sınıra yaklaştıkça ulaşılabilecek en büyük enerjiye yaklaşılır. Bu enerjinin sınır zarfı şöyledir:

$$W(X) = 4S_c X(A - 2\rho g X).$$

Türev alınırsa,

$$\frac{dW}{dX} = 4S_c(A - 4\rho g X).$$

Dolayısıyla optimum değerler

$$\boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g}}, \quad \boxed{F_s^* = \frac{S_c A}{2}}.$$

Eşdeğer olarak,

$$\xi_{\text{opt}} = 1, \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}.$$

Böylece

$$\boxed{W^* = 4F_s^* X^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g}}.$$

$S_c = 0.0210 \text{ m}^2$ ile,

$$F_s^* = \frac{0.0210(500)}{2} = 5.25 \text{ N},$$

$$X^* = \frac{500}{4(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m},$$

ve

$$\boxed{W^* = \frac{0.0210(500)^2}{2(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}}.$$

Kesin olarak bakıldığında, bu değerler kritik geçiş sınırı üzerinde yer alır. Çevrimsel hareketin gerçekleştiği taraftan yaklaşılacak ideal sınır maksimumunu verirler; güvenilir çalışma için bu sınırın içinde küçük bir pay bırakılması gerekir.

C.5

Atmosferin yaptığı iş açısından ilgili hacim, cıvanın üzerinde kapalı kalan vakum hacmini de içerir. Sıvı hacmi ve kapları oluşturan malzemenin hacmi sabittir; dolayısıyla

$$V = V_{\text{constant}} + V_{\text{vac}}, \quad V_{\text{vac}} = S_b(h_t + H_b - z_\ell).$$

C.4'tekiyle aynı yaklaşımı kullanalım:

$$S_b = S_c = S, \quad S_t = 0.$$

Bu durumda C.1'de türetilen korunum ve hidrostatik bağıntılar şunları verir:

$$\delta z_s = -\frac{P_1}{2\rho g}, \quad \delta z_\ell = \frac{P_1}{2\rho g}.$$

$\delta h_t = -x$ olduğundan,

$$V = V_{\text{ref}} - Sx - \frac{S}{2\rho g}P_1.$$

Atmosferin sistem üzerinde yaptığı iş şöyledir:

$$W_{\text{pr}} = - \oint P_a dV.$$

Yerine koyma işlemiyle

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_a dx + \frac{S}{2\rho g} \oint P_a dP_1.$$

Kapalı bir çevrim boyunca ikinci integral sıfır olur. Ayrıca $P_0 \oint dx = 0$ 'dır. Dolayısıyla

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_1 dx.$$

Sınırdaki optimum durumda $q = 1$ 'dir. Pozitif yöndeki hareket $P_1 = +A$ basıncında, $\Delta x = 2X^*$ yer değiştirmesiyle gerçekleşirken, negatif yöndeki hareket $P_1 = -A$ basıncında, $\Delta x = -2X^*$ yer değiştirmesiyle gerçekleşir. Sonuç olarak,

$$W_{\text{pr}}^* = S[A(2X^*) + (-A)(-2X^*)] = 4SAX^*.$$

Böylece

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

V 'nin yatay, P_a 'nın düşey ekseninde olduğu bir diyagramda çevrim bir paralelkenardır:

- her sabit durdurucuda $dV/dP_a = -S_c/(2\rho g)$ olup birbirine paralel iki eğik kol verir;
- bu kolların yatay uzaklığı $2S_c X^*$ 'dir;
- sabit basınçta gerçekleşen hareketler, bu kolları $P_0 + A$ ve $P_0 - A$ basınçlarında birbirine bağlar;
- çevrim saat yönünün tersine izlenir ve sistem üzerinde yapılan pozitif iş, çevrimin alanına eşittir:

$$(2A)(2S_c X^*) = 4S_c A X^*.$$

Son olarak,

$$\frac{W^*}{W_{pr}^*} = \frac{S_c A^2 / (2\rho g)}{S_c A^2 / (\rho g)} = \frac{1}{2}.$$

Diğer yarısı, hızlı hareketler sırasında kinetik enerjiye dönüşür ve hareket eden sistem durdurucularda durdurulduğunda harcanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Şampanya!

Uyarı: Aşırı alkol tüketimi sağlığa zararlıdır ve yasal yaş sınırının altında alkol tüketmek yasaktır.

Şampanya, bir Fransız köpüklü şarabıdır. Şekerlerin fermentasyonu şişede karbondioksit (CO_2) üretir. Sıvı fazdaki CO_2 'nin molar derişimi c_ℓ ile gaz fazındaki kısmi basıncı P_{CO_2} arasında, Henry yasası olarak bilinen $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$ bağıntısı vardır; burada k_H , Henry sabiti olarak adlandırılır.

Veriler

- Şampanyanın yüzey gerilimi $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- Sıvının yoğunluğu $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $T_0 = 20^\circ\text{C}$ sıcaklığında Henry sabiti, $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- $T_0 = 6^\circ\text{C}$ sıcaklığında Henry sabiti, $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Atmosfer basıncı $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Gazlar idealdir ve adyabatik katsayıları $\gamma = 1.3$ 'tür.



Şekil 1. Şampanya dolu bir kadeh.

Bölüm A. Kabarcıkların çekirdeklenmesi, büyümesi ve yükselmesi

$T_0 = 20^\circ\text{C}$ sıcaklığındaki bir şampanya şişesini açtıktan hemen sonra bir kadehi dolduruyoruz. Sıvının basıncı P_0 'dır ve sıcaklığı T_0 'da sabit kalır. Çözünmüş CO_2 'nin c_ℓ derişimi denge derişimini aşmaktadır ve bir CO_2 kabarcığının çekirdeklenmesini inceliyoruz. Kabarcığın yarıçapını a , iç basıncını ise P_b ile gösteriyoruz.

A.1 — 0.2 puan

P_b basıncını P_0 , a ve σ cinsinden ifade ediniz.

Sıvı içinde çözülmüş CO_2 'nin derişimi, kabarcığa olan uzaklığa bağlıdır. Uzak mesafelerde yeniden c_ℓ değerine ulaşılır; kabarcık yüzeyinin yakınındaki derişimi c_b ile gösteriyoruz. Henry yasasına göre $c_b = k_H P_b$ 'dir. Ayrıca sorunun tamamında kabarcıkların yalnızca CO_2 içerdiğini varsayıyoruz.

$c_\ell \neq c_b$ olduğundan, CO_2 molekülleri yüksek derişimli bölgelerden düşük derişimli bölgelere difüzyonla geçer. Ayrıca sıvı fazdan kabarcık yüzeyine ulaşan her molekülün buhar fazına geçtiğini varsayıyoruz.

A.2 — 0.5 puan

Üzerinde bir kabarcığın büyümesinin beklendiği kritik yarıçap a_c 'yi P_0, σ, c_ℓ ve c_0 cinsinden ifade ediniz; burada $c_0 = k_H P_0$ 'dir. $c_\ell = 4c_0$ için a_c 'yi sayısal olarak hesaplayınız.

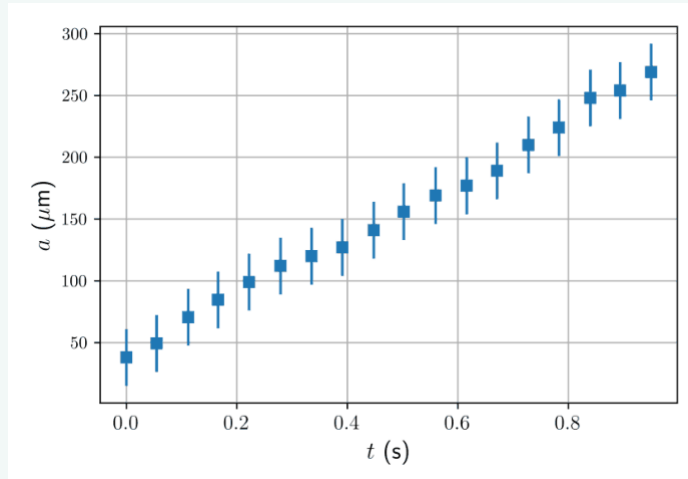
Pratikte kabarcıklar çoğunlukla önceden var olan gaz boşluklarından büyür. Bu nedenle başlangıç yarıçapı $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$ olan bir kabarcık ele alınız. Kabarcık yüzeyinde birim alan ve birim zamanda aktarılan CO_2 'nin mol sayısı j ile gösterilir. j için iki model mümkündür.

- model (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$; burada D , CO_2 'nin sıvı içindeki difüzyon katsayısıdır.
- model (2) $j = K(c_\ell - c_b)$; burada K bir sabittir.

Deneyssel olarak kabarcık yarıçapının $a(t)$, zamana **Şekil 2**'de gösterildiği gibi bağlı olduğu bulunmuştur. Burada $c_\ell \approx 4c_0$ 'dır ve kabarcıklar görülebilecek kadar büyük olduğundan, yüzey geriliminin yol açtığı ek basınç ihmal edilebilir ve $P_b \approx P_0$ alınabilir.

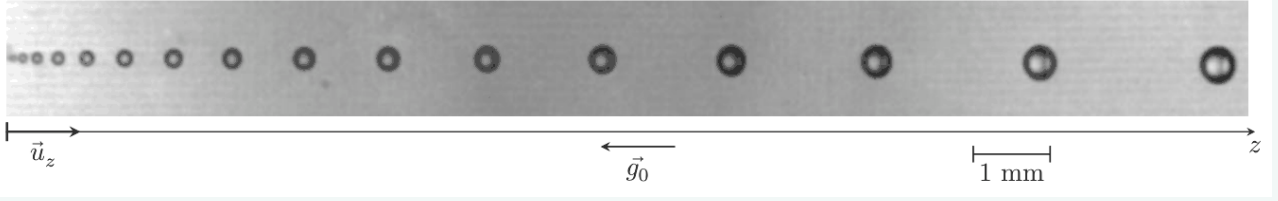
A.3 — 1.2 puan

Kabarcıktaki CO_2 'nin mol sayısı n_c 'yi a, P_0, T_0 ve ideal gaz sabiti R cinsinden ifade ediniz. Her iki model için $a(t)$ 'yi bulunuz. **Şekil 2**'deki deneyssel sonuçları hangi modelin açıkladığını belirtiniz. Cevabınıza bağlı olarak K veya D 'yi sayısal olarak hesaplayınız.



Şekil 2. Bir kadeh şampnyadaki CO_2 kabarcığının yarıçapının zamanla değişimi ([1]'den uyarlanmıştır).

Sonunda kabarcıklar kadehin tabanından ayrılır ve yükselirken büyümeye devam eder. **Şekil 3**, bir kabarcık dizisini göstermektedir. Dizideki kabarcıklar aynı başlangıç yarıçapına sahiptir ve sabit $f_b = 20 \text{ Hz}$ frekansı ile salınırlar.



Şekil 3. Bir kabarcık dizisi. Fotoğraf, sayfa düzeni için yatay olacak şekilde döndürülmüştür ([1]'den uyarlanmıştır).

Burada incelenen hız aralığında, dinamik viskozitesi η olan bir sıvıda v hızıyla hareket eden a yarıçaplı bir kabarcığa etki eden sürüklenme kuvveti F , Stokes yasası $F = 6\pi\eta av$ ile verilir. Ölçümler, kabarcığın her an limit hızıyla hareket ettiğinin varsayılabileceğini göstermektedir.

A.4 — 0.8 puan

Düşey olarak yükselen bir kabarcığa etki eden başlıca kuvvetlerin ifadelerini veriniz. $v(a)$ ifadesini elde ediniz. ρ_ℓ , g_0 ve Şekil 3 üzerinden ölçülen büyüklükleri kullanarak η için sayısal bir tahminde bulununuz.

Kabarcıkların $q_a = \frac{da}{dt}$ hızıyla yarı durağan büyümesi, kabarcıkların yükselmesi sırasında da geçerlidir.

A.5 — 0.5 puan

Serbest yüzeye ulaşan bir kabarcığın yarıçapı a_{H_ℓ} 'yi, katettiği yükseklik H_ℓ , büyüme hızı $q_a = \frac{da}{dt}$ ve gerek duyduğunuz sabitler cinsinden ifade ediniz. $a_{H_\ell} \gg a_0$ olduğunu ve q_a 'nın sabit kaldığını varsayınız; $H_\ell = 10$ cm ve Şekil 2'ye karşılık gelen q_a için a_{H_ℓ} 'nin sayısal değerini veriniz.

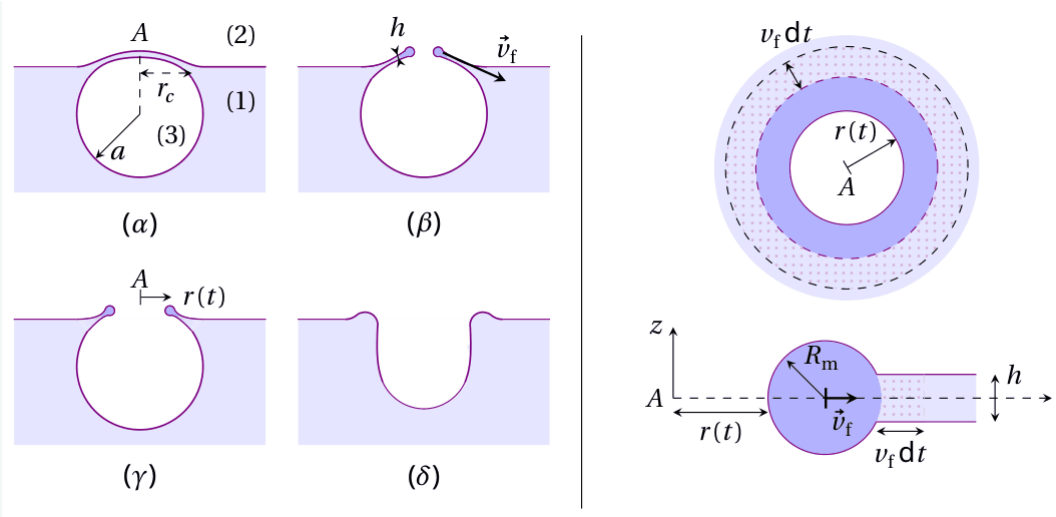
Kabarcıkların çekirdeklendiği N_b adet yer vardır. Kabarcıkların, bir şampanya kadehinin (V_ℓ hacmi için yüksekliği H_ℓ) tabanında sabit f_b frekansı ile çekirdeklendiğini ve a_0 'ın hâlâ ihmal edilebilir olduğunu varsayınız. Serbest yüzeyde CO_2 difüzyonunu ihmal ediniz.

A.6 — 1.1 puan

$c_\ell(t)$ için diferansiyel denklemi yazınız. Bu denklemden, sıvıda çözünmüş CO_2 derişiminin azalmasının karakteristik süresi τ 'yu elde ediniz.

Bölüm B. Patlayan bir kabarcığın ses yayması

Küçük kabarcıklar serbest yüzeye ulaştıklarında neredeyse küreseldir. Kabarcığı havadan ayıran sıvı film yeterince inceldiğinde, filmde r yarıçaplı dairesel bir delik oluşur ve yüzey geriliminin etkisiyle çok hızlı bir şekilde açılır (Şekil 4, sol). Delik sabit v_f hızıyla açılır (Şekil 4, sağ). Kenar halkasının dışındaki film, sabit h kalınlığında ve hareketsiz kalır.

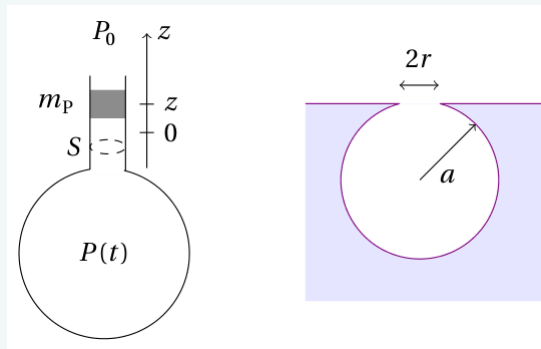


Şekil 4. (Sol) (α) Yüzeydeki kabarcık: (1) sıvı, (2) P_0 basıncındaki hava ve (3) P_b basıncındaki CO_2 ; (β) ve (γ) sıvı filmin geri çekilmesi, kenar halkası koyu maviyle gösterilmiştir; (δ) kabarcığın çökmesi. (Sağ) t anında sıvı filmin geri çekilmesi. Üst: delinmiş filmin üstten görünümünün çizimi. Alt: kenar halkasının ve geri çekilen filmin kesiti. dt süresince kenar halkası yakınındaki sıvıyı toplar (noktalı çizgi).

Enerji kaybına yol açan süreçler nedeniyle, kenar halkası ve toplanan sıvının t ile $t + dt$ anları arasındaki yüzey enerjisi farkının yalnızca yarısı kinetik enerjiye dönüşür. Ayrıca kenar halkasının yüzey alanındaki değişimin, filminkine göre ihmal edilebilir olduğunu varsayıyoruz.

B.1 — 1.1 puan

v_f 'yi ρ_ℓ , σ ve h cinsinden ifade ediniz.



Şekil 5. (Sol) Bir Helmholtz rezonatörü. (Sağ) Bir osilatör olarak kabarcık.

Film patladığında iç basıncı serbest bırakır ve bir ses yayar. Bu ses yayımını bir Helmholtz rezonatörüyle modelliyoruz: S alanlı dar bir boyun açıklığı üzerinden P_0 basıncındaki atmosfere açılan bir boşluk (Şekil 5, sol). Boyunda bulunan m_p kütlesi, boşluktaki gaz adyabatik olarak genişlerken veya sıkışırken maruz kaldığı basınç kuvvetleri nedeniyle küçük genlikli konum salınımları yapar. m_p 'ye etki eden yer çekimi kuvveti, basınç kuvvetlerine göre ihmal edilebilir. $z = 0$ iken $P = P_0$ için m_p kütlelerinin altındaki gazın hacmi V_0 olsun.

B.2 — 1.1 puan

m_p 'nin salınım frekansı f_0 'ı ifade ediniz. İpucu: $\varepsilon \ll 1$ için $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

Helmholtz modeli, a yarıçaplı bir kabarcık için kullanılabilir. V_0 , kapalı kabarcığın hacmidir. Literatüre göre eşdeğer pistonun kütlesi $m_p = 8\rho_g r^3/3$ 'tür; burada r , dairesel açıklığın yarıçapı ve $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ gazın yoğunluğudur (**Şekil 5**, sağ). Patlama sürecinde r , 0'dan aşağıda verilen r_c değerine kadar değişir:

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

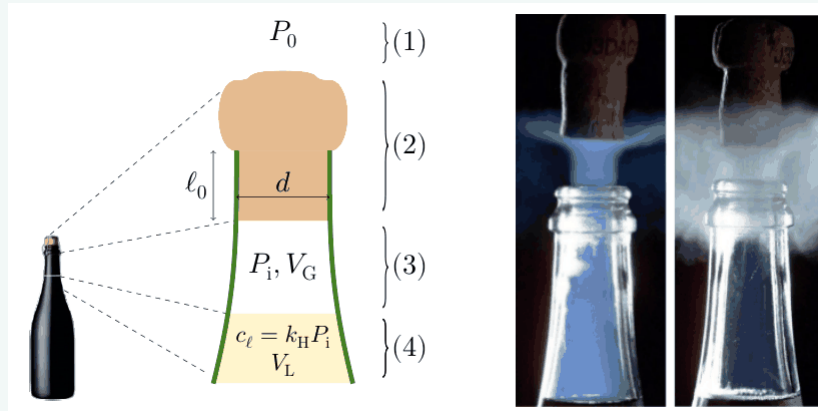
Aynı zamanda yayılan sesin frekansı en büyük değeri olan 40 kHz'e kadar artar ve patlama süresi $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$ 'dir.

B.3 — 1.1 puan

Kabarcığın yarıçapı a 'yı ve kabarcığı atmosferden ayıran şampanya filminin kalınlığı h 'yi bulunuz.

Bölüm C. Şampanya şişesinin açılması

Bir şişedeki toplam CO_2 miktarı $n_T = 0.2 \text{ mol}$ 'dür; bu miktar ya $V_L = 750 \text{ mL}$ hacmindeki sıvı şampanyada çözünmüş hâlde ya da mantarın altındaki $V_G = 25 \text{ mL}$ hacminde gaz hâlinde bulunur (**Şekil 6**, sol). V_G yalnızca CO_2 içerir. İki CO_2 fazı arasındaki denge Henry yasasına uyar. Şişe açıldığında gaz hâlindeki CO_2 'nin hızlı genişlemesinin adyabatik ve tersinir olduğunu varsayıyoruz. Ortam sıcaklığı T_0 ve basıncı $P_0 = 1 \text{ bar}$ sabittir.



Şekil 6. Sol: geleneksel şişe boynu: (1) çevredeki hava, (2) mantar tıpa, (3) üst boşluk, (4) sıvı şampanya. Sağ: Şişe iki farklı sıcaklıkta açılırken gözlenen iki olay ([2]'den uyarlanmıştır).

C.1 — 0.4 puan

$T_0 = 6^\circ\text{C}$ ve $T_0 = 20^\circ\text{C}$ için şişedeki gaz hâlindeki CO_2 'nin basıncı P_i 'nin sayısal değerini veriniz.

Şampanya üretiminin başka bir aşaması (burada açıklanmamıştır), sonraki sorularda kullanacağımız şu P_i değerlerine yol açar: $T_0 = 6^\circ\text{C}$ için $P_i = 4.69 \text{ bar}$ ve $T_0 = 20^\circ\text{C}$ için $P_i = 7.45 \text{ bar}$.

Şişe açılırken T_0 'a bağlı olarak iki farklı olay gözlenebilir (**Şekil 6**, sağ).

- ya katı CO_2 kristallerinin oluşması nedeniyle mavi bir sis ortaya çıkar (ancak suyun yoğuşması engellenir);
- ya da şişe boynunu çevreleyen havadaki su buharının yoğuşması nedeniyle gri-beyaz bir sis ortaya çıkar. Bu ikinci durumda katı CO_2 kristalleri oluşmaz.

CO₂'nin katı/gaz geçişi için doymuş buhar basıncı $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ şu bağıntıya uyar:

$$\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$$

burada T , K cinsindendir; $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3 \text{ K}$ ve $C = -3.49 \text{ K}$ 'dir.

C.2 — 0.7 puan

Hiçbir faz geçişi gerçekleşmediği durumda, $T_0 = 6^\circ\text{C}$ ve $T_0 = 20^\circ\text{C}$ için şişe açıldıktan sonra genleşmenin sonunda CO₂ gazının sıcaklığı T_f 'nin sayısal değerini veriniz.

Doğru olan ifadeleri seçiniz (birden fazla ifade doğru olabilir):

1. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ iken şişe açılırken gri-beyaz bir sis ortaya çıkar.
2. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ iken şişe açılırken mavi bir sis ortaya çıkar.
3. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ iken şişe açılırken gri-beyaz bir sis ortaya çıkar.
4. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ iken şişe açılırken mavi bir sis ortaya çıkar.

Şişe açılırken mantar tıpa dışarı fırlar. Şimdi ulaştığı en büyük yükseklik H_c 'yi belirleyeceğiz. Şişe boynunun mantar tıpa uyguladığı sürtünme kuvveti F 'nin $F = \alpha A$ olduğunu varsayınız; burada A temas alanı, α ise belirlenecek bir sabittir. Başlangıçta basınç kuvveti sürtünme kuvvetini az miktarda aşar. Mantarın kütlesi $m = 10 \text{ g}$, çapı $d = 1.8 \text{ cm}$ ve başlangıçta şişe boynuna sıkışmış olan silindirik kısmının uzunluğu $\ell_0 = 2.5 \text{ cm}$ 'dir. Mantar şişe boynundan çıktıktan sonra net basınç kuvvetini ihmal edebilirsiniz.

C.3 — 1.3 puan

Dış ortam sıcaklığı $T_0 = 6^\circ\text{C}$ ise H_c 'nin sayısal değerini veriniz.

[1] Liger-Belair ve diğerleri, Am. J. Enol. Vitic., Cilt 50, Sayı 3 (1999).

[2] Liger-Belair ve diğerleri, Sc. Reports **7**, 10938 (2017).

Genel Veri Tablosu

Sabit	Gösterim	Değer	Birim
Işığın boşluktaki hızı	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck sabiti	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Boltzmann sabiti	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Avogadro sabiti	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Molar gaz sabiti	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Temel yük	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Evrensel kütle çekim sabiti	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Standart yer çekimi ivmesi	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann sabiti	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

Sabit	Gösterim	Değer	Birim
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektrik sabiti)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Rydberg sabiti	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Elektronun kütlesi	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Protonun kütlesi	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Nötronun kütlesi	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Atomik kütle sabiti	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Elektronvolt	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada $\Delta c = c_\ell - c_0$ ve g_0 , veri tablosunda verilen yer çekimi ivmesidir.

• A.1

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

• A.2

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

$c_\ell = 4c_0$ için,

$$a_c = 3.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.31 \mu\text{m}.$$

• A.3

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0},$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0\Delta c}{P_0}t},$$

$$a_{(2)}(t) = a_0 + \frac{KRT_0\Delta c}{P_0}t.$$

Model (2), yaklaşık doğrusal büyümeyle uyumludur:

$$q_a \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1},$$

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

- **A.4** Kaldırma kuvveti $4\pi\rho_\ell g_0 a^3/3$ yukarı yönde; Stokes sürüklenme kuvveti $6\pi\eta a v$ ve kabarcığın ihmal edilebilir ağırlığı aşağı yönde etki eder.

$$v(a) \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}, \quad \eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

değerleri Şekil 3'teki yaklaşık ölçümlerden elde edilir.

- **A.5**

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

- **A.6**

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0), \quad \tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

- **B.1**

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

- **B.2**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

- **B.3**

$$a \approx 5.3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.53 \text{ mm}, \quad h \approx 3.8 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.8 \mu\text{m}.$$

- **C.1**

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

- **C.2** Bu kısım için önceki değerlerin yerine kullanılması belirtilen basınçlarla:

$$T_f(6^\circ\text{C}) \approx 195.4 \text{ K } (-77.7^\circ\text{C}),$$

$$T_f(20^\circ\text{C}) \approx 184.4 \text{ K } (-88.7^\circ\text{C}).$$

Doğru ifadeler **1 ve 4**'tür: 6°C 'de gri-beyaz sis, 20°C 'de mavi sis oluşur.

- **C.3**

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Çözüm

A.1

Young–Laplace yasası, eğri bir sıvı–gaz ara yüzünün iki tarafı arasındaki basınç farkını verir:

$$P_b - P_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Küresel bir kabarcık için her iki asal eğrilik yarıçapı da a 'dır. Dolayısıyla

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

Sıvı içindeki kabarcığın çevresinde tek bir sıvı-gaz ara yüzü vardır.

A.2

Kabarcık yüzeyindeki Henry yasası şunu verir:

$$c_b = k_H P_b = k_H \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) = c_0 + \frac{2\sigma c_0}{P_0 a}.$$

$c_\ell > c_b$ olduğunda gaz, kabarcığın içine difüzyonla geçerek onu büyütür. Bu nedenle eşik koşulu

$$c_\ell - c_0 = \frac{2\sigma c_0}{P_0 a_c},$$

bağıntısını sağlar; dolayısıyla

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0 (c_\ell - c_0)}.$$

Aşırı doymuş bir sıvıda $a > a_c$ olan kabarcıklar büyürken daha küçük kabarcıklar çözünme eğilimindedir.

$c_\ell = 4c_0$ için,

$$a_c = \frac{2\sigma}{3P_0} = \frac{2(47 \times 10^{-3})}{3(1.0 \times 10^5)} = 3.13 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Böylece

$$a_c \approx 0.31 \mu\text{m}.$$

A.3

Belirtilen $P_b \simeq P_0$ yaklaşımı altında ideal gaz yasası

$$P_0 \frac{4\pi a^3}{3} = n_c R T_0,$$

bağıntısını ve dolayısıyla

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3 R T_0}.$$

sonucunu verir.

Kabarcık yüzeyinden içeri giren mol miktarının zamana göre değişimi

$$\frac{dn_c}{dt} = 4\pi a^2 j.$$

şeklindedir. İdeal gaz ifadesinin sabit P_0, T_0 altında türevi alınırsa

$$\frac{4\pi P_0 a^2}{R T_0} \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 j,$$

elde edilir; bu da

$$\frac{da}{dt} = \frac{RT_0}{P_0} j.$$

biçimine indirgenir.

Kısa süreli büyüme deneyi için sıvının kabarcıktan uzaktaki derişimini sabit alıp $c_b \simeq c_0$ kullanınız.

Model (1) için,

$$\frac{da}{dt} = \frac{DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0 a}.$$

$a(0) = a_0$ koşuluyla integral alındığında,

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t}.$$

Bu model, azalan bir büyüme hızı ve asimptotik olarak $t^{1/2}$ bağımlılığı öngörür.

Model (2) için,

$$\frac{da}{dt} = \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} = q_a,$$

dolayısıyla

$$a(t) = a_0 + \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t.$$

Şekil 2, yaklaşık sabit bir eğim göstererek **model (2)**'yi destekler. $t = 0$ anında yaklaşık $a = 40 \mu\text{m}$ ve $t = 0.95 \text{ s}$ anında $a = 270 \mu\text{m}$ okunursa,

$$q_a \approx \frac{(270 - 40) \times 10^{-6}}{0.95} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

20°C'de,

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad c_0 = k_H P_0 = 33 \text{ mol m}^{-3},$$

ve $c_\ell - c_0 \simeq 3c_0 = 99 \text{ mol m}^{-3}$ 'tür. Böylece

$$K = \frac{P_0 q_a}{RT_0(c_\ell - c_0)} \approx \frac{10^5 (2.4 \times 10^{-4})}{8.31446 (293.15) (99)}.$$

Dolayısıyla

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

A.4

$\mathbf{u}_z$ düşey yukarı yönü gösterebilir. Kuvvetler; kaldırma kuvveti,

$$\mathbf{F}_B = \rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z,$$

Stokes sürüklenme kuvveti,

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta a v \mathbf{u}_z,$$

ve kabarcığın ağırlığıdır:

$$\mathbf{W} = -\rho_g \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z.$$

Limit hızda bunların toplamı sıfırdır:

$$6\pi\eta av = (\rho_\ell - \rho_g) \frac{4\pi a^3}{3} g_0.$$

$\rho_g \ll \rho_\ell$ olduğundan,

$$v(a) = \frac{2(\rho_\ell - \rho_g)g_0 a^2}{9\eta} \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}.$$

Komşu kabarcıklar, oluşumlarından itibaren geçen süreler arasındaki

$$\Delta t = \frac{1}{f_b}.$$

farkıyla aynı yörüngeyi izler. Bu nedenle merkezleri arasındaki Δz uzaklığı

$$v \simeq \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_b \Delta z,$$

sonucunu verir; bu hız, yaklaşık olarak kabarcık çiftinin ortalama yarıçapında değerlendirilir.

Şekil 3'teki ölçek kullanıldığında, sağ uca yakın iki kabarcık yaklaşık olarak

$$a \simeq 0.24 \text{ mm}, \quad \Delta z \simeq 2.3 \text{ mm}.$$

değerlerini verir. Bunun sonucunda,

$$v \simeq 20(2.3 \times 10^{-3}) = 4.6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1},$$

ve

$$\eta \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9f_b \Delta z} = \frac{2(10^3)(9.80665)(0.24 \times 10^{-3})^2}{9(20)(2.3 \times 10^{-3})}.$$

Buradan, şekil üzerinden yapılan ölçümlerle

$$\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}.$$

tahmini elde edilir.

A.5

Limit yükselme hızını sabit yarıçap büyüme hızıyla birleştirelim:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta} a^2, \quad \frac{da}{dt} = q_a.$$

Zamanı yok edersek,

$$\frac{dz}{da} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta q_a} a^2.$$

Tabandan serbest yüzeye kadar integral alındığında,

$$H_\ell = \frac{2\rho_\ell g_0}{27\eta q_a} (a_{H_\ell}^3 - a_0^3).$$

Dolayısıyla başlangıç yarıçapını koruyan ifade

$$a_{H_\ell} = \left(a_0^3 + \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

şeklindedir. $a_{H_\ell} \gg a_0$ için,

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

$H_\ell = 0.10 \text{ m}$, $q_a \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ ve yukarıda tahmin edilen viskozite kullanıldığında,

$$a_{H_\ell} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

A.6

Derişimin azaldığı zaman ölçeğinde kabarcık dizisinin yarı durağan betimlemesini kullanalım. Sıvı, her yerde aynı olan bir $c_\ell(t)$ derişimiyle temsil edilir ve hâlâ yükselmekte olan kabarcıklardaki gaz miktarının değışimleri, kayıp bilançosunda ihmal edilir.

Yüzeye ulaşan her kabarcık

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} a_{H_\ell}^3.$$

mol gaz taşır. a_0 ihmal edildiğinde A.5'in sonucu şunu verir:

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} = \frac{18\pi\eta H_\ell P_0}{\rho_\ell g_0 RT_0} q_a.$$

Sıvı çözünmüş gazını kaybederken model (2),

$$q_a(t) = \frac{KRT_0}{P_0} (c_\ell(t) - c_0).$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla

$$n_{\text{out}} = \frac{18\pi\eta K H_\ell}{\rho_\ell g_0} (c_\ell - c_0).$$

Birim zamanda $N_b f_b$ kabarcık salınır. CO_2 'nin korunumu

$$V_\ell \frac{dc_\ell}{dt} = -N_b f_b n_{\text{out}},$$

bağıntısını verir; böylece

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0).$$

Çözüm

$$c_\ell(t) = c_0 + [c_\ell(0) - c_0] e^{-t/\tau},$$

şeklindedir; burada

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

Üstel olarak azalan, derişimin c_0 'ı aşan kısmıdır.

B.1

dt süresince geri çekilen kenar halkası,

$$dA = 2\pi r v_f dt.$$

alanlı bir halka bölgesini süpürür. Filmin iki sıvı-gaz yüzeyi olduğundan, yüzey enerjisindeki azalma

$$-dE_s = 2\sigma dA.$$

şeklindedir. Belirtilen enerji kaybı kuralına göre bunun yarısı kinetik enerjiye dönüşür:

$$dE_k = \sigma dA.$$

Yeni toplanan kütle

$$dm = \rho_\ell h dA.$$

kadardır. Kenar halkasının hızı sabit kaldığı için kinetik enerjisindeki artış

$$dE_k = \frac{1}{2} v_f^2 dm = \frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 dA.$$

şeklindedir. İki ifade eşitlenirse,

$$\frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 = \sigma,$$

dolayısıyla

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

B.2

Pistonun yukarı yönde z kadar yer değiştirmesi, kapalı gaz hacmini

$$V = V_0 + Sz.$$

değerine değiştirir. Tersinir adyabatik sıkışma veya genleşme için,

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma.$$

Dolayısıyla

$$P = P_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}.$$

$|Sz| \ll V_0$ için,

$$P \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0}\right).$$

Belirtildiği gibi pistonun ağırlığı ihmal edildiğinde hareket denklemi

$$m_p \ddot{z} = (P - P_0)S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} z.$$

olur. Bu, aşağıdaki bağıntıyla tanımlanan basit harmonik harekettir:

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}.$$

Dolayısıyla

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

B.3

Kabarcık için,

$$S = \pi r^2, \quad V_0 = \frac{4\pi a^3}{3}, \quad m_p = \frac{8\rho_g r^3}{3}.$$

B.2'de yerine konulduğunda,

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma P_0 \pi^2 r^4}{(8\rho_g r^3/3)(4\pi a^3/3)} = \frac{9\gamma P_0 r}{128\pi\rho_g a^3}.$$

Dolayısıyla $f_0 \propto \sqrt{r}$ 'dir ve en büyük frekansa $r = r_c$ olduğunda ulaşılır. r_c için verilen ifade kullanılırsa,

$$f_{\max}^2 = \frac{9\gamma P_0}{128\pi\rho_g a^3} \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi\rho_g a} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

Böylece

$$a = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi\rho_g f_{\max}^2} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

$f_{\max} = 4.0 \times 10^4$ Hz için,

$$a = \frac{3\sqrt{3}(1.3)(10^5)}{64\pi(1.8)(4.0 \times 10^4)^2} \sqrt{\frac{10^3(9.80665)}{47 \times 10^{-3}}} = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Böylece

$$a \approx 0.53 \text{ mm}.$$

Açıklığın son yarıçapı

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} \approx 1.50 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

olur. Açıklık sabit hızla açıldığından,

$$v_f = \frac{r_c}{t_b}, \quad t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms} = 3 \times 10^{-5} \text{ s},$$

dolayısıyla

$$v_f \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}.$$

Son olarak B.1 şunu verir:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_\ell v_f^2} = \frac{2\sigma t_b^2}{\rho_\ell r_c^2} \approx 3.77 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

Dolayısıyla

$$h \approx 3.8 \text{ } \mu\text{m}.$$

C.1

Çözünmüş ve gaz hâlindeki CO_2 miktarları sırasıyla şöyledir:

$$n_L = k_H P_i V_L, \quad n_G = \frac{P_i V_G}{RT_0}.$$

Toplam miktarın korunumu şunu verir:

$$n_T = P_i \left(k_H V_L + \frac{V_G}{RT_0} \right).$$

Bunun sonucunda,

$$P_i = \frac{n_T}{k_H V_L + V_G/(RT_0)}.$$

Şu değerleri kullanalım:

$$V_L = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad V_G = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

6°C'de, $T_0 = 279.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(5.4 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 279.15)} \approx 4.81 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

20°C'de, $T_0 = 293.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(3.3 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 293.15)} \approx 7.76 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Bunlar mutlak basınçlardır:

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

C.2

Bu kısım için soruda önceki değerlerin yerine şu basınçların kullanılması belirtilmiştir:

$$P_i(6^\circ\text{C}) = 4.69 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) = 7.45 \text{ bar}.$$

İdeal bir gazın tersinir adyabatik genleşmesi için,

$$PV^\gamma = \text{sabit}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{sabit}.$$

V yok edilip son basınç P_0 alındığında,

$$T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Dolayısıyla

$$T_f(6^\circ\text{C}) = 279.15 \left(\frac{1}{4.69} \right)^{0.3/1.3} \approx 195.4 \text{ K},$$

ve

$$T_f(20^\circ\text{C}) = 293.15 \left(\frac{1}{7.45} \right)^{0.3/1.3} \approx 184.4 \text{ K}.$$

Katı CO_2 oluşup oluşmadığını belirlemek için P_0 basıncındaki süblimleşme denge sıcaklığını bulalım.

$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2} = P_0$ alınırsa,

$$0 = A - \frac{B}{T_s + C},$$

dolayısıyla

$$T_s = \frac{B}{A} - C = \frac{1300}{6.81} + 3.49 \approx 194.4 \text{ K}.$$

Başlangıçta soğuk olan şişe için,

$$195.4 \text{ K} > T_s.$$

Nitekim verilen buhar basıncı ifadesi şunu verir:

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(195.4 \text{ K}) \approx 1.09 \text{ bar} > P_0.$$

Gaz, bu genleşme sırasında katı-gaz doyumluğuna ulaşmaz. Belirtilen seçeneklere göre **gri-beyaz sis** oluşur.

Başlangıçta daha sıcak olan şişe için,

$$184.4 \text{ K} < T_s,$$

ve

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(184.4 \text{ K}) \approx 0.422 \text{ bar} < P_0.$$

Faz değişimi olmadan gerçekleşen genleşme, aşırı doymuş CO_2 oluşturacağından katı kristaller oluşur ve **mavi sis** meydana gelir.

Dolayısıyla

1 ve 4 numaralı ifadeler doğrudur.

Hesaplanan T_f değerleri, faz değişimi olmadığı varsayımıyla istenen sıcaklıklardır; sıcak şişe durumunda katı oluşumu gerçek ısıl değişimi etkiler.

C.3

6°C 'de belirtilen basıncı kullanalım:

$$P_i = 4.69 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

x , mantarın başlangıç konumundan yukarı yöndeki yer değiştirmesi olsun ve kesit alanı

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

ile gösterilsin.

$0 \leq x \leq \ell_0$ iken temas alanı

$$A(x) = \pi d(\ell_0 - x),$$

olduğundan sürtünme kuvveti

$$F_{\text{fr}}(x) = \alpha \pi d(\ell_0 - x).$$

şeklindedir.

Başlangıçta net basınç kuvveti sürtünmeyi neredeyse dengeler:

$$(P_i - P_0)S \simeq \alpha \pi d \ell_0.$$

Mantarın ağırlığı yalnızca 0.098 N iken başlangıçtaki net basınç kuvveti yaklaşık 94 N 'dur; bu nedenle α tahmin edilirken ağırlık ihmal edilebilir. Böylece

$$\alpha \simeq \frac{(P_i - P_0)d}{4\ell_0} \approx 6.64 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

Hızlı genleşmeye, başlangıçta üst boşlukta bulunan gaz katılır. Mantarın hareketi sırasında bu gazın hacmi ve basıncı

$$V(x) = V_G + Sx, \quad P(x) = P_i \left(\frac{V_G}{V_G + Sx} \right)^\gamma.$$

şeklindedir. Mantar boyundan çıktığında,

$$V_e = V_G + S\ell_0.$$

İçerideki gazın yaptığı iş

$$W_{\text{gas}} = \int_0^{\ell_0} P(x)S \, dx = \int_{V_G}^{V_e} P_i \left(\frac{V_G}{V} \right)^\gamma dV,$$

olup buradan

$$W_{\text{gas}} = \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_e} \right)^{\gamma-1} \right].$$

elde edilir.

Atmosfer basıncına karşı yapılan iş

$$W_{\text{atm}} = P_0 S \ell_0,$$

ve sürtünme nedeniyle kaybedilen enerji

$$W_{\text{fr}} = \int_0^{\ell_0} \alpha \pi d (\ell_0 - x) \, dx = \frac{1}{2} \alpha \pi d \ell_0^2 \simeq \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0.$$

şeklindedir.

Mantar çıktıktan sonra, belirtildiği gibi net basınç kuvveti ihmal edilir. Hava direnci ihmal edildiğinde, kalan mekanik enerjinin tamamı en yüksek noktada yer çekimi potansiyel enerjisine dönüşür. H_c , mantarın başlangıç konumundan ölçülürse,

$$mg_0 H_c = W_{\text{gas}} - W_{\text{atm}} - W_{\text{fr}}.$$

Dolayısıyla

$$H_c = \frac{1}{mg_0} \left\{ \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_G + S\ell_0} \right)^{\gamma-1} \right] - P_0 S \ell_0 - \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0 \right\}.$$

Sayısal olarak,

$$S = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad V_e = 3.1362 \times 10^{-5} \text{ m}^3,$$

ve

$$W_{\text{gas}} \approx 2.570 \text{ J}, \quad W_{\text{atm}} \approx 0.636 \text{ J}, \quad W_{\text{fr}} \approx 1.174 \text{ J}.$$

Böylece

$$H_c \approx \frac{2.570 - 0.636 - 1.174}{0.010(9.80665)} \approx 7.75 \text{ m}.$$

Uygun bir hassasiyetle,

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Yükseklik, mantarın şişe boynundan tamamen çıktığı andaki konumundan ölçülüyorsa $\ell_0 = 0.025 \text{ m}$ çıkarılır; yuvarlatılmış cevap yine 7.7 m olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.