

IPhO 2025

Теоретические задачи и решения · Париж, Франция · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2025/

Задача 1: Водород и галактики

Цель этой задачи — изучить особенности физики галактик, в частности их динамику и структуру. Мы выясним, как можно измерить распределение массы нашей Галактики, находясь внутри неё. Для этого мы сосредоточимся на водороде — её основном компоненте.

Во всей задаче мы будем использовать только $\hbar$, определяемую как $\hbar = h/2\pi$.

Часть А - Введение

Модель Бора

Будем считать, что атом водорода состоит из нерелятивистского электрона массой m_e , обращающегося вокруг неподвижного протона. Во всей этой части будем предполагать, что электрон движется по круговой орбите.

А.1 — 0.2 балла

Определите скорость электрона v на круговой орбите радиуса r .

В модели Бора предполагается, что модуль момента импульса электрона L квантован:

$$L = n\hbar, \text{ где } n > 0 \text{ — целое число. Введём } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}.$$

А.2 — 0.5 балла

Покажите, что радиус каждой орбиты задаётся выражением $r_n = n^2 r_1$, где r_1 называется боровским радиусом. Выразите r_1 через α , m_e , c и $\hbar$ и вычислите его численное значение с 3 значащими цифрами. Выразите v_1 , скорость на орбите радиуса r_1 , через α и c .

А.3 — 0.5 балла

Определите механическую энергию электрона E_n на орбите радиуса r_n через e , ϵ_0 , r_1 и n . Определите E_1 в основном состоянии через α , m_e и c . Вычислите её численное значение в эВ.

Тонкая и сверхтонкая структура водорода

Редкое спонтанное изменение направления спина электрона приводит к испусканию фотона, которое происходит в среднем один раз в 10 миллионов лет на атом водорода. Это излучение служит индикатором водорода во Вселенной и потому имеет фундаментальное значение в астрофизике. Мы изучим переход, ответственный за это излучение, в два этапа.

Сначала рассмотрим взаимодействие спина электрона с относительным движением электрона и протона. В системе отсчёта электрона протон обращается вокруг него на расстоянии r_1 . При этом возникает магнитное поле $\vec{B}_1$.

А.4 — 0.5 балла

Определите модуль B_1 поля $\vec{B}_1$ в точке нахождения электрона через μ_0 , e , α , c и r_1 .

Далее, спин электрона создаёт магнитный момент $\vec{M}_s$. Его модуль приближённо равен $M_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. Тонкая (F) структура связана с разностью энергий ΔE_F электрона с магнитным моментом $\vec{M}_s$, параллельным $\vec{B}_1$, и электрона с $\vec{M}_s$, антипараллельным $\vec{B}_1$. Аналогично, сверхтонкая (HF) структура связана с разностью энергий ΔE_{HF} , обусловленной взаимодействием параллельных и антипараллельных магнитных моментов электрона и протона. Известно, что приближённо $\Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$, где m_p — масса протона.

А.5 — 0.5 балла

Выразите ΔE_F как функцию α и E_1 .

Выразите длину волны λ_{HF} фотона, испускаемого при переходе между двумя состояниями сверхтонкой структуры, и приведите её численное значение с двумя значащими цифрами.

Часть В - Кривые вращения галактик

Данные

- Килопарсек: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- Масса Солнца: $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Рассмотрим сферическую галактику с центром в неподвижной точке O . В произвольной точке P обозначим через $\rho = \rho(P)$ объёмную плотность массы, а через $\varphi = \varphi(P)$ — соответствующий гравитационный потенциал (то есть потенциальную энергию на единицу массы). И ρ , и φ зависят только от $r = \|\vec{OP}\|$. Движение тела массой m , находящегося в P , под действием поля φ происходит в плоскости, содержащей O .

В.1 — 0.2 балла

Для круговой орбиты определите скорость v_c объекта на круговой орбите, проходящей через P , через r и $\frac{d\varphi}{dr}$.

На рис. 1(А) показано изображение спиральной галактики NGC 6946 в видимом диапазоне (полученное с помощью 0.8-метрового телескопа Шульмана в обсерватории Маунт-Леммон в Аризоне). Маленькие эллипсы на рис. 1(В) показывают экспериментальные измерения v_c для этой галактики. Центральная область ($r < 1 \text{ kpc}$) называется балджем. В этой области распределение массы приблизительно однородно. Красная кривая показывает предсказание для v_c , если система однородна в балдже, а за его пределами является кеплеровской ($\varphi(r) = -\beta/r$ при $\beta > 0$), то есть если считать, что вся масса галактики сосредоточена в балдже.

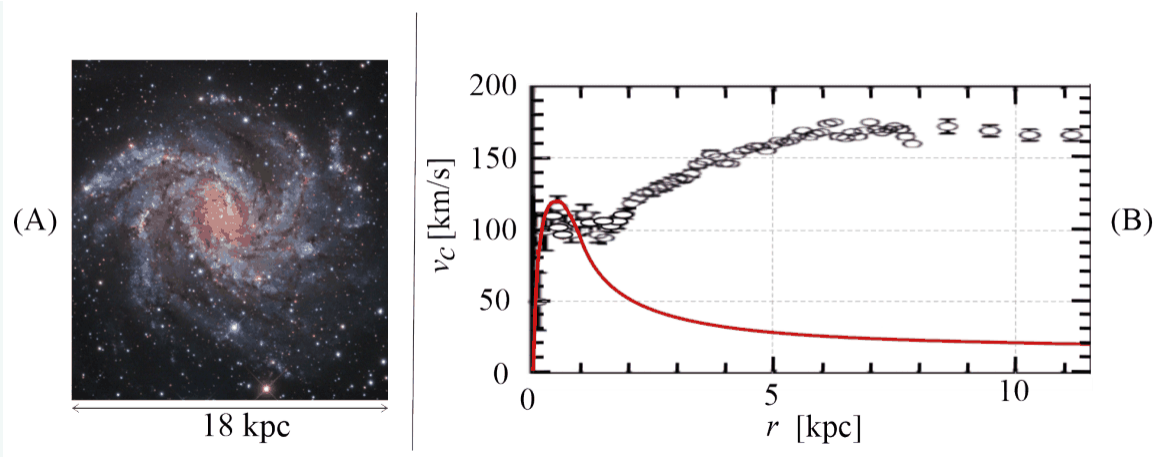


Рис. 1: Галактика NGC 6946: изображение (A) и кривая вращения (B).

В.2 — 0.5 балла

Определите массу M_b балджа NGC 6946 по красной кривой вращения на рис. 1(B) в единицах массы Солнца.

Сравнение кеплеровской модели с экспериментальными данными убеждает астрономов в том, что часть массы не видна на изображении. Поэтому они предполагают, что фактическая плотность массы галактики задаётся выражением

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

где $C_m > 0$ и $r_m > 0$ — постоянные.

В.3 — 1.8 балла

Покажите, что профиль скорости $v_{c,m}(r)$, соответствующий плотности массы из уравнения 1, можно записать в виде

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}.$$

Выразите k_1 и k_2 через C_m , r_m и G .

(Подсказки: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, а также: $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$ при $x \ll 1$.)

Упростите $v_{c,m}(r)$ при $r \ll r_m$ и при $r \gg r_m$.

Покажите, что при $r \gg r_m$ выражение для массы $M_m(r)$, заключённой в сфере радиуса r с плотностью массы, задаваемой уравнением 1, упрощается и зависит только от C_m и r .

Оцените массу галактики NGC 6946, фактически заключённую в области, показанной на рис. 1(A).

Часть С - Распределение массы в нашей Галактике

Для спиральной галактики модель, описываемую уравнением 1, модифицируют и обычно считают, что гравитационный потенциал задаётся выражением

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

где z — расстояние до галактической плоскости (определяемой условием $z = 0$), $r < r_0$ теперь обозначает расстояние до оси, а $\varphi_0 > 0$ — постоянная, которую нужно определить. Величины r_0 и z_0 постоянны.

С.1 — 0.5 балла

Найдите уравнение движения по координате z для вертикального движения материальной точки массой m в таком потенциале, предполагая, что r постоянно. Покажите, что при $r < r_0$ галактическая плоскость является положением устойчивого равновесия, и найдите угловую частоту ω_0 малых колебаний около неё.

Далее полагаем $z = 0$.

С.2 — 0.6 балла

Определите режим, $r \gg r_m$ или $r \ll r_m$, в котором модель уравнения 1 даёт потенциал вида $\varphi_G(r, 0)$ при подходящем определении φ_0 .

При этом условии $v_c(r)$ больше не зависит от r . Выразите её через φ_0 .

Таким образом, вне балджа модуль скорости v_c не зависит от расстояния до галактического центра. Мы воспользуемся этим фактом, как это делают астрономы, чтобы измерить распределение массы Галактики изнутри.

Все галактические объекты, рассматриваемые здесь в астрономических наблюдениях, такие как звёзды или туманности, состоят преимущественно из водорода. Предположим, что вне балджа они обращаются по круговым орбитам вокруг галактического центра C . Точка S обозначает положение Солнца, а E — положение некоторого галактического объекта, излучающего в спектре водорода. В галактической плоскости рассмотрим луч зрения SE , соответствующий направлению наблюдения, вдоль единичного вектора $\hat{u}_v$ (см. рис. 2).

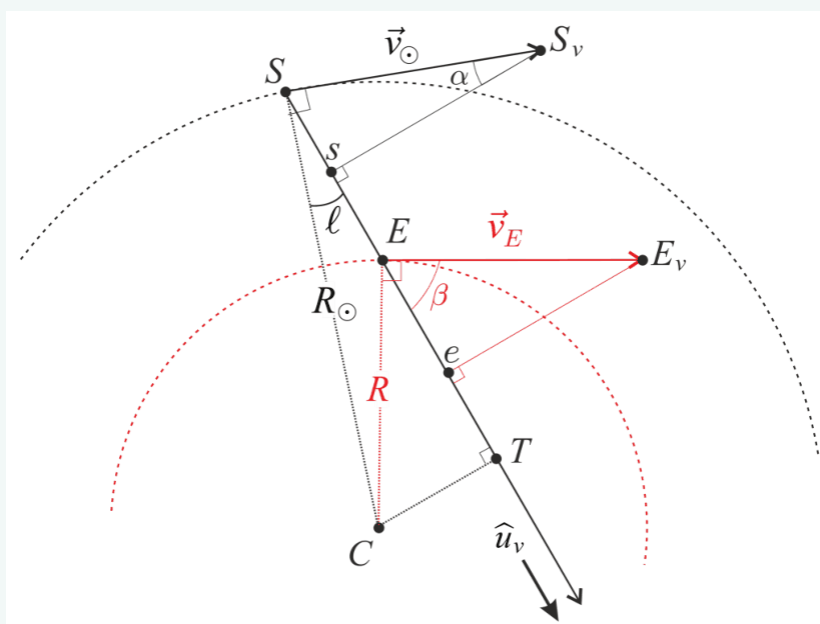


Рис. 2: Геометрия измерения

Пусть ℓ — галактическая долгота, равная углу между SC и SE . Скорость Солнца на его круговой орбите радиуса $R_\odot = 8.00$ кpc обозначим $\vec{v}_\odot$. Галактический объект в E обращается по другой окружности радиуса R со скоростью $\vec{v}_E$. Используя эффект Доплера для рассмотренной ранее линии 21 см, можно получить относительную лучевую скорость $v_{rE/S}$ излучателя E относительно Солнца S : это проекция $\vec{v}_E - \vec{v}_\odot$ на луч зрения.

С.3 — 0.7 балла

Определите $v_{rE/S}$ через ℓ , R , $R_\odot$ и $v_\odot$. Затем выразите R через $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ и $v_{rE/S}$.

С помощью радиотелескопа проведём наблюдения в плоскости нашей Галактики в направлении с долготой $\ell = 30^\circ$. Используемый частотный диапазон содержит линию 21 см, частота которой равна $f_0 = 1.42$ GHz. Результаты представлены на рис. 3.

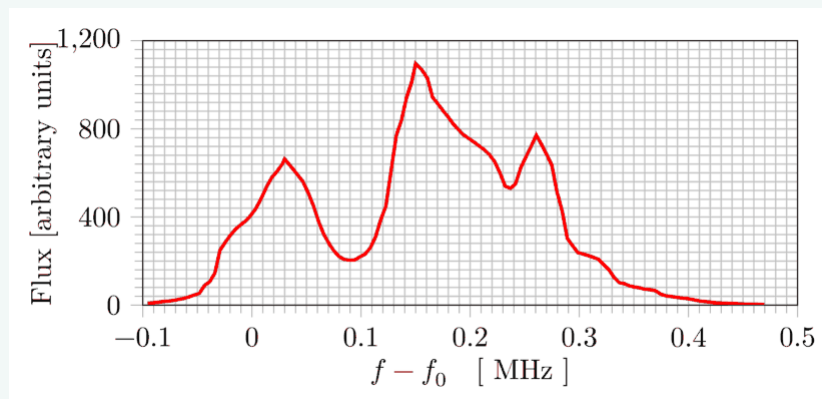


Рис. 3: Электромагнитный сигнал в зависимости от сдвига частоты, измеренный в радиочастотном диапазоне при $\ell = 30^\circ$ с помощью EU-HOU RadioAstronomy

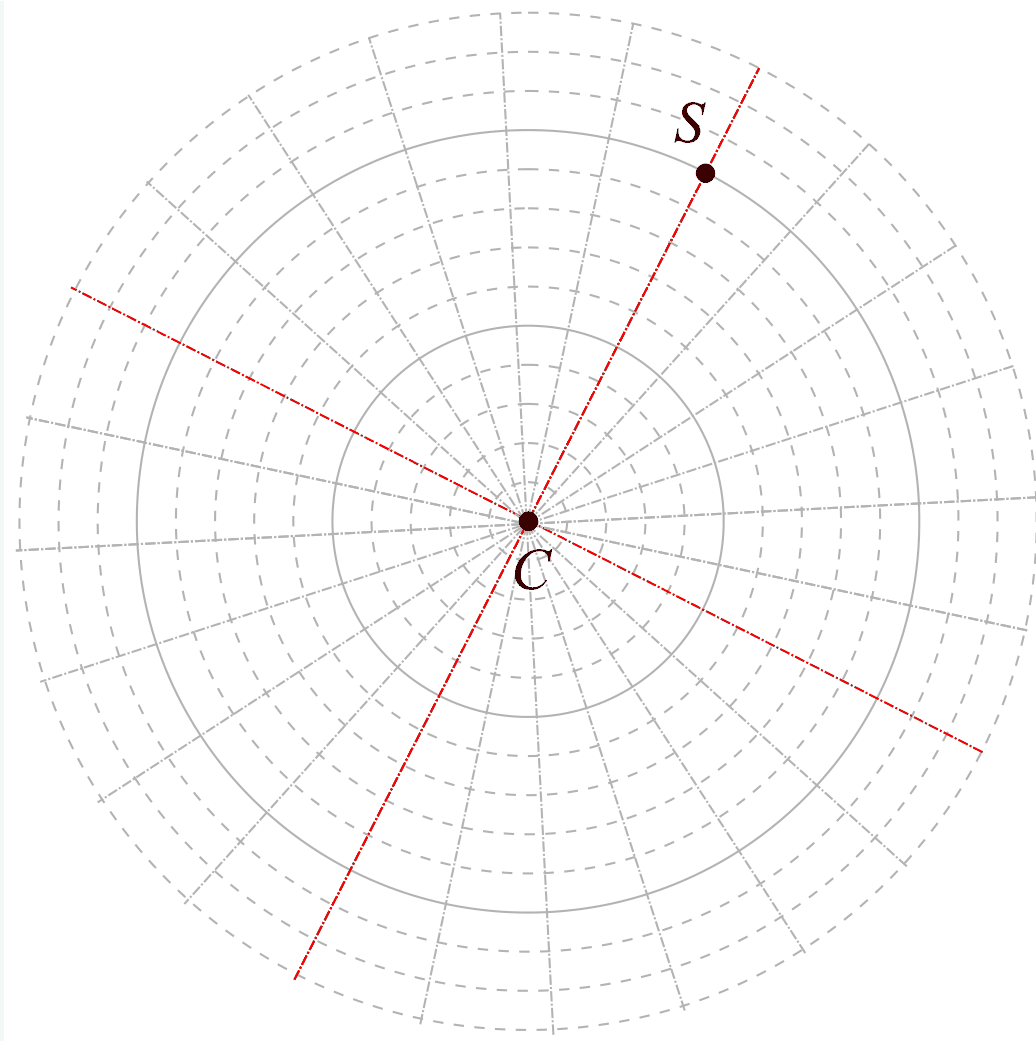
С.4 — 0.6 балла

В нашей Галактике $v_\odot = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Определите значения относительной лучевой скорости (с 3 значащими цифрами) и расстояния от галактического центра (с 2 значащими цифрами) для 3 источников, наблюдаемых на рис. 3. Расстояния следует выразить в единицах $R_\odot$.

С.5 — 0.6 балла

На виде нашей Галактики сверху (в поле для ответа) укажите положения источников, наблюдаемых на рис. 3.

Что можно было бы установить, повторяя измерения при различных ℓ ?



Часть D - Соотношение Талли — Фишера и теория MOND

Плоский внешний участок кривой вращения NGC 6946 на рис. 1 — общее свойство спиральных галактик, как видно на рис. 4 (слева). Если построить зависимость постоянной скорости во внешней области $v_{c,\infty}$ от измеренной полной массы M_{tot} каждой галактики, обнаруживается интересная корреляция, называемая соотношением Талли — Фишера, см. рис. 4 (справа).

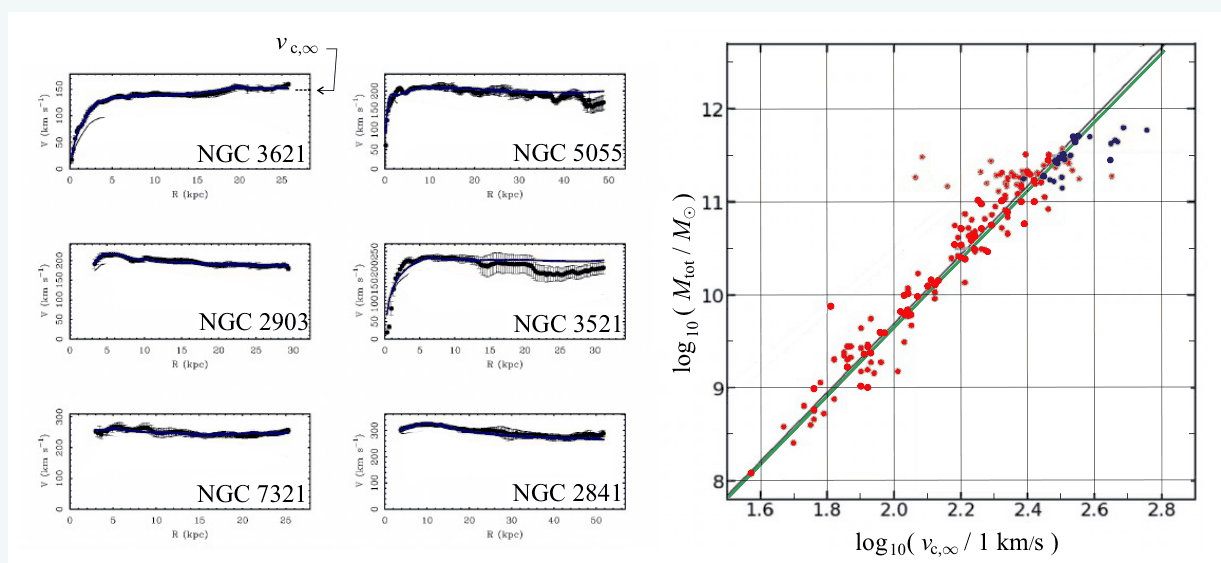


Рис. 4. Слева: кривые вращения типичных спиральных галактик. Справа: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ в зависимости от $\log_{10}(v_{c,\infty})$ в линейных масштабах. Цветные точки соответствуют различным галактикам и различным обзорам. Зелёная линия — соотношение Талли — Фишера, очень хорошо согласующееся с линией наилучшей аппроксимации данных (чёрной).

D.1 — 0.4 балла

Предполагая, что радиус R галактики не зависит от её массы, покажите, что модель уравнения 1 (часть B) даёт соотношение вида $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$, и определите γ и η .

Сравните это выражение с соотношением Талли — Фишера, вычислив γ_{TF} .

В режиме чрезвычайно малых ускорений, порядка $a_0 = 10^{-10} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, теория модифицированной ньютоновской динамики (MOND) предлагает изменить второй закон Ньютона следующим образом:

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$$

где $a = \|\vec{a}\|$ — модуль ускорения, а функция μ определяется как $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$.

D.2 — 0.2 балла

Используя данные для NGC 6946 на рис. 1, оцените в рамках теории Ньютона модуль ускорения a_m тела во внешних областях NGC 6946.

D.3 — 0.8 балла

Пусть тело массой m движется по круговой орбите радиуса r со скоростью $v_{c,\infty}$ в гравитационном поле неподвижной массы M .

В рамках теории MOND при $a \ll a_0$ определите показатель степени в соотношении Талли — Фишера.

Используя данные для NGC 6946 и/или закон Талли — Фишера, вычислите a_0 , чтобы показать, что MOND применяется в соответствующем режиме.

D.4 — 0.9 балла

Рассмотрев соответствующие случаи, определите $v_c(r)$ для всех значений r в теории MOND для гравитационного поля, создаваемого однородно распределённой массой M радиуса R_b .

Общие справочные данные

Постоянная	Обозначение	Значение	Единица измерения
Скорость света в вакууме	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Постоянная Планка	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Приведённая постоянная Планка	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$

Постоянная	Обозначение	Значение	Единица измерения
Постоянная Авогадро	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Универсальная газовая постоянная	R	8.314 462 618 153 24	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Гравитационная постоянная	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Стандартное ускорение свободного падения	g	9.806 65	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Постоянная Ридберга	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Масса электрона	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Масса протона	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Масса нейтрона	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Атомная единица массы	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Электронвольт	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A.1

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

• A.2

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad v_1 = \alpha c.$$

• A.3

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

• A.4

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

• A.5

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1, \quad \lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c} \simeq 0.21 \text{ m}.$$

• B.1

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

• B.2

$$M_b \sim 1 \times 10^9 M_\odot.$$

• B.3

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m,$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3}} \frac{r}{r_m}, \quad v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq \sqrt{4\pi G C_m},$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq 4\pi C_m r, \quad M_{\text{на рисунке}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_\odot.$$

• C.1

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

• C.2

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m, \quad v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

• C.3

$$v_{rE/S} = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell, \quad R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

- **C.4** Нумеруя пики в порядке возрастания сдвига частоты:

$$(v_{r,1}, v_{r,2}, v_{r,3}) = (6.33, 31.7, 54.9) \text{ km s}^{-1},$$

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.95, 0.78, 0.67) R_{\odot}.$$

- **C.5** На луче зрения $\ell = 30^\circ$ отметьте обе точки пересечения с каждой из трёх окружностей радиусов $0.95R_{\odot}$, $0.78R_{\odot}$ и $0.67R_{\odot}$. Ближние и дальние расстояния от Солнца равны

$$\frac{(d_{1,-}, d_{2,-}, d_{3,-})}{R_{\odot}} \simeq (0.0635, 0.272, 0.424),$$

$$\frac{(d_{1,+}, d_{2,+}, d_{3,+})}{R_{\odot}} \simeq (1.67, 1.46, 1.31).$$

Повторные сканирования по долготе позволяют выявить распределение водорода и спиральную структуру с учётом этой неоднозначности между ближним и дальним положениями.

- **D.1**

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_{TF} \approx 3.7 \text{ (по графику близко к 4)}.$$

- **D.2**

$$a_m \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}.$$

- **D.3**

$$v_{c,\infty}^4 = GMa_0, \quad \gamma_{\text{MOND}} = 4, \quad a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

Это соответствующий масштаб ускорения; сами по себе приведённые на графике данные для NGC 6946 не устанавливают более сильное неравенство $a \ll a_0$.

- **D.4**

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Непрерывное продолжение в нуль даёт $v_c(0) = 0$.

Решение

Для численных расчётов атомных величин я вычисляю α по её определению и приведённым постоянным:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29735 \times 10^{-3}.$$

Это немного отличается от приближённого значения, напечатанного в условии.

A.1

Кулоновская сила притяжения служит центростремительной силой:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2

Условие квантования Бора даёт

$$m_e v_n r_n = n\hbar.$$

Возводя это равенство в квадрат и используя уравнение сил из A.1, получаем

$$n^2 \hbar^2 = m_e^2 v_n^2 r_n^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}.$$

Следовательно,

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 \frac{\hbar}{m_e \alpha c}.$$

Таким образом,

$$r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ м}.$$

Для орбиты основного состояния

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e r_1} = \boxed{\alpha c}.$$

В общем случае $v_n = \alpha c/n$. Поскольку $\alpha \ll 1$, нерелятивистское приближение согласуется с полученным результатом.

A.3

Полагая электростатическую потенциальную энергию равной нулю на бесконечности, получаем

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Уравнение сил даёт

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Следовательно, полная механическая энергия равна

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

При $r_n = n^2 r_1$

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}.$$

В частности,

$$E_1 = -\frac{\alpha\hbar c}{2r_1} = \boxed{-\frac{1}{2}m_e\alpha^2 c^2}.$$

Численно

$$E_1 = -2.17987 \times 10^{-18} \text{ J} = \boxed{-13.6 \text{ eV}}.$$

A.4

В заданной картине движения в системе отсчёта электрона протон обращается со скоростью $v_1 = \alpha c$. Его период обращения и эквивалентный ток равны

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}.$$

Магнитное поле в центре кругового витка с током равно

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_1}.$$

Следовательно,

$$B_1 = \boxed{\frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}}.$$

A.5

Магнитный диполь в поле имеет энергию

$$U = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}_1.$$

Следовательно, состояния с параллельной и антипараллельной ориентациями имеют энергии $-\mathcal{M}_s B_1$ и $+\mathcal{M}_s B_1$. Положительная разность их энергий равна

$$\Delta E_F = 2\mathcal{M}_s B_1.$$

Используя магнитный момент, заданный в условии, получаем

$$\Delta E_F = 2 \frac{e\hbar}{m_e} \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

С учётом $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ и $e^2/(4\pi\epsilon_0) = \alpha\hbar c$

$$\Delta E_F = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m_e r_1^2} = 2m_e \alpha^4 c^2.$$

Поскольку $E_1 = -m_e \alpha^2 c^2/2$,

$$\boxed{\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1}.$$

Для фотона сверхтонкого перехода выполняется

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\text{HF}}} = \Delta E_{\text{HF}} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F.$$

Таким образом,

$$\lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c}.$$

Промежуточные численные значения равны

$$\Delta E_{\text{F}} \simeq 2.898 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad \lambda_{\text{HF}} \simeq 0.21116 \text{ m}.$$

С двумя значащими цифрами

$$\lambda_{\text{HF}} = 0.21 \text{ m} = 21 \text{ cm}.$$

B.1

Гравитационное ускорение равно

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Приравнявая его ускорению на круговой орбите, направленному к центру, получаем

$$-\frac{v_c^2}{r} \hat{r} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Следовательно,

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

B.2

Вне сферического балджа теорема о сферическом слое даёт

$$\varphi(r) = -\frac{GM_b}{r} + \text{постоянная}.$$

Отсюда следует

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r}, \quad M_b = \frac{rv_c^2}{G}.$$

Удобные приближённые значения, считываемые с красной кривой:

$$r \simeq 10 \text{ kpc}, \quad v_c \simeq 20 \text{ km s}^{-1}.$$

Следовательно,

$$M_b \simeq \frac{(10 \times 3.09 \times 10^{19})(2.0 \times 10^4)^2}{6.67430 \times 10^{-11}} = 1.85 \times 10^{39} \text{ kg}.$$

В единицах массы Солнца это приблизительно $9.3 \times 10^8 M_{\odot}$. С учётом точности графика

$$M_b \sim 10^9 M_{\odot}.$$

B.3

Масса, заключённая внутри радиуса r , равна

$$M_m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(x) x^2 dx = 4\pi C_m \int_0^r \frac{x^2}{r_m^2 + x^2} dx.$$

Используя приведённый интеграл, получаем

$$M_m(r) = 4\pi C_m \left[r - r_m \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

В силу сферической симметрии

$$v_{c,m}^2(r) = \frac{GM_m(r)}{r} = 4\pi GC_m \left[1 - \frac{r_m}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

Сравнение с требуемым видом даёт

$$k_1 = 4\pi GC_m, \quad k_2 = 4\pi GC_m r_m.$$

При $r \ll r_m$ положим $x = r/r_m$. Тогда

$$1 - \frac{\arctan x}{x} \simeq 1 - \frac{x - x^3/3}{x} = \frac{x^2}{3}.$$

Следовательно,

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{\frac{4\pi GC_m}{3} \frac{r}{r_m}}.$$

В центральной области кривая вращения возрастает линейно, как и ожидается при приблизительно однородной плотности.

При $r \gg r_m$ имеем $\arctan(r/r_m) \rightarrow \pi/2$, а $r_m/r \rightarrow 0$. Таким образом,

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{4\pi GC_m} \equiv v_{c,\infty},$$

и

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r = \frac{v_{c,\infty}^2 r}{G}.$$

Диаметр на изображении составляет приблизительно 18 крс, поэтому примем радиус охватывающей сферы равным 9 крс. Наблюдаемая скорость во внешней области составляет приблизительно 170 km s^{-1} . Следовательно,

$$M_{\text{на рисунке}} \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2 (9 \times 3.09 \times 10^{19})}{6.67430 \times 10^{-11}} \simeq 1.20 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

Следовательно,

$$M_{\text{на рисунке}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

С.1

При фиксированном r уравнение вертикального движения имеет вид

$$m\ddot{z} = -m \frac{\partial \varphi_G}{\partial z}.$$

Дифференцируя заданный потенциал, получаем

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}.$$

При $z = 0$ сила обращается в нуль. Для малых колебаний $|z| \ll z_0$, поэтому

$$e^{-z^2/z_0^2} \simeq 1.$$

Линеаризованное уравнение принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) z = 0.$$

При $r < r_0$ его коэффициент положителен. Следовательно, плоскость является положением устойчивого равновесия, причём

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

С.2

При $r \gg r_m$ из В.3 следует

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r.$$

Поэтому радиальная производная потенциала равна

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_m(r)}{r^2} \simeq \frac{4\pi G C_m}{r}.$$

Интегрируя и соответствующим образом выбирая аддитивную постоянную, получаем

$$\varphi(r) \simeq 4\pi G C_m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

Таким образом, требуемые режим и коэффициент имеют вид

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m.$$

В плоскости

$$v_c^2 = r \frac{\partial \varphi_G(r, 0)}{\partial r} = r \frac{\varphi_0}{r} = \varphi_0,$$

поэтому

$$v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

С.3

Пусть T — основание перпендикуляра, опущенного из C на луч зрения. Из геометрии следует

$$CT = R_\odot \sin \ell.$$

Проекция касательной скорости Солнца на луч зрения равна

$$\vec{v}_\odot \cdot \hat{u}_v = v_\odot \sin \ell.$$

Касательная скорость излучателя перпендикулярна CE . Её проекция на луч зрения равна

$$\vec{v}_E \cdot \hat{u}_v = v_E \frac{CT}{R} = v_E \frac{R_\odot}{R} \sin \ell.$$

Из плоской кривой вращения следует $v_E = v_\odot$. Следовательно,

$$v_{rE/S} = (\vec{v}_E - \vec{v}_\odot) \cdot \hat{u}_v = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell.$$

Решая относительно R , получаем

$$R = \frac{R_{\odot} v_{\odot} \sin \ell}{v_{\odot} \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

С.4

Следуя подразумеваемому соглашению, согласующемуся с листом ответов, используем

$$v_r = +c \frac{f - f_0}{f_0},$$

где положительные значения означают удаление. Таким образом, знак на напечатанной оси $f - f_0$ противоположен обычному знаку сдвига частоты при удалении.

Три пика находятся приблизительно при

$$\Delta f_1 = 0.030 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 0.150 \text{ MHz}, \quad \Delta f_3 = 0.260 \text{ MHz}.$$

Поскольку

$$v_{\odot} \sin \ell = 220 \sin 30^\circ = 110 \text{ km s}^{-1},$$

формула для радиуса принимает вид

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{110}{110 + v_r},$$

где v_r выражена в km s^{-1} .

Источник, в порядке возрастания частоты пика	Δf (MHz)	v_r (km s^{-1}), 3 значащие цифры	$R/R_{\odot}$, 2 значащие цифры
1	0.030	+6.33	0.95
2	0.150	+31.7	0.78
3	0.260	+54.9	0.67

С.5

На схеме в листе ответов проведите луч наблюдения из S под углом 30° к SC с той стороны, которая указана на рис. 2. Проведите или найдите окружности с центром в C и радиусами

$$0.95R_{\odot}, \quad 0.78R_{\odot}, \quad 0.67R_{\odot}.$$

Каждая окружность пересекает луч наблюдения дважды.

Чтобы задать положения количественно, положим $d = SE$. По теореме косинусов

$$R^2 = R_{\odot}^2 + d^2 - 2R_{\odot}d \cos \ell.$$

Таким образом,

$$d_{\pm} = R_{\odot} \cos \ell \pm \sqrt{R^2 - R_{\odot}^2 \sin^2 \ell}.$$

При $\ell = 30^\circ$ наименьшее расстояние от луча зрения до центра равно

$$CT = 0.50R_{\odot}, \quad ST = R_{\odot} \cos 30^\circ = 0.866R_{\odot}.$$

Все три найденных радиуса больше CT и меньше $R_{\odot}$, поэтому обе точки пересечения лежат впереди Солнца по направлению наблюдения.

Используя неокруглённые радиусы из С.4:

Источник	Ближнее положение $d_-/R_\odot$	Дальнее положение $d_+/R_\odot$
1	0.0635	1.67
2	0.272	1.46
3	0.424	1.31

При удалении от S вдоль луча возможные точки расположены в следующем порядке:

$$1_{\text{near}}, \quad 2_{\text{near}}, \quad 3_{\text{near}}, \quad T, \quad 3_{\text{far}}, \quad 2_{\text{far}}, \quad 1_{\text{far}}.$$

Спектр определяет галактоцентрический радиус каждого источника, но не позволяет различить его ближнее и дальнее положения. Повторение наблюдений на разных долготах позволяет составить карту структур, богатых водородом, и выявить спиральные рукава Галактики; для устранения неоднозначности между ближним и дальним положениями отдельных источников необходима дополнительная информация.

D.1

Во внешней области из В.3

$$M_{\text{tot}} \simeq 4\pi C_m R, \quad v_{c,\infty}^2 = 4\pi G C_m.$$

Исключая C_m , получаем

$$M_{\text{tot}} \simeq \frac{R}{G} v_{c,\infty}^2.$$

Для радиуса, не зависящего от массы,

$$\boxed{\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2.}$$

Логарифмирование эмпирического степенного закона даёт

$$\log_{10} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_\odot} \right) = \gamma_{TF} \log_{10} \left(\frac{v_{c,\infty}}{1 \text{ km s}^{-1}} \right) + \text{постоянная}.$$

Таким образом, γ_{TF} — угловой коэффициент прямой на рис. 4.

Приближённые значения, считываемые с зелёной линии:

$$(x, y) \simeq (1.6, 8.2), \quad (2.8, 12.6).$$

Они дают

$$\boxed{\gamma_{TF} \simeq \frac{12.6 - 8.2}{2.8 - 1.6} \simeq 3.7.}$$

Наблюдаемая зависимость близка к закону четвёртой степени и существенно круче квадратичной зависимости, предсказываемой ньютоновской моделью с фиксированным радиусом.

D.2

Модуль ускорения на круговой орбите равен

$$a_m = \frac{v_c^2}{r}.$$

Используя наблюдаемую точку во внешней области,

$$v_c \simeq 170 \text{ km s}^{-1}, \quad r \simeq 10 \text{ kpc},$$

получаем

$$a_m \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2}{10 \times 3.09 \times 10^{19}} = \boxed{9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}}.$$

D.3

В глубоком режиме MOND $a \ll a_0$

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a/a_0}{1 + a/a_0} \simeq \frac{a}{a_0}.$$

Модифицированное уравнение движения в ньютоновском гравитационном поле массы M принимает вид

$$\frac{GMm}{r^2} \simeq m \frac{a^2}{a_0}.$$

Для круговой орбиты $a = v_{c,\infty}^2/r$, поэтому

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v_{c,\infty}^4}{a_0 r^2}.$$

Радиус сокращается:

$$\boxed{v_{c,\infty}^4 = GMa_0}.$$

Следовательно,

$$M = \frac{1}{Ga_0} v_{c,\infty}^4, \quad \boxed{\gamma_{\text{MOND}} = 4}.$$

Это также объясняет, почему асимптотическая скорость на круговой орбите не зависит от радиуса.

Для графической оценки a_0 по рис. 4 получаем приблизительно

$$v_{c,\infty} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}, \quad M \simeq 4 \times 10^9 M_\odot.$$

Следовательно,

$$a_0 \simeq \frac{(1.0 \times 10^5)^4}{(6.67430 \times 10^{-11})(4 \times 10^9)(1.99 \times 10^{30})} \simeq 1.9 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

С точностью графика

$$\boxed{a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}}.$$

Это соответствует указанному порядку величины $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. Сравнение с D.2 даёт $a_m/a_0 \sim 0.5$: приведённые данные для внешней области галактики относятся к масштабу ускорений MOND, но не устанавливают $a_m \ll a_0$.

Для асимптотически постоянной скорости 170 km s^{-1} строгое условие глубокого режима MOND имеет вид

$$r \gg \frac{v_{c,\infty}^2}{a_0} \sim 5 \text{ kpc}.$$

Оно выполняется всё точнее при удалении от центра. Вблизи перехода необходимо использовать полную интерполяционную функцию, как в D.4.

D.4

Однородный шар имеет плотность

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_b^3}.$$

Масса, заключённая внутри радиуса r , равна

$$M(< r) = \begin{cases} M(r/R_b)^3, & r \leq R_b, \\ M, & r \geq R_b. \end{cases}$$

В заданной в условии формулировке с модифицированным вторым законом гравитационная сила остаётся ньютоновской. Обозначим её модуль на единицу пробной массы как

$$g_N(r) = \frac{GM(< r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GMr}{R_b^3}, & r \leq R_b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Используя полную интерполяционную функцию, получаем

$$g_N = \mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a = \frac{a^2}{a + a_0}.$$

Следовательно,

$$a^2 - g_N a - g_N a_0 = 0.$$

Физический, неотрицательный корень равен

$$a = \frac{g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N}}{2}.$$

Поскольку $v_c^2 = ra$,

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{2} \left(g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N} \right) \right]^{1/2}.$$

Подстановка даёт выражение, справедливое во всех точках обеих областей:

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Оба выражения совпадают при $r = R_b$, а предел в центре равен $v_c(0) = 0$.

Предельные случаи поясняют форму кривой вращения:

Область	Режим ускорений	Скорость на круговой орбите
Внутри, $r < R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_b^3}} r$
Внутри, $r < R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq \left(\frac{GMa_0}{R_b^3} \right)^{1/4} r^{3/4}$
Снаружи, $r > R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}$
Снаружи, $r > R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq (GMa_0)^{1/4}$

Таким образом, кривая начинается с нуля, ведёт себя как $r^{3/4}$ достаточно близко к центру и стремится к постоянной далеко за пределами шара. Промежуточные ньютоновские области возникают лишь в том случае, если ускорение на поверхности шара GM/R_b^2 достаточно велико по сравнению с a_0 .

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Часы Кокса

В 1765 году британский часовщик Джеймс Кокс изобрёл часы, единственным источником энергии для которых служат колебания атмосферного давления. В часах Кокса использовались два сосуда с ртутью. Изменения атмосферного давления заставляли ртуть перетекать между сосудами, а сами сосуды — перемещаться друг относительно друга. Это движение служило источником энергии для часового механизма.

Предлагаем проанализировать это устройство. На протяжении всей задачи будем считать, что

- поле тяжести Земли $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ однородно, причём $g = 9.8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, а $\vec{u}_z$ — единичный вектор;
- все жидкости несжимаемы, а их плотность обозначается ρ ;
- эффекты поверхностного натяжения не учитываются;
- изменением атмосферного давления с высотой можно пренебречь;
- температура окружающей среды T_a всюду одинакова, а все процессы изотермические.



Рис. 1. Художественное изображение часов Кокса ¹

Часть А - Вытягивание погружённой трубки

Сначала рассмотрим резервуар с водой, занимающей полубесконечное пространство $z \leq 0$. Давление воздуха над водой равно $P_a = P_0$. В воду погружена вертикальная цилиндрическая трубка длиной $H = 1\text{ м}$, площадью поперечного сечения $S = 10\text{ см}^2$ и массой $m = 0.5\text{ кг}$. Нижний конец трубки открыт, а верхний закрыт. Обозначим через h высоту верхнего конца трубки, а через z_ℓ — уровень воды внутри трубки. Толщиной стенок трубки пренебрегаем.

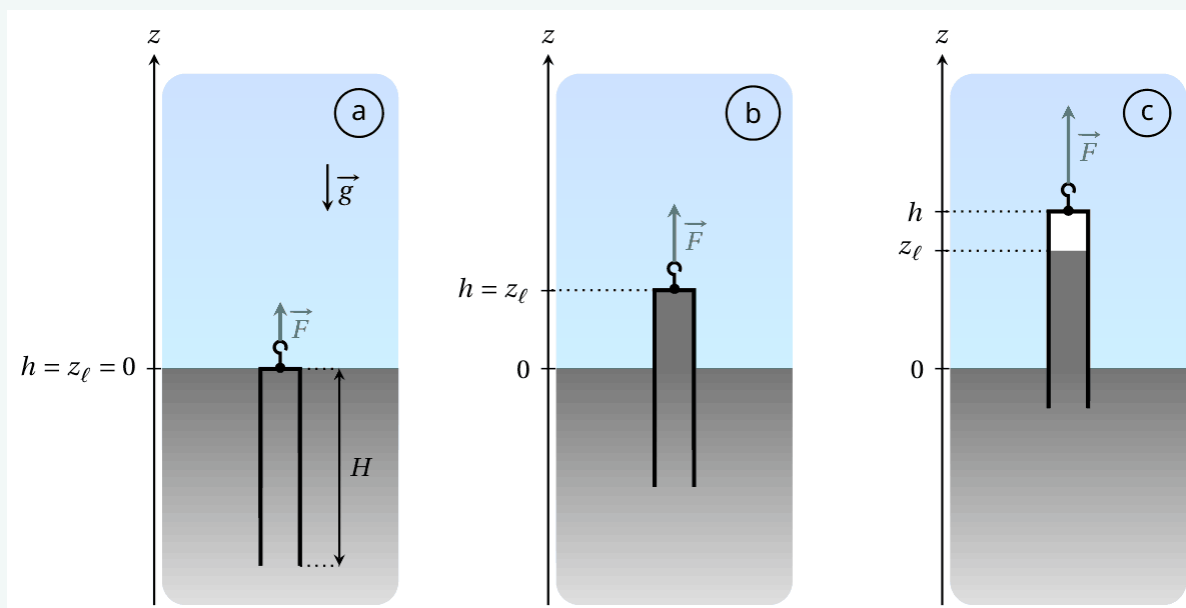


Рис. 2. Схематическое изображение трубки в различных состояниях

Начнём с ситуации, когда трубка на рис. 2 не содержит газа, а её верхний конец находится на уровне поверхности воды в резервуаре: иными словами, $h = 0$ и $z_\ell = 0$ (случай а). Затем трубку медленно поднимают до тех пор, пока её нижний конец не достигнет уровня поверхности воды в резервуаре. Силу, с которой тянут трубку, обозначим $\vec{F} = F\vec{u}_z$.

A.1 — 0.2 балла

Для конфигурации, показанной на рис. 2 (случай b), выразите давление P_w в воде у верхнего конца трубки. Также выразите силу $\vec{F}$, необходимую для удержания трубки в этом положении. Выражения должны быть записаны через P_0 , ρ , m , S , h , g и $\vec{u}_z$.

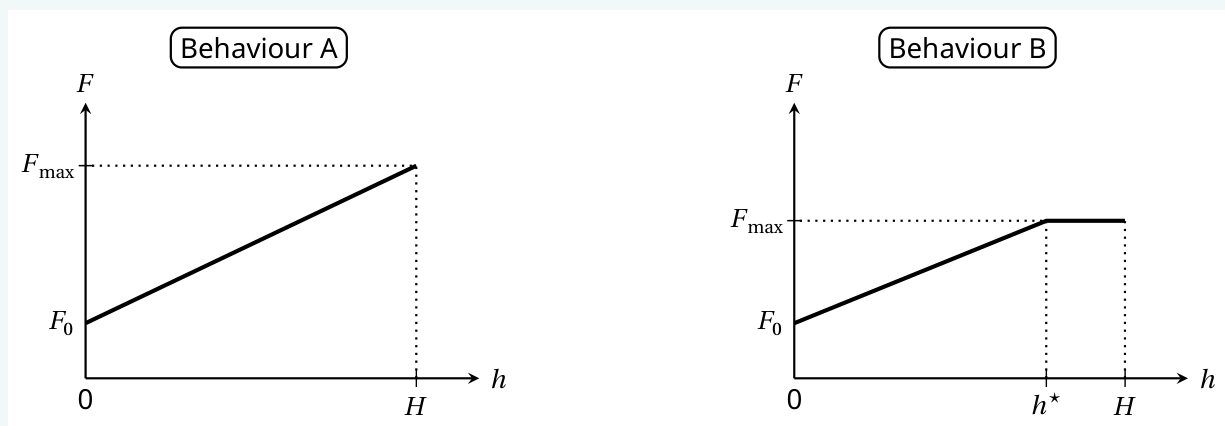
Проводят три опыта. В каждом из них трубку поднимают из начального состояния, показанного на рис. 2(a), при условиях, указанных в таблице 1.

Опыт	Жидкость	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	Вода	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Вода	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Вода	99	0.96×10^3	99.8×10^3

Таблица 1. Условия проведения опытов и численные значения физических величин для каждого опыта

(P_{sat} обозначает давление насыщенного пара чистой жидкости)

В каждом случае исследуется изменение силы F , которую необходимо приложить для удержания трубки в равновесии на высоте h , при постоянном внешнем давлении $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Па. Возможны два различных типа поведения



A.2 — 0.8 балла

Для каждого опыта заполните таблицу в бланке ответов, указав ожидаемый тип поведения и численные значения F_{max} и h^* (когда это применимо), где F_{max} и h^* определены на рисунках, иллюстрирующих два типа поведения.

Experiment	Behaviour (A or B ?)	h^* (cm)	F_{max} (N)
1			
2			
3			

Если заменить воду жидкой ртутью (свойства которой приведены ниже), наблюдается поведение B.

Жидкость	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
Ртуть	20	13.5×10^3	0.163

А.3 — 0.3 балла

Выразите относительную погрешность, обозначаемую ε , возникающую при вычислении максимальной силы F_{max} , если пренебречь P_{sat} по сравнению с P_0 . Приведите численное значение ε .

Часть В - Барометрическая трубка из двух частей

Далее будем работать с ртутью (плотность $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) при температуре окружающей среды $T_a = 20^\circ\text{C}$ и считать $P_{\text{sat}} = 0$.

Рассмотрим трубку с расширением в верхней части, которую моделируем двумя цилиндрами разных размеров, расположенными один над другим, как показано на рис. 3.

- нижняя часть (по-прежнему называемая трубкой) имеет площадь поперечного сечения S_t и высоту $H_t = 80 \text{ cm}$;
- верхняя часть (называемая колбой) имеет площадь поперечного сечения $S_b > S_t$ и высоту $H_b = 20 \text{ cm}$.

Эта двухчастная трубка погружена в полубесконечный резервуар с жидкостью.

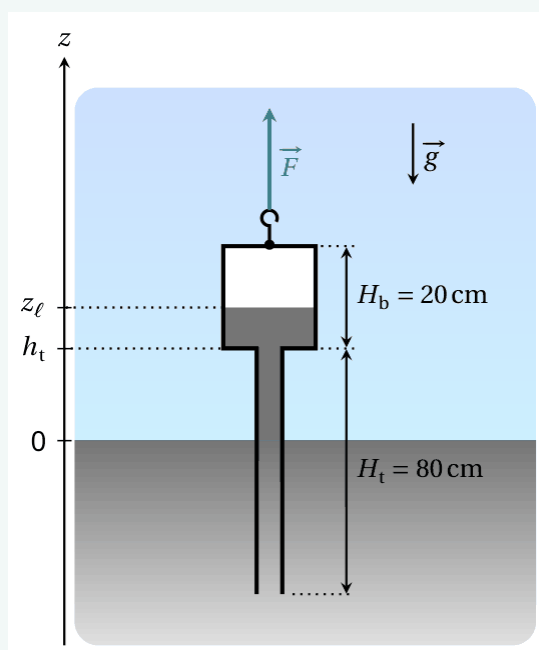


Рис. 3. Схема барометрической трубки из двух частей

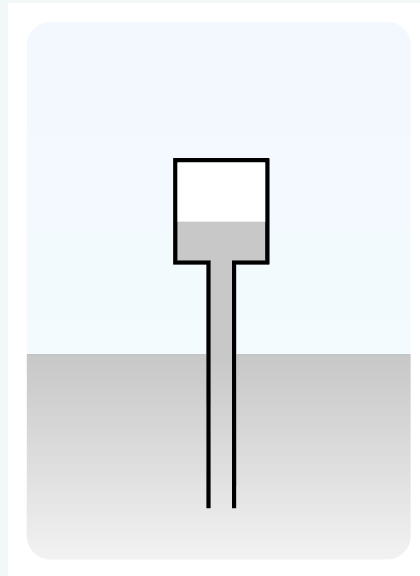
Как и в части А, систему подготавливают так, чтобы в трубке не было воздуха. Вертикальное положение трубки зададим высотой h_t границы между трубкой и колбой. Высоту столба ртути вновь обозначим z_ℓ . Силу $\vec{F}$, которую необходимо приложить для удержания трубки в равновесии в конфигурации, показанной на рис. 3, теперь можно записать в виде

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g\vec{u}_z \quad (1)$$

где m_{tb} — полная масса двухчастной трубки (без ртути).

В.1 — 0.3 балла

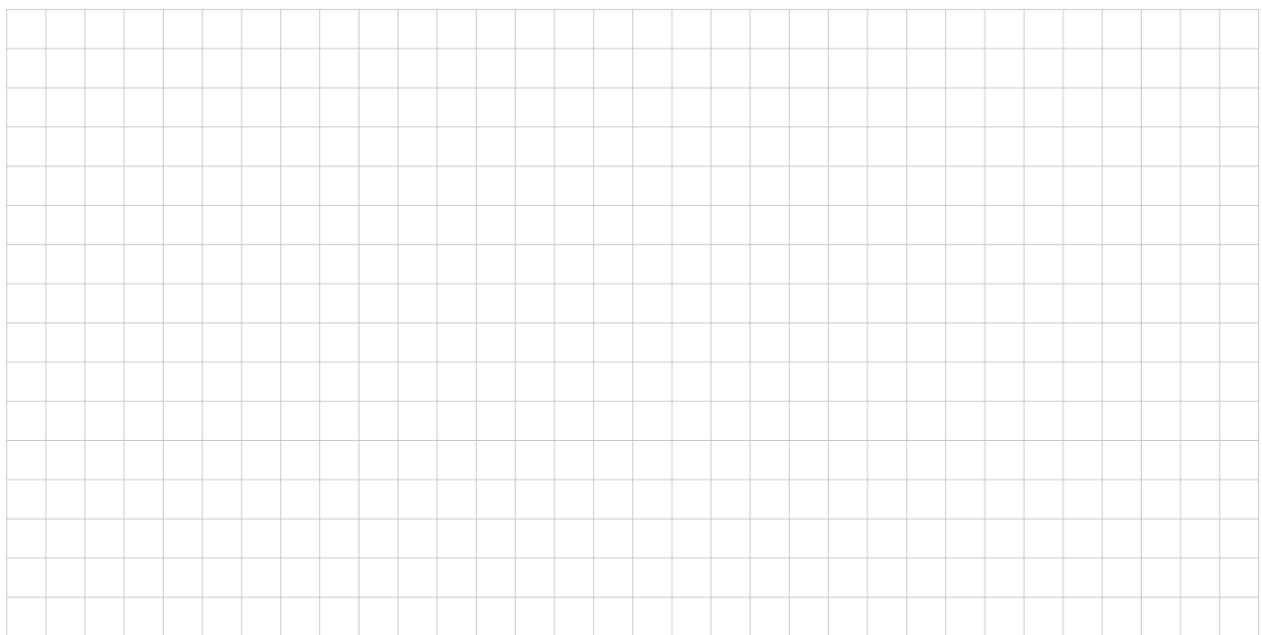
В бланке ответов закрасьте область, соответствующую объёму жидкой ртути, который обуславливает слагаемое m_{add} в уравнении (1).



Масса m_{add} зависит как от высоты h_t , так и от атмосферного давления P_a . В следующем вопросе считайте, что атмосферное давление постоянно и равно $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Па}$. Начиная с полностью погружённого состояния системы, трубку медленно поднимают до тех пор, пока её основание не окажется вровень с поверхностью жидкости в резервуаре.

В.2 — 1.4 балла

Изобразите качественный график зависимости массы m_{add} от h_t при $h_t \in [-H_b, H_t]$. Укажите на графике выражения для угловых коэффициентов различных участков, а также аналитические значения h_t всех точек излома через $P_0, \rho, g, S_b, S_t, H_b$ и H_t .



При подъёме системы при $P_a = P_0 = 10^5$ Па остановимся, когда свободная поверхность жидкости окажется посередине колбы. Значение h_t фиксируется, после чего наблюдают изменения массы m_{add} , вызванные изменениями атмосферного давления, описываемыми выражением

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

где P_0 обозначает среднее значение, а P_1 — малое возмущение. Моделируем P_1 периодической треугольной функцией с амплитудой $A = 5 \times 10^2$ Па и периодом τ_1 , равным 1 неделе.

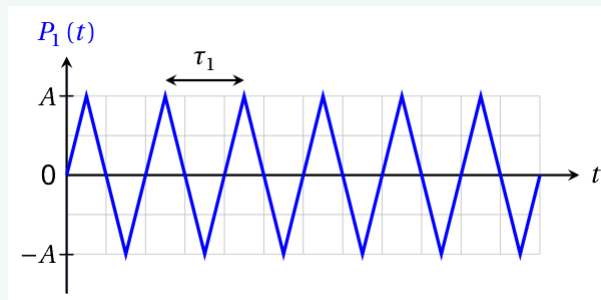


Рис. 4. Упрощённая модель возмущения $P_1(t)$

В.3 — 0.3 балла

При $S_t = 5 \text{ см}^2$ и $S_b = 200 \text{ см}^2$ выразите амплитуду Δm_{add} изменений массы m_{add} со временем, затем приведите её численное значение. Считайте, что поверхность жидкости всегда остаётся внутри колбы.

Часть С - Часы Кокса

Реальный механизм, разработанный Коксом, сложен (рис. 5). Мы исследуем упрощённую версию, изображённую на рис. 6 и описанную ниже

- нижний цилиндрический резервуар содержит ртуть;
- в ртуть погружена двухчастная барометрическая трубка, идентичная рассмотренной в части В, из которой по-прежнему полностью удалён воздух;
- резервуар и двухчастная трубка подвешены каждый на своём тросе. Оба троса (которые считаются нерастяжимыми и имеют пренебрежимо малую массу) проходят через систему идеальных блоков и прикреплены к противоположным сторонам одного и того же груза массой M , способного скользить по горизонтальной поверхности;
- общий объём жидкой ртути в системе равен $V_\ell = 5 \text{ L}$.

Высота, площадь поперечного сечения и масса каждой части приведены в таблице 2. Положение груза M задаётся координатой x его центра масс. Учитывается сухое трение между горизонтальной опорой и грузом M , причём коэффициенты трения покоя и скольжения считаются одинаковыми; модуль этой силы при скольжении обозначим F_s .

Два упора ограничивают перемещение груза M так, что $-X \leq x \leq X$ (где $X > 0$).

Считайте, что значение X гарантирует выполнение следующих условий:

- нижний конец двухчастной трубки никогда не касается дна резервуара и не выходит из жидкости;
- уровень z_ℓ столба ртути всегда находится внутри верхней колбы.



Рис. 5. Настоящие часы Кокса² (без ртути)

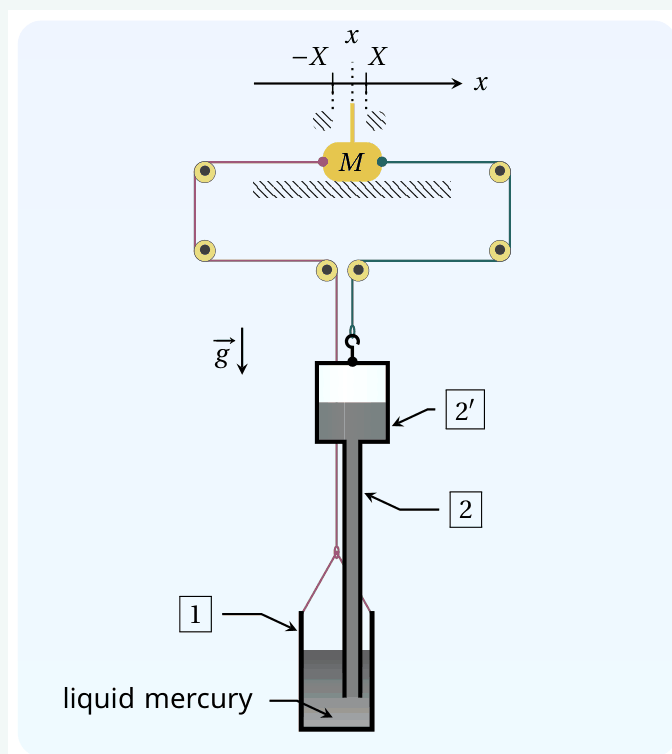


Рис. 6. Схема системы, моделирующей часы

Обозначение	Название	Высота	Площадь поперечного сечения	Масса без ртути
[1]	резервуар	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
[2]	трубчатая часть барометрической трубки	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	полная масса барометрической трубки: m_{tb}
[2']	колба барометрической трубки	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Таблица 2. Размеры и обозначения для модельной системы

Система взаимодействует с атмосферой, давление которой колеблется, как на рис. 4 (по-прежнему с амплитудой $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ и периодом $\tau_1 = 1$ неделя). В начальный момент $t = 0$ груз M покоится при $x = 0$, а силы натяжения двух тросов, действующие на груз M с противоположных сторон, уравнивают друг друга при $P_1(0) = 0$. Введём

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

где в последнем выражении использовано условие $S_t \ll S_b, S_c$ (которое будем считать выполненным до конца задачи).

С.1 — 1 балл

Определите пороговое значение ξ^* , такое, что при $\xi > \xi^*$ груз M остаётся в покое неограниченно долго.

Только в следующем вопросе предположим, что груз M временно зафиксирован при $x = X$.

С.2 — 1 балл

Запишите выражение для суммарной силы натяжения $\vec{T} = T\vec{u}_x$, действующей на груз M со стороны двух тросов в этом положении при $P_1 = 0$, через ρ, g, X и соответствующие площади поперечных сечений.

При $\xi < \xi^*$, если вновь начать с $x = 0$ и $P_1 = 0$, при $t \geq 0$ могут наблюдаться два различных типа поведения. Чтобы различить их, необходимо ввести ещё один параметр

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

С.3 — 2 балла

Заполните таблицу в бланке ответов, указав условие реализации каждого режима. Условия должны быть выражены в виде неравенств для ξ и/или λ . Кроме того, изобразите качественные графики зависимости $x(t)/X$ для $t \in [0, 3\tau_1]$, согласующиеся с уже изображёнными изменениями $P_1(t)/A$. Указывать координаты характерных точек не требуется.

	Condition for observation	Graph of $x(t)/X$
Regime 1		
Regime 2		

В настоящих часах Кокса энергия, вырабатываемая механизмом, запасается с помощью системы храповых механизмов и используется для подъёма противовеса, как в обычных часах. В рассматриваемой упрощённой модели энергия, получаемая часами, соответствует энергии, рассеиваемой силой трения, действующей на груз M со стороны горизонтальной поверхности. Далее будем считать, что параметры системы выбраны так, чтобы она работала в режиме, позволяющем часам получать энергию. Также будем считать, что установившийся режим уже достигнут. Обозначим через W энергию, рассеиваемую силой сухого трения за период τ_1 ; её можно выразить только через F_s и X .

При прочих равных F_s и X можно изменять так, чтобы максимизировать энергию W ; обозначим их значения в оптимальном случае через F_s^* и X^* соответственно.

С.4 — 1 балл

Считая $S_b \simeq S_c$ и $S_t \ll S_b$, определите выражения для F_s^* и X^* как функций ρ , g , S_c и A . Выразите соответствующую максимальную энергию W^* , затем вычислите её численное значение при $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$.

Обозначим через W_{pr}^* работу сил атмосферного давления, полученную системой в оптимальном случае за период τ_1 .

С.5 — 1.7 балла

Выразите W_{pr}^* , затем вычислите отношение W^*/W_{pr}^* . Может оказаться полезным изобразить эволюцию системы на диаграмме (P, V) , где V — объём системы.

Источники изображений:

[1]: Бруно Вакаро;

[2]: Музей Виктории и Альберта, Лондон.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Введём

$$L = \frac{P_0}{\rho g}, \quad D = S_b + S_c - S_t, \quad q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

• A.1

$$P_w = P_0 - \rho g h, \quad \vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

• A.2

Опыт	Тип поведения	h^* (cm), когда применимо	$F_{\max}$ (N)
1	A	—	14.7
2	A	—	14.4
3	B	2.13	5.10

• A.3

$$\varepsilon = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Пренебрежение давлением паров ртути приводит к завышению силы.

• B.1 Заштрихуйте всю ртуть **внутри трубки и колбы выше внешнего уровня жидкости в резервуаре**. В изображённой конфигурации

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

• B.2

$$m_{\text{add}}(h_t) = \begin{cases} \rho S_b (h_t + H_b), & -H_b \leq h_t \leq 0, \\ \rho (S_b H_b + S_t h_t), & 0 \leq h_t \leq L - H_b, \\ \rho [S_b L - (S_b - S_t) h_t], & L - H_b \leq h_t \leq L, \\ \rho S_t L, & L \leq h_t \leq H_t. \end{cases}$$

Последовательные угловые коэффициенты равны

$$\rho S_b, \quad \rho S_t, \quad -\rho (S_b - S_t), \quad 0.$$

Точки излома находятся при

$$h_t = 0, \quad L - H_b \simeq 0.556 \text{ m}, \quad L \simeq 0.756 \text{ m}.$$

• B.3

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g} = 1.02 \text{ kg}.$$

• C.1

$$\xi^* = 2.$$

• C.2

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

• C.3, при $\xi < 2$:

Режим	Условие	Описание $x(t)/X$
1: остаётся у одного упора	$q > 1$, что эквивалентно $\xi + 2\lambda > 2$	Сначала равно 0, затем быстро возрастает до +1 и остаётся на этом уровне.
2: повторяющиеся ходы	$q < 1$, что эквивалентно $\xi + 2\lambda < 2$	Сначала равно 0, затем переключается между плато на уровнях +1 и -1.

Первый ход в положительном направлении начинается при $P_1/A = \xi/2$. Последующие ходы в отрицательном направлении начинаются при $P_1/A = -q$ на спадающем участке давления, а в положительном — при $P_1/A = q$ на возрастающем участке. Граница $q = 1$ является предельным случаем; идеальное трение покоя допускает, что груз останется у упора.

• C.4 Идеальный предельный оптимум имеет вид

$$F_s^* = \frac{S_c A}{2} \simeq 5.25 \text{ N}, \quad X^* = \frac{A}{4\rho g} \simeq 0.945 \text{ mm},$$

$$W^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g} \simeq 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

• C.5

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} \simeq 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}, \quad \frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{1}{2}.$$

Решение

A.1

Из условия гидростатического равновесия следует

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Вода сообщается с резервуаром, где $P = P_0$ при $z = 0$. Поэтому, пока вода остаётся в контакте с закрытым верхним концом,

$$P_w = P_0 - \rho g h.$$

Давление снаружи на верхнюю крышку создаёт направленную вниз силу $P_0 S$, а вода под ней создаёт направленную вверх силу $P_w S$. Силы давления на вертикальные стенки не имеют вертикальной составляющей, а толщиной стенок пренебрегаем. Поэтому условие равновесия имеет вид

$$F + P_w S - P_0 S - mg = 0.$$

Следовательно,

$$\vec{F} = (mg + \rho g Sh)\vec{u}_z.$$

A.2

Паровая полость возникает, когда давление у верхнего конца достигает давления насыщенного пара:

$$P_0 - \rho g h^* = P_{\text{sat}}.$$

Отсюда

$$h^* = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}.$$

До этого момента $F = mg + \rho g Sh$. После образования паровой полости давление в ней при заданной температуре остаётся равным P_{sat} , поэтому

$$F = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

Эти выражения можно объединить:

$$F(h) = mg + S \min\{\rho g h, P_0 - P_{\text{sat}}\}, \quad 0 \leq h \leq H.$$

Таким образом:

- если $h^* \geq H$, наблюдается поведение А и $F_{\text{max}} = mg + \rho g SH$;
- если $h^* < H$, наблюдается поведение В и $F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})$.

Используя $S = 10^{-3} \text{ м}^2$, $H = 1 \text{ м}$ и $mg = 4.90 \text{ Н}$, получаем:

Опыт	Расчётная высота достижения насыщения	Сравнение с H	Результат
1	$\frac{100000 - 2340}{1000(9.8)} = 9.97 \text{ м}$	Выше H	А; $F_{\text{max}} = 14.7 \text{ Н}$
2	$\frac{100000 - 47400}{970(9.8)} = 5.53 \text{ м}$	Выше H	А; $F_{\text{max}} = 14.406 \text{ Н} \simeq 14.4 \text{ Н}$
3	$\frac{100000 - 99800}{960(9.8)} = 0.02126 \text{ м}$	Ниже H	В; $h^* = 2.13 \text{ см}$, $F_{\text{max}} = 5.10 \text{ Н}$

Оба графика начинаются при $F_0 = mg = 4.90 \text{ Н}$.

A.3

Для ртути истинное значение максимальной силы и его приближение равны

$$F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad F_{\text{max}}^{(0)} = mg + SP_0.$$

Приближение завышает силу на SP_{sat} . Относительно истинной силы

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{max}}^{(0)} - F_{\text{max}}}{F_{\text{max}}} = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})}.$$

Численно

$$\varepsilon = \frac{10^{-3}(0.163)}{0.5(9.8) + 10^{-3}(100000 - 0.163)} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Это составляет приблизительно 0.000155%.

В.1

Дополнительная нагрузка равна весу ртути, поднятой над внешней поверхностью жидкости в резервуаре. Ртуть ниже этого уровня гидростатически поддерживается жидкостью в резервуаре.

Поэтому на рисунке в бланке ответов следует заштриховать:

- ртуть в узкой трубке от внешнего уровня жидкости в резервуаре до границы между трубкой и колбой;
- всю ртуть в колбе, от её дна до внутренней свободной поверхности.

Не следует заштриховывать ртуть ниже внешнего уровня жидкости в резервуаре. Для показанной конфигурации

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

Поскольку давление над внутренней поверхностью равно нулю,

$$z_\ell = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Поэтому эквивалентное полезное выражение имеет вид

$$m_{\text{add}} = \frac{S_b P_a}{g} - \rho (S_b - S_t) h_t$$

когда свободная поверхность находится в колбе, а граница между трубкой и колбой — выше внешней поверхности жидкости в резервуаре.

В.2

Введём барометрическую высоту

$$L = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 0.75586 \text{ m}.$$

Для заданных размеров

$$0 < L - H_b < L < H_t.$$

Пока верхний конец не достигнет высоты L , трубка остаётся полностью заполненной. После этого внутренняя свободная поверхность остаётся на уровне $z_\ell = L$, а трубка продолжает подниматься.

Имеются четыре геометрически различных интервала.

$$1. -H_b \leq h_t \leq 0.$$

Над поверхностью жидкости в резервуаре находится лишь часть колбы высотой $h_t + H_b$:

$$m_{\text{add}} = \rho S_b (h_t + H_b).$$

График начинается в точке $(-H_b, 0)$ и имеет угловой коэффициент ρS_b .

$$2. 0 \leq h_t \leq L - H_b.$$

Над поверхностью жидкости в резервуаре находятся вся колба и участок узкой трубки длиной h_t , полностью заполненные ртутью:

$$m_{\text{add}} = \rho(S_b H_b + S_t h_t).$$

График продолжает возрастать с меньшим угловым коэффициентом ρS_t .

$$3. L - H_b \leq h_t \leq L.$$

Над ртутью образуется вакуум, а её поверхность остаётся на уровне L внутри колбы:

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t h_t + S_b(L - h_t)].$$

Угловой коэффициент равен $-\rho(S_b - S_t)$, поэтому график убывает.

$$4. L \leq h_t \leq H_t.$$

Колба пуста, а внутренняя свободная поверхность находится в узкой трубке:

$$m_{\text{add}} = \rho S_t L = \frac{S_t P_0}{g}.$$

График горизонтален.

График непрерывен; его вершины и конечная точка приведены ниже:

h_t	m_{add}
$-H_b$	0
0	$\rho S_b H_b$
$L - H_b$	$\rho[S_b H_b + S_t(L - H_b)]$, максимум
L	$\rho S_t L$
H_t	$\rho S_t L$

Абсциссы трёх точек излома равны

$$0, \quad \frac{P_0}{\rho g} - H_b, \quad \frac{P_0}{\rho g},$$

то есть численно 0, 55.6 см и 75.6 см.

В.3

При заданном фиксированном положении свободная поверхность остаётся внутри колбы.

Поэтому

$$m_{\text{add}}(t) = \frac{S_b[P_0 + P_1(t)]}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t.$$

Изменяется только первое слагаемое, поэтому амплитуда равна

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g}.$$

При $S_b = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{0.0200(500)}{9.8} = 1.02 \text{ kg}.$$

Это амплитуда относительно среднего значения; размах колебаний равен 2.04 kg.

Соответствующая амплитуда изменения высоты поверхности равна

$$\frac{A}{\rho g} = 3.78 \text{ mm},$$

что значительно меньше расстояния 10 см от середины колбы до любого из её концов.

С.1

Сначала найдём разность сил натяжения тросов для произвольных x и P_1 .

Обозначим через z_s уровень внешней поверхности ртути, а через z_c — высоту дна резервуара. Согласно схеме тросов, смещение груза вправо на x :

- поднимает резервуар на x ;
- опускает барометрическую трубку на x .

Поэтому

$$z_c = z_{c0} + x, \quad h_t = h_{t0} - x.$$

Из условия гидростатического равновесия следует

$$z_\ell - z_s = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Масса ртути над внешней поверхностью равна

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t(h_t - z_s) + S_b(z_\ell - h_t)] = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)(h_t - z_s).$$

Поскольку объём стенок трубки пренебрежимо мал, закон сохранения объёма ртути можно записать как

$$V_\ell = S_c(z_s - z_c) + \frac{m_{\text{add}}}{\rho}.$$

Обозначив $\delta m = m_{\text{add}} - m_{\text{add},0}$, получаем отсюда

$$\delta z_s = x - \frac{\delta m}{\rho S_c}.$$

Вычитая начальное выражение для m_{add} из текущего, получаем

$$\delta m = \frac{S_b P_1}{g} + \rho(S_b - S_t)(x + \delta z_s).$$

Следовательно,

$$\boxed{\delta m = \frac{S_b S_c}{(S_b + S_c - S_t)g} P_1 + \frac{2\rho S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} x}.$$

В неподвижной конфигурации сила натяжения троса со стороны трубки равна

$$T_{\text{tb}} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g,$$

а сила натяжения со стороны резервуара равна

$$T_c = (m_c + \rho V_\ell - m_{\text{add}})g.$$

В начальный момент их разность равна нулю. Поэтому проекция силы, действующей на M , положительная при направлении вправо, равна

$$T = T_{\text{tb}} - T_c = 2g \delta m.$$

Введём

$$K = \frac{S_b S_c}{S_b + S_c - S_t}, \quad \alpha = \frac{2\rho g(S_b - S_t)}{S_b}.$$

В результате получаем закон для силы

$$T = 2K(P_1 + \alpha x).$$

Заданные параметры удовлетворяют соотношениям

$$F_s = KA\xi, \quad \alpha X = A\lambda.$$

При $x = 0$ максимальный модуль силы за цикл изменения атмосферного давления равен $2KA$.

Трение покоя может уравнивать её в течение всего цикла, если

$$F_s \geq 2KA \iff \xi \geq 2.$$

Таким образом, искомое пороговое значение равно

$$\xi^* = 2.$$

С.2

Подставляя $P_1 = 0$ и $x = X$ в закон для силы, получаем

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x.$$

Используя $S_t \ll S_b, S_c$, получаем

$$\vec{T} \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

Положительный знак имеет существенное значение: смещение вправо создаёт дополнительную силу, направленную вправо. Равновесие механически неустойчиво, как только трение перестаёт удерживать груз.

С.3

При построении графиков используем предел медленного изменения атмосферного давления: переход между упорами происходит быстро по сравнению с недельным периодом изменения давления. Упоры останавливают движущуюся систему.

Запишем

$$p = \frac{P_1}{A}, \quad y = \frac{x}{X}.$$

Тогда

$$\frac{T}{KA} = 2(p + \lambda y), \quad \frac{F_s}{KA} = \xi.$$

Вначале $y = 0$, а p возрастает от нуля. Движение вправо начинается, когда p превышает

$$p = \frac{\xi}{2}.$$

Поскольку $\partial T / \partial x = 2K\alpha > 0$, движение вправо увеличивает движущую силу. Груз быстро достигает $y = +1$.

Для отхода от правого упора влево необходимо

$$T < -F_s.$$

Следовательно,

$$2(p + \lambda) < -\xi \iff p < -\left(\lambda + \frac{\xi}{2}\right).$$

Введём

$$q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

Если $q > 1$, давление никогда не становится достаточно низким, чтобы груз отошёл от упора. Если $q < 1$, отход происходит в каждом полупериоде убывания давления. Аналогичное условие отхода от левого упора имеет вид $p > q$.

Таким образом, два режима имеют следующий вид:

Режим	Условие	Точное описание качественного графика
1: постоянное пребывание у правого упора	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda > 2$	Вначале изобразите $x/X = 0$, затем быстрый подъём до $+1$ на первом возрастающем участке давления при $p = \xi/2$. Продолжите горизонтальную линию на уровне $+1$ вплоть до $3\tau_1$.
2: повторяющееся движение между упорами	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda < 2$	Начните с такого же начального подъёма. Затем изобразите горизонтальные плато на уровнях $+1$ и -1 , соединённые быстрыми переходами вниз всякий раз, когда убывающее давление достигает $p = -q$, и переходами вверх всякий раз, когда возрастающее давление достигает $p = q$.

Чтобы явно указать моменты переходов, положим $s = t/\tau_1$. Первый переход в положительном направлении происходит при

$$s = \frac{\xi}{8}.$$

В циклическом режиме переходы в отрицательном направлении на заданном интервале происходят при

$$s = \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{3}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{5}{2} + \frac{q}{4},$$

а последующие переходы в положительном направлении — при

$$s = 1 + \frac{q}{4}, \quad 2 + \frac{q}{4}.$$

Эти значения полностью определяют требуемый качественный график за три периода.

При $q = 1$ порог отхода лишь достигается в экстремуме давления. В точной идеализированной модели трение покоя может удерживать груз у упора; устойчивое циклическое движение гарантируется строгим неравенством $q < 1$.

С.4

В установившемся циклическом режиме за каждый период груз проходит от одного упора до другого и обратно. Полный путь скольжения равен $4X$, поэтому

$$\boxed{W = 4F_s X}.$$

При $S_b \simeq S_c$ и $S_t \ll S_b$

$$\xi \simeq \frac{2F_s}{S_c A}, \quad \lambda \simeq \frac{2\rho g X}{A}.$$

Условие циклического движения принимает вид

$$\xi + 2\lambda < 2 \iff F_s < S_c(A - 2\rho g X).$$

При фиксированном X энергия приближается к наибольшему достижимому значению, когда F_s приближается к этой верхней границе. Её предельная огибающая имеет вид

$$W(X) = 4S_c X(A - 2\rho g X).$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dW}{dX} = 4S_c(A - 4\rho g X).$$

Следовательно, оптимальные значения равны

$$\boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g}}, \quad \boxed{F_s^* = \frac{S_c A}{2}}.$$

Эквивалентно,

$$\xi_{\text{opt}} = 1, \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{W^* = 4F_s^* X^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g}}.$$

При $S_c = 0.0210 \text{ m}^2$

$$F_s^* = \frac{0.0210(500)}{2} = 5.25 \text{ N},$$

$$X^* = \frac{500}{4(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m},$$

и

$$\boxed{W^* = \frac{0.0210(500)^2}{2(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}}.$$

Строго говоря, эти значения лежат на предельной границе переключения. Они дают идеальный предельный максимум, к которому можно приблизиться со стороны циклического режима; для надёжной работы необходим небольшой запас внутри этой границы.

C.5

Объём, существенный для работы атмосферного давления, включает вакуумную полость над ртутью. Объём жидкости и объём материала сосудов постоянны, поэтому

$$V = V_{\text{constant}} + V_{\text{vac}}, \quad V_{\text{vac}} = S_b(h_t + H_b - z_\ell).$$

Используем то же приближение, что и в C.4:

$$S_b = S_c = S, \quad S_t = 0.$$

Тогда из соотношений сохранения объёма и гидростатики, полученных в C.1, следует

$$\delta z_s = -\frac{P_1}{2\rho g}, \quad \delta z_\ell = \frac{P_1}{2\rho g}.$$

Поскольку $\delta h_t = -x$,

$$V = V_{\text{ref}} - Sx - \frac{S}{2\rho g}P_1.$$

Работа атмосферного давления, полученная системой, равна

$$W_{\text{pr}} = - \oint P_a dV.$$

Подстановка даёт

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_a dx + \frac{S}{2\rho g} \oint P_a dP_1.$$

Второй интеграл по замкнутому циклу равен нулю. Кроме того, $P_0 \oint dx = 0$. Поэтому

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_1 dx.$$

В предельном оптимальном случае $q = 1$. Ход в положительном направлении происходит при $P_1 = +A$, причём $\Delta x = 2X^*$, а ход в отрицательном направлении — при $P_1 = -A$, причём $\Delta x = -2X^*$. Следовательно,

$$W_{\text{pr}}^* = S[A(2X^*) + (-A)(-2X^*)] = 4SAX^*.$$

Таким образом,

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

На диаграмме с V по горизонтальной оси и P_a по вертикальной цикл представляет собой параллелограмм:

- у каждого неподвижного упора $dV/dP_a = -S_c/(2\rho g)$, что даёт две параллельные наклонные ветви;
- расстояние между ними по горизонтали равно $2S_c X^*$;
- ходы при постоянном давлении соединяют их на уровнях $P_0 + A$ и $P_0 - A$;
- цикл проходится против часовой стрелки, поэтому полученная системой работа положительна и равна его площади,

$$(2A)(2S_c X^*) = 4S_c AX^*.$$

Наконец,

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{S_c A^2/(2\rho g)}{S_c A^2/(\rho g)} = \frac{1}{2}.$$

Оставшаяся половина превращается в кинетическую энергию во время быстрых ходов и рассеивается при остановке движущейся системы у упоров.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Шампанское!

Предупреждение: Чрезмерное употребление алкоголя вредит здоровью, а употребление алкоголя лицами, не достигшими установленного законом возраста, запрещено.

Шампанское — французское игристое вино. При брожении сахаров в бутылке образуется углекислый газ (CO_2). Молярная концентрация CO_2 в жидкой фазе c_ℓ и парциальное давление P_{CO_2} в газовой фазе связаны соотношением $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$, известным как закон Генри, где k_H называется постоянной Генри.

Данные

- Поверхностное натяжение шампанского $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- Плотность жидкости $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Постоянная Генри при $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Постоянная Генри при $T_0 = 6^\circ\text{C}$, $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Атмосферное давление $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Газы идеальны, показатель адиабаты $\gamma = 1.3$



Рис. 1. Бокал, наполненный шампанским.

Часть А. Зарождение, рост и всплытие пузырьков

Сразу после открывания бутылки шампанского при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$ напомним бокал. Давление в жидкости равно P_0 , а её температура остаётся постоянной и равной T_0 . Концентрация c_ℓ растворённого CO_2 превышает равновесную концентрацию; исследуем зарождение пузырька CO_2 . Обозначим его радиус через a , а давление внутри него — через P_b .

А.1 — 0.2 балла

Выразите давление P_b через P_0 , a и σ .

Концентрация растворённого CO_2 в жидкости зависит от расстояния до пузырька. На большом расстоянии она принимает значение c_ℓ ; концентрацию вблизи поверхности пузырька обозначим через c_b . Согласно закону Генри, $c_b = k_H P_b$. Кроме того, во всей задаче будем считать, что пузырьки содержат только CO_2 .

Поскольку $c_\ell \neq c_b$, молекулы CO_2 диффундируют из областей с высокой концентрацией в области с низкой концентрацией. Также будем считать, что любая молекула из жидкой фазы, достигая поверхности пузырька, переходит в пар.

A.2 — 0.5 балла

Выразите критический радиус a_c , при превышении которого пузырёк должен расти, через P_0 , σ , c_ℓ и c_0 , где $c_0 = k_H P_0$. Вычислите численное значение a_c при $c_\ell = 4c_0$.

На практике пузырьки растут преимущественно из уже существующих газовых полостей. Рассмотрим поэтому пузырёк с начальным радиусом $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$. Число молей CO_2 , переносимых через единицу площади поверхности пузырька за единицу времени, обозначим через j . Для j возможны две модели.

- модель (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$, где D — коэффициент диффузии CO_2 в жидкости.
- модель (2) $j = K(c_\ell - c_b)$, где K здесь является постоянной.

Экспериментально установлено, что радиус пузырька $a(t)$ зависит от времени так, как показано на **рис. 2**. Здесь $c_\ell \approx 4c_0$, и, поскольку пузырьки достаточно велики, чтобы быть видимыми, избыточным давлением, обусловленным поверхностным натяжением, можно пренебречь: $P_b \approx P_0$.

A.3 — 1.2 балла

Выразите число молей CO_2 в пузырьке n_c через a , P_0 , T_0 и универсальную газовую постоянную R . Найдите $a(t)$ для обеих моделей. Укажите, какая модель объясняет экспериментальные результаты на **рис. 2**. В зависимости от ответа вычислите численное значение K или D .

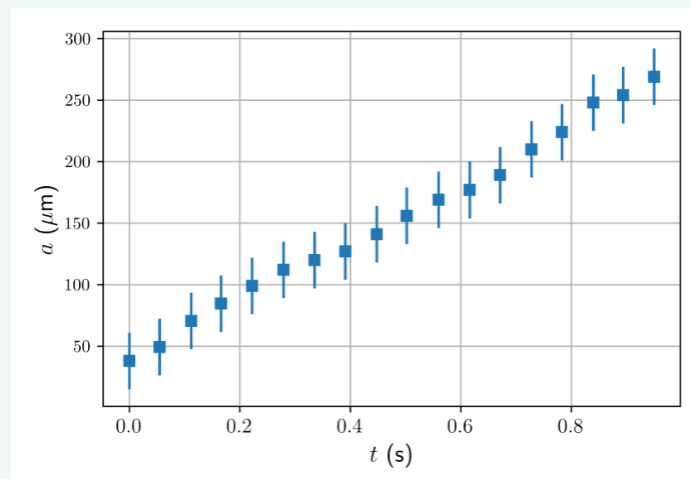


Рис. 2. Зависимость радиуса пузырька CO_2 в бокале шампанского от времени (адаптировано из [1]).

В конце концов пузырьки отрываются от дна бокала и продолжают расти при всплытии. На **рис. 3** показана цепочка пузырьков. Пузырьки в цепочке имеют одинаковый начальный радиус и образуются с постоянной частотой $f_b = 20 \text{ Hz}$.

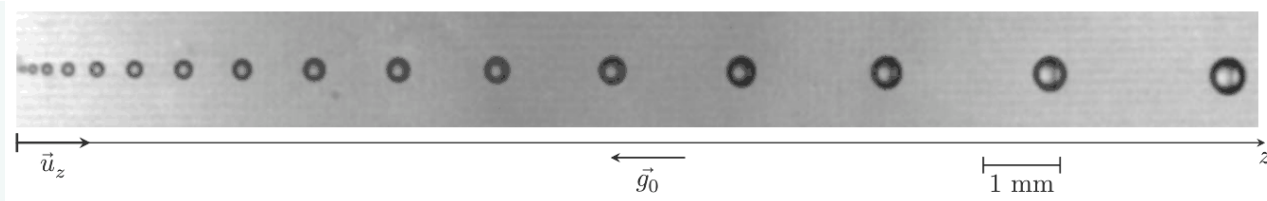


Рис. 3. Цепочка пузырьков. Для размещения на странице фотография повернута в горизонтальное положение (адаптировано из [1]).

В рассматриваемом диапазоне скоростей сила сопротивления F , действующая на пузырёк радиуса a , движущийся со скоростью v в жидкости с динамической вязкостью η , определяется законом Стокса $F = 6\pi\eta av$. Измерения показывают, что в любой момент времени можно считать, что пузырёк движется с установившейся скоростью.

А.4 — 0.8 балла

Запишите выражения для основных сил, действующих на вертикально всплывающий пузырёк. Получите выражение для $v(a)$. Дайте численную оценку η , используя ρ_ℓ , g_0 и величины, измеренные по **рис. 3**.

При всплытии пузырьков по-прежнему применимо квазистационарное описание их роста со скоростью $q_a = \frac{da}{dt}$.

А.5 — 0.5 балла

Выразите радиус a_{H_ℓ} пузырька, достигающего свободной поверхности, через высоту подъёма H_ℓ , скорость роста $q_a = \frac{da}{dt}$ и любые необходимые постоянные. Считая, что $a_{H_\ell} \gg a_0$ и q_a постоянна, найдите численное значение a_{H_ℓ} при $H_\ell = 10$ см и q_a , соответствующей **рис. 2**.

Имеется N_b центров зарождения пузырьков. Предположим, что пузырьки зарождаются с постоянной частотой f_b на дне бокала шампанского (высота жидкости H_ℓ , её объём V_ℓ), причём a_0 по-прежнему пренебрежимо мал. Пренебрегите диффузией CO_2 через свободную поверхность.

А.6 — 1.1 балла

Запишите дифференциальное уравнение для $c_\ell(t)$. Получите из этого уравнения характерное время τ убывания концентрации растворённого CO_2 в жидкости.

Часть В. Акустическое излучение лопающегося пузырька

Малые пузырьки при достижении свободной поверхности имеют почти сферическую форму. Когда жидкая плёнка, отделяющая пузырёк от воздуха, становится достаточно тонкой, в ней образуется круглое отверстие радиуса r , которое под действием поверхностного натяжения очень быстро расширяется (**рис. 4**, слева). Отверстие расширяется с постоянной скоростью v_f (**рис. 4**, справа). Плёнка за пределами ободка остаётся неподвижной и имеет постоянную толщину h .

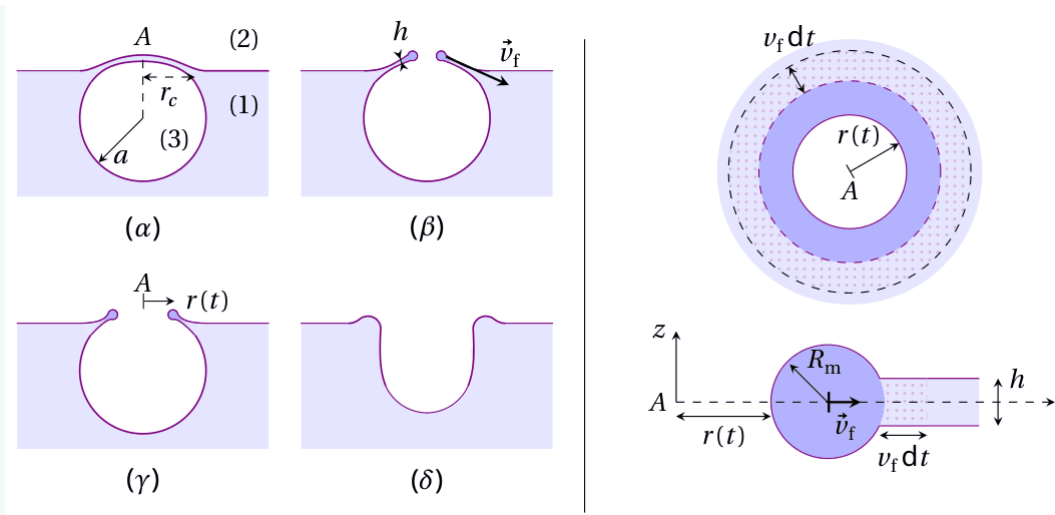


Рис. 4. (Слева) (α) Пузырёк на поверхности: (1) жидкость, (2) воздух при давлении P_0 и (3) CO_2 при давлении P_b ; (β) и (γ) стягивание жидкой плёнки, ободок показан тёмно-синим цветом; (δ) схлопывание пузыря. (Справа) Стягивание жидкой плёнки в момент времени t . Вверху: схема плёнки с отверстием, вид сверху. Внизу: поперечное сечение ободка и стягивающейся плёнки. За время dt ободок захватывает прилегающую жидкость (показана пунктиром).

Из-за диссипативных процессов лишь половина разности поверхностных энергий ободка и захватываемой жидкости в моменты t и $t + dt$ превращается в кинетическую энергию. Кроме того, будем считать, что изменением площади поверхности ободка можно пренебречь по сравнению с изменением площади поверхности плёнки.

В.1 — 1.1 балла

Выразите v_f через ρ_ℓ , σ и h .

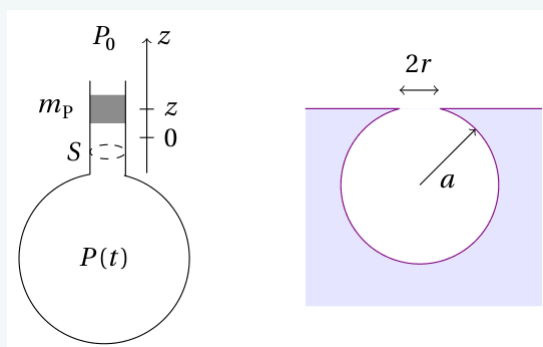


Рис. 5. (Слева) Резонатор Гельмгольца. (Справа) Пузырёк как осциллятор.

При разрыве плёнки избыточное внутреннее давление сбрасывается и излучается звук. Будем моделировать это акустическое излучение резонатором Гельмгольца: полостью, сообщающейся с атмосферой при давлении P_0 через отверстие горлышка площадью S (рис. 5, слева). В горлышке тело массой m_p совершает колебания положения с малой амплитудой под действием сил давления, возникающих при адиабатическом расширении или сжатии газа в полости. Сила тяжести, действующая на m_p , пренебрежимо мала по сравнению с силами давления. Пусть V_0 — объём газа под телом массой m_p при $P = P_0$ и $z = 0$.

В.2 — 1.1 балла

Выразите частоту колебаний f_0 тела массой m_p . Подсказка: при $\varepsilon \ll 1$ справедливо $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

Модель Гельмгольца можно применить к пузырьку радиуса a . V_0 — объём замкнутого пузырька. Согласно литературным данным, масса эквивалентного поршня равна $m_p = 8\rho_g r^3/3$, где r — радиус круглого отверстия, а $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ — плотность газа (рис. 5, справа). В процессе разрыва r изменяется от 0 до r_c , определяемого выражением

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

При этом частота излучаемого звука возрастает до максимального значения 40 kHz, а время разрыва составляет $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

В.3 — 1.1 балла

Найдите радиус a и толщину h плёнки шампанского, отделяющей пузырёк от атмосферы.

Часть С. Откупоривание шампанского

В бутылке общее количество CO_2 равно $n_T = 0.2 \text{ mol}$; он находится либо в растворённом виде в объёме $V_L = 750 \text{ mL}$ жидкого шампанского, либо в газообразном виде в объёме $V_G = 25 \text{ mL}$ под пробкой (рис. 6, слева). Объём V_G содержит только CO_2 . Равновесие между обеими фазами CO_2 подчиняется закону Генри. Будем считать, что быстрое расширение газообразного CO_2 при открывании бутылки адиабатическое и обратимое. Температура окружающей среды T_0 и давление $P_0 = 1 \text{ bar}$ постоянны.

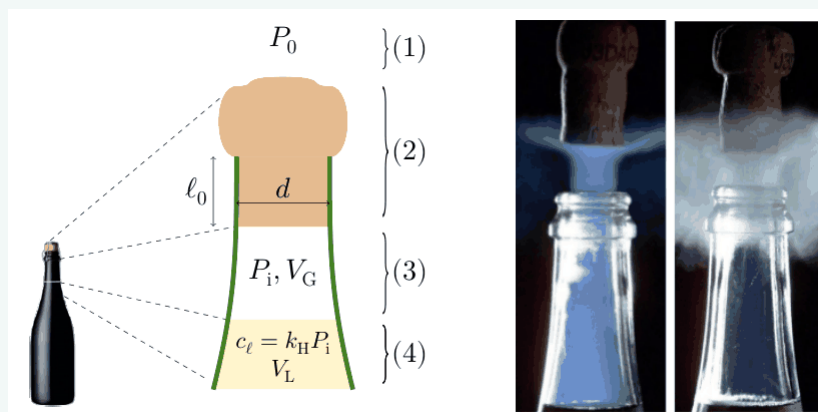


Рис. 6. Слева: обычное горлышко бутылки: (1) окружающий воздух, (2) пробка, (3) газовое пространство под пробкой, (4) жидкое шампанское. Справа: два явления, наблюдаемые при открывании бутылки при двух различных температурах (адаптировано из [2]).

С.1 — 0.4 балла

Найдите численное значение давления P_i газообразного CO_2 в бутылке при $T_0 = 6^\circ\text{C}$ и $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Другой этап производства шампанского (здесь не описанный) приводит к следующим значениям P_i , которые мы будем использовать в последующих вопросах: $P_i = 4.69 \text{ bar}$ при $T_0 = 6^\circ\text{C}$ и $P_i = 7.45 \text{ bar}$ при $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

При открывании бутылки в зависимости от T_0 можно наблюдать два различных явления (рис. 6, справа).

- либо появляется голубой туман, обусловленный образованием кристаллов твёрдого CO_2 (при этом конденсация воды подавлена);
- либо появляется серо-белый туман, обусловленный конденсацией водяного пара в воздухе, окружающем горлышко бутылки. В этом случае кристаллы твёрдого CO_2 не образуются.

Давление насыщенного пара $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ для перехода CO_2 между твёрдой и газообразной фазами подчиняется соотношению:

$$\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$$

где T выражена в К, $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3 \text{ К}$ и $C = -3.49 \text{ К}$.

С.2 — 0.7 балла

Найдите численное значение температуры T_f газообразного CO_2 в конце расширения после открывания бутылки при $T_0 = 6^\circ\text{C}$ и при $T_0 = 20^\circ\text{C}$, если фазового перехода не произошло.

Выберите верные утверждения (верных утверждений может быть несколько):

1. При $T_0 = 6^\circ\text{C}$ во время открывания бутылки появляется серо-белый туман.
2. При $T_0 = 6^\circ\text{C}$ во время открывания бутылки появляется голубой туман.
3. При $T_0 = 20^\circ\text{C}$ во время открывания бутылки появляется серо-белый туман.
4. При $T_0 = 20^\circ\text{C}$ во время открывания бутылки появляется голубой туман.

При открывании бутылки пробка вылетает. Теперь определим максимальную высоту H_c , которой она достигает. Будем считать, что сила трения F , действующая на пробку со стороны горлышка бутылки, равна $F = \alpha A$, где A — площадь контакта, а α — постоянная, которую требуется определить. Вначале сила давления немного превышает силу трения. Масса пробки $m = 10 \text{ г}$, её диаметр $d = 1.8 \text{ см}$, а длина цилиндрической части, первоначально находящейся в горлышке, равна $\ell_0 = 2.5 \text{ см}$. После того как пробка покинет горлышко, равнодействующей сил давления можно пренебречь.

С.3 — 1.3 балла

Найдите численное значение H_c , если температура окружающей среды $T_0 = 6^\circ\text{C}$.

[1] Liger-Belair и др., Am. J. Enol. Vitic., том 50, № 3 (1999).

[2] Liger-Belair и др., Sc. Reports 7, 10938 (2017).

Таблица физических постоянных

Постоянная	Обозначение	Значение	Единица
Скорость света в вакууме	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Постоянная Планка	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$

Постоянная	Обозначение	Значение	Единица
Приведённая постоянная Планка	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная Авогадро	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Универсальная газовая постоянная	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Гравитационная постоянная	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Стандартное ускорение свободного падения	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Магнитная постоянная	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Постоянная Ридберга	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Масса электрона	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Масса протона	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Масса нейтрона	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Атомная единица массы	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Электронвольт	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь $\Delta c = c_\ell - c_0$, а g_0 — ускорение свободного падения, приведённое в таблице постоянных.

- **A.1**

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

• A.2

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

При $c_\ell = 4c_0$

$$a_c = 3.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.31 \text{ } \mu\text{m}.$$

• A.3

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0},$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0\Delta c}{P_0}t},$$

$$a_{(2)}(t) = a_0 + \frac{KRT_0\Delta c}{P_0}t.$$

Модель (2) соответствует приблизительно линейному росту:

$$q_a \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1},$$

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

- **A.4** Сила Архимеда $4\pi\rho_\ell g_0 a^3/3$ направлена вверх; сила сопротивления Стокса $6\pi\eta a v$ и пренебрежимо малая сила тяжести пузырька направлены вниз.

$$v(a) \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta},$$

$$\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

по приближённым измерениям на рис. 3.

• A.5

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

• A.6

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0),$$

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

• B.1

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

• B.2

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

• B.3

$$a \approx 5.3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.53 \text{ mm},$$

$$h \approx 3.8 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.8 \text{ } \mu\text{m}.$$

• **C.1**

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

• **C.2** При использовании уточнённых значений давления, заданных для этого пункта:

$$T_f(6^\circ\text{C}) \approx 195.4 \text{ K } (-77.7^\circ\text{C}),$$

$$T_f(20^\circ\text{C}) \approx 184.4 \text{ K } (-88.7^\circ\text{C}).$$

Верны утверждения **1** и **4**: серо-белый туман при 6°C , голубой туман при 20°C .

• **C.3**

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Решение

A.1

Закон Юнга — Лапласа определяет скачок давления на искривлённой границе раздела жидкости и газа:

$$P_b - P_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Для сферического пузырька оба главных радиуса кривизны равны a . Следовательно,

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

Вокруг погружённого в жидкость пузырька имеется одна граница раздела жидкости и газа.

A.2

Закон Генри на поверхности пузырька даёт

$$c_b = k_H P_b = k_H \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) = c_0 + \frac{2\sigma c_0}{P_0 a}.$$

Газ диффундирует в пузырёк, вызывая его рост, при $c_\ell > c_b$. Поэтому пороговое значение удовлетворяет условию

$$c_\ell - c_0 = \frac{2\sigma c_0}{P_0 a_c},$$

откуда

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

В пересыщенной жидкости пузырьки с $a > a_c$ растут, тогда как меньшие пузырьки имеют тенденцию растворяться.

При $c_\ell = 4c_0$

$$a_c = \frac{2\sigma}{3P_0} = \frac{2(47 \times 10^{-3})}{3(1.0 \times 10^5)} = 3.13 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Следовательно,

$$a_c \approx 0.31 \mu\text{m}.$$

А.3

В указанном приближении $P_b \simeq P_0$ уравнение состояния идеального газа даёт

$$P_0 \frac{4\pi a^3}{3} = n_c RT_0,$$

и, следовательно,

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0}.$$

Молярный поток внутрь пузырька через его поверхность равен

$$\frac{dn_c}{dt} = 4\pi a^2 j.$$

Дифференцируя выражение, полученное из уравнения состояния идеального газа, при постоянных P_0, T_0 , получаем

$$\frac{4\pi P_0 a^2}{RT_0} \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 j,$$

что сводится к

$$\frac{da}{dt} = \frac{RT_0}{P_0} j.$$

На протяжении короткого опыта по исследованию роста примем концентрацию в объёме жидкости постоянной и воспользуемся приближением $c_b \simeq c_0$.

Для **модели (1)**

$$\frac{da}{dt} = \frac{DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0 a}.$$

Интегрируя с начальным условием $a(0) = a_0$, получаем

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t}.$$

Эта модель предсказывает убывающую скорость роста и асимптотическую зависимость $t^{1/2}$.

Для **модели (2)**

$$\frac{da}{dt} = \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} = q_a,$$

откуда

$$a(t) = a_0 + \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t.$$

На рис. 2 наклон графика приблизительно постоянен, что подтверждает **модель (2)**. Считывая приближённо $a = 40 \mu\text{m}$ при $t = 0$ и $a = 270 \mu\text{m}$ при $t = 0.95 \text{ s}$, получаем

$$q_a \approx \frac{(270 - 40) \times 10^{-6}}{0.95} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

При 20°C

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad c_0 = k_H P_0 = 33 \text{ mol m}^{-3},$$

и $c_\ell - c_0 \simeq 3c_0 = 99 \text{ mol m}^{-3}$. Следовательно,

$$K = \frac{P_0 q_a}{RT_0(c_\ell - c_0)} \approx \frac{10^5(2.4 \times 10^{-4})}{8.31446(293.15)(99)}.$$

Таким образом,

$$\boxed{K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}}.$$

A.4

Пусть $\mathbf{u}_z$ направлен вертикально вверх. На пузырёк действуют сила Архимеда

$$\mathbf{F}_B = \rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z,$$

сила сопротивления Стокса

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta a v \mathbf{u}_z,$$

и сила тяжести пузырька

$$\mathbf{W} = -\rho_g \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z.$$

При установившейся скорости их сумма равна нулю:

$$6\pi\eta a v = (\rho_\ell - \rho_g) \frac{4\pi a^3}{3} g_0.$$

Поскольку $\rho_g \ll \rho_\ell$,

$$\boxed{v(a) = \frac{2(\rho_\ell - \rho_g)g_0 a^2}{9\eta} \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}}.$$

Соседние пузырьки движутся по одной и той же траектории с разностью возрастов

$$\Delta t = \frac{1}{f_b}.$$

Поэтому расстояние Δz между их центрами даёт

$$v \simeq \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_b \Delta z,$$

причём эта оценка приближённо относится к среднему радиусу двух пузырьков.

Используя масштаб на рис. 3, для двух пузырьков вблизи правого края получаем приближённо

$$a \simeq 0.24 \text{ mm}, \quad \Delta z \simeq 2.3 \text{ mm}.$$

Следовательно,

$$v \simeq 20(2.3 \times 10^{-3}) = 4.6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1},$$

и

$$\eta \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9f_b \Delta z} = \frac{2(10^3)(9.80665)(0.24 \times 10^{-3})^2}{9(20)(2.3 \times 10^{-3})}.$$

Это даёт оценку по рисунку

$$\boxed{\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}}.$$

A.5

Объединим выражение для установившейся скорости всплытия с постоянной скоростью роста радиуса:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta} a^2, \quad \frac{da}{dt} = q_a.$$

Исключая время, получаем

$$\frac{dz}{da} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta q_a} a^2.$$

Интегрируя от дна до свободной поверхности, получаем

$$H_\ell = \frac{2\rho_\ell g_0}{27\eta q_a} (a_{H_\ell}^3 - a_0^3).$$

Таким образом, выражение с учётом начального радиуса имеет вид

$$a_{H_\ell} = \left(a_0^3 + \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

При $a_{H_\ell} \gg a_0$

$$\boxed{a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}}.$$

Используя $H_\ell = 0.10 \text{ m}$, $q_a \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ и оценённую выше вязкость, получаем

$$\boxed{a_{H_\ell} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}}.$$

A.6

Воспользуемся квазистационарным описанием цепочки пузырьков на временном масштабе убывания концентрации. Жидкость характеризуется однородной по объёму концентрацией $c_\ell(t)$, а изменениями количества газа в ещё всплывающих пузырьках при составлении баланса потерь пренебрегаем.

Каждый пузырёк, достигающий поверхности, выносит

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} a_{H_\ell}^3.$$

Результат A.5 при пренебрежимо малом a_0 даёт

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} = \frac{18\pi\eta H_\ell P_0}{\rho_\ell g_0 RT_0} q_a.$$

По мере потери жидкостью растворённого газа модель (2) даёт

$$q_a(t) = \frac{KRT_0}{P_0} (c_\ell(t) - c_0).$$

Поэтому

$$n_{\text{out}} = \frac{18\pi\eta K H_\ell}{\rho_\ell g_0} (c_\ell - c_0).$$

За единицу времени образуется $N_b f_b$ пузырьков. Закон сохранения количества CO_2 даёт

$$V_\ell \frac{dc_\ell}{dt} = -N_b f_b n_{\text{out}},$$

откуда

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0).$$

Решение имеет вид

$$c_\ell(t) = c_0 + [c_\ell(0) - c_0] e^{-t/\tau},$$

где

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

Экспоненциально убывает именно превышение концентрации над c_0 .

B.1

За время dt стягивающийся ободок захватывает кольцо площадью

$$dA = 2\pi r v_f dt.$$

У плёнки две поверхности раздела жидкости и газа, поэтому уменьшение поверхностной энергии равно

$$-dE_s = 2\sigma dA.$$

Согласно заданному правилу диссипации, половина этой энергии превращается в кинетическую:

$$dE_k = \sigma dA.$$

Масса вновь захваченной жидкости равна

$$dm = \rho_\ell h dA.$$

Поскольку скорость ободка остаётся постоянной, приращение его кинетической энергии равно

$$dE_k = \frac{1}{2} v_f^2 dm = \frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 dA.$$

Приравнявая два выражения, получаем

$$\frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 = \sigma,$$

откуда

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

B.2

При смещении поршня вверх на z объём заключённого под ним газа становится равным

$$V = V_0 + Sz.$$

Для обратимого адиабатического сжатия или расширения

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma.$$

Следовательно,

$$P = P_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0} \right)^{-\gamma}.$$

При $|Sz| \ll V_0$

$$P \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0} \right).$$

Пренебрегая, как указано в условии, силой тяжести поршня, запишем его уравнение движения:

$$m_p \ddot{z} = (P - P_0)S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} z.$$

Это уравнение гармонических колебаний с

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}.$$

Поэтому

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

В.3

Для пузырька

$$S = \pi r^2, \quad V_0 = \frac{4\pi a^3}{3}, \quad m_p = \frac{8\rho_g r^3}{3}.$$

Подстановка в результат В.2 даёт

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma P_0 \pi^2 r^4}{(8\rho_g r^3/3)(4\pi a^3/3)} = \frac{9\gamma P_0 r}{128\pi \rho_g a^3}.$$

Таким образом, $f_0 \propto \sqrt{r}$, и максимальная частота достигается при $r = r_c$. Используя данное выражение для r_c , получаем

$$f_{\max}^2 = \frac{9\gamma P_0}{128\pi \rho_g a^3} \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g a} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

Поэтому

$$a = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g f_{\max}^2} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

При $f_{\max} = 4.0 \times 10^4$ Hz

$$a = \frac{3\sqrt{3}(1.3)(10^5)}{64\pi(1.8)(4.0 \times 10^4)^2} \sqrt{\frac{10^3(9.80665)}{47 \times 10^{-3}}} = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Следовательно,

$$\boxed{a \approx 0.53 \text{ mm}}.$$

Конечный радиус отверстия равен

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho \ell g_0}{\sigma}} \approx 1.50 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Поскольку отверстие расширяется с постоянной скоростью,

$$v_f = \frac{r_c}{t_b}, \quad t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms} = 3 \times 10^{-5} \text{ s},$$

откуда

$$v_f \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}.$$

Наконец, результат В.1 даёт

$$h = \frac{2\sigma}{\rho \ell v_f^2} = \frac{2\sigma t_b^2}{\rho \ell r_c^2} \approx 3.77 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

Таким образом,

$$\boxed{h \approx 3.8 \text{ }\mu\text{m}}.$$

С.1

Количества растворённого и газообразного CO_2 соответственно равны

$$n_L = k_H P_i V_L, \quad n_G = \frac{P_i V_G}{RT_0}.$$

Сохранение общего количества даёт

$$n_T = P_i \left(k_H V_L + \frac{V_G}{RT_0} \right).$$

Следовательно,

$$\boxed{P_i = \frac{n_T}{k_H V_L + V_G/(RT_0)}}.$$

Используем

$$V_L = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad V_G = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

При 6°C , $T_0 = 279.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(5.4 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 279.15)} \approx 4.81 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

При 20°C , $T_0 = 293.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(3.3 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 293.15)} \approx 7.76 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Это абсолютные давления:

$$\boxed{P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}}, \quad \boxed{P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}}.$$

С.2

Для этого пункта в условии заданы уточнённые значения давления

$$P_i(6^\circ\text{C}) = 4.69 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) = 7.45 \text{ bar}.$$

Для обратимого адиабатического расширения идеального газа

$$PV^\gamma = \text{постоянная}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{постоянная}.$$

Исключая V и принимая конечное давление равным P_0 , получаем

$$T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Таким образом,

$$T_f(6^\circ\text{C}) = 279.15 \left(\frac{1}{4.69} \right)^{0.3/1.3} \approx 195.4 \text{ K},$$

и

$$T_f(20^\circ\text{C}) = 293.15 \left(\frac{1}{7.45} \right)^{0.3/1.3} \approx 184.4 \text{ K}.$$

Чтобы определить, образуется ли твёрдый CO_2 , найдём температуру сублимационного равновесия при P_0 . Полагая $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2} = P_0$, получаем

$$0 = A - \frac{B}{T_s + C},$$

откуда

$$T_s = \frac{B}{A} - C = \frac{1300}{6.81} + 3.49 \approx 194.4 \text{ K}.$$

Для изначально холодной бутылки

$$195.4 \text{ K} > T_s.$$

Действительно, данное выражение для давления пара даёт

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(195.4 \text{ K}) \approx 1.09 \text{ bar} > P_0.$$

При таком расширении газ не достигает насыщения относительно твёрдой фазы. Согласно указанным в условии вариантам, образуется **серо-белый туман**.

Для изначально более тёплой бутылки

$$184.4 \text{ K} < T_s,$$

и

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(184.4 \text{ K}) \approx 0.422 \text{ bar} < P_0.$$

Расширение без фазового перехода привело бы к пересыщению CO_2 , поэтому образуются твёрдые кристаллы, создающие **голубой туман**.

Следовательно,

$$\boxed{\text{Верны утверждения 1 и 4.}}$$

Вычисленные значения T_f — это требуемые гипотетические температуры в отсутствие фазового перехода; образование твёрдой фазы изменяет реальный ход изменения температуры в случае тёплой бутылки.

С.3

Используем заданное давление при 6°C :

$$P_i = 4.69 \times 10^5 \text{ Па}.$$

Пусть x — смещение пробки вверх от её начального положения, а

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

— площадь её поперечного сечения.

При $0 \leq x \leq \ell_0$ площадь контакта равна

$$A(x) = \pi d(\ell_0 - x),$$

поэтому сила трения равна

$$F_{\text{fr}}(x) = \alpha \pi d(\ell_0 - x).$$

Вначале равнодействующая сил давления почти уравнивает трение:

$$(P_i - P_0)S \simeq \alpha \pi d \ell_0.$$

Сила тяжести пробки составляет всего 0.098 Н , тогда как начальная равнодействующая сил давления равна примерно 94 Н , поэтому при оценке α силой тяжести можно пренебречь. Следовательно,

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{(P_i - P_0)d}{4\ell_0}} \approx 6.64 \times 10^4 \text{ Па}.$$

В быстром расширении участвует газ, первоначально находящийся в пространстве под пробкой. Его объём и давление во время движения пробки равны

$$V(x) = V_G + Sx, \quad P(x) = P_i \left(\frac{V_G}{V_G + Sx} \right)^\gamma.$$

Когда пробка покидает горлышко,

$$V_e = V_G + S\ell_0.$$

Работа газа внутри бутылки равна

$$W_{\text{gas}} = \int_0^{\ell_0} P(x)S \, dx = \int_{V_G}^{V_e} P_i \left(\frac{V_G}{V} \right)^\gamma dV,$$

откуда

$$W_{\text{gas}} = \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_e} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Работа против атмосферного давления равна

$$W_{\text{atm}} = P_0 S \ell_0,$$

а энергия, рассеиваемая при трении, равна

$$W_{\text{fr}} = \int_0^{\ell_0} \alpha \pi d(\ell_0 - x) \, dx = \frac{1}{2} \alpha \pi d \ell_0^2 \simeq \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0.$$

После выхода пробки равнодействующей сил давления пренебрегаем, как указано в условии. Если пренебречь сопротивлением воздуха, в наивысшей точке вся оставшаяся механическая энергия превращается в потенциальную энергию в поле тяжести. Отсчитывая H_c от начального положения пробки, получаем

$$mg_0 H_c = W_{\text{gas}} - W_{\text{atm}} - W_{\text{fr}}.$$

Поэтому

$$H_c = \frac{1}{mg_0} \left\{ \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_G + S\ell_0} \right)^{\gamma-1} \right] - P_0 S\ell_0 - \frac{1}{2}(P_i - P_0)S\ell_0 \right\}.$$

Численно

$$S = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad V_e = 3.1362 \times 10^{-5} \text{ m}^3,$$

и

$$W_{\text{gas}} \approx 2.570 \text{ J}, \quad W_{\text{atm}} \approx 0.636 \text{ J}, \quad W_{\text{fr}} \approx 1.174 \text{ J}.$$

Таким образом,

$$H_c \approx \frac{2.570 - 0.636 - 1.174}{0.010(9.80665)} \approx 7.75 \text{ m}.$$

С разумной точностью

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Если высота отсчитывается от положения пробки в момент выхода из горлышка, следует вычесть $\ell_0 = 0.025 \text{ m}$; округлённый ответ остаётся равным 7.7 m .

Решение проверено по официальному решению.