

IPhO 2025

Problemas teóricos y soluciones · París, Francia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2025/

Problema 1: Hidrógeno y galaxias

Este problema tiene como objetivo estudiar la peculiar física de las galaxias, como su dinámica y estructura. En particular, explicamos cómo medir la distribución de masa de nuestra galaxia desde su interior. Para ello nos centraremos en el hidrógeno, su principal constituyente.

A lo largo de este problema utilizaremos únicamente $\hbar$, definida como $\hbar = h/2\pi$.

Parte A - Introducción

Modelo de Bohr

Suponemos que el átomo de hidrógeno consta de un electrón no relativista, de masa m_e , que orbita alrededor de un protón fijo. A lo largo de esta parte, suponemos que su movimiento describe una órbita circular.

A.1 — 0.2pt

Determine la velocidad v del electrón en una órbita circular de radio r .

En el modelo de Bohr, suponemos que el módulo del momento angular L del electrón está cuantizado, $L = n\hbar$, donde $n > 0$ es un entero. Definimos $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$.

A.2 — 0.5pt

Demuestre que el radio de cada órbita viene dado por $r_n = n^2 r_1$, donde r_1 se denomina radio de Bohr. Expresé r_1 en función de α , m_e , c y $\hbar$ y calcule su valor numérico con 3 cifras. Expresé v_1 , la velocidad en la órbita de radio r_1 , en función de α y c .

A.3 — 0.5pt

Determine la energía mecánica E_n del electrón en una órbita de radio r_n en función de e , ϵ_0 , r_1 y n . Determine E_1 en el estado fundamental en función de α , m_e y c . Calcule su valor numérico en eV.

Estructuras fina e hiperfina del hidrógeno

La infrecuente inversión espontánea del espín del electrón provoca la emisión de un fotón, en promedio, una vez cada 10 millones de años por átomo de hidrógeno. Esta emisión sirve como trazador del hidrógeno en el universo y, por tanto, es fundamental en astrofísica. Estudiaremos en dos pasos la transición responsable de esta emisión.

En primer lugar, considere la interacción entre el espín del electrón y el movimiento relativo del electrón y el protón. En el sistema de referencia del electrón, el protón orbita alrededor del electrón a una distancia r_1 . Esto produce un campo magnético $\vec{B}_1$.

A.4 — 0.5pt

Determine el módulo B_1 de $\vec{B}_1$ en la posición del electrón en función de μ_0 , e , α , c y r_1 .

En segundo lugar, el espín del electrón crea un momento magnético $\vec{\mathcal{M}}_s$. Su módulo es aproximadamente $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. La estructura *fin*a (F) está relacionada con la diferencia de energía ΔE_F entre un electrón con un momento magnético $\vec{\mathcal{M}}_s$ paralelo a $\vec{B}_1$ y un electrón con $\vec{\mathcal{M}}_s$ antiparalelo a $\vec{B}_1$. De manera similar, la estructura *hiperfina* (HF) está relacionada con la diferencia de energía ΔE_{HF} , debida a la interacción entre los momentos magnéticos paralelos y antiparalelos del electrón y del protón. Se sabe que es aproximadamente $\Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$, donde m_p es la masa del protón.

A.5 — 0.5pt

Expresa ΔE_F en función de α y E_1 .

Expresa la longitud de onda λ_{HF} de un fotón emitido durante una transición entre los dos estados de la estructura hiperfina y dé su valor numérico con dos cifras.

Parte B - Curvas de rotación de galaxias

Datos

- Kilopársec: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- Masa solar: $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Consideramos una galaxia esférica centrada en un punto fijo O . En cualquier punto P , sean $\rho = \rho(P)$ la densidad volumétrica de masa y $\varphi = \varphi(P)$ el potencial gravitatorio asociado (es decir, la energía potencial por unidad de masa). Tanto ρ como φ dependen únicamente de $r = \|\vec{OP}\|$. El movimiento de una masa m situada en P , debido al campo φ , está restringido a un plano que contiene a O .

B.1 — 0.2pt

En el caso de una órbita circular, determine la velocidad v_c de un objeto en una órbita circular que pasa por P en función de r y $\frac{d\varphi}{dr}$.

La Fig. 1(A) es una imagen de la galaxia espiral NGC 6946 en la banda visible (obtenida con el telescopio Schulman de 0.8 m del Mount Lemmon Sky Center, en Arizona). Las pequeñas elipses de la Fig. 1(B) muestran medidas experimentales de v_c para esta galaxia. La región central ($r < 1 \text{ kpc}$) se denomina bulbo. En esta región, la distribución de masa es aproximadamente homogénea. La curva roja es una predicción de v_c si el sistema fuera homogéneo en el bulbo y kepleriano ($\varphi(r) = -\beta/r$, con $\beta > 0$) fuera de él, es decir, considerando que la masa total de la galaxia está concentrada en el bulbo.

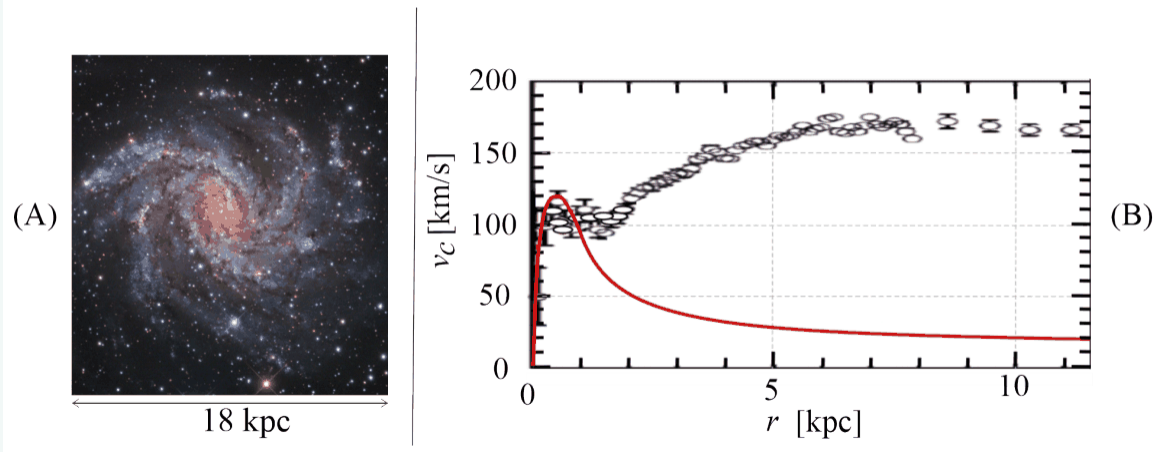


Fig. 1: Galaxia NGC 6946: imagen (A) y curva de rotación (B).

B.2 — 0.5pt

Deduzca la masa M_b del bulbo de NGC 6946 a partir de la curva de rotación roja de la Fig. 1(B), en unidades de masa solar.

La comparación del modelo kepleriano con los datos experimentales lleva a los astrónomos a concluir que parte de la masa es invisible en la imagen. Por ello, suponen que la densidad de masa real de la galaxia viene dada por

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

donde $C_m > 0$ y $r_m > 0$ son constantes.

B.3 — 1.8pt

Demuestre que el perfil de velocidades $v_{c,m}(r)$, correspondiente a la densidad de masa de la Ec. 1, puede escribirse como

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}.$$

Expresa k_1 y k_2 en función de C_m , r_m y G .

(Pistas: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, y: $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$ para $x \ll 1$.)

Simplifique $v_{c,m}(r)$ cuando $r \ll r_m$ y cuando $r \gg r_m$.

Demuestre que, si $r \gg r_m$, la masa $M_m(r)$ contenida en una esfera de radio r con la densidad de masa dada por la Ec. 1 se simplifica y depende únicamente de C_m y r .

Estime la masa de la galaxia NGC 6946 que está realmente presente en la imagen de la Fig. 1(A).

Parte C - Distribución de masa en nuestra galaxia

Para una galaxia espiral, el modelo de la Ec. 1 se modifica y habitualmente se considera que el potencial gravitatorio viene dado por

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

donde z es la distancia al plano galáctico (definido por $z = 0$), y $r < r_0$ es ahora el radio respecto al eje y $\varphi_0 > 0$ una constante que debe determinarse. r_0 y z_0 son valores constantes.

C.1 — 0.5pt

Halle la ecuación de movimiento para z correspondiente al movimiento vertical de una masa puntual m en este potencial, suponiendo que r es constante. Demuestre que, si $r < r_0$, el plano galáctico es un estado de equilibrio estable, dando la frecuencia angular ω_0 de las pequeñas oscilaciones a su alrededor.

A partir de aquí, fijamos $z = 0$.

C.2 — 0.6pt

Identifique el régimen, ya sea $r \gg r_m$ o $r \ll r_m$, en el que el modelo de la Ec. 1 recupera un potencial de la forma $\varphi_G(r, 0)$ con una definición adecuada de φ_0 .

En esta condición, $v_c(r)$ deja de depender de r . Exprésela en función de φ_0 .

Por tanto, fuera del bulbo, el módulo de la velocidad v_c no depende de la distancia al centro galáctico. Utilizaremos este hecho, como hacen los astrónomos, para medir la distribución de masa de la galaxia desde su interior.

Todos los objetos galácticos considerados aquí para las observaciones astronómicas, como estrellas o nebulosas, están compuestos principalmente de hidrógeno. Fuera del bulbo, suponemos que giran en órbitas circulares alrededor del centro galáctico C . S es la posición del Sol y E la de un objeto galáctico dado que emite en el espectro del hidrógeno. En el plano galáctico, consideramos una línea de visión SE correspondiente a la orientación de una observación, en la dirección del vector unitario $\hat{u}_v$ (véase la Fig. 2).

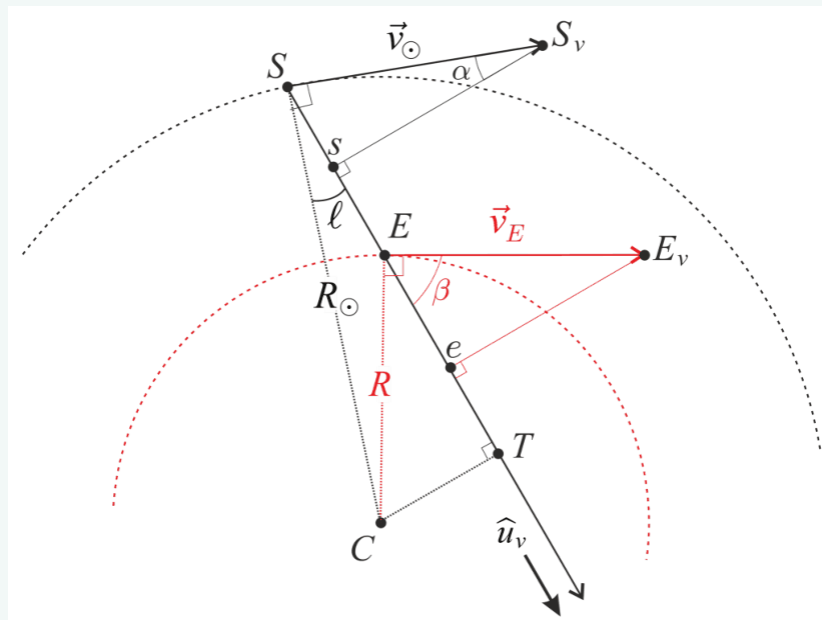


Fig. 2: Geometría de la medida

Sea ℓ la longitud galáctica, que mide el ángulo entre SC y SE . La velocidad del Sol en su órbita circular de radio $R_\odot = 8.00$ kpc se denota por $\vec{v}_\odot$. Un objeto galáctico en E orbita en otra circunferencia de radio R con velocidad $\vec{v}_E$. Mediante el efecto Doppler en la línea de 21 cm

estudiada anteriormente, se puede obtener la velocidad radial relativa $v_{rE/S}$ del emisor E respecto al Sol S : es la proyección de $\vec{v}_E - \vec{v}_\odot$ sobre la línea de visión.

C.3 — 0.7pt

Determine $v_{rE/S}$ en función de ℓ , R , $R_\odot$ y $v_\odot$. A continuación, exprese R en función de $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ y $v_{rE/S}$.

Con un radiotelescopio, realizamos observaciones en el plano de nuestra galaxia hacia una longitud $\ell = 30^\circ$. La banda de frecuencias utilizada contiene la línea de 21 cm, cuya frecuencia es $f_0 = 1.42$ GHz. Los resultados se presentan en la Fig. 3.

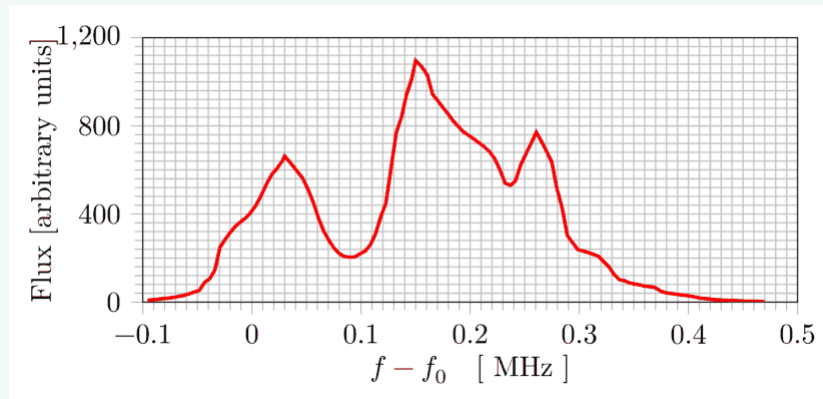


Fig. 3: Señal electromagnética en función del desplazamiento de frecuencia, medida en la banda de radiofrecuencias a $\ell = 30^\circ$ utilizando EU-HOU RadioAstronomy

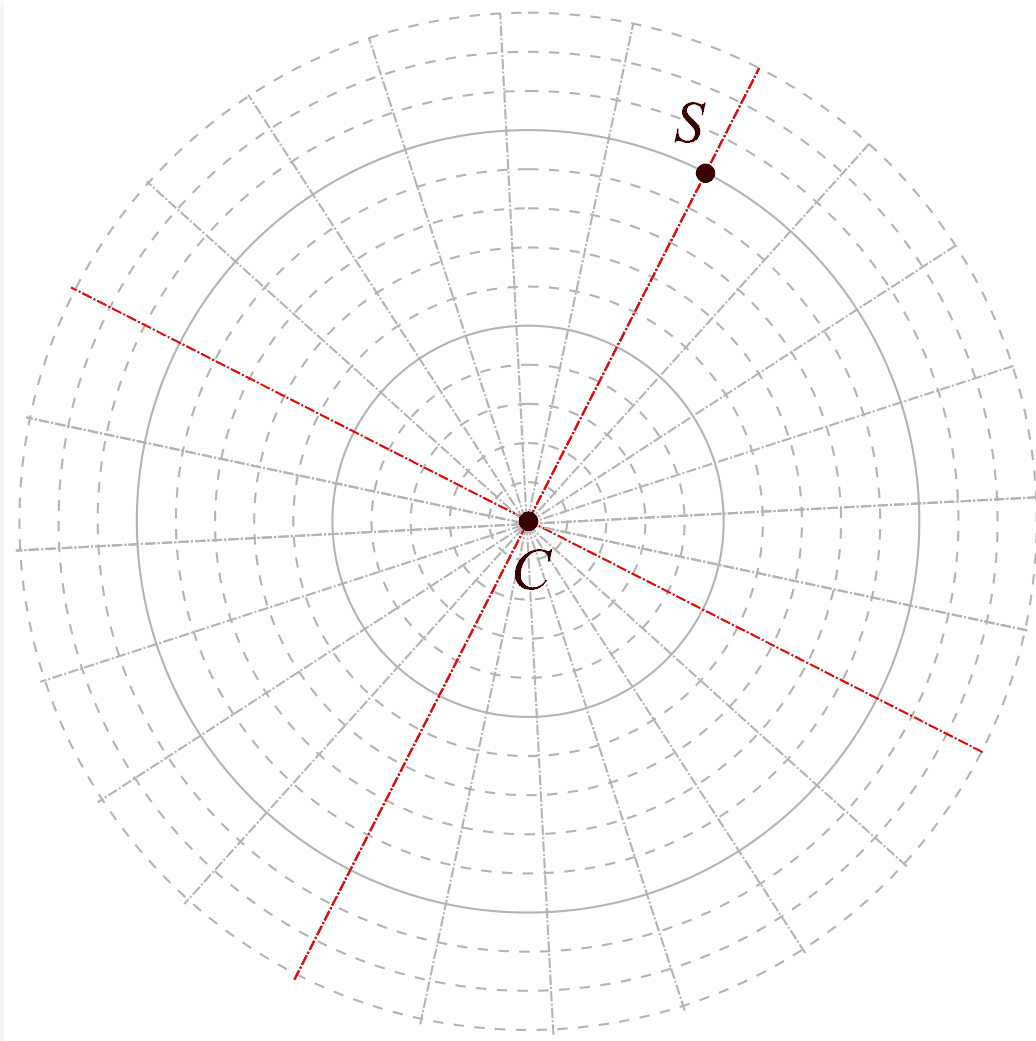
C.4 — 0.6pt

En nuestra galaxia, $v_\odot = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Determine los valores de la velocidad radial relativa (con 3 cifras significativas) y de la distancia al centro galáctico (con 2 cifras significativas) de las 3 fuentes observadas en la Fig. 3. Las distancias deben expresarse como múltiplos de $R_\odot$.

C.5 — 0.6pt

En la vista superior de nuestra galaxia (en el recuadro de respuesta), indique las posiciones de las fuentes observadas en la Fig. 3.

¿Qué podría deducirse al repetir las medidas variando ℓ ?



Parte D - Relación de Tully-Fisher y teoría MOND

La curva plana de velocidad en las regiones externas de NGC 6946 en la Fig. 1 es una propiedad común de las galaxias espirales, como puede verse en la Fig. 4 (izquierda). Al representar el valor constante de la velocidad externa $v_{c,\infty}$ en función de la masa total medida M_{tot} de cada galaxia, se obtiene una interesante correlación denominada relación de Tully-Fischer; véase la Fig. 4 (derecha).

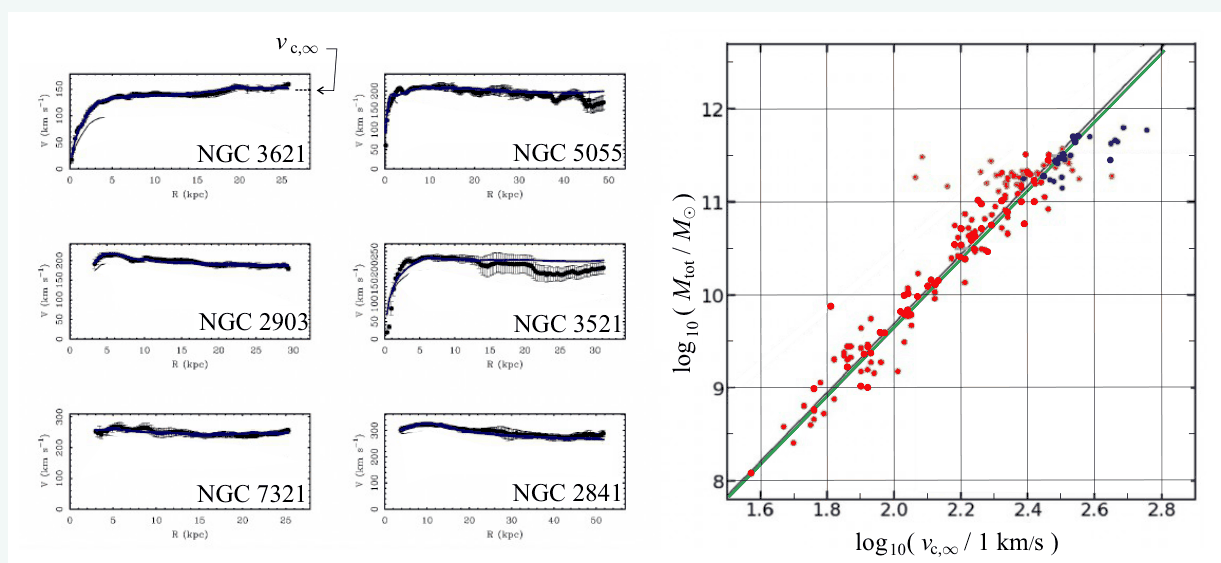


Fig. 4. Izquierda: curvas de rotación de galaxias espirales típicas. Derecha: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ en función de $\log_{10}(v_{c,\infty})$ en escalas lineales. Los puntos de colores corresponden a distintas galaxias y a distintos sondeos. La línea verde es la relación de Tully-Fischer, que concuerda muy bien con la recta de mejor ajuste a los datos (en negro).

D.1 — 0.4pt

Suponiendo que el radio R de una galaxia no depende de su masa, demuestre que el modelo de la Ec. 1 (parte B) da una relación de la forma $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$, donde deben especificarse γ y η .

Compare esta expresión con la relación de Tully-Fischer calculando γ_{TF} .

En el régimen de aceleraciones extremadamente bajas, del orden de $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, la teoría de la dinámica newtoniana modificada (MOND) propone modificar la segunda ley de Newton mediante

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$$

donde $a = \|\vec{a}\|$ es el módulo de la aceleración y la función μ se define como $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$.

D.2 — 0.2pt

Utilizando los datos de NGC 6946 de la Fig. 1, estime, en el marco de la teoría de Newton, el módulo de la aceleración a_m de una masa en las regiones externas de NGC 6946.

D.3 — 0.8pt

Sea m una masa en una órbita circular de radio r con velocidad $v_{c,\infty}$ en el campo gravitatorio de una masa fija M .

En el marco de la teoría MOND, con $a \ll a_0$, determine el exponente de Tully-Fischer.

Utilizando los datos de NGC 6946 y/o la ley de Tully-Fischer, calcule a_0 para demostrar que MOND opera en el régimen correcto.

D.4 — 0.9pt

Considerando los casos pertinentes, determine $v_c(r)$ para todos los valores de r en la teoría MOND en el caso de un campo gravitatorio debido a una masa M distribuida homogéneamente con radio R_b .

Hoja de datos generales

Constante	Notación	Valor	Unidad
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck reducida	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Avogadro	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}

Constante	Notación	Valor	Unidad
Constante molar de los gases	R	8.314 462 618 153 24	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Carga elemental	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de gravitación universal	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Aceleración normal de la gravedad	g	9.806 65	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Constante de Rydberg	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Masa del electrón	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Masa del protón	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Masa del neutrón	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Constante de masa atómica	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Electronvoltio	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- A.1

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

- A.2

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad v_1 = \alpha c.$$

- A.3

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

- A.4

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

• A.5

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1,$$

$$\lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c} \simeq 0.21 \text{ m}.$$

• B.1

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

• B.2

$$M_b \sim 1 \times 10^9 M_\odot.$$

• B.3

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m,$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3}} \frac{r}{r_m}, \quad v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq \sqrt{4\pi G C_m},$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq 4\pi C_m r, \quad M_{\text{en la figura}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_\odot.$$

• C.1

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

• C.2

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m, \quad v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

• C.3

$$v_{rE/S} = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell,$$

$$R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

• C.4 Numerando los picos por orden creciente de desplazamiento de frecuencia:

$$(v_{r,1}, v_{r,2}, v_{r,3}) = (6.33, 31.7, 54.9) \text{ km s}^{-1},$$

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.95, 0.78, 0.67) R_\odot.$$

• C.5 En la línea de visión $\ell = 30^\circ$, marque las dos intersecciones con cada una de las tres circunferencias de radios $0.95R_\odot$, $0.78R_\odot$ y $0.67R_\odot$. Las distancias cercana y lejana al Sol son

$$\frac{(d_{1,-}, d_{2,-}, d_{3,-})}{R_\odot} \simeq (0.0635, 0.272, 0.424),$$

$$\frac{(d_{1,+}, d_{2,+}, d_{3,+})}{R_\odot} \simeq (1.67, 1.46, 1.31).$$

Los barridos repetidos en longitud revelan la distribución del hidrógeno y la estructura espiral, sujetos a esta ambigüedad entre la posición cercana y la lejana.

• D.1

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_{TF} \approx 3.7 \text{ (gráficamente próximo a 4)}.$$

• D.2

$$a_m \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}.$$

• D.3

$$v_{c,\infty}^4 = GMa_0, \quad \gamma_{\text{MOND}} = 4, \quad a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

Esta es la escala de aceleración pertinente; los datos representados de NGC 6946, por sí solos, no establecen la desigualdad más fuerte $a \ll a_0$.

• D.4

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

El límite continuo es $v_c(0) = 0$.

Solución

Para los valores numéricos atómicos, evalúo α a partir de su expresión de definición y de las constantes proporcionadas:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29735 \times 10^{-3}.$$

Este valor difiere ligeramente de la aproximación impresa en el enunciado.

A.1

La fuerza de atracción de Coulomb proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Por tanto,

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2

La cuantización de Bohr da

$$m_e v_n r_n = n\hbar.$$

Elevando esta expresión al cuadrado y utilizando la igualdad de fuerzas de A.1,

$$n^2 \hbar^2 = m_e^2 v_n^2 r_n^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}.$$

En consecuencia,

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 \frac{\hbar}{m_e \alpha c}.$$

Así,

$$r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Para la órbita fundamental,

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e r_1} = \boxed{\alpha c}.$$

En general, $v_n = \alpha c/n$. Dado que $\alpha \ll 1$, la aproximación no relativista es coherente.

A.3

Tomando la energía potencial electrostática nula en el infinito,

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

La igualdad de fuerzas da

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Por consiguiente, la energía mecánica total es

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

En $r_n = n^2 r_1$,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}.$$

En particular,

$$E_1 = -\frac{\alpha \hbar c}{2r_1} = \boxed{-\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2}.$$

Numéricamente,

$$E_1 = -2.17987 \times 10^{-18} \text{ J} = \boxed{-13.6 \text{ eV}}.$$

A.4

En la descripción propuesta en el sistema de referencia del electrón, el protón circula con una rapidez $v_1 = \alpha c$. Su período orbital y la corriente equivalente son

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}.$$

El campo magnético en el centro de una espira circular de corriente es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_1}.$$

Por tanto,

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

A.5

Un dipolo magnético en un campo tiene una energía

$$U = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}_1.$$

En consecuencia, los estados paralelo y antiparalelo tienen energías $-\mathcal{M}_s B_1$ y $+\mathcal{M}_s B_1$. Su separación energética positiva es

$$\Delta E_F = 2\mathcal{M}_s B_1.$$

Utilizando el momento magnético especificado en el problema,

$$\Delta E_F = 2 \frac{e\hbar}{m_e} \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

Con $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ y $e^2/(4\pi\varepsilon_0) = \alpha\hbar c$,

$$\Delta E_F = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m_e r_1^2} = 2m_e \alpha^4 c^2.$$

Dado que $E_1 = -m_e \alpha^2 c^2/2$,

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1.$$

El fotón hiperfino satisface

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\text{HF}}} = \Delta E_{\text{HF}} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F.$$

Así,

$$\lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c}.$$

Los valores numéricos intermedios son

$$\Delta E_F \simeq 2.898 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad \lambda_{\text{HF}} \simeq 0.21116 \text{ m}.$$

Con dos cifras significativas,

$$\lambda_{\text{HF}} = 0.21 \text{ m} = 21 \text{ cm}.$$

B.1

La aceleración gravitatoria es

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Igualándola a la aceleración dirigida hacia el centro de una órbita circular,

$$-\frac{v_c^2}{r} \hat{r} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Por tanto,

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

B.2

Fuera de un bulbo esférico, el teorema de las capas esféricas da

$$\varphi(r) = -\frac{GM_b}{r} + \text{constante}.$$

Se deduce que

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r}, \quad M_b = \frac{rv_c^2}{G}.$$

Una lectura aproximada conveniente de la curva roja es

$$r \simeq 10 \text{ kpc}, \quad v_c \simeq 20 \text{ km s}^{-1}.$$

Por consiguiente,

$$M_b \simeq \frac{(10 \times 3.09 \times 10^{19})(2.0 \times 10^4)^2}{6.67430 \times 10^{-11}} = 1.85 \times 10^{39} \text{ kg}.$$

En unidades solares, esto es aproximadamente $9.3 \times 10^8 M_\odot$. Dada la precisión gráfica,

$$M_b \sim 10^9 M_\odot.$$

B.3

La masa encerrada dentro del radio r es

$$M_m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(x) x^2 dx = 4\pi C_m \int_0^r \frac{x^2}{r_m^2 + x^2} dx.$$

Aplicando la integral proporcionada,

$$M_m(r) = 4\pi C_m \left[r - r_m \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

Por simetría esférica,

$$v_{c,m}^2(r) = \frac{GM_m(r)}{r} = 4\pi G C_m \left[1 - \frac{r_m}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

La comparación con la forma solicitada da

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m.$$

Para $r \ll r_m$, tomamos $x = r/r_m$. Entonces

$$1 - \frac{\arctan x}{x} \simeq 1 - \frac{x - x^3/3}{x} = \frac{x^2}{3}.$$

Por tanto,

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3} \frac{r}{r_m}}.$$

La curva de rotación central crece linealmente, como cabe esperar para una densidad aproximadamente uniforme.

Para $r \gg r_m$, $\arctan(r/r_m) \rightarrow \pi/2$, mientras que $r_m/r \rightarrow 0$. Así,

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{4\pi G C_m} \equiv v_{c,\infty},$$

y

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r = \frac{v_{c,\infty}^2 r}{G}.$$

El diámetro representado en la imagen es aproximadamente 18 kpc, por lo que tomamos 9 kpc como radio de la región que la engloba. La rapidez externa observada es aproximadamente 170 km s^{-1} . Por consiguiente,

$$M_{\text{en la figura}} \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2 (9 \times 3.09 \times 10^{19})}{6.67430 \times 10^{-11}} \simeq 1.20 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

Por tanto,

$$M_{\text{en la figura}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

C.1

Para r fijo, la ecuación del movimiento vertical es

$$m\ddot{z} = -m \frac{\partial \varphi_G}{\partial z}.$$

Al derivar el potencial propuesto se obtiene

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}.$$

En $z = 0$, la fuerza se anula. Para pequeñas oscilaciones, $|z| \ll z_0$, por lo que

$$e^{-z^2/z_0^2} \simeq 1.$$

La ecuación linealizada se convierte en

$$\ddot{z} + \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) z = 0.$$

Para $r < r_0$, su coeficiente es positivo. Por tanto, el plano es un equilibrio estable, con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

C.2

Para $r \gg r_m$, B.3 da

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r.$$

Por tanto, el gradiente radial del potencial es

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_m(r)}{r^2} \simeq \frac{4\pi G C_m}{r}.$$

Integrando y eligiendo adecuadamente la constante aditiva,

$$\varphi(r) \simeq 4\pi G C_m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

Así, el régimen y el coeficiente requeridos son

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m.$$

En el plano,

$$v_c^2 = r \frac{\partial \varphi_G(r, 0)}{\partial r} = r \frac{\varphi_0}{r} = \varphi_0,$$

por lo que

$$v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

C.3

Sea T el pie de la perpendicular trazada desde C a la línea de visión. La geometría da

$$CT = R_\odot \sin \ell.$$

La velocidad tangencial del Sol se proyecta sobre la línea de visión como

$$\vec{v}_\odot \cdot \hat{u}_v = v_\odot \sin \ell.$$

Para el emisor, su velocidad tangencial es perpendicular a CE . Su proyección sobre la línea de visión es

$$\vec{v}_E \cdot \hat{u}_v = v_E \frac{CT}{R} = v_E \frac{R_\odot}{R} \sin \ell.$$

La curva de rotación plana implica $v_E = v_\odot$. En consecuencia,

$$v_{rE/S} = (\vec{v}_E - \vec{v}_\odot) \cdot \hat{u}_v = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell.$$

Despejando R ,

$$R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

C.4

Siguiendo la convención prevista, que es coherente con la hoja de respuestas, utilizamos

$$v_r = +c \frac{f - f_0}{f_0},$$

donde los valores positivos indican alejamiento. Por tanto, el eje $f - f_0$ impreso tiene el signo opuesto al del desplazamiento de frecuencia habitual para un alejamiento positivo.

Los tres picos se encuentran aproximadamente en

$$\Delta f_1 = 0.030 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 0.150 \text{ MHz}, \quad \Delta f_3 = 0.260 \text{ MHz}.$$

Dado que

$$v_\odot \sin \ell = 220 \sin 30^\circ = 110 \text{ km s}^{-1},$$

la fórmula del radio se convierte en

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{110}{110 + v_r},$$

donde v_r se expresa en km s^{-1} .

Fuente, en orden creciente de frecuencia del pico	Δf (MHz)	v_r (km s^{-1}), 3 cifras significativas	$R/R_{\odot}$, 2 cifras significativas
1	0.030	+6.33	0.95
2	0.150	+31.7	0.78
3	0.260	+54.9	0.67

C.5

En el diagrama de la hoja de respuestas, trace el rayo de observación desde S , formando 30° con SC en el lado indicado en la Fig. 2. Trace, o identifique, las circunferencias centradas en C con radios

$$0.95R_{\odot}, \quad 0.78R_{\odot}, \quad 0.67R_{\odot}.$$

Cada circunferencia corta al rayo de observación dos veces.

Para especificar las posiciones cuantitativamente, sea $d = SE$. El teorema del coseno da

$$R^2 = R_{\odot}^2 + d^2 - 2R_{\odot}d \cos \ell.$$

Así,

$$d_{\pm} = R_{\odot} \cos \ell \pm \sqrt{R^2 - R_{\odot}^2 \sin^2 \ell}.$$

Para $\ell = 30^\circ$, la distancia mínima de la línea de visión al centro es

$$CT = 0.50R_{\odot}, \quad ST = R_{\odot} \cos 30^\circ = 0.866R_{\odot}.$$

Los tres radios inferidos superan CT y son menores que $R_{\odot}$, por lo que ambas intersecciones se encuentran por delante del Sol.

Utilizando los radios sin redondear de C.4:

Fuente	Posición cercana $d_-/R_{\odot}$	Posición lejana $d_+/R_{\odot}$
1	0.0635	1.67
2	0.272	1.46
3	0.424	1.31

Al alejarnos de S a lo largo del rayo, los puntos candidatos aparecen en el orden

$$1_{\text{near}}, \quad 2_{\text{near}}, \quad 3_{\text{near}}, \quad T, \quad 3_{\text{far}}, \quad 2_{\text{far}}, \quad 1_{\text{far}}.$$

El espectro determina el radio galactocéntrico de cada fuente, pero no permite distinguir entre sus posiciones cercana y lejana. Repetir las observaciones a distintas longitudes permite cartografiar las estructuras ricas en hidrógeno y revela los brazos espirales de la galaxia; se necesita información adicional para resolver las ambigüedades individuales entre las posiciones cercana y lejana.

D.1

En el régimen externo de B.3,

$$M_{\text{tot}} \simeq 4\pi C_m R, \quad v_{c,\infty}^2 = 4\pi G C_m.$$

Eliminando C_m ,

$$M_{\text{tot}} \simeq \frac{R}{G} v_{c,\infty}^2.$$

Para un radio independiente de la masa,

$$\boxed{\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2.}$$

Para una ley de potencias empírica, al tomar logaritmos se obtiene

$$\log_{10} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_{\odot}} \right) = \gamma_{TF} \log_{10} \left(\frac{v_{c,\infty}}{1 \text{ km s}^{-1}} \right) + \text{constante}.$$

Por tanto, γ_{TF} es la pendiente en la Fig. 4.

Unas lecturas aproximadas de la línea verde son

$$(x, y) \simeq (1.6, 8.2), \quad (2.8, 12.6).$$

De ellas se obtiene

$$\boxed{\gamma_{TF} \simeq \frac{12.6 - 8.2}{2.8 - 1.6} \simeq 3.7.}$$

La relación de escala observada se aproxima a una ley de cuarta potencia y tiene una pendiente considerablemente mayor que la predicción de segunda potencia del modelo newtoniano de radio fijo.

D.2

El módulo de la aceleración en una órbita circular es

$$a_m = \frac{v_c^2}{r}.$$

Utilizando un punto observado en la región externa,

$$v_c \simeq 170 \text{ km s}^{-1}, \quad r \simeq 10 \text{ kpc},$$

se obtiene

$$a_m \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2}{10 \times 3.09 \times 10^{19}} = \boxed{9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}}.$$

D.3

En el límite MOND profundo $a \ll a_0$,

$$\mu \left(\frac{a}{a_0} \right) = \frac{a/a_0}{1 + a/a_0} \simeq \frac{a}{a_0}.$$

La ecuación de movimiento modificada en el campo gravitatorio newtoniano de M se convierte en

$$\frac{GMm}{r^2} \simeq m \frac{a^2}{a_0}.$$

Para una órbita circular, $a = v_{c,\infty}^2/r$, por lo que

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v_{c,\infty}^4}{a_0 r^2}.$$

El radio se cancela:

$$\boxed{v_{c,\infty}^4 = GM a_0}.$$

En consecuencia,

$$M = \frac{1}{Ga_0} v_{c,\infty}^4, \quad \boxed{\gamma_{\text{MOND}} = 4}.$$

Esto también explica por qué la rapidez circular asintótica es independiente del radio.

Para una estimación gráfica de a_0 , la Fig. 4 da aproximadamente

$$v_{c,\infty} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}, \quad M \simeq 4 \times 10^9 M_{\odot}.$$

Por tanto,

$$a_0 \simeq \frac{(1.0 \times 10^5)^4}{(6.67430 \times 10^{-11})(4 \times 10^9)(1.99 \times 10^{30})} \simeq 1.9 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

Con la precisión de la gráfica,

$$\boxed{a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}}.$$

Este valor es del orden indicado, $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. Al compararlo con D.2 se obtiene $a_m/a_0 \sim 0.5$: los datos mostrados de las regiones externas de la galaxia exploran la escala de aceleración de MOND, pero no establecen $a_m \ll a_0$.

Para una rapidez asintóticamente constante de 170 km s^{-1} , la condición estricta del régimen MOND profundo es

$$r \gg \frac{v_{c,\infty}^2}{a_0} \sim 5 \text{ kpc}.$$

Se cumple con precisión cada vez mayor a distancias más grandes. Cerca de la transición, debe utilizarse la función de interpolación completa, como en D.4.

D.4

La esfera homogénea tiene densidad

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_b^3}.$$

Su masa encerrada es

$$M(< r) = \begin{cases} M(r/R_b)^3, & r \leq R_b, \\ M, & r \geq R_b. \end{cases}$$

La fuerza gravitatoria sigue siendo newtoniana en la formulación de la segunda ley modificada especificada en el problema. Definimos su módulo por unidad de masa de prueba como

$$g_N(r) = \frac{GM(< r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GMr}{R_b^3}, & r \leq R_b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Utilizando la función de interpolación completa,

$$g_N = \mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a = \frac{a^2}{a + a_0}.$$

Por consiguiente,

$$a^2 - g_N a - g_N a_0 = 0.$$

La raíz física, no negativa, es

$$a = \frac{g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N}}{2}.$$

Dado que $v_c^2 = r a$,

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{2} \left(g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N} \right) \right]^{1/2}.$$

La sustitución da la expresión válida en ambas regiones:

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GM r^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GM r}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Las dos expresiones coinciden en $r = R_b$, y el límite en el centro es $v_c(0) = 0$.

Los casos límite aclaran la forma de la curva de rotación:

Región	Régimen de aceleración	Rapidez circular
Interior, $r < R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_b^3}} r$
Interior, $r < R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq \left(\frac{GM a_0}{R_b^3} \right)^{1/4} r^{3/4}$
Exterior, $r > R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}$
Exterior, $r > R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq (GM a_0)^{1/4}$

Así, la curva parte de cero, se comporta como $r^{3/4}$ suficientemente cerca del centro y tiende a una constante a grandes distancias en el exterior. Solo existen regiones intermedias newtonianas si la aceleración en la superficie de la esfera, GM/R_b^2 , es suficientemente mayor que a_0 .

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: El reloj de Cox

En 1765, el relojero británico James Cox inventó un reloj cuya única fuente de energía son las fluctuaciones de la presión atmosférica. El reloj de Cox utilizaba dos recipientes que contenían mercurio. Los cambios de presión atmosférica hacían que el mercurio se desplazara entre los recipientes y que estos se movieran uno respecto al otro. Este movimiento servía como fuente de energía para el reloj propiamente dicho.

Proponemos un análisis de este dispositivo. En todo el problema, suponemos que

- el campo gravitatorio terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ es uniforme, con $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ y $\vec{u}_z$ un vector unitario;
- todos los líquidos son incompresibles y su densidad se denota por ρ ;
- no se considerarán los efectos de la tensión superficial;
- se desprecian las variaciones de la presión atmosférica con la altitud;
- la temperatura del entorno T_a es uniforme y todas las transformaciones son isotérmicas.



Fig. 1. Representación artística del reloj de Cox ¹

Parte A - Tracción sobre un tubo sumergido

Consideramos primero un baño de agua que ocupa el semiespacio $z \leq 0$. El aire situado encima está a una presión $P_a = P_0$. Se introduce en el baño un tubo cilíndrico vertical de longitud $H = 1 \text{ m}$, área de sección transversal $S = 10 \text{ cm}^2$ y masa $m = 0.5 \text{ kg}$. El extremo inferior del tubo está abierto y el superior está cerrado. Denotamos por h la altitud de la parte superior del tubo y por z_ℓ la del agua dentro del tubo. Se desprecia el espesor de las paredes del tubo.

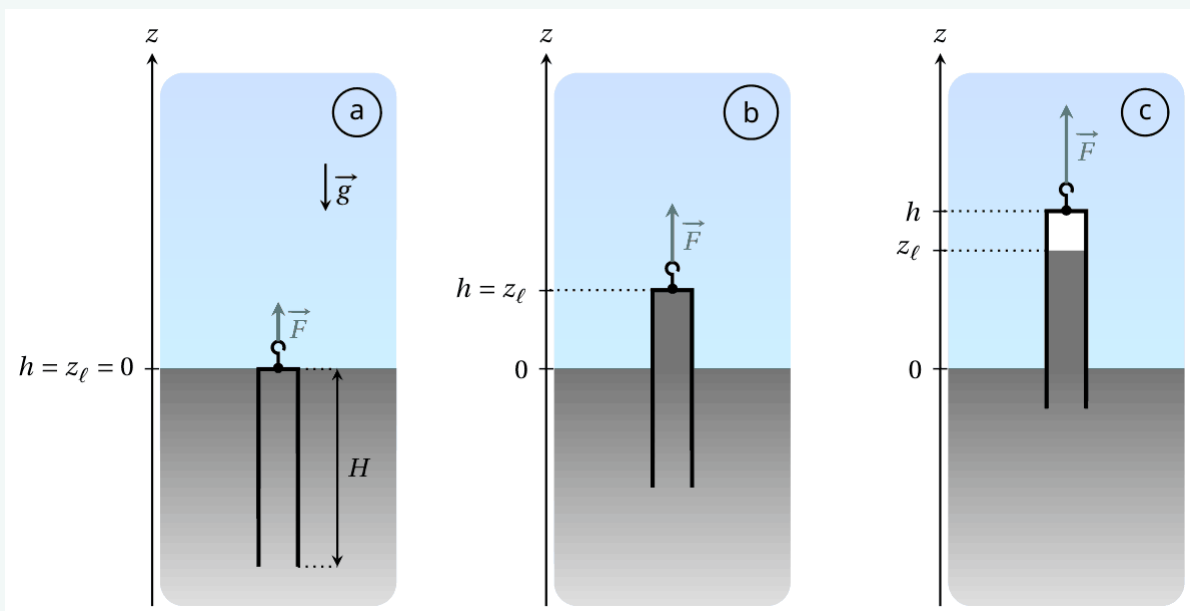


Fig. 2. Esquema del tubo en distintas configuraciones

Partimos de la situación en la que el tubo de la Fig. 2 no contiene gas y su parte superior se encuentra al nivel del baño: es decir, $h = 0$ y $z_\ell = 0$ (caso a). A continuación, se eleva lentamente el tubo hasta que su extremo inferior alcanza el nivel del baño. La fuerza de tracción ejercida sobre el tubo se denota por $\vec{F} = F\vec{u}_z$.

A.1 — 0.2pt

Para la configuración mostrada en la Fig. 2 (caso b), exprese la presión P_w en el agua en la parte superior del tubo. Exprese también la fuerza $\vec{F}$ necesaria para mantener el tubo en esta posición. Las expresiones deben escribirse en función de P_0, ρ, m, S, h, g y $\vec{u}_z$.

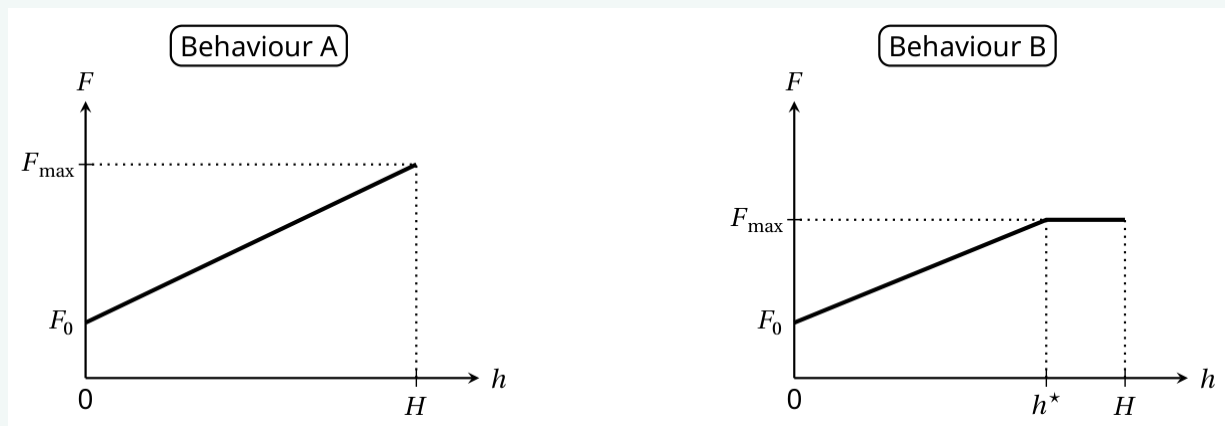
Se realizan tres experimentos. En cada uno, se eleva el tubo desde el estado inicial mostrado en la Fig. 2(a), en las condiciones especificadas en la Tabla 1.

Experimento	Líquido	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	Agua	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Agua	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Agua	99	0.96×10^3	99.8×10^3

Tabla 1. Condiciones experimentales y valores numéricos de las magnitudes físicas para cada experimento

(P_{sat} designa la presión de vapor saturado del fluido puro)

En cada caso, estudiamos la evolución de la fuerza F que debe aplicarse para mantener el tubo en equilibrio a una altitud h , con la presión exterior fijada en $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa. Son posibles dos comportamientos diferentes



A.2 — 0.8pt

Para cada experimento, complete la tabla de la hoja de respuestas indicando el comportamiento esperado y los valores numéricos de F_{max} y de h^* (cuando corresponda), donde F_{max} y h^* se definen en las figuras que ilustran los dos comportamientos.

Experiment	Behaviour (A or B ?)	h^* (cm)	$F_{\max}$ (N)
1			
2			
3			

Cuando sustituimos el agua por mercurio líquido (cuyas propiedades se indican a continuación), se observa el comportamiento B.

Líquido	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
Mercurio	20	13.5×10^3	0.163

A.3 — 0.3pt

Expresé el error relativo, denotado por ε , que se comete al evaluar la fuerza máxima $F_{\max}$ despreciando P_{sat} frente a P_0 . Dé el valor numérico de ε .

Parte B - Tubo barométrico de dos partes

A partir de ahora, trabajamos con mercurio (densidad $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) a la temperatura ambiente $T_a = 20^\circ\text{C}$ y tomamos $P_{\text{sat}} = 0$.

Consideremos un tubo con un depósito en su parte superior, modelado como dos cilindros superpuestos de dimensiones diferentes, como se muestra en la Fig. 3.

- la parte inferior (que seguimos llamando tubo) tiene un área de sección transversal S_t y una altura $H_t = 80 \text{ cm}$;
- la parte superior (llamada bulbo) tiene un área de sección transversal $S_b > S_t$ y una altura $H_b = 20 \text{ cm}$.

Este tubo de dos partes se introduce en un baño líquido semiinfinito.

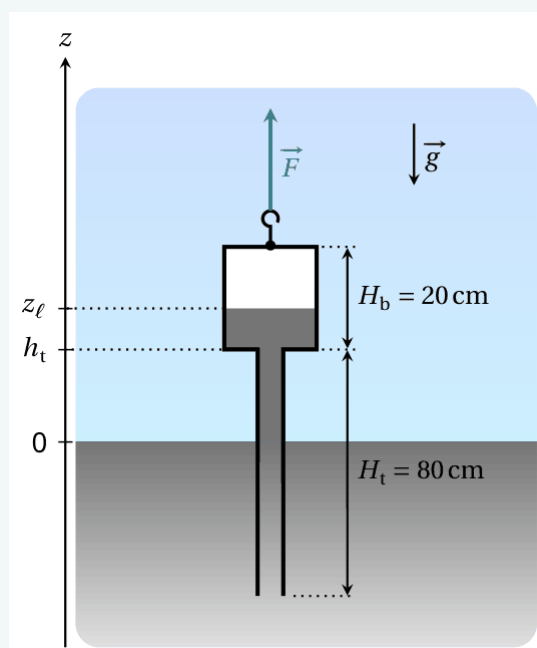


Fig. 3. Esquema del tubo barométrico de dos partes

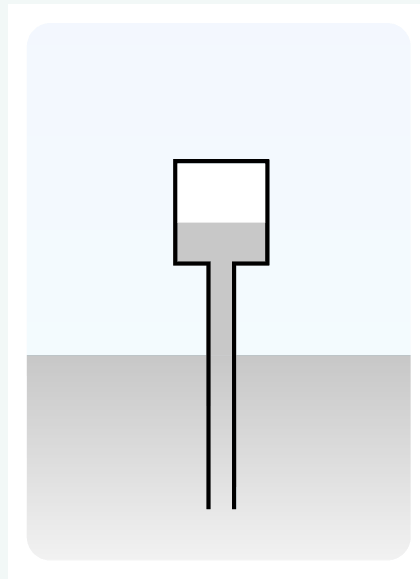
Como en la Parte A, el sistema se prepara de modo que el tubo no contenga aire. Identificamos la posición vertical del tubo mediante la altitud h_t de la unión entre el tubo y el bulbo. La altura de la columna de mercurio se denota de nuevo por z_ℓ . La fuerza $\vec{F}$ que debe ejercerse para mantener el tubo en equilibrio en la configuración mostrada en la Fig. 3 puede escribirse ahora como

$$\vec{F} = (m_{tb} + m_{add})g\vec{u}_z \quad (1)$$

donde m_{tb} es la masa total del tubo de dos partes (cuando no contiene mercurio).

B.1 — 0.3pt

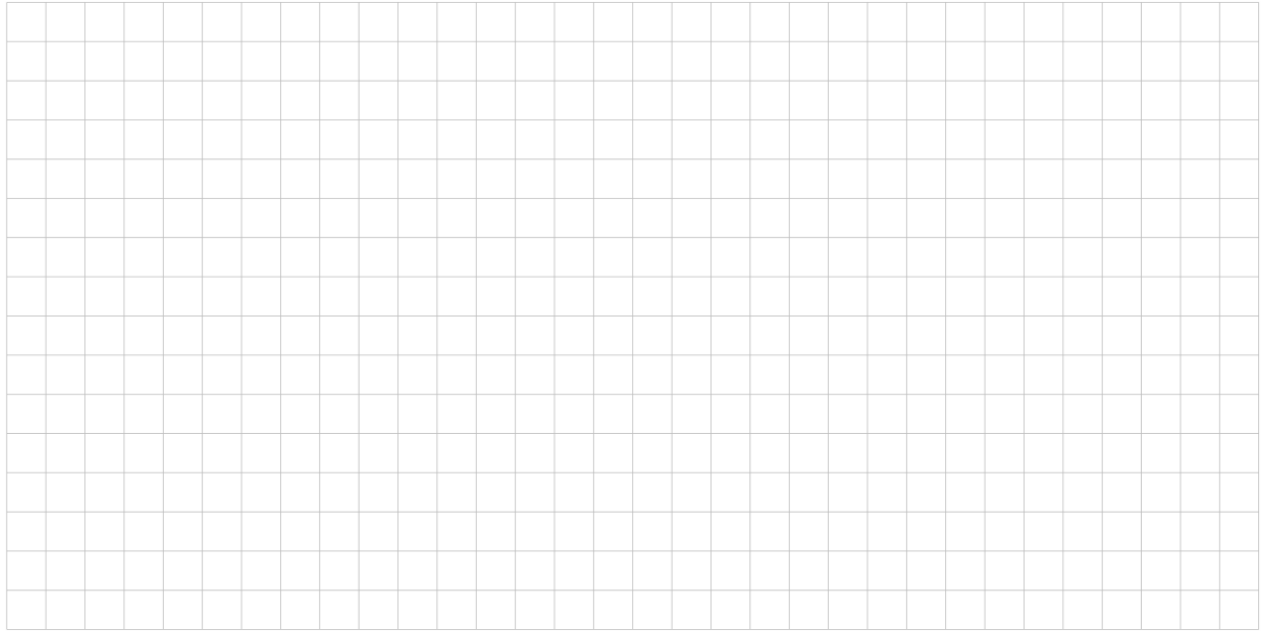
En la hoja de respuestas, coloree la zona correspondiente al volumen de mercurio líquido responsable del término m_{add} que aparece en la ecuación (1).



La masa m_{add} depende tanto de la altura h_t como de la presión atmosférica P_a . Para la siguiente pregunta, suponga que la presión atmosférica está fijada en $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$. Partiendo de la situación en la que el sistema está completamente sumergido, se eleva lentamente el tubo hasta que su base queda al nivel de la superficie del baño líquido.

B.2 — 1.4pt

Esboce la evolución de la masa m_{add} en función de h_t para $h_t \in [-H_b, H_t]$. En la gráfica, indique la expresión de las pendientes de los distintos segmentos, así como el valor analítico de h_t de todos los puntos angulosos, en función de $P_0, \rho, g, S_b, S_t, H_b$ y H_t .



Mientras se eleva el sistema con $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, nos detenemos cuando la superficie libre del líquido se encuentra en el centro del bulbo. Se fija el valor de h_t y, a continuación, observamos variaciones de la masa m_{add} debidas a variaciones de la presión atmosférica descritas por

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

donde P_0 designa el valor medio y P_1 es un término perturbativo. Modelamos P_1 mediante una función triangular periódica de amplitud $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ y período τ_1 de 1 semana.

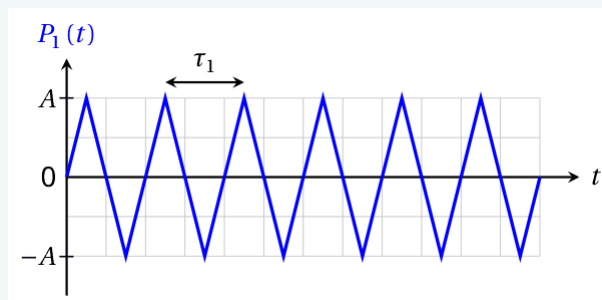


Fig. 4. Modelo simplificado del término perturbativo $P_1(t)$

B.3 — 0.3pt

Dado que $S_t = 5 \text{ cm}^2$ y $S_b = 200 \text{ cm}^2$, exprese la amplitud Δm_{add} de las variaciones de la masa m_{add} a lo largo del tiempo y dé su valor numérico. *Suponga que la superficie del líquido permanece siempre en el bulbo.*

Parte C - El reloj de Cox

El mecanismo real desarrollado por Cox es complejo (Fig. 5). Estudiamos una versión simplificada, representada en la Fig. 6 y descrita a continuación

- una cubeta inferior cilíndrica que contiene un baño de mercurio;
- un tubo barométrico de dos partes idéntico al estudiado en la parte B, del que se ha extraído por completo todo el aire, se introduce en el baño;

- la cubeta y el tubo de dos partes están suspendidos, cada uno, de un cable. Ambos cables (supuestos inextensibles y de masa despreciable) pasan por un sistema de poleas ideales y sus extremos se unen a lados opuestos de una misma masa M , que puede deslizarse sobre una superficie horizontal;
- el volumen total de mercurio líquido contenido en el sistema es $V_\ell = 5\text{ L}$.

La altura, la sección transversal y las masas de cada parte se indican en la Tabla 2. La posición de la masa M se determina mediante la coordenada x de su centro de masas. Consideramos rozamiento seco entre el soporte horizontal y la masa M , sin distinguir entre los coeficientes estático y dinámico; el módulo de esta fuerza cuando se produce deslizamiento se denota por F_s .

Dos topes limitan el desplazamiento de la masa M de modo que $-X \leq x \leq X$ (con $X > 0$).

Suponga que el valor de X garantiza que

- el extremo inferior del tubo de dos partes nunca toca el fondo de la cubeta ni sale del baño líquido;
- la altitud z_ℓ de la columna de mercurio se encuentra siempre en el bulbo superior.



Fig. 5. Reloj real de Cox ² (sin mercurio)

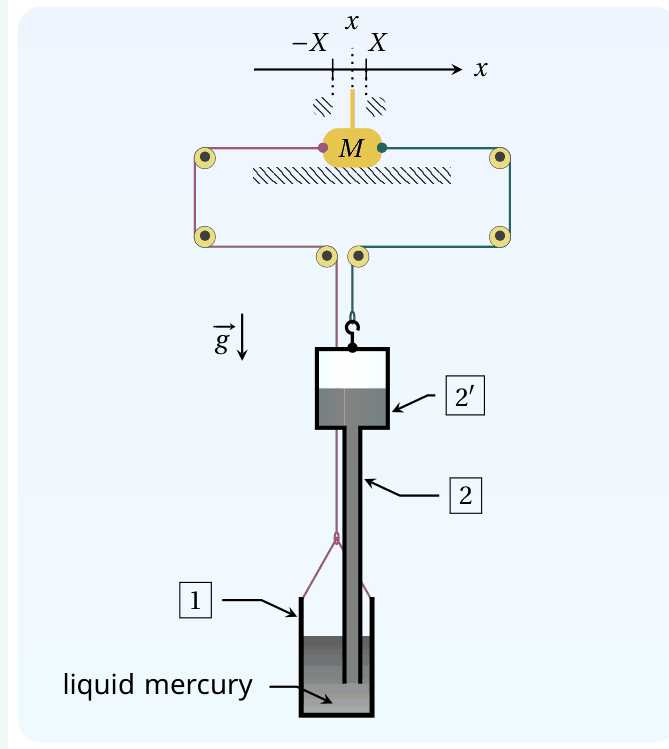


Fig. 6. Esquema del sistema que modela el reloj

Referencia	Nombre	Altura	Área de sección transversal	Masa en vacío
[1]	cubeta	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
[2]	parte tubular del tubo barométrico	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	masa total del tubo barométrico: m_{tb}
[2']	bulbo del tubo barométrico	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Tabla 2. Dimensiones y notación del sistema modelo

El sistema evoluciona en contacto con la atmósfera, cuya presión fluctúa como en la Fig. 4 (también con amplitud $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ y período $\tau_1 = 1 \text{ semana}$). Al inicio, $t = 0$, la masa M está en reposo en $x = 0$ y las tensiones ejercidas por los dos cables a ambos lados de la masa M se equilibran, mientras que $P_1(0) = 0$. Definimos

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

donde la última expresión utiliza que $S_t \ll S_b, S_c$ (lo cual supondremos válido hasta el final del problema).

C.1 – 1pt

Determine el umbral ξ^* tal que M permanece indefinidamente en reposo cuando $\xi > \xi^*$.

Solo para la siguiente pregunta, suponga que la masa M está bloqueada temporalmente en $x = X$.

C.2 — 1pt

Dé una expresión de la fuerza de tensión total $\vec{T} = T\vec{u}_x$ que actúa sobre la masa M debida a la tensión de los dos cables en esta posición, cuando $P_1 = 0$, en función de ρ, g, X y de las secciones transversales pertinentes.

Cuando $\xi < \xi^*$, partiendo de nuevo de $x = 0$ y $P_1 = 0$, pueden observarse dos comportamientos diferentes para $t \geq 0$. Para distinguirlos, debemos introducir otro parámetro

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

C.3 — 2pt

Complete la tabla de la hoja de respuestas indicando la condición en la que se obtiene cada régimen. Las condiciones deben expresarse como desigualdades para ξ y/o λ . Además, esboce las variaciones de $x(t)/X$ para $t \in [0, 3\tau_1]$ que sean coherentes con las variaciones de $P_1(t)/A$ ya representadas. No es necesario especificar las coordenadas de los puntos notables.

	Condition for observation	Graph of $x(t)/X$
Regime 1		
Regime 2		

En el reloj real de Cox, la energía proporcionada por el mecanismo se almacena mediante un sistema de trinquetes y se utiliza para elevar un contrapeso, como en un reloj tradicional. En el modelo simplificado que estudiamos aquí, la energía recuperada por el reloj corresponde a la energía disipada por la fuerza de rozamiento que ejerce la superficie horizontal sobre la masa M . A partir de ahora, suponemos que el sistema está dimensionado para funcionar en el régimen que permite al reloj recuperar energía. Suponemos también que se ha establecido el régimen permanente. Denotamos por W la energía disipada por la fuerza de rozamiento seco durante un período τ_1 , que puede expresarse únicamente en función de F_s y X .

Manteniendo todo lo demás constante, F_s y X pueden ajustarse para maximizar la energía W ; denotamos por F_s^* y X^* sus respectivos valores en la situación óptima.

C.4 — 1pt

Considerando $S_b \simeq S_c$ y $S_t \ll S_b$, determine las expresiones de F_s^* y X^* en función de ρ , g , S_c y A . Expresar la energía máxima correspondiente W^* y calcule su valor numérico con $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$.

Denotamos por W_{pr}^* el trabajo de las fuerzas de presión atmosférica recibido por el sistema en la situación óptima durante un período τ_1 .

C.5 — 1.7pt

Expresar W_{pr}^* y calcule el cociente W^*/W_{pr}^* . Puede resultar útil representar la evolución del sistema en un diagrama (P, V) , donde V es el volumen del sistema.

Créditos:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Victoria and Albert Museum, Londres.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Definimos

$$L = \frac{P_0}{\rho g}, \quad D = S_b + S_c - S_t, \quad q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

• A.1

$$P_w = P_0 - \rho g h, \quad \vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

• A.2

Experimento	Comportamiento	h^* (cm), cuando corresponda	F_{max} (N)
1	A	—	14.7
2	A	—	14.4
3	B	2.13	5.10

• A.3

$$\varepsilon = \frac{S P_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Despreciar la presión de vapor del mercurio sobreestima la fuerza.

- B.1 Sombree todo el mercurio **dentro del tubo y del bulbo por encima del nivel del baño exterior**. En la configuración representada,

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

• B.2

$$m_{\text{add}}(h_t) = \begin{cases} \rho S_b(h_t + H_b), & -H_b \leq h_t \leq 0, \\ \rho(S_b H_b + S_t h_t), & 0 \leq h_t \leq L - H_b, \\ \rho[S_b L - (S_b - S_t)h_t], & L - H_b \leq h_t \leq L, \\ \rho S_t L, & L \leq h_t \leq H_t. \end{cases}$$

Las pendientes sucesivas son

$$\boxed{\rho S_b, \quad \rho S_t, \quad -\rho(S_b - S_t), \quad 0}.$$

Los puntos angulosos se encuentran en

$$\boxed{h_t = 0, \quad L - H_b \simeq 0.556 \text{ m}, \quad L \simeq 0.756 \text{ m}}.$$

• B.3

$$\boxed{\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g} = 1.02 \text{ kg}}.$$

• C.1

$$\boxed{\xi^* = 2}.$$

• C.2

$$\boxed{\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x}.$$

• C.3, para $\xi < 2$:

Régimen	Condición	Descripción de $x(t)/X$
1: permanece en un tope	$q > 1$, equivalentemente $\xi + 2\lambda > 2$	Inicialmente 0, luego aumenta rápidamente hasta +1 y permanece allí.
2: recorridos repetidos	$q < 1$, equivalentemente $\xi + 2\lambda < 2$	Inicialmente 0, luego alterna entre tramos constantes en +1 y -1.

El primer recorrido positivo comienza cuando $P_1/A = \xi/2$. Los recorridos negativos posteriores comienzan en $P_1/A = -q$ cuando la presión disminuye, y los positivos en $P_1/A = q$ cuando la presión aumenta. La frontera $q = 1$ es marginal; el rozamiento estático ideal permite que la masa permanezca en el tope.

• C.4 El óptimo límite ideal es

$$\boxed{F_s^* = \frac{S_c A}{2} \simeq 5.25 \text{ N}}, \quad \boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g} \simeq 0.945 \text{ mm}},$$

$$\boxed{W^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g} \simeq 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}}.$$

• C.5

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} \simeq 3.97 \times 10^{-2} \text{ J},$$

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{1}{2}.$$

Solución

A.1

El equilibrio hidrostático da

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

El agua está conectada con el baño, donde $P = P_0$ en $z = 0$. Por consiguiente, mientras el agua permanece en contacto con el extremo superior cerrado,

$$P_w = P_0 - \rho g h.$$

La presión sobre el exterior de la tapa superior produce una fuerza hacia abajo $P_0 S$, mientras que el agua situada debajo produce una fuerza hacia arriba $P_w S$. Las paredes verticales no aportan ninguna fuerza vertical de presión y se desprecia su espesor. Por tanto, el equilibrio exige

$$F + P_w S - P_0 S - mg = 0.$$

Así,

$$\vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

A.2

Aparece una cavidad de vapor cuando la presión en la parte superior alcanza la presión de vapor saturado:

$$P_0 - \rho g h^* = P_{\text{sat}}.$$

Por tanto,

$$h^* = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}.$$

Antes de que esto ocurra, $F = mg + \rho g S h$. Una vez formada la cavidad de vapor, su presión permanece en P_{sat} a la temperatura prescrita, de modo que

$$F = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

Estas expresiones se combinan en

$$F(h) = mg + S \min\{\rho g h, P_0 - P_{\text{sat}}\}, \quad 0 \leq h \leq H.$$

Por tanto:

- si $h^* \geq H$, se produce el comportamiento A y $F_{\text{max}} = mg + \rho g S H$;
- si $h^* < H$, se produce el comportamiento B y $F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})$.

Utilizando $S = 10^{-3} \text{ m}^2$, $H = 1 \text{ m}$ y $mg = 4.90 \text{ N}$:

Experimento	Altura de saturación calculada	Comparación con H	Resultado
1	$\frac{100000 - 2340}{1000(9.8)} = 9.97 \text{ m}$	Superior a H	A; $F_{\max} = 14.7 \text{ N}$
2	$\frac{100000 - 47400}{970(9.8)} = 5.53 \text{ m}$	Superior a H	A; $F_{\max} = 14.406 \text{ N} \simeq 14.4 \text{ N}$
3	$\frac{100000 - 99800}{960(9.8)} = 0.02126 \text{ m}$	Inferior a H	B; $h^* = 2.13 \text{ cm}$, $F_{\max} = 5.10 \text{ N}$

Ambas gráficas comienzan en $F_0 = mg = 4.90 \text{ N}$.

A.3

Para el mercurio, la fuerza máxima real y su aproximación son

$$F_{\max} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad F_{\max}^{(0)} = mg + SP_0.$$

La aproximación sobreestima la fuerza en SP_{sat} . Con respecto a la fuerza real,

$$\varepsilon = \frac{F_{\max}^{(0)} - F_{\max}}{F_{\max}} = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})}.$$

Numéricamente,

$$\varepsilon = \frac{10^{-3}(0.163)}{0.5(9.8) + 10^{-3}(100000 - 0.163)} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Esto equivale aproximadamente a 0.000155%.

B.1

La carga adicional es el peso del mercurio elevado por encima de la superficie del baño exterior. El mercurio situado por debajo de ese nivel está sostenido hidrostáticamente por el baño.

Por tanto, en el diagrama de la hoja de respuestas, sombree:

- el mercurio del tubo estrecho desde el nivel del baño exterior hasta la unión entre el tubo y el bulbo;
- todo el mercurio del bulbo, desde su fondo hasta su superficie libre interna.

No sombree el mercurio situado por debajo del nivel del baño exterior. Para la configuración mostrada,

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t h_t + S_b(z_\ell - h_t)].$$

Como la presión por encima de la superficie interna es cero,

$$z_\ell = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Por tanto, una expresión equivalente útil es

$$m_{\text{add}} = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t$$

cuando la superficie libre se encuentra en el bulbo y la unión está por encima del baño exterior.

B.2

Introducimos la altura barométrica

$$L = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 0.75586 \text{ m.}$$

Para las dimensiones dadas,

$$0 < L - H_b < L < H_t.$$

Hasta que la parte superior alcanza L , el tubo permanece completamente lleno. Después, la superficie libre interna permanece en $z_\ell = L$, mientras el tubo sigue ascendiendo.

Hay cuatro intervalos geoméricamente distintos.

$$1. -H_b \leq h_t \leq 0.$$

Solo una altura $h_t + H_b$ del bulbo se encuentra por encima del baño:

$$m_{\text{add}} = \rho S_b (h_t + H_b).$$

La gráfica comienza en $(-H_b, 0)$, con pendiente ρS_b .

$$2. 0 \leq h_t \leq L - H_b.$$

Todo el bulbo y una longitud h_t del tubo estrecho se encuentran por encima del baño, completamente llenos de mercurio:

$$m_{\text{add}} = \rho (S_b H_b + S_t h_t).$$

La gráfica sigue creciendo con una pendiente menor, ρS_t .

$$3. L - H_b \leq h_t \leq L.$$

Se forma un vacío por encima del mercurio, cuya superficie permanece en L dentro del bulbo:

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (L - h_t)].$$

La pendiente es $-\rho(S_b - S_t)$, por lo que la gráfica decrece.

$$4. L \leq h_t \leq H_t.$$

El bulbo está vacío y la superficie libre interna se encuentra en el tubo estrecho:

$$m_{\text{add}} = \rho S_t L = \frac{S_t P_0}{g}.$$

La gráfica es horizontal.

La gráfica es continua, con los siguientes vértices y punto final:

h_t	m_{add}
$-H_b$	0
0	$\rho S_b H_b$
$L - H_b$	$\rho [S_b H_b + S_t (L - H_b)]$, el máximo
L	$\rho S_t L$
H_t	$\rho S_t L$

Sus tres puntos angulosos tienen coordenadas horizontales

$$0, \quad \frac{P_0}{\rho g} - H_b, \quad \frac{P_0}{\rho g},$$

numéricamente 0, 55.6 cm y 75.6 cm.

B.3

En la posición fija prescrita, la superficie libre permanece dentro del bulbo. Así,

$$m_{\text{add}}(t) = \frac{S_b[P_0 + P_1(t)]}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t.$$

Solo varía el primer término, de modo que la amplitud es

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g}.$$

Con $S_b = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$,

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{0.0200(500)}{9.8} = 1.02 \text{ kg}.$$

Esta es la amplitud respecto al valor medio; la variación de pico a pico es 2.04 kg. La amplitud correspondiente de la altura de la superficie es

$$\frac{A}{\rho g} = 3.78 \text{ mm},$$

muy inferior a la distancia de 10 cm desde el centro del bulbo hasta cualquiera de sus extremos.

C.1

Primero obtenemos la diferencia entre las fuerzas de los cables para valores arbitrarios de x y P_1 .

Sean z_s la superficie exterior del mercurio y z_c el fondo de la cubeta. Debido a la disposición de los cables, un desplazamiento de la masa hacia la derecha de valor x :

- eleva la cubeta en x ;
- hace descender el tubo barométrico en x .

Por tanto,

$$z_c = z_{c0} + x, \quad h_t = h_{t0} - x.$$

El equilibrio hidrostático da

$$z_\ell - z_s = \frac{P_a}{\rho g}.$$

El mercurio situado por encima de la superficie exterior tiene una masa

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t(h_t - z_s) + S_b(z_\ell - h_t)] = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)(h_t - z_s).$$

Como las paredes del tubo tienen un volumen despreciable, la conservación del mercurio puede escribirse como

$$V_\ell = S_c(z_s - z_c) + \frac{m_{\text{add}}}{\rho}.$$

Escribiendo $\delta m = m_{\text{add}} - m_{\text{add},0}$, esto implica

$$\delta z_s = x - \frac{\delta m}{\rho S_c}.$$

Al restar la expresión inicial de m_{add} de su valor actual, se obtiene

$$\delta m = \frac{S_b P_1}{g} + \rho(S_b - S_t)(x + \delta z_s).$$

Por consiguiente,

$$\delta m = \frac{S_b S_c}{(S_b + S_c - S_t)g} P_1 + \frac{2\rho S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} x.$$

En una configuración estacionaria, la tensión del cable del lado del tubo es

$$T_{\text{tb}} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g,$$

mientras que la tensión del lado de la cubeta es

$$T_c = (m_c + \rho V_\ell - m_{\text{add}})g.$$

Su diferencia inicial es cero. Por tanto, la fuerza con signo sobre M , positiva hacia la derecha, es

$$T = T_{\text{tb}} - T_c = 2g \delta m.$$

Definimos

$$K = \frac{S_b S_c}{S_b + S_c - S_t}, \quad \alpha = \frac{2\rho g (S_b - S_t)}{S_b}.$$

La ley de fuerza resultante es

$$T = 2K(P_1 + \alpha x).$$

Los parámetros dados satisfacen

$$F_s = KA\xi, \quad \alpha X = A\lambda.$$

En $x = 0$, el módulo máximo de la fuerza durante el ciclo atmosférico es $2KA$. El rozamiento estático puede equilibrarla durante todo el ciclo si

$$F_s \geq 2KA \iff \xi \geq 2.$$

Así, el umbral solicitado es

$$\xi^* = 2.$$

C.2

Sustituyendo $P_1 = 0$ y $x = X$ en la ley de fuerza,

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x.$$

Utilizando $S_t \ll S_b, S_c$,

$$\vec{T} \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

El signo positivo es significativo: un desplazamiento hacia la derecha produce una fuerza adicional hacia la derecha. El equilibrio es mecánicamente inestable una vez que el rozamiento ya no puede mantener inmóvil la masa.

C.3

Para los esbozos, utilice el límite de variación atmosférica lenta: el traslado entre topes es rápido en comparación con el período de presión de una semana. Los topes detienen el sistema en movimiento.

Escribimos

$$p = \frac{P_1}{A}, \quad y = \frac{x}{X}.$$

Entonces

$$\frac{T}{KA} = 2(p + \lambda y), \quad \frac{F_s}{KA} = \xi.$$

Inicialmente $y = 0$ y p aumenta desde cero. El movimiento hacia la derecha comienza cuando p supera

$$p = \frac{\xi}{2}.$$

Como $\partial T / \partial x = 2K\alpha > 0$, el movimiento hacia la derecha aumenta la fuerza motriz. La masa alcanza rápidamente $y = +1$.

En el tope derecho, para separarse de él hacia la izquierda se requiere

$$T < -F_s.$$

Así,

$$2(p + \lambda) < -\xi \quad \Longleftrightarrow \quad p < -\left(\lambda + \frac{\xi}{2}\right).$$

Definimos

$$q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

Si $q > 1$, la presión nunca llega a ser lo bastante baja como para que la masa se separe del tope. Si $q < 1$, la separación se produce durante cada semiciclo de presión decreciente. La condición análoga de separación en el tope izquierdo es $p > q$.

Por tanto, los dos regímenes son:

Régimen	Condición	Descripción precisa del esbozo
1: permanencia indefinida en el tope derecho	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda > 2$	Dibuje $x/X = 0$ inicialmente, seguido de un ascenso rápido hasta $+1$ en la primera rama de presión creciente, en $p = \xi/2$. Continúe horizontalmente en $+1$ hasta $3\tau_1$.
2: movimiento repetido entre topes	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda < 2$	Comience con el mismo ascenso inicial. Después, dibuje tramos horizontales en $+1$ y -1 , unidos por transiciones rápidas descendentes cada vez que la presión decreciente alcance $p = -q$, y por transiciones ascendentes cada vez que la presión creciente alcance $p = q$.

Para situar explícitamente las transiciones, sea $s = t/\tau_1$. La primera transición positiva ocurre en

$$s = \frac{\xi}{8}.$$

En el régimen cíclico, las transiciones negativas dentro del intervalo solicitado ocurren en

$$s = \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{3}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{5}{2} + \frac{q}{4},$$

y las transiciones positivas posteriores ocurren en

$$s = 1 + \frac{q}{4}, \quad 2 + \frac{q}{4}.$$

Estas especifican por completo el esbozo solicitado de tres períodos.

En $q = 1$, el umbral de separación solo se alcanza en un extremo de la presión. El rozamiento estático ideal exacto puede mantener la masa en el tope; la desigualdad estricta $q < 1$ garantiza un funcionamiento cíclico sostenido.

C.4

En el régimen cíclico permanente, la masa se desplaza de un tope al otro y regresa durante cada período. Su distancia total de deslizamiento es $4X$, de modo que

$$\boxed{W = 4F_s X}.$$

Con $S_b \simeq S_c$ y $S_t \ll S_b$,

$$\xi \simeq \frac{2F_s}{S_c A}, \quad \lambda \simeq \frac{2\rho g X}{A}.$$

La condición de funcionamiento cíclico se convierte en

$$\xi + 2\lambda < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad F_s < S_c(A - 2\rho g X).$$

Para un X fijo, la mayor energía alcanzable se aproxima cuando F_s se acerca a esta cota superior. Su envolvente límite es

$$W(X) = 4S_c X(A - 2\rho g X).$$

Derivando,

$$\frac{dW}{dX} = 4S_c(A - 4\rho g X).$$

Por tanto, el óptimo es

$$\boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g}}, \quad \boxed{F_s^* = \frac{S_c A}{2}}.$$

Equivalentemente,

$$\xi_{\text{opt}} = 1, \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}.$$

Así,

$$\boxed{W^* = 4F_s^* X^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g}}.$$

Con $S_c = 0.0210 \text{ m}^2$,

$$F_s^* = \frac{0.0210(500)}{2} = 5.25 \text{ N},$$

$$X^* = \frac{500}{4(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m},$$

y

$$W^* = \frac{0.0210(500)^2}{2(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Estrictamente, estos valores se encuentran en la frontera marginal de conmutación. Dan el máximo límite ideal, al que se tiende desde el lado de funcionamiento cíclico; un funcionamiento fiable requiere un pequeño margen hacia el interior de esa frontera.

C.5

El volumen relevante para el trabajo atmosférico incluye el vacío encerrado por encima del mercurio. El volumen del líquido y el volumen del material de los recipientes son constantes, de modo que

$$V = V_{\text{constant}} + V_{\text{vac}}, \quad V_{\text{vac}} = S_b(h_t + H_b - z_\ell).$$

Utilizamos la misma aproximación que en C.4:

$$S_b = S_c = S, \quad S_t = 0.$$

Las relaciones de conservación y de equilibrio hidrostático deducidas en C.1 dan entonces

$$\delta z_s = -\frac{P_1}{2\rho g}, \quad \delta z_\ell = \frac{P_1}{2\rho g}.$$

Como $\delta h_t = -x$,

$$V = V_{\text{ref}} - Sx - \frac{S}{2\rho g}P_1.$$

El trabajo atmosférico recibido por el sistema es

$$W_{\text{pr}} = - \oint P_a dV.$$

La sustitución da

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_a dx + \frac{S}{2\rho g} \oint P_a dP_1.$$

La segunda integral se anula en un ciclo cerrado. Además, $P_0 \oint dx = 0$. Por tanto,

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_1 dx.$$

En el óptimo límite, $q = 1$. El recorrido positivo se produce en $P_1 = +A$, con $\Delta x = 2X^*$, mientras que el recorrido negativo se produce en $P_1 = -A$, con $\Delta x = -2X^*$. Por consiguiente,

$$W_{\text{pr}}^* = S[A(2X^*) + (-A)(-2X^*)] = 4SAX^*.$$

Así,

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

En un diagrama con V en el eje horizontal y P_a en el vertical, el ciclo es un paralelogramo:

- en cada tope fijo, $dV/dP_a = -S_c/(2\rho g)$, lo que da dos ramas inclinadas paralelas;
- su separación horizontal es $2S_c X^*$;
- los recorridos a presión constante las conectan en $P_0 + A$ y $P_0 - A$;

- el ciclo se recorre en sentido antihorario, lo que da un trabajo recibido positivo igual a su área,

$$(2A)(2S_c X^*) = 4S_c A X^*.$$

Finalmente,

$$\frac{W^*}{W_{pr}^*} = \frac{S_c A^2 / (2\rho g)}{S_c A^2 / (\rho g)} = \frac{1}{2}.$$

La otra mitad se convierte en energía cinética durante los recorridos rápidos y se disipa cuando el sistema en movimiento se detiene en los topes.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: ¡Champán!

Advertencia: El consumo excesivo de alcohol es perjudicial para la salud y está prohibido consumir alcohol antes de alcanzar la edad legal.

El champán es un vino espumoso francés. La fermentación de los azúcares produce dióxido de carbono (CO_2) en la botella. La concentración molar de CO_2 en la fase líquida c_ℓ y la presión parcial P_{CO_2} en la fase gaseosa están relacionadas mediante $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$, relación conocida como ley de Henry, donde k_H se denomina constante de Henry.

Datos

- Tensión superficial del champán $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- Densidad del líquido $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Constante de Henry a $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Constante de Henry a $T_0 = 6^\circ\text{C}$, $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Presión atmosférica $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Los gases son ideales, con un coeficiente adiabático $\gamma = 1.3$



Fig. 1. Una copa llena de champán.

Parte A. Nucleación, crecimiento y ascenso de las burbujas

Inmediatamente después de abrir una botella de champán a una temperatura $T_0 = 20^\circ\text{C}$, llenamos una copa. La presión en el líquido es P_0 y su temperatura se mantiene constante en T_0 . La concentración c_ℓ de CO_2 disuelto supera la concentración de equilibrio y estudiamos la nucleación de una burbuja de CO_2 . Denotamos por a su radio y por P_b su presión interna.

A.1 — 0.2pt

Expresa la presión P_b en función de P_0 , a y σ .

En el líquido, la concentración de CO_2 disuelto depende de la distancia a la burbuja. A gran distancia se recupera el valor c_ℓ , y denotamos por c_b la concentración cerca de la superficie de la burbuja. Según la ley de Henry, $c_b = k_H P_b$. Además, suponemos en todo el problema que las burbujas contienen únicamente CO_2 .

Como $c_\ell \neq c_b$, las moléculas de CO_2 se difunden desde las zonas de mayor concentración hacia las de menor concentración. Suponemos también que toda molécula de la fase líquida que alcanza la superficie de la burbuja pasa al vapor.

A.2 — 0.5pt

Expresa el radio crítico a_c , por encima del cual se espera que una burbuja crezca, en función de P_0 , σ , c_ℓ y c_0 , donde $c_0 = k_H P_0$. Calcule numéricamente a_c para $c_\ell = 4c_0$.

En la práctica, las burbujas crecen principalmente a partir de cavidades gaseosas preexistentes. Consideremos entonces una burbuja de radio inicial $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$. El número de moles de CO_2 transferidos a través de la superficie de la burbuja por unidad de área y de tiempo se denota por j . Se proponen dos modelos para j .

- modelo (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$, donde D es el coeficiente de difusión del CO_2 en el líquido.
- modelo (2) $j = K(c_\ell - c_b)$, donde K es una constante en este caso.

Experimentalmente, se observa que el radio de la burbuja $a(t)$ depende del tiempo como se muestra en la **Fig. 2**. Aquí $c_\ell \approx 4c_0$ y, puesto que las burbujas son lo suficientemente grandes como para ser visibles, puede despreciarse el exceso de presión debido a la tensión superficial y $P_b \approx P_0$.

A.3 — 1.2pt

Expresa el número de moles de CO_2 en la burbuja n_c en función de a , P_0 , T_0 y de la constante de los gases ideales R . Halle $a(t)$ para ambos modelos. Indique qué modelo explica los resultados experimentales de la **Fig. 2**. Según su respuesta, calcule numéricamente K o D .

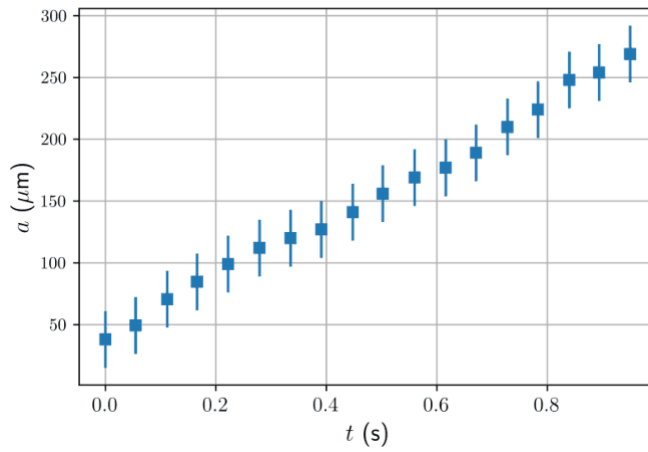


Fig. 2. Evolución temporal del radio de una burbuja de CO_2 en una copa de champán (adaptado de [1]).

Finalmente, las burbujas se desprenden del fondo de la copa y siguen creciendo mientras ascienden. La **Fig. 3.** muestra un tren de burbujas. Las burbujas del tren tienen el mismo radio inicial y se emiten con una frecuencia constante $f_b = 20 \text{ Hz}$.

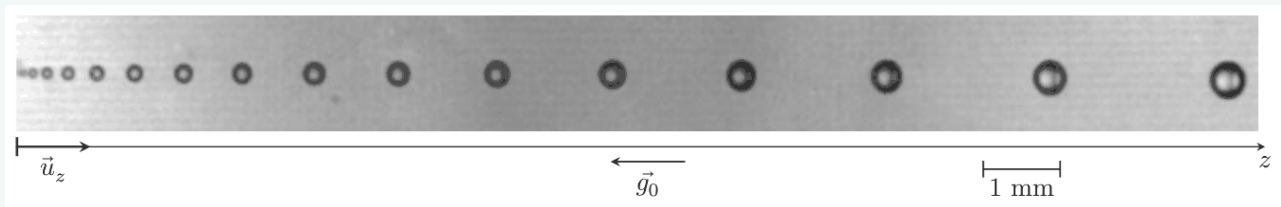


Fig. 3. Un tren de burbujas. La fotografía se ha girado hasta quedar horizontal para adaptarla a la maqueta de la página (adaptado de [1]).

Para el intervalo de velocidades estudiado aquí, la fuerza de resistencia F sobre una burbuja de radio a que se mueve con velocidad v en un líquido de viscosidad dinámica η viene dada por la ley de Stokes $F = 6\pi\eta av$. Las mediciones muestran que, en cualquier instante, puede suponerse que la burbuja se desplaza a su velocidad límite.

A.4 — 0.8pt

Dé la expresión de las principales fuerzas que actúan sobre una burbuja que asciende verticalmente. Obtenga la expresión de $v(a)$. Dé una estimación numérica de η utilizando ρ_ℓ , g_0 y magnitudes medidas en la **Fig. 3.**

El crecimiento cuasiestacionario de las burbujas con una tasa $q_a = \frac{da}{dt}$ sigue siendo válido durante su ascenso.

A.5 — 0.5pt

Expresa el radio a_{H_ℓ} de una burbuja que alcanza la superficie libre en función de la altura recorrida H_ℓ , de la tasa de crecimiento $q_a = \frac{da}{dt}$ y de las constantes que necesite. Suponga que $a_{H_\ell} \gg a_0$ y que q_a es constante, y dé el valor numérico de a_{H_ℓ} para $H_\ell = 10 \text{ cm}$ y el valor de q_a correspondiente a la **Fig. 2.**

Hay N_b sitios de nucleación de burbujas. Suponga que las burbujas se nuclean con una frecuencia constante f_b en el fondo de una copa de champán (de altura H_ℓ para un volumen V_ℓ), y que a_0 sigue siendo despreciable. Desprecie la difusión de CO_2 en la superficie libre.

A.6 — 1.1pt

Escriba la ecuación diferencial para $c_\ell(t)$. Obtenga a partir de esta ecuación el tiempo característico τ de disminución de la concentración de CO_2 disuelto en el líquido.

Parte B. Emisión acústica de una burbuja al estallar

Las burbujas pequeñas son casi esféricas cuando alcanzan la superficie libre. Una vez que la película líquida que separa la burbuja del aire se adelgaza lo suficiente, se forma en ella un orificio circular de radio r que, impulsado por la tensión superficial, se abre muy rápidamente (**Fig. 4.**, izquierda). El orificio se abre a una velocidad constante v_f (**Fig. 4.**, derecha). La película situada fuera del borde permanece en reposo, con un espesor constante h .

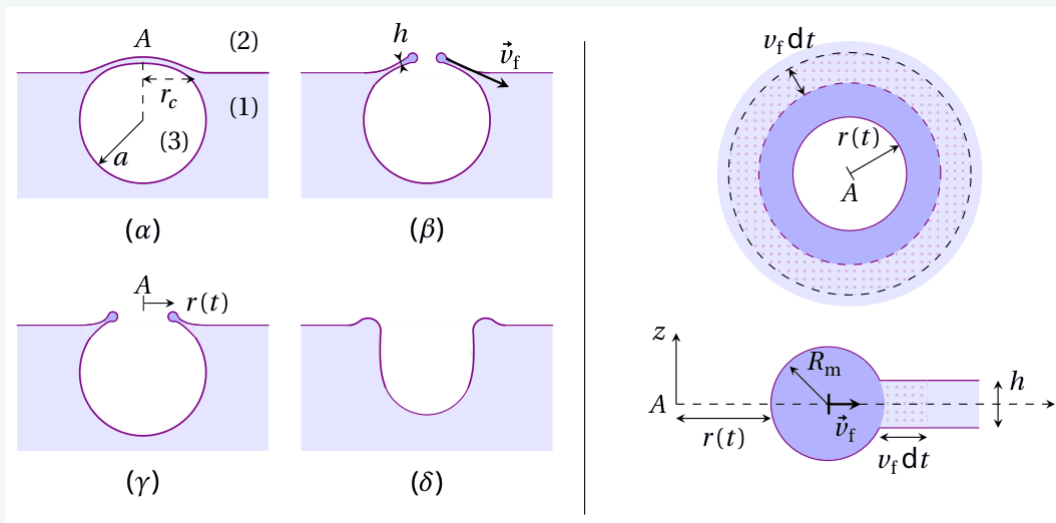


Fig. 4. (Izquierda) (α) Burbuja en la superficie: (1) líquido, (2) aire a presión P_0 y (3), CO_2 a presión P_b , (β) y (γ) retracción de la película líquida, cuyo borde se muestra en azul oscuro, (δ) colapso de la burbuja. (Derecha) Retracción de la película líquida en el instante t . Arriba: esquema de la película perforada vista desde arriba. Abajo: sección transversal del borde y de la película en retracción. Durante dt , el borde acumula el líquido próximo (punteado).

Debido a los procesos disipativos, solo la mitad de la diferencia de energía superficial entre t y $t + dt$ del borde y del líquido acumulado se transforma en energía cinética. Suponemos además que la variación de la superficie del borde es despreciable frente a la de la película.

B.1 — 1.1pt

Expresa v_f en función de ρ_ℓ , σ y h .

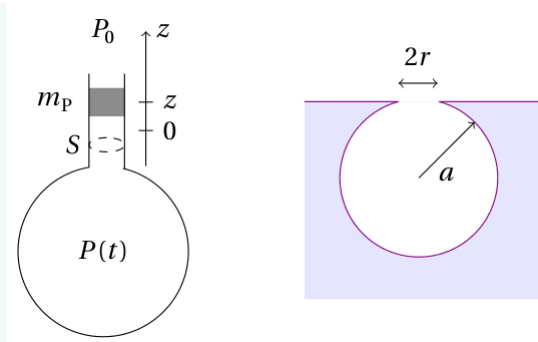


Fig. 5. (Izquierda) Un resonador de Helmholtz. (Derecha) Una burbuja como oscilador.

Cuando la película se rompe, libera la presión interna y emite un sonido. Modelizamos esta emisión acústica mediante un resonador de Helmholtz: una cavidad abierta a la atmósfera a P_0 a través de una abertura de área S en un cuello estrecho (**Fig. 5.**, izquierda). En el cuello, una masa m_p realiza oscilaciones de posición de pequeña amplitud debido a las fuerzas de presión que experimenta cuando el gas de la cavidad se expande o se comprime adiabáticamente. La fuerza gravitatoria sobre m_p es despreciable frente a las fuerzas de presión. Sea V_0 el volumen de gas bajo la masa m_p para $P = P_0$ cuando $z = 0$.

B.2 — 1.1pt

Expresa la frecuencia de oscilación f_0 de m_p . Indicación: para $\varepsilon \ll 1$, $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

El modelo de Helmholtz puede utilizarse para una burbuja de radio a . V_0 es el volumen de la burbuja cerrada. Según la bibliografía, la masa del equivalente del pistón es $m_p = 8\rho_g r^3/3$, donde r es el radio de la abertura circular y $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ es la densidad del gas (**Fig. 5.**, derecha). Durante el estallido, r pasa de 0 a r_c , dado por

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

Al mismo tiempo, la frecuencia del sonido emitido aumenta hasta un valor máximo de 40 kHz, y el tiempo de estallido es $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

B.3 — 1.1pt

Halle el radio a y el espesor h de la película de champán que separa la burbuja de la atmósfera.

Parte C. El descorche del champán

En una botella, la cantidad total de CO_2 es $n_T = 0.2 \text{ mol}$, ya sea disuelto en el volumen $V_L = 750 \text{ mL}$ de champán líquido o en forma de gas en el volumen $V_G = 25 \text{ mL}$ bajo el corcho (**Fig. 6.**, izquierda). V_G contiene únicamente CO_2 . El equilibrio entre ambas fases del CO_2 obedece a la ley de Henry. Suponemos que la rápida expansión del CO_2 gaseoso al abrir la botella es adiabática y reversible. La temperatura ambiente T_0 y la presión $P_0 = 1 \text{ bar}$ son constantes.

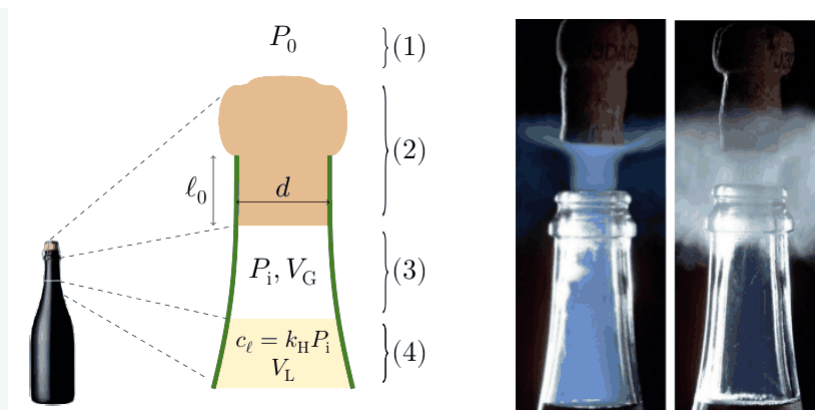


Fig. 6. Izquierda: cuello de botella tradicional: (1) aire circundante, (2) tapón de corcho, (3) espacio de cabeza, (4) champán líquido. Derecha: dos fenómenos observados al abrir la botella a dos temperaturas distintas (adaptado de [2]).

C.1 — 0.4pt

Dé el valor numérico de la presión P_i del CO_2 gaseoso en la botella para $T_0 = 6^\circ\text{C}$ y $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Otra etapa de la producción de champán (no descrita aquí) conduce a los siguientes valores de P_i , que utilizaremos en las preguntas siguientes: $P_i = 4.69$ bar a $T_0 = 6^\circ\text{C}$ y $P_i = 7.45$ bar a $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Durante la apertura de la botella pueden observarse dos fenómenos distintos, según T_0 (**Fig. 6.**, derecha).

- o bien aparece una niebla azul, debida a la formación de cristales de CO_2 sólido (pero se inhibe la condensación del agua);
- o bien aparece una niebla blanca grisácea, debida a la condensación del vapor de agua en el aire que rodea el cuello de la botella. En este último caso, no se forman cristales de CO_2 sólido.

La presión de vapor de saturación $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ para la transición sólido/gas del CO_2 obedece a:

$$\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$$

con T en K, $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3$ K y $C = -3.49$ K.

C.2 — 0.7pt

Dé el valor numérico de la temperatura T_f del gas CO_2 al final de la expansión, tras abrir una botella, para $T_0 = 6^\circ\text{C}$ y para $T_0 = 20^\circ\text{C}$, si no se produjera ninguna transición de fase.

Seleccione las afirmaciones verdaderas (puede haber varias):

1. A $T_0 = 6^\circ\text{C}$ aparece una niebla blanca grisácea al abrir la botella.
2. A $T_0 = 6^\circ\text{C}$ aparece una niebla azul al abrir la botella.
3. A $T_0 = 20^\circ\text{C}$ aparece una niebla blanca grisácea al abrir la botella.
4. A $T_0 = 20^\circ\text{C}$ aparece una niebla azul al abrir la botella.

Durante la apertura de la botella, el tapón de corcho sale disparado. Determinaremos ahora la altura máxima H_c que alcanza. Suponga que la fuerza de rozamiento F que ejerce el cuello de la botella sobre el tapón de corcho es $F = \alpha A$, donde A es el área de contacto y α es una constante que debe determinarse. Inicialmente, la fuerza de presión supera ligeramente la fuerza de rozamiento. La masa del corcho es $m = 10$ g, su diámetro es $d = 1.8$ cm y la longitud de la parte cilíndrica inicialmente encajada en el cuello de la botella es $\ell_0 = 2.5$ cm. Una vez que el corcho ha salido del cuello de la botella, puede despreciarse la fuerza neta de presión.

C.3 — 1.3pt

Dé el valor numérico de H_c si la temperatura exterior es $T_0 = 6^\circ\text{C}$.

[1] Liger-Belair et al, Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, n.º 3 (1999).

[2] Liger-Belair et al., Sc. Reports **7**, 10938 (2017).

Hoja de datos generales

Constante	Notación	Valor	Unidad
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante reducida de Planck	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Avogadro	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Constante molar de los gases	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Carga elemental	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Constante de gravitación universal	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Aceleración normal de la gravedad	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Constante de Rydberg	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Masa del electrón	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Masa del protón	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Masa del neutrón	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Constante de masa atómica	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Electronvoltio	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Respuestas

Aquí $\Delta c = c_\ell - c_0$, y g_0 es la aceleración de la gravedad indicada en la hoja de datos.

- A.1

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

- A.2

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

Para $c_\ell = 4c_0$,

$$a_c = 3.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.31 \mu\text{m}.$$

- A.3

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0},$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0\Delta c}{P_0}t},$$

$$a_{(2)}(t) = a_0 + \frac{KRT_0\Delta c}{P_0}t.$$

El **modelo (2)** se ajusta al crecimiento aproximadamente lineal:

$$q_a \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}, \quad K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

- A.4 El empuje $4\pi\rho_\ell g_0 a^3/3$ actúa hacia arriba; la resistencia de Stokes $6\pi\eta a v$ y el peso despreciable de la burbuja actúan hacia abajo.

$$v(a) \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}, \quad \eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

a partir de mediciones aproximadas de la Fig. 3.

- A.5

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

- A.6

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0),$$

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

- B.1

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

• B.2

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

• B.3

$$a \approx 5.3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.53 \text{ mm}, \quad h \approx 3.8 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.8 \mu\text{m}.$$

• C.1

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

- C.2 Utilizando las presiones de sustitución especificadas para este apartado:

$$T_f(6^\circ\text{C}) \approx 195.4 \text{ K } (-77.7^\circ\text{C}),$$

$$T_f(20^\circ\text{C}) \approx 184.4 \text{ K } (-88.7^\circ\text{C}).$$

Las afirmaciones verdaderas son **1 y 4**: niebla blanca grisácea a 6°C , niebla azul a 20°C .

• C.3

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Solución

A.1

La ley de Young–Laplace da el salto de presión a través de una interfaz curva entre líquido y gas:

$$P_b - P_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Para una burbuja esférica, ambos radios principales son a . Por tanto,

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

Hay una única interfaz entre líquido y gas alrededor de la burbuja sumergida.

A.2

La ley de Henry en la superficie de la burbuja da

$$c_b = k_H P_b = k_H \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) = c_0 + \frac{2\sigma c_0}{P_0 a}.$$

El gas se difunde hacia el interior de la burbuja y la hace crecer cuando $c_\ell > c_b$. Por tanto, el umbral satisface

$$c_\ell - c_0 = \frac{2\sigma c_0}{P_0 a_c},$$

de modo que

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0 (c_\ell - c_0)}.$$

En un líquido sobresaturado, las burbujas con $a > a_c$ crecen, mientras que las burbujas más pequeñas tienden a disolverse.

Con $c_\ell = 4c_0$,

$$a_c = \frac{2\sigma}{3P_0} = \frac{2(47 \times 10^{-3})}{3(1.0 \times 10^5)} = 3.13 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

Por tanto,

$$\boxed{a_c \approx 0.31 \text{ } \mu\text{m}}.$$

A.3

Con la aproximación indicada $P_b \simeq P_0$, la ley de los gases ideales da

$$P_0 \frac{4\pi a^3}{3} = n_c RT_0,$$

y, por tanto,

$$\boxed{n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0}}.$$

El flujo molar entrante a través de la superficie de la burbuja es

$$\frac{dn_c}{dt} = 4\pi a^2 j.$$

Derivando la expresión del gas ideal a P_0, T_0 constantes,

$$\frac{4\pi P_0 a^2}{RT_0} \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 j,$$

lo que se reduce a

$$\frac{da}{dt} = \frac{RT_0}{P_0} j.$$

Para el breve experimento de crecimiento, tomamos como constante la concentración en el seno del líquido y utilizamos $c_b \simeq c_0$.

Para el **modelo (1)**,

$$\frac{da}{dt} = \frac{DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0 a}.$$

Integrando con $a(0) = a_0$,

$$\boxed{a(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t}}.$$

Esto predice una tasa de crecimiento decreciente y una dependencia asintótica de la forma $t^{1/2}$.

Para el **modelo (2)**,

$$\frac{da}{dt} = \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} = q_a,$$

de modo que

$$a(t) = a_0 + \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0}t.$$

La Figura 2 muestra una pendiente aproximadamente constante, lo que respalda el **modelo (2)**. Leyendo aproximadamente $a = 40 \mu\text{m}$ en $t = 0$ y $a = 270 \mu\text{m}$ en $t = 0.95$,

$$q_a \approx \frac{(270 - 40) \times 10^{-6}}{0.95} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

A 20°C ,

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad c_0 = k_H P_0 = 33 \text{ mol m}^{-3},$$

y $c_\ell - c_0 \simeq 3c_0 = 99 \text{ mol m}^{-3}$. Por tanto,

$$K = \frac{P_0 q_a}{RT_0(c_\ell - c_0)} \approx \frac{10^5 (2.4 \times 10^{-4})}{8.31446 (293.15) (99)}.$$

Así,

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

A.4

Sea $\mathbf{u}_z$ un vector dirigido verticalmente hacia arriba. Las fuerzas son el empuje,

$$\mathbf{F}_B = \rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z,$$

la resistencia de Stokes,

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta a v \mathbf{u}_z,$$

y el peso de la burbuja,

$$\mathbf{W} = -\rho_g \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z.$$

A la velocidad límite, su suma se anula:

$$6\pi\eta a v = (\rho_\ell - \rho_g) \frac{4\pi a^3}{3} g_0.$$

Como $\rho_g \ll \rho_\ell$,

$$v(a) = \frac{2(\rho_\ell - \rho_g) g_0 a^2}{9\eta} \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}.$$

Las burbujas adyacentes siguen la misma trayectoria con una diferencia de edad

$$\Delta t = \frac{1}{f_b}.$$

Por tanto, su separación entre centros Δz permite obtener

$$v \simeq \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_b \Delta z,$$

evaluada aproximadamente para el radio medio del par.

Utilizando la escala de la Fig. 3, las dos burbujas próximas al extremo derecho dan aproximadamente

$$a \simeq 0.24 \text{ mm}, \quad \Delta z \simeq 2.3 \text{ mm}.$$

En consecuencia,

$$v \simeq 20(2.3 \times 10^{-3}) = 4.6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1},$$

y

$$\eta \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9f_b \Delta z} = \frac{2(10^3)(9.80665)(0.24 \times 10^{-3})^2}{9(20)(2.3 \times 10^{-3})}.$$

Esto da la estimación gráfica

$$\boxed{\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}}.$$

A.5

Combinamos la velocidad límite de ascenso con la tasa constante de crecimiento radial:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta} a^2, \quad \frac{da}{dt} = q_a.$$

Eliminando el tiempo,

$$\frac{dz}{da} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta q_a} a^2.$$

Integrando desde el fondo hasta la superficie libre,

$$H_\ell = \frac{2\rho_\ell g_0}{27\eta q_a} (a_{H_\ell}^3 - a_0^3).$$

Así, la expresión que conserva el radio inicial es

$$a_{H_\ell} = \left(a_0^3 + \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

Con $a_{H_\ell} \gg a_0$,

$$\boxed{a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}}.$$

Utilizando $H_\ell = 0.10 \text{ m}$, $q_a \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ y la viscosidad estimada anteriormente,

$$\boxed{a_{H_\ell} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}}.$$

A.6

Utilizamos la descripción cuasiestacionaria del tren de burbujas en la escala temporal de disminución de la concentración. El líquido se representa mediante una concentración uniforme en su seno $c_\ell(t)$, y en el balance de pérdidas se desprecian los cambios en la cantidad de gas contenida en las burbujas que aún están ascendiendo.

Cada burbuja que alcanza la superficie transporta

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} a_{H_\ell}^3.$$

El resultado de A.5, con a_0 despreciable, da

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} = \frac{18\pi\eta H_\ell P_0}{\rho_\ell g_0 RT_0} q_a.$$

A medida que el líquido pierde gas disuelto, el modelo (2) da

$$q_a(t) = \frac{KRT_0}{P_0}(c_\ell(t) - c_0).$$

Por tanto,

$$n_{\text{out}} = \frac{18\pi\eta KH_\ell}{\rho_\ell g_0}(c_\ell - c_0).$$

Se emiten $N_b f_b$ burbujas por unidad de tiempo. La conservación del CO_2 da

$$V_\ell \frac{dc_\ell}{dt} = -N_b f_b n_{\text{out}},$$

de donde

$$\boxed{\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta KH_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell}(c_\ell - c_0)}.$$

La solución es

$$c_\ell(t) = c_0 + [c_\ell(0) - c_0]e^{-t/\tau},$$

donde

$$\boxed{\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta KH_\ell N_b f_b}}.$$

Es el exceso de concentración respecto a c_0 el que disminuye exponencialmente.

B.1

Durante dt , el borde en retracción barre una corona circular de área

$$dA = 2\pi r v_f dt.$$

La película tiene dos superficies de separación entre líquido y gas, de modo que la disminución de energía superficial es

$$-dE_s = 2\sigma dA.$$

Según la regla de disipación indicada, la mitad se convierte en energía cinética:

$$dE_k = \sigma dA.$$

La masa recién acumulada es

$$dm = \rho_\ell h dA.$$

Como la velocidad del borde permanece constante, el aumento de su energía cinética es

$$dE_k = \frac{1}{2}v_f^2 dm = \frac{1}{2}\rho_\ell h v_f^2 dA.$$

Igualando las dos expresiones,

$$\frac{1}{2}\rho_\ell h v_f^2 = \sigma,$$

de modo que

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}}.$$

B.2

Un desplazamiento hacia arriba z del pistón cambia el volumen de gas encerrado a

$$V = V_0 + Sz.$$

Para una compresión o expansión adiabática reversible,

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma.$$

Así,

$$P = P_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0} \right)^{-\gamma}.$$

Para $|Sz| \ll V_0$,

$$P \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0} \right).$$

Despreciando el peso del pistón como se indica, su ecuación de movimiento es

$$m_p \ddot{z} = (P - P_0)S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} z.$$

Se trata de un movimiento armónico simple con

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}.$$

Por tanto,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

B.3

Para la burbuja,

$$S = \pi r^2, \quad V_0 = \frac{4\pi a^3}{3}, \quad m_p = \frac{8\rho_g r^3}{3}.$$

Sustituyendo en B.2 se obtiene

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma P_0 \pi^2 r^4}{(8\rho_g r^3/3)(4\pi a^3/3)} = \frac{9\gamma P_0 r}{128\pi \rho_g a^3}.$$

Así, $f_0 \propto \sqrt{r}$, y la frecuencia máxima se alcanza para $r = r_c$. Utilizando la expresión dada para r_c ,

$$f_{\max}^2 = \frac{9\gamma P_0}{128\pi \rho_g a^3} \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}} = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g a} \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

Por tanto,

$$a = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g f_{\max}^2} \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

Con $f_{\max} = 4.0 \times 10^4 \text{ Hz}$,

$$a = \frac{3\sqrt{3}(1.3)(10^5)}{64\pi(1.8)(4.0 \times 10^4)^2} \sqrt{\frac{10^3(9.80665)}{47 \times 10^{-3}}} = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

Por tanto,

$$\boxed{a \approx 0.53 \text{ mm}}.$$

El radio final de la abertura es

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}} \approx 1.50 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

Como la abertura se abre a velocidad constante,

$$v_f = \frac{r_c}{t_b}, \quad t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms} = 3 \times 10^{-5} \text{ s,}$$

de modo que

$$v_f \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}.$$

Finalmente, B.1 da

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_l v_f^2} = \frac{2\sigma t_b^2}{\rho_l r_c^2} \approx 3.77 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

Así,

$$\boxed{h \approx 3.8 \mu\text{m}}.$$

C.1

Las cantidades de CO_2 disuelto y gaseoso son, respectivamente,

$$n_L = k_H P_i V_L, \quad n_G = \frac{P_i V_G}{RT_0}.$$

La conservación de la cantidad total da

$$n_T = P_i \left(k_H V_L + \frac{V_G}{RT_0} \right).$$

En consecuencia,

$$\boxed{P_i = \frac{n_T}{k_H V_L + V_G/(RT_0)}}.$$

Utilizamos

$$V_L = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad V_G = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

A 6°C , $T_0 = 279.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(5.4 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 279.15)} \approx 4.81 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

A 20°C , $T_0 = 293.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(3.3 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 293.15)} \approx 7.76 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Estas son presiones absolutas:

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

C.2

Para este apartado, el problema especifica las presiones de sustitución

$$P_i(6^\circ\text{C}) = 4.69 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) = 7.45 \text{ bar}.$$

Para la expansión adiabática reversible de un gas ideal,

$$PV^\gamma = \text{constante}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{constante}.$$

Eliminando V y tomando P_0 como presión final,

$$T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Así,

$$T_f(6^\circ\text{C}) = 279.15 \left(\frac{1}{4.69} \right)^{0.3/1.3} \approx 195.4 \text{ K},$$

y

$$T_f(20^\circ\text{C}) = 293.15 \left(\frac{1}{7.45} \right)^{0.3/1.3} \approx 184.4 \text{ K}.$$

Para determinar si se forma CO_2 sólido, hallamos la temperatura de equilibrio de sublimación a P_0 . Imponiendo $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2} = P_0$,

$$0 = A - \frac{B}{T_s + C},$$

de modo que

$$T_s = \frac{B}{A} - C = \frac{1300}{6.81} + 3.49 \approx 194.4 \text{ K}.$$

Para la botella inicialmente fría,

$$195.4 \text{ K} > T_s.$$

En efecto, la expresión dada para la presión de vapor da

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(195.4 \text{ K}) \approx 1.09 \text{ bar} > P_0.$$

El gas no alcanza la saturación sólido–gas durante esta expansión. Según las alternativas indicadas, se forma una **niebla blanca grisácea**.

Para la botella inicialmente más caliente,

$$184.4 \text{ K} < T_s,$$

y

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(184.4 \text{ K}) \approx 0.422 \text{ bar} < P_0.$$

La expansión sin cambio de fase produciría CO_2 sobresaturado, por lo que se forman cristales sólidos que dan lugar a una **niebla azul**.

Por tanto,

Las afirmaciones 1 y 4 son verdaderas.

Los valores calculados de T_f son las temperaturas hipotéticas solicitadas sin cambio de fase; la formación de sólido modifica la evolución térmica real en el caso de la botella caliente.

C.3

Utilizamos la presión especificada a 6°C :

$$P_i = 4.69 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Sea x el desplazamiento hacia arriba del corcho desde su posición inicial, y sea

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

el área de su sección transversal.

Mientras $0 \leq x \leq \ell_0$, el área de contacto es

$$A(x) = \pi d(\ell_0 - x),$$

por lo que la fuerza de rozamiento es

$$F_{\text{fr}}(x) = \alpha \pi d(\ell_0 - x).$$

Inicialmente, la fuerza neta de presión casi equilibra el rozamiento:

$$(P_i - P_0)S \simeq \alpha \pi d \ell_0.$$

El peso del corcho es de tan solo 0.098 N , frente a una fuerza neta de presión inicial de unos 94 N , por lo que puede despreciarse al estimar α . Por tanto,

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{(P_i - P_0)d}{4\ell_0}} \approx 6.64 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

La rápida expansión afecta al gas inicialmente contenido en el espacio de cabeza. Su volumen y su presión durante el movimiento del corcho son

$$V(x) = V_G + Sx, \quad P(x) = P_i \left(\frac{V_G}{V_G + Sx} \right)^\gamma.$$

Cuando el corcho sale del cuello,

$$V_e = V_G + S\ell_0.$$

El trabajo realizado por el gas interior es

$$W_{\text{gas}} = \int_0^{\ell_0} P(x)S \, dx = \int_{V_G}^{V_e} P_i \left(\frac{V_G}{V} \right)^\gamma \, dV,$$

lo que da

$$W_{\text{gas}} = \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_e} \right)^{\gamma-1} \right].$$

El trabajo contra la presión atmosférica es

$$W_{\text{atm}} = P_0 S \ell_0,$$

y la energía disipada por rozamiento es

$$W_{\text{fr}} = \int_0^{\ell_0} \alpha \pi d(\ell_0 - x) \, dx = \frac{1}{2} \alpha \pi d \ell_0^2 \simeq \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0.$$

Una vez que el corcho sale, se desprecia la fuerza neta de presión, como se indica en el enunciado. Despreciando la resistencia del aire, toda la energía mecánica restante se convierte en energía potencial gravitatoria en el punto más alto. Midiendo H_c desde la posición inicial del corcho,

$$mg_0 H_c = W_{\text{gas}} - W_{\text{atm}} - W_{\text{fr}}.$$

Por tanto,

$$H_c = \frac{1}{mg_0} \left\{ \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_G + S \ell_0} \right)^{\gamma-1} \right] - P_0 S \ell_0 - \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0 \right\}.$$

Numéricamente,

$$S = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad V_e = 3.1362 \times 10^{-5} \text{ m}^3,$$

y

$$W_{\text{gas}} \approx 2.570 \text{ J}, \quad W_{\text{atm}} \approx 0.636 \text{ J}, \quad W_{\text{fr}} \approx 1.174 \text{ J}.$$

Así,

$$H_c \approx \frac{2.570 - 0.636 - 1.174}{0.010(9.80665)} \approx 7.75 \text{ m}.$$

Con una precisión razonable,

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Si la altura se mide desde la posición del corcho cuando acaba de salir del cuello, se resta $\ell_0 = 0.025 \text{ m}$; la respuesta redondeada sigue siendo 7.7 m .

La solución se comprobó con la solución oficial.