

IPhO 2025

Theorieaufgaben und Lösungen · Paris, Frankreich · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2025/

Aufgabe 1: Wasserstoff und Galaxien

Diese Aufgabe untersucht die besonderen physikalischen Eigenschaften von Galaxien, etwa ihre Dynamik und Struktur. Insbesondere erläutern wir, wie sich die Massenverteilung unserer Galaxie von innen heraus messen lässt. Dazu konzentrieren wir uns auf Wasserstoff, ihren Hauptbestandteil.

In dieser gesamten Aufgabe verwenden wir ausschließlich $\hbar$, definiert durch $\hbar = h/2\pi$.

Teil A - Einführung

Bohrsches Atommodell

Wir nehmen an, dass das Wasserstoffatom aus einem nichtrelativistischen Elektron der Masse m_e besteht, das ein ortsfestes Proton umkreist. In diesem gesamten Teil nehmen wir an, dass es sich auf einer Kreisbahn bewegt.

A.1 — 0.2 Punkte

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v des Elektrons auf einer Kreisbahn mit Radius r .

Im Bohrschen Atommodell nehmen wir an, dass der Betrag des Drehimpulses L des Elektrons quantisiert ist: $L = n\hbar$, wobei $n > 0$ eine ganze Zahl ist. Wir definieren

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}.$$

A.2 — 0.5 Punkte

Zeigen Sie, dass der Radius jeder Bahn durch $r_n = n^2 r_1$ gegeben ist, wobei r_1 als Bohrscher Radius bezeichnet wird. Drücken Sie r_1 durch α , m_e , c und $\hbar$ aus und berechnen Sie seinen Zahlenwert mit 3 signifikanten Stellen. Drücken Sie v_1 , die Geschwindigkeit auf der Bahn mit Radius r_1 , durch α und c aus.

A.3 — 0.5 Punkte

Bestimmen Sie die mechanische Energie E_n des Elektrons auf einer Bahn mit Radius r_n in Abhängigkeit von e , ϵ_0 , r_1 und n . Bestimmen Sie E_1 im Grundzustand in Abhängigkeit von α , m_e und c . Berechnen Sie ihren Zahlenwert in eV.

Fein- und Hyperfeinstruktur des Wasserstoffs

Die seltene spontane Umkehr des Elektronenspins führt dazu, dass pro Wasserstoffatom im Mittel einmal in 10 Millionen Jahren ein Photon emittiert wird. Diese Emission dient als Nachweis für Wasserstoff im Universum und ist daher von grundlegender Bedeutung für die Astrophysik. Wir

untersuchen den für diese Emission verantwortlichen Übergang in zwei Schritten.

Betrachten Sie zunächst die Wechselwirkung zwischen dem Elektronenspin und der Relativbewegung von Elektron und Proton. Im Bezugssystem des Elektrons umkreist das Proton das Elektron im Abstand r_1 . Dadurch entsteht ein Magnetfeld $\vec{B}_1$.

A.4 — 0.5 Punkte

Bestimmen Sie den Betrag B_1 von $\vec{B}_1$ am Ort des Elektrons in Abhängigkeit von μ_0 , e , α , c und r_1 .

Zweitens erzeugt der Elektronenspin ein magnetisches Moment $\vec{\mathcal{M}}_s$. Sein Betrag ist näherungsweise $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. Die *Feinstruktur* (F) hängt mit der Energiedifferenz ΔE_F zwischen einem Elektron, dessen magnetisches Moment $\vec{\mathcal{M}}_s$ parallel zu $\vec{B}_1$ ausgerichtet ist, und einem Elektron, dessen $\vec{\mathcal{M}}_s$ antiparallel zu $\vec{B}_1$ ausgerichtet ist, zusammen. Analog hängt die *Hyperfeinstruktur* (HF) mit der Energiedifferenz ΔE_{HF} zusammen, die sich aus der Wechselwirkung bei paralleler bzw. antiparalleler Ausrichtung der magnetischen Momente von Elektron und Proton ergibt. Es ist bekannt, dass näherungsweise $\Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ gilt, wobei m_p die Protonenmasse ist.

A.5 — 0.5 Punkte

Drücken Sie ΔE_F als Funktion von α und E_1 aus.

Geben Sie einen Ausdruck für die Wellenlänge λ_{HF} eines Photons an, das bei einem Übergang zwischen den beiden Zuständen der Hyperfeinstruktur emittiert wird, und geben Sie ihren Zahlenwert mit zwei signifikanten Stellen an.

Teil B - Rotationskurven von Galaxien

Daten

- Kiloparsec: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- Sonnenmasse: $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Wir betrachten eine kugelförmige Galaxie mit einem ortsfesten Punkt O als Zentrum. An einem beliebigen Punkt P sei $\rho = \rho(P)$ die Massendichte und $\varphi = \varphi(P)$ das zugehörige Gravitationspotential (d. h. die potentielle Energie pro Masseneinheit). Sowohl ρ als auch φ hängen nur von $r = \|\vec{OP}\|$ ab. Die Bewegung einer am Punkt P befindlichen Masse m unter dem Einfluss des Feldes φ ist auf eine Ebene beschränkt, die O enthält.

B.1 — 0.2 Punkte

Bestimmen Sie für eine Kreisbahn die Geschwindigkeit v_c eines Objekts auf einer durch P verlaufenden Kreisbahn in Abhängigkeit von r und $\frac{d\varphi}{dr}$.

Abb. 1(A) zeigt eine Aufnahme der Spiralgalaxie NGC 6946 im sichtbaren Spektralbereich (aufgenommen mit dem 0,8-m-Schulman-Teleskop am Mount Lemmon Sky Center in Arizona). Die kleinen Ellipsen in Abb. 1(B) zeigen experimentelle Messwerte von v_c für diese Galaxie. Der zentrale Bereich ($r < 1 \text{ kpc}$) wird als Bulge bezeichnet. In diesem Bereich ist die

Massenverteilung näherungsweise homogen. Die rote Kurve ist eine Vorhersage für v_c unter der Annahme, dass das System im Bulge homogen und außerhalb keplersch ($\varphi(r) = -\beta/r$ mit $\beta > 0$) ist, d. h., dass die gesamte Masse der Galaxie im Bulge konzentriert ist.

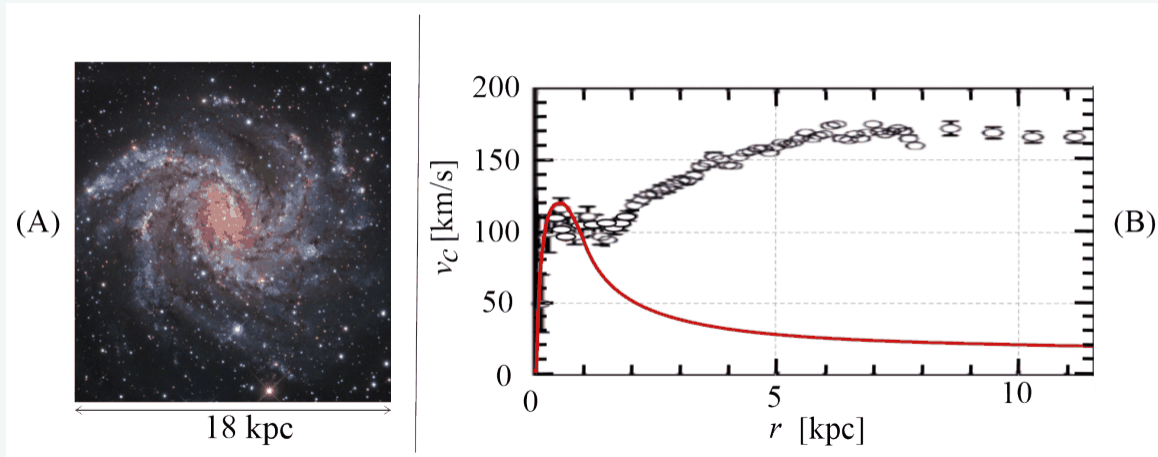


Abb. 1: Galaxie NGC 6946: Aufnahme (A) und Rotationskurve (B).

B.2 — 0.5 Punkte

Leiten Sie aus der roten Rotationskurve in Abb. 1(B) die Masse M_b des Bulges von NGC 6946 in Einheiten der Sonnenmasse ab.

Der Vergleich des keplerschen Modells mit den experimentellen Daten überzeugt Astronomen davon, dass ein Teil der Masse auf dem Bild unsichtbar ist. Sie nehmen daher an, dass die tatsächliche Massendichte der Galaxie durch

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

gegeben ist, wobei $C_m > 0$ und $r_m > 0$ Konstanten sind.

B.3 — 1.8 Punkte

Zeigen Sie, dass das zur Massendichte aus Gl. 1 gehörende Geschwindigkeitsprofil $v_{c,m}(r)$ in der Form

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}.$$

geschrieben werden kann. Drücken Sie k_1 und k_2 durch C_m , r_m und G aus.

(Hinweise: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, und: $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$ für $x \ll 1$.)

Vereinfachen Sie $v_{c,m}(r)$ für $r \ll r_m$ und für $r \gg r_m$.

Zeigen Sie, dass sich für $r \gg r_m$ die Masse $M_m(r)$, die bei der Massendichte aus Gl. 1 in einer Kugel mit Radius r enthalten ist, vereinfacht und nur von C_m und r abhängt.

Schätzen Sie die tatsächlich im Bildausschnitt von Abb. 1(A) enthaltene Masse der Galaxie NGC 6946 ab.

Teil C - Massenverteilung in unserer Galaxie

Für eine Spiralgalaxie wird das Modell aus Gl. 1 abgeändert, und man nimmt üblicherweise an, dass das Gravitationspotential durch

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

gegeben ist, wobei z der Abstand von der galaktischen Ebene (definiert durch $z = 0$) ist, $r < r_0$ nun den Abstand von der Achse bezeichnet und $\varphi_0 > 0$ eine zu bestimmende Konstante ist. r_0 und z_0 sind konstante Größen.

C.1 — 0.5 Punkte

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für z für die vertikale Bewegung einer Punktmasse m in einem solchen Potential unter der Annahme, dass r konstant ist. Zeigen Sie, dass die galaktische Ebene für $r < r_0$ eine stabile Gleichgewichtslage ist, indem Sie die Kreisfrequenz ω_0 kleiner Schwingungen um diese Ebene angeben.

Von nun an setzen wir $z = 0$.

C.2 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie, in welchem Bereich, $r \gg r_m$ oder $r \ll r_m$, das Modell aus Gl. 1 bei geeigneter Definition von φ_0 ein Potential der Form $\varphi_G(r, 0)$ ergibt.

Unter dieser Bedingung hängt $v_c(r)$ nicht mehr von r ab. Drücken Sie es durch φ_0 aus.

Außerhalb des Bulges hängt der Geschwindigkeitsbetrag v_c somit nicht vom Abstand zum galaktischen Zentrum ab. Wie Astronomen werden wir diese Tatsache nutzen, um die Massenverteilung der Galaxie von innen heraus zu messen.

Alle hier für astronomische Beobachtungen betrachteten galaktischen Objekte, etwa Sterne oder Nebel, bestehen hauptsächlich aus Wasserstoff. Außerhalb des Bulges nehmen wir an, dass sie sich auf Kreisbahnen um das galaktische Zentrum C bewegen. S ist der Ort der Sonne und E derjenige eines bestimmten galaktischen Objekts, das im Wasserstoffspektrum emittiert. In der galaktischen Ebene betrachten wir eine Sichtlinie SE , die der Beobachtungsrichtung entspricht und entlang des Einheitsvektors $\hat{u}_v$ verläuft (siehe Abb. 2).

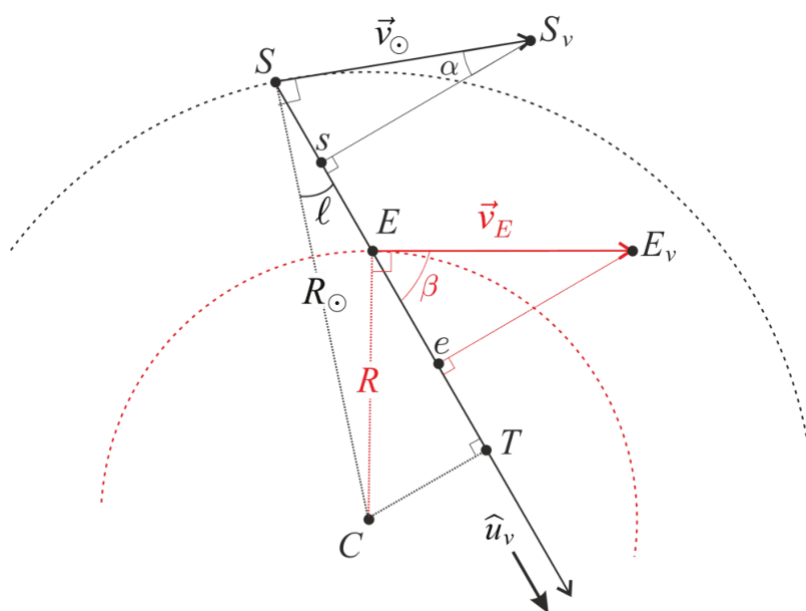


Abb. 2: Geometrie der Messung

Sei ℓ die galaktische Länge, die den Winkel zwischen SC und SE angibt. Die Geschwindigkeit der Sonne auf ihrer Kreisbahn mit Radius $R_\odot = 8.00 \text{ kpc}$ wird mit $\vec{v}_\odot$ bezeichnet. Ein galaktisches Objekt in E bewegt sich auf einer anderen Kreisbahn mit Radius R und Geschwindigkeit $\vec{v}_E$. Mithilfe des Dopplereffekts an der zuvor untersuchten 21-cm-Linie lässt sich die relative Radialgeschwindigkeit $v_{rE/S}$ des Emitters E bezüglich der Sonne S bestimmen: Sie ist die Projektion von $\vec{v}_E - \vec{v}_\odot$ auf die Sichtlinie.

C.3 – 0.7 Punkte

Bestimmen Sie $v_{rE/S}$ in Abhängigkeit von ℓ , R , $R_\odot$ und $v_\odot$. Drücken Sie anschließend R durch $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ und $v_{rE/S}$ aus.

Mit einem Radioteleskop führen wir Beobachtungen in der Ebene unserer Galaxie in Richtung der galaktischen Länge $\ell = 30^\circ$ durch. Das verwendete Frequenzband enthält die 21-cm-Linie mit der Frequenz $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$. Die Ergebnisse sind in Abb. 3 dargestellt.

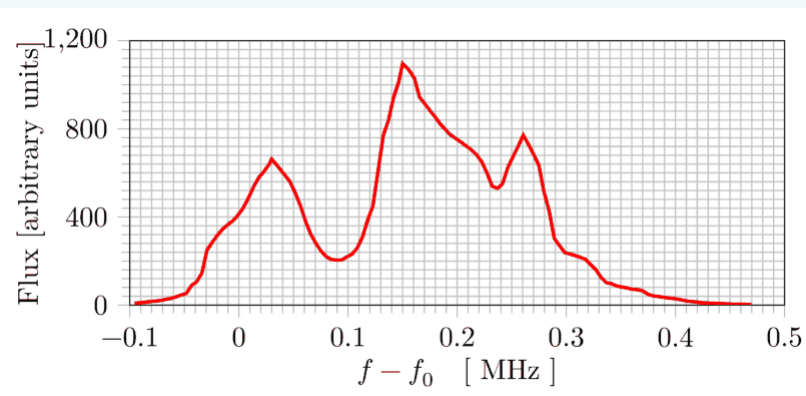


Abb. 3: Elektromagnetisches Signal als Funktion der Frequenzverschiebung, gemessen im Radiofrequenzbereich bei $\ell = 30^\circ$ mithilfe von EU-HOU RadioAstronomy

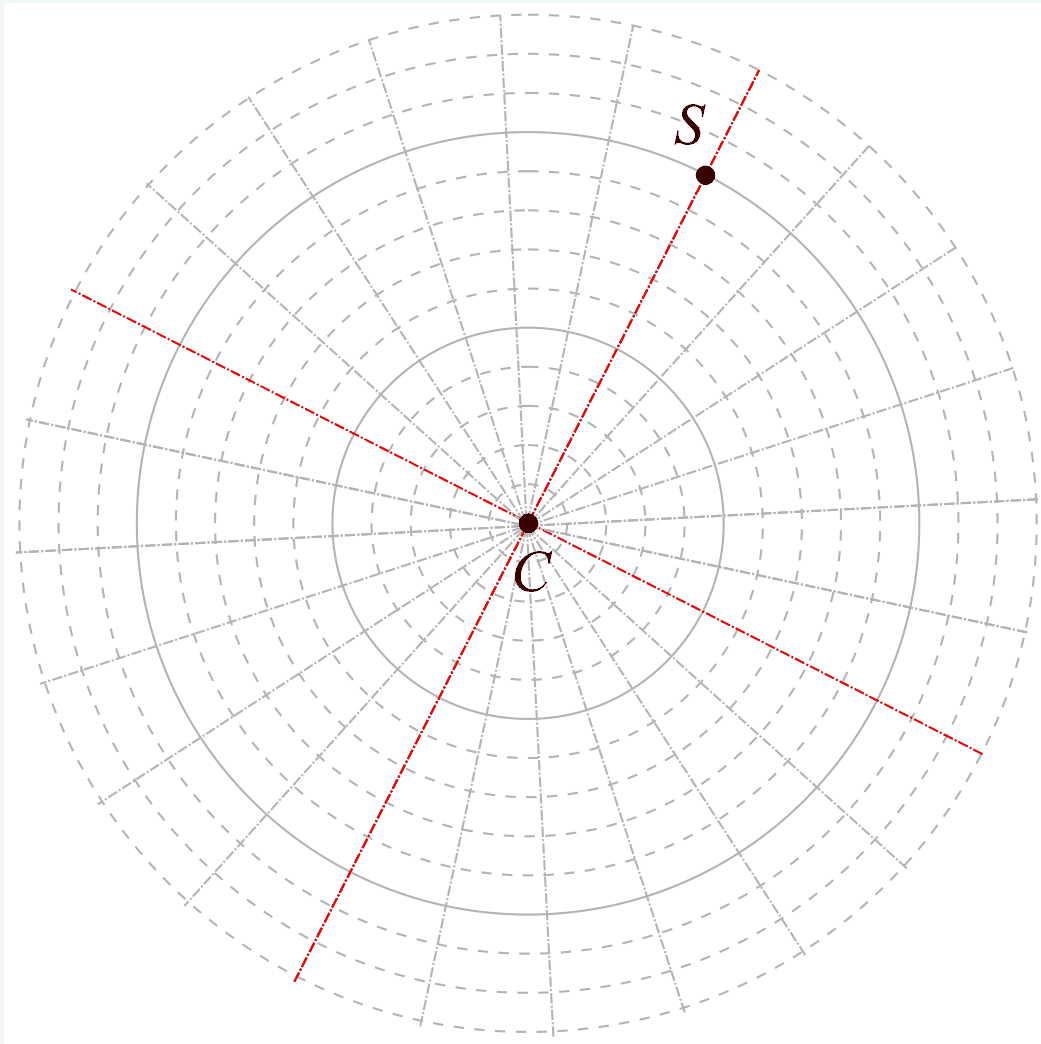
C.4 — 0.6 Punkte

In unserer Galaxie gilt $v_{\odot} = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Bestimmen Sie für die 3 in Abb. 3 beobachteten Quellen die relative Radialgeschwindigkeit (mit 3 signifikanten Stellen) und den Abstand vom galaktischen Zentrum (mit 2 signifikanten Stellen). Die Abstände sind als Vielfache von $R_{\odot}$ anzugeben.

C.5 — 0.6 Punkte

Markieren Sie in der Draufsicht unserer Galaxie (im Antwortfeld) die Positionen der in Abb. 3 beobachteten Quellen.

Was ließe sich aus wiederholten Messungen bei unterschiedlichen Werten von ℓ ableiten?



Teil D - Tully-Fisher-Beziehung und MOND-Theorie

Die flache äußere Geschwindigkeitskurve von NGC 6946 in Abb. 1 ist eine gemeinsame Eigenschaft von Spiralgalaxien, wie in Abb. 4 (links) zu sehen ist. Trägt man den äußeren konstanten Geschwindigkeitswert $v_{c,\infty}$ als Funktion der gemessenen Gesamtmasse M_{tot} jeder Galaxie auf, ergibt sich eine interessante Korrelation, die als Tully-Fisher-Beziehung bezeichnet wird, siehe Abb. 4 (rechts).

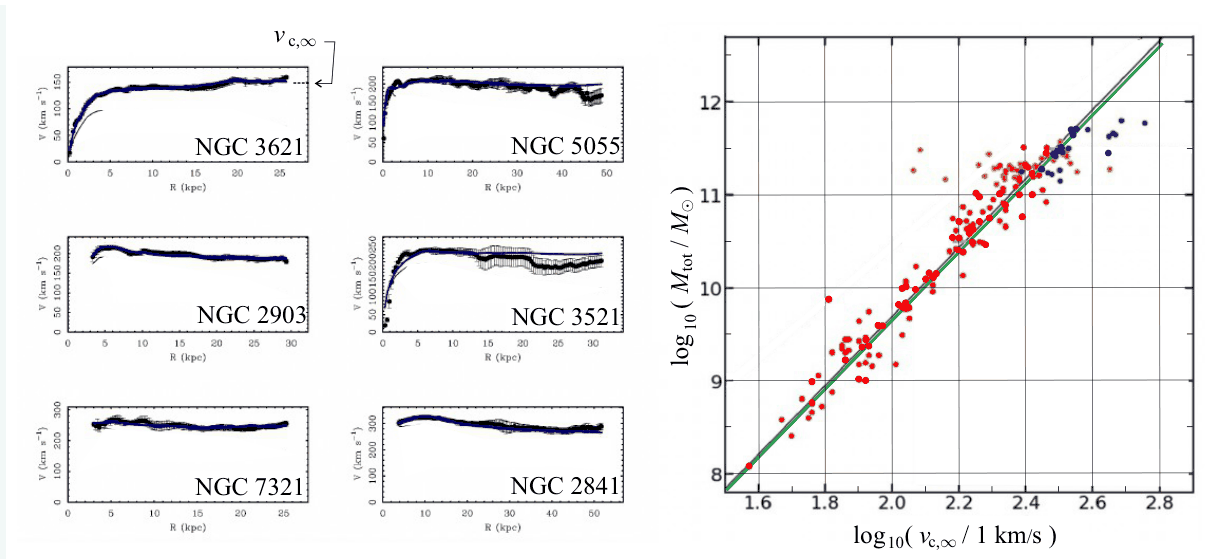


Abb. 4. Links: Rotationskurven typischer Spiralgalaxien - Rechts: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ als Funktion von $\log_{10}(v_{c,\infty})$ auf linearen Skalen. Die farbigen Punkte entsprechen verschiedenen Galaxien und verschiedenen Durchmusterungen. Die grüne Linie stellt die Tully-Fischer-Beziehung dar, die sehr gut mit der Ausgleichsgeraden der Daten (schwarz) übereinstimmt.

D.1 – 0.4 Punkte

Zeigen Sie unter der Annahme, dass der Radius R einer Galaxie nicht von ihrer Masse abhängt, dass das Modell aus Gl. 1 (Teil B) eine Beziehung der Form $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ ergibt, wobei γ und η anzugeben sind.

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der Tully-Fischer-Beziehung, indem Sie γ_{TF} berechnen.

Im Bereich extrem kleiner Beschleunigungen in der Größenordnung von $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ schlägt die Theorie der modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND) vor, das zweite Newtonsche Gesetz durch

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$$

zu modifizieren, wobei $a = \|\vec{a}\|$ der Betrag der Beschleunigung ist und die Funktion μ durch $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ definiert ist.

D.2 – 0.2 Punkte

Schätzen Sie anhand der Daten für NGC 6946 in Abb. 1 im Rahmen der Newtonschen Theorie den Betrag der Beschleunigung a_m einer Masse in den äußeren Bereichen von NGC 6946 ab.

D.3 – 0.8 Punkte

Eine Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit $v_{c,\infty}$ auf einer Kreisbahn mit Radius r im Gravitationsfeld einer ortsfesten Masse M .

Bestimmen Sie im Rahmen der MOND-Theorie für $a \ll a_0$ den Tully-Fischer-Exponenten.

Berechnen Sie anhand der Daten für NGC 6946 und/oder des Tully-Fischer-Gesetzes a_0 , um zu zeigen, dass MOND im richtigen Bereich wirksam ist.

D.4 — 0.9 Punkte

Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der relevanten Fälle $v_c(r)$ für alle Werte von r in der MOND-Theorie für das Gravitationsfeld einer homogen verteilten Masse M mit Radius R_b .

Allgemeines Datenblatt

Konstante	Symbol	Wert	Einheit
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Molare Gaskonstante	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Universelle Gravitationskonstante	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Normfallbeschleunigung	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Vakuumpermeabilität (magnetische Feldkonstante)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vakuumpermittivität (elektrische Feldkonstante)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Elektronenmasse	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Atomare Massenkonstante	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Elektronenvolt	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A.1

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

• A.2

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad v_1 = \alpha c.$$

• A.3

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

• A.4

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

• A.5

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1, \quad \lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c} \simeq 0.21 \text{ m}.$$

• B.1

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

• B.2

$$M_b \sim 1 \times 10^9 M_\odot.$$

• B.3

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m,$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3}} \frac{r}{r_m}, \quad v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq \sqrt{4\pi G C_m},$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq 4\pi C_m r, \quad M_{\text{in der Abbildung}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_\odot.$$

• C.1

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

• C.2

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m, \quad v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

• C.3

$$v_{rE/S} = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell, \quad R = \frac{R_\odot v_\odot \sin \ell}{v_\odot \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

- **C.4** Nummeriert man die Maxima nach zunehmender Frequenzverschiebung:

$$(v_{r,1}, v_{r,2}, v_{r,3}) = (6.33, 31.7, 54.9) \text{ km s}^{-1},$$

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.95, 0.78, 0.67) R_{\odot}.$$

- **C.5** Markieren Sie auf der Sichtlinie $\ell = 30^\circ$ beide Schnittpunkte mit jedem der drei Kreise mit den Radien $0.95R_{\odot}$, $0.78R_{\odot}$ und $0.67R_{\odot}$. Die nahen und fernen Abstände von der Sonne sind

$$\frac{(d_{1,-}, d_{2,-}, d_{3,-})}{R_{\odot}} \simeq (0.0635, 0.272, 0.424),$$

$$\frac{(d_{1,+}, d_{2,+}, d_{3,+})}{R_{\odot}} \simeq (1.67, 1.46, 1.31).$$

Wiederholte Messreihen bei verschiedenen galaktischen Längen lassen die Wasserstoffverteilung und die Spiralstruktur erkennen, wobei diese Nah-Fern-Mehrdeutigkeit bestehen bleibt.

- **D.1**

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_{TF} \approx 3.7 \text{ (grafisch nahe bei 4)}.$$

- **D.2**

$$a_m \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}.$$

- **D.3**

$$v_{c,\infty}^4 = GMa_0, \quad \gamma_{\text{MOND}} = 4, \quad a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

Dies ist die relevante Beschleunigungsskala; die dargestellten Daten für NGC 6946 allein belegen die stärkere Ungleichung $a \ll a_0$ nicht.

- **D.4**

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Die stetige Fortsetzung ergibt $v_c(0) = 0$.

Lösung

Für die atomaren Zahlenwerte berechne ich α aus seiner Definitionsgleichung und den angegebenen Konstanten:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29735 \times 10^{-3}.$$

Dieser Wert weicht geringfügig von der in der Aufgabenstellung angegebenen Näherung ab.

A.1

Die anziehende Coulomb-Kraft liefert die Zentripetalkraft:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Daher gilt

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2

Die Bohrsche Quantisierungsbedingung ergibt

$$m_e v_n r_n = n\hbar.$$

Quadrieren dieser Gleichung und Einsetzen der Kräftebeziehung aus A.1 liefert

$$n^2 \hbar^2 = m_e^2 v_n^2 r_n^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}.$$

Folglich gilt

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 \frac{\hbar}{m_e \alpha c}.$$

Somit ist

$$r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Für die Bahn im Grundzustand gilt

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e r_1} = \boxed{\alpha c}.$$

Allgemeiner gilt $v_n = \alpha c/n$. Da $\alpha \ll 1$, ist die nichtrelativistische Näherung konsistent.

A.3

Wählt man die elektrostatische potentielle Energie im Unendlichen gleich null, so gilt

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Die Kräftebeziehung liefert

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Damit ist die gesamte mechanische Energie

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Bei $r_n = n^2 r_1$ gilt

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}.$$

Insbesondere ist

$$E_1 = -\frac{\alpha\hbar c}{2r_1} = \boxed{-\frac{1}{2}m_e\alpha^2 c^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$E_1 = -2.17987 \times 10^{-18} \text{ J} = \boxed{-13.6 \text{ eV}}.$$

A.4

In der vorgegebenen Betrachtung im Bezugssystem des Elektrons umläuft das Proton dieses mit der Geschwindigkeit $v_1 = \alpha c$. Seine Umlaufzeit und der äquivalente Strom sind

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}.$$

Das Magnetfeld im Mittelpunkt einer kreisförmigen Stromschleife ist

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_1}.$$

Daher gilt

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

A.5

Ein magnetischer Dipol in einem Feld hat die Energie

$$U = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}_1.$$

Die parallelen und antiparallelen Zustände haben somit die Energien $-\mathcal{M}_s B_1$ bzw. $+\mathcal{M}_s B_1$. Ihr positiver Energieabstand ist

$$\Delta E_F = 2\mathcal{M}_s B_1.$$

Mit dem in der Aufgabe angegebenen magnetischen Moment ergibt sich

$$\Delta E_F = 2 \frac{e\hbar}{m_e} \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

Mit $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ und $e^2/(4\pi\epsilon_0) = \alpha\hbar c$ folgt

$$\Delta E_F = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m_e r_1^2} = 2m_e \alpha^4 c^2.$$

Da $E_1 = -m_e \alpha^2 c^2/2$, gilt

$$\boxed{\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1}.$$

Für das Hyperfeinstrukturphoton gilt

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\text{HF}}} = \Delta E_{\text{HF}} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F.$$

Somit ist

$$\lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c}.$$

Die numerischen Zwischenwerte lauten

$$\Delta E_{\text{F}} \simeq 2.898 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad \lambda_{\text{HF}} \simeq 0.21116 \text{ m}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet:

$$\lambda_{\text{HF}} = 0.21 \text{ m} = 21 \text{ cm}.$$

B.1

Die Gravitationsbeschleunigung ist

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Gleichsetzen mit der nach innen gerichteten Beschleunigung auf einer Kreisbahn ergibt

$$-\frac{v_c^2}{r} \hat{r} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

Daher gilt

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

B.2

Außerhalb eines kugelförmigen Bulges liefert das Newtonsche Schalentheorem

$$\varphi(r) = -\frac{GM_b}{r} + \text{Konstante}.$$

Daraus folgt

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r}, \quad M_b = \frac{rv_c^2}{G}.$$

Ein geeigneter näherungsweise von der roten Kurve abgelesener Punkt ist

$$r \simeq 10 \text{ kpc}, \quad v_c \simeq 20 \text{ km s}^{-1}.$$

Damit ergibt sich

$$M_b \simeq \frac{(10 \times 3.09 \times 10^{19})(2.0 \times 10^4)^2}{6.67430 \times 10^{-11}} = 1.85 \times 10^{39} \text{ kg}.$$

In Einheiten der Sonnenmasse sind dies ungefähr $9.3 \times 10^8 M_{\odot}$. Angesichts der grafischen Genauigkeit gilt

$$M_b \sim 10^9 M_{\odot}.$$

B.3

Die innerhalb des Radius r eingeschlossene Masse ist

$$M_m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(x) x^2 dx = 4\pi C_m \int_0^r \frac{x^2}{r_m^2 + x^2} dx.$$

Mit dem angegebenen Integral folgt

$$M_m(r) = 4\pi C_m \left[r - r_m \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie gilt

$$v_{c,m}^2(r) = \frac{GM_m(r)}{r} = 4\pi G C_m \left[1 - \frac{r_m}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

Der Vergleich mit der gesuchten Form ergibt

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m.$$

Für $r \ll r_m$ setzen wir $x = r/r_m$. Dann ist

$$1 - \frac{\arctan x}{x} \simeq 1 - \frac{x - x^3/3}{x} = \frac{x^2}{3}.$$

Daher gilt

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3} \frac{r}{r_m}}.$$

Die zentrale Rotationskurve steigt linear an, wie bei einer näherungsweise homogenen Dichte zu erwarten ist.

Für $r \gg r_m$ gilt $\arctan(r/r_m) \rightarrow \pi/2$, während $r_m/r \rightarrow 0$. Somit ist

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{4\pi G C_m} \equiv v_{c,\infty},$$

und

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r = \frac{v_{c,\infty}^2 r}{G}.$$

Der abgebildete Durchmesser beträgt ungefähr 18 kpc, sodass wir als einschließenden Radius 9 kpc ansetzen. Die beobachtete äußere Geschwindigkeit beträgt ungefähr 170 km s^{-1} . Damit ergibt sich

$$M_{\text{in der Abbildung}} \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2 (9 \times 3.09 \times 10^{19})}{6.67430 \times 10^{-11}} \simeq 1.20 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

Daher gilt

$$M_{\text{in der Abbildung}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

C.1

Für festes r lautet die vertikale Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} = -m \frac{\partial \varphi_G}{\partial z}.$$

Ableiten des vorgegebenen Potentials ergibt

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}.$$

Bei $z = 0$ verschwindet die Kraft. Für kleine Schwingungen gilt $|z| \ll z_0$, sodass

$$e^{-z^2/z_0^2} \simeq 1.$$

Die linearisierte Gleichung lautet

$$\ddot{z} + \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) z = 0.$$

Für $r < r_0$ ist ihr Koeffizient positiv. Damit ist die Ebene eine stabile Gleichgewichtslage mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

C.2

Für $r \gg r_m$ ergibt B.3

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r.$$

Der radiale Potentialgradient ist daher

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_m(r)}{r^2} \simeq \frac{4\pi G C_m}{r}.$$

Integration und geeignete Wahl der additiven Konstante liefern

$$\varphi(r) \simeq 4\pi G C_m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

Damit lauten der gesuchte Bereich und der Koeffizient

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m.$$

In der Ebene gilt

$$v_c^2 = r \frac{\partial \varphi_G(r, 0)}{\partial r} = r \frac{\varphi_0}{r} = \varphi_0,$$

also

$$v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

C.3

Sei T der Lotfußpunkt von C auf der Sichtlinie. Aus der Geometrie folgt

$$CT = R_\odot \sin \ell.$$

Die Projektion der Tangentialgeschwindigkeit der Sonne auf die Sichtlinie ist

$$\vec{v}_\odot \cdot \hat{u}_v = v_\odot \sin \ell.$$

Die Tangentialgeschwindigkeit des Emitters steht senkrecht auf CE . Ihre Projektion auf die Sichtlinie ist

$$\vec{v}_E \cdot \hat{u}_v = v_E \frac{CT}{R} = v_E \frac{R_\odot}{R} \sin \ell.$$

Aus der flachen Rotationskurve folgt $v_E = v_\odot$. Somit gilt

$$v_{rE/S} = (\vec{v}_E - \vec{v}_\odot) \cdot \hat{u}_v = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell.$$

Auflösen nach R ergibt

$$R = \frac{R_{\odot} v_{\odot} \sin \ell}{v_{\odot} \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

C.4

Entsprechend der beabsichtigten Konvention, die mit dem Antwortblatt übereinstimmt, verwenden wir

$$v_r = +c \frac{f - f_0}{f_0},$$

wobei positive Werte eine Entfernung vom Beobachter bezeichnen. Die abgedruckte $f - f_0$ -Achse hat daher das entgegengesetzte Vorzeichen zur üblichen Frequenzverschiebung bei positiver Fluchtgeschwindigkeit.

Die drei Maxima liegen ungefähr bei

$$\Delta f_1 = 0.030 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 0.150 \text{ MHz}, \quad \Delta f_3 = 0.260 \text{ MHz}.$$

Da

$$v_{\odot} \sin \ell = 220 \sin 30^\circ = 110 \text{ km s}^{-1},$$

wird die Radiusformel zu

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{110}{110 + v_r},$$

wobei v_r in km s^{-1} angegeben wird.

Quelle, nach zunehmender Frequenz des Maximums	Δf (MHz)	v_r (km s^{-1}), 3 signifikante Stellen	$R/R_{\odot}$, 2 signifikante Stellen
1	0.030	+6.33	0.95
2	0.150	+31.7	0.78
3	0.260	+54.9	0.67

C.5

Zeichnen Sie im Diagramm des Antwortblatts den Beobachtungsstrahl von S aus so ein, dass er auf der in Abb. 2 angegebenen Seite einen Winkel von 30° mit SC bildet. Zeichnen oder identifizieren Sie die Kreise um C mit den Radien

$$0.95R_{\odot}, \quad 0.78R_{\odot}, \quad 0.67R_{\odot}.$$

Jeder Kreis schneidet den Beobachtungsstrahl zweimal.

Zur quantitativen Angabe der Positionen sei $d = SE$. Der Kosinussatz ergibt

$$R^2 = R_{\odot}^2 + d^2 - 2R_{\odot}d \cos \ell.$$

Somit gilt

$$d_{\pm} = R_{\odot} \cos \ell \pm \sqrt{R^2 - R_{\odot}^2 \sin^2 \ell}.$$

Bei $\ell = 30^\circ$ beträgt der kleinste Abstand der Sichtlinie vom Zentrum

$$CT = 0.50R_{\odot}, \quad ST = R_{\odot} \cos 30^\circ = 0.866R_{\odot}.$$

Alle drei ermittelten Radien sind größer als CT und kleiner als $R_{\odot}$, sodass beide Schnittpunkte von der Sonne aus in Beobachtungsrichtung liegen.

Mit den ungerundeten Radien aus C.4:

Quelle	Nahe Position $d_-/R_\odot$	Ferne Position $d_+/R_\odot$
1	0.0635	1.67
2	0.272	1.46
3	0.424	1.31

Bewegt man sich von S aus entlang des Strahls, so treten die möglichen Positionen in folgender Reihenfolge auf:

$$1_{\text{near}}, \quad 2_{\text{near}}, \quad 3_{\text{near}}, \quad T, \quad 3_{\text{far}}, \quad 2_{\text{far}}, \quad 1_{\text{far}}.$$

Das Spektrum bestimmt den galaktozentrischen Radius jeder Quelle, erlaubt aber keine Unterscheidung zwischen ihrer nahen und ihrer fernen Position. Wiederholt man die Beobachtungen bei verschiedenen galaktischen Längen, lassen sich wasserstoffreiche Strukturen kartieren und die Spiralarme der Galaxie erkennen; um einzelne Nah-Fern-Mehrdeutigkeiten aufzulösen, sind zusätzliche Informationen erforderlich.

D.1

Im äußeren Bereich aus B.3 gilt

$$M_{\text{tot}} \simeq 4\pi C_m R, \quad v_{c,\infty}^2 = 4\pi G C_m.$$

Eliminieren von C_m ergibt

$$M_{\text{tot}} \simeq \frac{R}{G} v_{c,\infty}^2.$$

Für einen massenunabhängigen Radius gilt

$$\boxed{\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2.}$$

Für ein empirisches Potenzgesetz ergibt Logarithmieren

$$\log_{10} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_\odot} \right) = \gamma_{TF} \log_{10} \left(\frac{v_{c,\infty}}{1 \text{ km s}^{-1}} \right) + \text{Konstante}.$$

Somit ist γ_{TF} die Steigung in Abb. 4.

Von der grünen Geraden lassen sich näherungsweise die Werte

$$(x, y) \simeq (1.6, 8.2), \quad (2.8, 12.6).$$

ablesen. Daraus folgt

$$\boxed{\gamma_{TF} \simeq \frac{12.6 - 8.2}{2.8 - 1.6} \simeq 3.7.}$$

Die beobachtete Skalierung liegt nahe an einem Gesetz mit der vierten Potenz und ist deutlich steiler als die quadratische Vorhersage des Newtonschen Modells mit festem Radius.

D.2

Der Betrag der Beschleunigung auf einer Kreisbahn ist

$$a_m = \frac{v_c^2}{r}.$$

Mit einem äußeren beobachteten Punkt,

$$v_c \simeq 170 \text{ km s}^{-1}, \quad r \simeq 10 \text{ kpc},$$

ergibt sich

$$a_m \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2}{10 \times 3.09 \times 10^{19}} = \boxed{9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}}.$$

D.3

Im tiefen MOND-Grenzfall $a \ll a_0$ gilt

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a/a_0}{1 + a/a_0} \simeq \frac{a}{a_0}.$$

Die modifizierte Bewegungsgleichung im Newtonschen Gravitationsfeld von M wird zu

$$\frac{GMm}{r^2} \simeq m \frac{a^2}{a_0}.$$

Für eine Kreisbahn gilt $a = v_{c,\infty}^2/r$, also

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v_{c,\infty}^4}{a_0 r^2}.$$

Der Radius kürzt sich heraus:

$$\boxed{v_{c,\infty}^4 = GMa_0}.$$

Folglich gilt

$$M = \frac{1}{Ga_0} v_{c,\infty}^4, \quad \boxed{\gamma_{\text{MOND}} = 4}.$$

Dies erklärt auch, weshalb die asymptotische Kreisbahngeschwindigkeit vom Radius unabhängig ist.

Für eine grafische Abschätzung von a_0 liefert Abb. 4 näherungsweise

$$v_{c,\infty} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}, \quad M \simeq 4 \times 10^9 M_\odot.$$

Daher gilt

$$a_0 \simeq \frac{(1.0 \times 10^5)^4}{(6.67430 \times 10^{-11})(4 \times 10^9)(1.99 \times 10^{30})} \simeq 1.9 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

Mit der Genauigkeit des Diagramms ergibt sich

$$\boxed{a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}}.$$

Dies entspricht der angegebenen Größenordnung $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. Der Vergleich mit D.2 ergibt

$a_m/a_0 \sim 0.5$: Die dargestellten Daten aus den äußeren Bereichen der Galaxie erfassen die MOND-Beschleunigungsskala, belegen aber nicht $a_m \ll a_0$.

Für eine asymptotisch konstante Geschwindigkeit von 170 km s^{-1} lautet die strenge Bedingung für den tiefen MOND-Bereich

$$r \gg \frac{v_{c,\infty}^2}{a_0} \sim 5 \text{ kpc}.$$

Weiter außen wird diese Näherung zunehmend genauer. In der Nähe des Übergangs muss die vollständige Interpolationsfunktion verwendet werden, wie in D.4.

D.4

Die homogene Kugel hat die Dichte

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_b^3}.$$

Ihre eingeschlossene Masse ist

$$M(< r) = \begin{cases} M(r/R_b)^3, & r \leq R_b, \\ M, & r \geq R_b. \end{cases}$$

In der in der Aufgabe vorgegebenen Formulierung mit modifiziertem zweitem Newtonschem Gesetz bleibt die Gravitationskraft newtonsch. Wir definieren ihren Betrag pro Einheit der Testmasse als

$$g_N(r) = \frac{GM(< r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GMr}{R_b^3}, & r \leq R_b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Mit der vollständigen Interpolationsfunktion gilt

$$g_N = \mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a = \frac{a^2}{a + a_0}.$$

Daraus folgt

$$a^2 - g_N a - g_N a_0 = 0.$$

Die physikalische, nichtnegative Lösung ist

$$a = \frac{g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N}}{2}.$$

Da $v_c^2 = ra$, gilt

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{2} \left(g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N} \right) \right]^{1/2}.$$

Einsetzen liefert den in beiden Bereichen durchgehend gültigen Ausdruck:

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

Die beiden Ausdrücke stimmen bei $r = R_b$ überein, und der Grenzwert im Zentrum ist $v_c(0) = 0$.

Die Grenzfälle verdeutlichen den Verlauf der Rotationskurve:

Bereich	Beschleunigungsbereich	Kreisbahngeschwindigkeit
Innen, $r < R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_b^3}} r$
Innen, $r < R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq \left(\frac{GM a_0}{R_b^3} \right)^{1/4} r^{3/4}$
Außen, $r > R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}$
Außen, $r > R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq (GM a_0)^{1/4}$

Die Kurve beginnt somit bei null, verhält sich hinreichend nahe am Zentrum wie $r^{3/4}$ und nähert sich weit außerhalb einer Konstante. Newtonsche Zwischenbereiche treten nur auf, wenn die Oberflächenbeschleunigung der Kugel GM/R_b^2 hinreichend größer als a_0 ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Cox' Uhr

Im Jahr 1765 erfand der britische Uhrmacher James Cox eine Uhr, deren einzige Energiequelle die Schwankungen des Luftdrucks sind. Cox' Uhr verwendete zwei Gefäße mit Quecksilber. Änderungen des Luftdrucks bewirkten, dass Quecksilber zwischen den Gefäßen strömte und sich die beiden Gefäße relativ zueinander bewegten. Diese Bewegung diente als Energiequelle für das eigentliche Uhrwerk.

Wir untersuchen diese Vorrichtung. Dabei nehmen wir durchgehend an, dass

- das Schwerfeld der Erde $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ homogen ist, mit $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ und dem Einheitsvektor $\vec{u}_z$;
- alle Flüssigkeiten inkompressibel sind und ihre Dichte mit ρ bezeichnet wird;
- keine Effekte der Oberflächenspannung berücksichtigt werden;
- die Höhenabhängigkeit des Luftdrucks vernachlässigt wird;
- die Umgebungstemperatur T_a räumlich konstant ist und alle Zustandsänderungen isotherm verlaufen.



Abb. 1. Künstlerische Darstellung von Cox' Uhr ¹

Teil A - Ziehen an einem eingetauchten Rohr

Wir betrachten zunächst ein Wasserbad, das den Halbraum $z \leq 0$ einnimmt. Die Luft darüber steht unter dem Druck $P_a = P_0$. Ein senkrecht zylindrisches Rohr der Länge $H = 1\text{ m}$, der Querschnittsfläche $S = 10\text{ cm}^2$ und der Masse $m = 0.5\text{ kg}$ wird in das Bad eingetaucht. Das untere Ende des Rohrs ist offen, das obere Ende geschlossen. Mit h bezeichnen wir die Höhe des oberen Rohrendes und mit z_ℓ die Höhe des Wassers im Rohr. Die Wanddicke des Rohrs wird vernachlässigt.

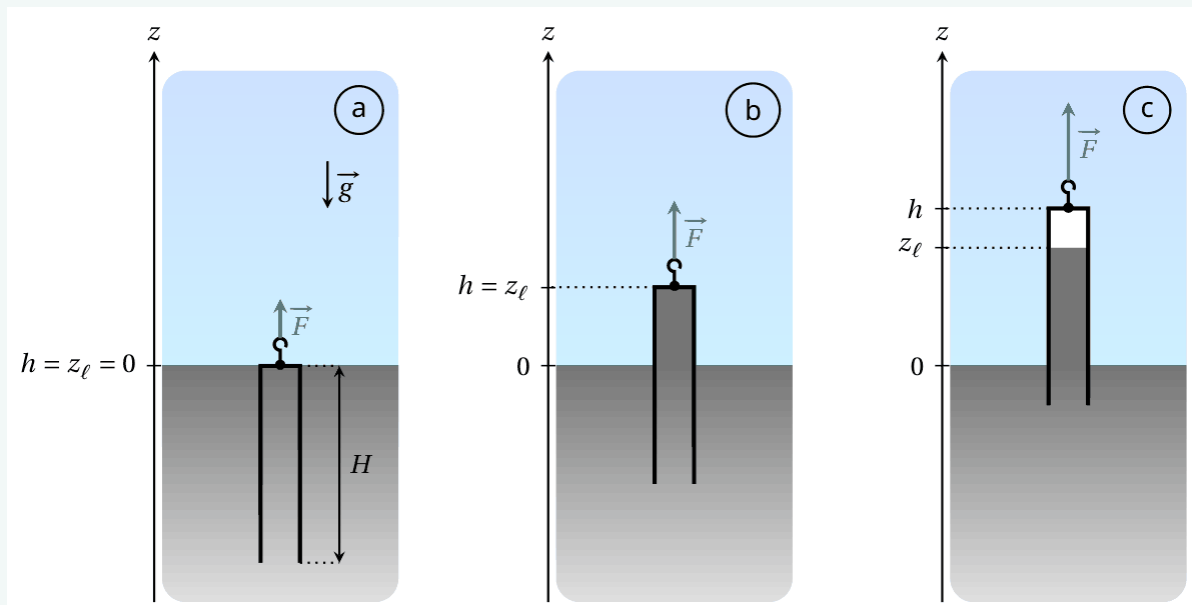


Abb. 2. Skizze des Rohrs in verschiedenen Anordnungen

Wir gehen von der Situation aus, in der das Rohr in Abb. 2 kein Gas enthält und sein oberes Ende auf Höhe der Badoberfläche liegt: Mit anderen Worten gilt $h = 0$ und $z_\ell = 0$ (Fall a).

Anschließend wird das Rohr langsam angehoben, bis sein unteres Ende die Badoberfläche erreicht. Die auf das Rohr ausgeübte Zugkraft wird mit $\vec{F} = F\vec{u}_z$ bezeichnet.

A.1 — 0.2 Punkte

Geben Sie für die in Abb. 2 gezeigte Anordnung (Fall b) den Druck P_w im Wasser am oberen Rohrende an. Geben Sie außerdem die Kraft $\vec{F}$ an, die erforderlich ist, um das Rohr in dieser Position zu halten. Die Ausdrücke sind in Abhängigkeit von P_0, ρ, m, S, h, g und $\vec{u}_z$ anzugeben.

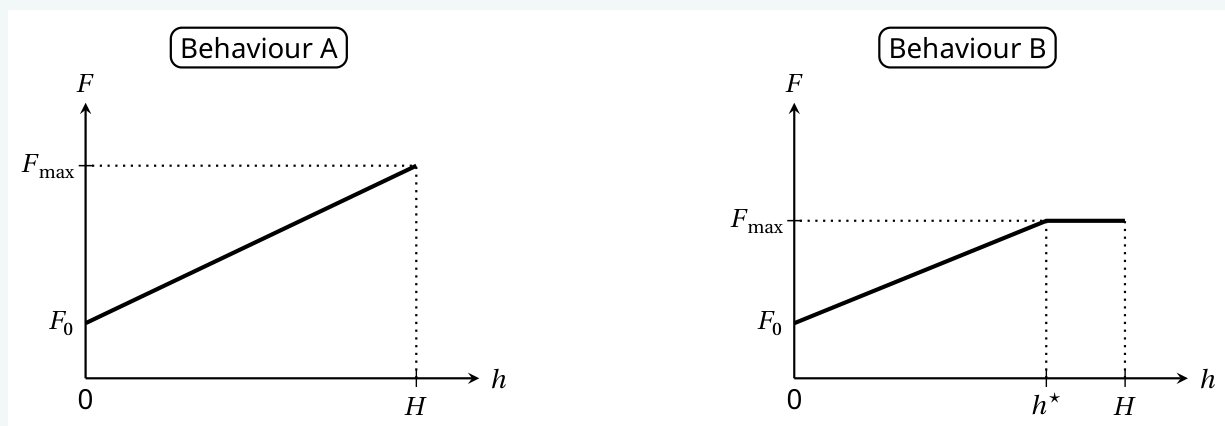
Es werden drei Versuche durchgeführt. In jedem Versuch wird das Rohr ausgehend vom Anfangszustand in Abb. 2(a) unter den in Tabelle 1 angegebenen Bedingungen angehoben.

Versuch	Flüssigkeit	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	Wasser	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Wasser	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Wasser	99	0.96×10^3	99.8×10^3

Tabelle 1. Versuchsbedingungen und Zahlenwerte der physikalischen Größen für die einzelnen Versuche

(P_{sat} bezeichnet den Sättigungsdampfdruck des reinen Fluids)

In jedem Fall untersuchen wir den Verlauf der Kraft F , die aufgebracht werden muss, um das Rohr in einer Höhe h im Gleichgewicht zu halten, wobei der Außendruck auf $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa festgelegt ist. Zwei unterschiedliche Verhaltensweisen sind möglich



A.2 — 0.8 Punkte

Vervollständigen Sie für jeden Versuch die Tabelle auf dem Antwortblatt, indem Sie das erwartete Verhalten und die Zahlenwerte für F_{max} und für h^* (sofern zutreffend) angeben. Dabei sind F_{max} und h^* in den Abbildungen definiert, welche die beiden Verhaltensweisen veranschaulichen.

Experiment	Behaviour (A or B ?)	h^* (cm)	F_{max} (N)
1			
2			
3			

Wenn wir das Wasser durch flüssiges Quecksilber ersetzen (dessen Eigenschaften unten angegeben sind), wird Verhalten B beobachtet.

Flüssigkeit	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
Quecksilber	20	13.5×10^3	0.163

A.3 — 0.3 Punkte

Geben Sie den relativen Fehler ε an, der entsteht, wenn wir bei der Berechnung der maximalen Kraft F_{max} den Druck P_{sat} gegenüber P_0 vernachlässigen. Geben Sie den Zahlenwert von ε an.

Teil B - Zweiteiliges Barometerrohr

Von nun an arbeiten wir mit Quecksilber (Dichte $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) bei der Umgebungstemperatur $T_a = 20^\circ\text{C}$ und setzen $P_{\text{sat}} = 0$.

Wir betrachten ein Rohr mit einem Vorratsgefäß am oberen Ende, das als zwei übereinander angeordnete Zylinder unterschiedlicher Abmessungen modelliert wird, wie in Abb. 3 gezeigt.

- Der untere Teil (weiterhin als Rohr bezeichnet) hat die Querschnittsfläche S_t und die Höhe $H_t = 80 \text{ cm}$;
- der obere Teil (als Erweiterung bezeichnet) hat die Querschnittsfläche $S_b > S_t$ und die Höhe $H_b = 20 \text{ cm}$.

Dieses zweiteilige Rohr wird in ein Flüssigkeitsbad eingetaucht, das einen Halbraum einnimmt.

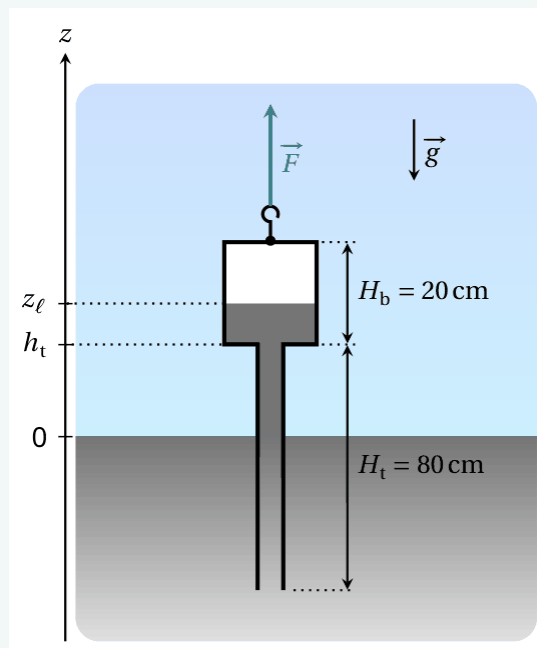


Abb. 3. Skizze des zweiteiligen Barometerrohrs

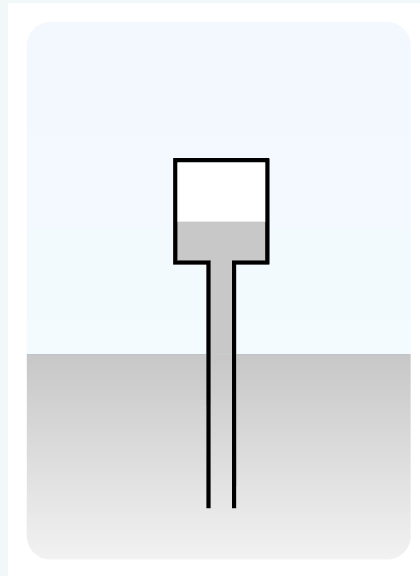
Wie in Teil A wird das System so vorbereitet, dass das Rohr keine Luft enthält. Wir kennzeichnen die vertikale Position des Rohrs durch die Höhe h_t des Übergangs zwischen dem Rohr und der Erweiterung. Die Höhe der Quecksilbersäule wird wiederum mit z_l bezeichnet. Die Kraft $\vec{F}$, die aufgebracht werden muss, um das Rohr in der in Abb. 3 gezeigten Anordnung im Gleichgewicht zu halten, lässt sich nun schreiben als

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g\vec{u}_z \quad (1)$$

wobei m_{tb} die Gesamtmasse des zweiteiligen Rohrs (ohne Quecksilber) ist.

B.1 — 0.3 Punkte

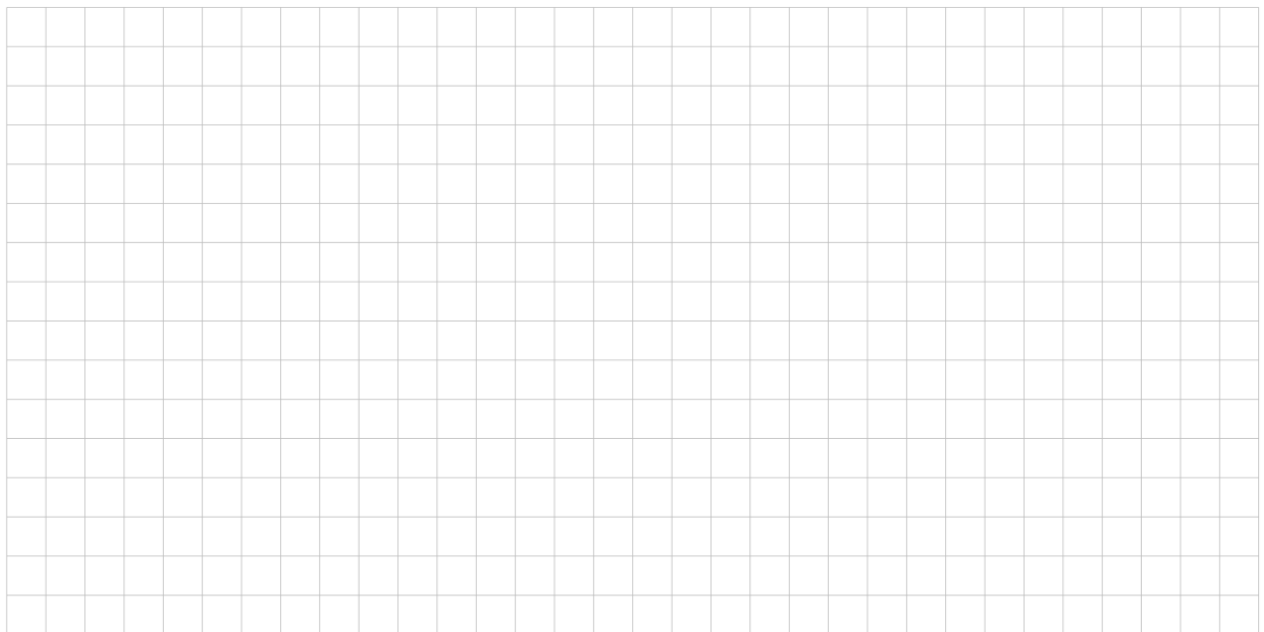
Markieren Sie auf dem Antwortblatt die Fläche farbig, die dem Volumen des flüssigen Quecksilbers entspricht, das für den Term m_{add} in Gleichung (1) verantwortlich ist.



Die Masse m_{add} hängt sowohl von der Höhe h_t als auch vom Luftdruck P_a ab. Nehmen Sie für die nächste Frage an, dass der Luftdruck auf $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ festgelegt ist. Ausgehend von einem vollständig eingetauchten System wird das Rohr langsam angehoben, bis sein unteres Ende bündig mit der Oberfläche des Flüssigkeitsbads liegt.

B.2 — 1.4 Punkte

Skizzieren Sie den Verlauf der Masse m_{add} als Funktion von h_t für $h_t \in [-H_b, H_t]$. Geben Sie im Diagramm die Ausdrücke für die Steigungen der einzelnen Abschnitte sowie die analytischen Werte von h_t an allen Knickpunkten in Abhängigkeit von $P_0, \rho, g, S_b, S_t, H_b$ und H_t an.



Beim Anheben des Systems unter $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ halten wir an, sobald sich die freie Flüssigkeitsoberfläche in der Mitte der Erweiterung befindet. Der Wert von h_t wird festgehalten. Anschließend beobachten wir Änderungen der Masse m_{add} infolge von Luftdruckschwankungen, die beschrieben werden durch

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

wobei P_0 den Mittelwert bezeichnet und P_1 einen Störterm darstellt. Wir modellieren P_1 durch eine periodische Dreiecksfunktion mit der Amplitude $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ und der Periode τ_1 von 1 Woche.

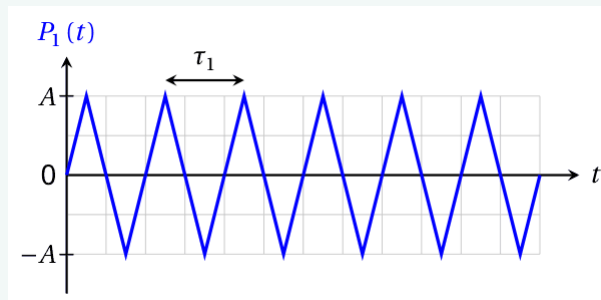


Abb. 4. Vereinfachtes Modell des Störterms $P_1(t)$

B.3 — 0.3 Punkte

Geben Sie für $S_t = 5 \text{ cm}^2$ und $S_b = 200 \text{ cm}^2$ einen Ausdruck für die Amplitude Δm_{add} der zeitlichen Schwankungen der Masse m_{add} an und berechnen Sie anschließend ihren Zahlenwert. Nehmen Sie an, dass die Flüssigkeitsoberfläche stets in der Erweiterung bleibt.

Teil C - Cox' Uhr

Der von Cox entwickelte tatsächliche Mechanismus ist komplex (Abb. 5). Wir untersuchen eine vereinfachte Version, die in Abb. 6 dargestellt und nachfolgend beschrieben ist

- ein zylindrischer unterer Behälter mit einem Quecksilberbad;
- ein zweiteiliges Barometerrohr, das mit dem in Teil B untersuchten identisch und weiterhin vollständig luftleer ist, wird in das Bad eingetaucht;
- der Behälter und das zweiteilige Rohr hängen jeweils an einem Seil. Beide Seile (als undeformierbar und von vernachlässigbarer Masse angenommen) laufen über ein System idealer Rollen und sind mit ihren Enden an gegenüberliegenden Seiten derselben Masse M befestigt, die auf einer horizontalen Fläche gleiten kann;
- das gesamte im System enthaltene Volumen an flüssigem Quecksilber beträgt $V_\ell = 5 \text{ L}$.

Die Höhen, Querschnittsflächen und Massen der einzelnen Teile sind in Tabelle 2 angegeben. Die Position der Masse M wird durch die Koordinate x ihres Schwerpunkts beschrieben. Wir berücksichtigen Festkörperreibung zwischen der horizontalen Unterlage und der Masse M , ohne zwischen Haft- und Gleitreibungskoeffizienten zu unterscheiden; der Betrag dieser Kraft beim Gleiten wird mit F_s bezeichnet.

Zwei Anschläge begrenzen die Verschiebung der Masse M , sodass $-X \leq x \leq X$ (mit $X > 0$) gilt. Nehmen Sie an, dass der Wert von X gewährleistet, dass

- das untere Ende des zweiteiligen Rohrs weder den Boden des Behälters berührt noch aus dem Flüssigkeitsbad austritt;
- die Höhe z_ℓ der Quecksilbersäule stets innerhalb der oberen Erweiterung liegt.



Abb. 5. Tatsächliche Uhr von Cox ² (ohne Quecksilber)

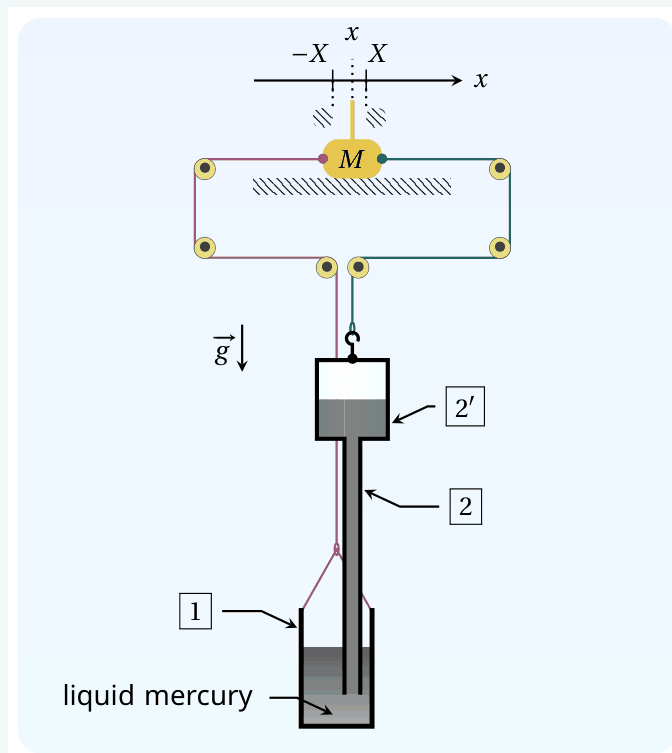


Abb. 6. Skizze des Systems zur Modellierung der Uhr

Kennzeichnung	Bezeichnung	Höhe	Querschnittsfläche	Leermasse
1	Behälter	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
2	röhrenförmiger Teil des Barometerrohrs	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	Gesamtmasse des Barometerrohrs: m_{tb}
2'	Erweiterung des Barometerrohrs	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Tabelle 2. Abmessungen und Bezeichnungen des Modellsystems

Das System entwickelt sich im Kontakt mit der Atmosphäre, deren Druck wie in Abb. 4 schwankt (weiterhin mit der Amplitude $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ und der Periode $\tau_1 = 1 \text{ Woche}$). Zu Beginn, bei $t = 0$, ruht die Masse M bei $x = 0$, und die von den beiden Seilen auf gegenüberliegenden Seiten der Masse M ausgeübten Zugkräfte gleichen sich aus, während $P_1(0) = 0$ gilt. Wir definieren

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

wobei im letzten Ausdruck $S_t \ll S_b, S_c$ verwendet wird (was wir bis zum Ende der Aufgabe als gültig annehmen).

C.1 – 1 Punkt

Bestimmen Sie den Schwellenwert ξ^* , sodass M für $\xi > \xi^*$ unbegrenzt in Ruhe bleibt.

Nehmen Sie nur für die nächste Frage an, dass die Masse M vorübergehend bei $x = X$ blockiert ist.

C.2 – 1 Punkt

Geben Sie für $P_1 = 0$ einen Ausdruck für die resultierende Seilkraft $\vec{T} = T\vec{u}_x$ an, die in dieser Position aufgrund der Zugkräfte in den beiden Seilen auf die Masse M wirkt, in Abhängigkeit von ρ, g, X und den relevanten Querschnittsflächen.

Für $\xi < \xi^*$ können, erneut ausgehend von $x = 0$ und $P_1 = 0$, für $t \geq 0$ zwei unterschiedliche Verhaltensweisen beobachtet werden. Um sie zu unterscheiden, müssen wir einen weiteren Parameter einführen

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

C.3 – 2 Punkte

Vervollständigen Sie die Tabelle auf dem Antwortblatt, indem Sie die Bedingung angeben, unter der das jeweilige Regime auftritt. Die Bedingungen sind als Ungleichungen für ξ und/oder λ auszudrücken. Skizzieren Sie außerdem die Verläufe von $x(t)/X$ für $t \in [0, 3\tau_1]$, die mit dem bereits eingezeichneten Verlauf von $P_1(t)/A$ übereinstimmen. Die Koordinaten besonderer Punkte müssen nicht angegeben werden.

	Condition for observation	Graph of $x(t)/X$
Regime 1		
Regime 2		

In der tatsächlichen Uhr von Cox wird die vom Mechanismus bereitgestellte Energie mithilfe eines Systems von Sperrklinken gespeichert und wie bei einer herkömmlichen Uhr zum Anheben eines Gegengewichts genutzt. Im hier untersuchten vereinfachten Modell entspricht die von der Uhr gewonnene Energie der Energie, die durch die von der horizontalen Fläche auf die Masse M ausgeübte Reibungskraft dissipiert wird. Von nun an nehmen wir an, dass das System so dimensioniert ist, dass es in dem Regime arbeitet, in dem die Uhr Energie gewinnen kann. Außerdem nehmen wir an, dass der eingeschwungene Zustand erreicht ist. Wir bezeichnen mit W die während einer Periode τ_1 durch die Festkörperreibung dissipierte Energie, die allein durch F_s und X ausgedrückt werden kann.

Bei ansonsten gleichen Bedingungen können F_s und X so eingestellt werden, dass die Energie W maximal wird; ihre jeweiligen Werte im optimalen Fall bezeichnen wir mit F_s^* und X^* .

C.4 — 1 Punkt

Bestimmen Sie unter den Annahmen $S_b \simeq S_c$ und $S_t \ll S_b$ die Ausdrücke für F_s^* und X^* als Funktionen von ρ , g , S_c und A . Geben Sie die entsprechende maximale Energie W^* an und berechnen Sie anschließend ihren Zahlenwert für $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$.

Mit W_{pr}^* bezeichnen wir die Arbeit der Luftdruckkräfte, die dem System im optimalen Fall während einer Periode τ_1 zugeführt wird.

C.5 — 1.7 Punkte

Geben Sie W_{pr}^* an und berechnen Sie anschließend das Verhältnis W^*/W_{pr}^* . Es kann hilfreich sein, den Verlauf des Systems in einem (P, V) -Diagramm darzustellen, wobei V das Volumen des Systems ist.

Bildnachweise:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Victoria and Albert Museum, London.

Antworten

Wir definieren

$$L = \frac{P_0}{\rho g}, \quad D = S_b + S_c - S_t, \quad q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

- A.1

$$P_w = P_0 - \rho g h, \quad \vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

- A.2

Versuch	Verhalten	h^* (cm), sofern zutreffend	$F_{\max}$ (N)
1	A	—	14.7
2	A	—	14.4
3	B	2.13	5.10

- A.3

$$\varepsilon = \frac{S P_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Wenn der Quecksilberdampfdruck vernachlässigt wird, wird die Kraft überschätzt.

- B.1 Schraffieren Sie das gesamte Quecksilber **innerhalb des Rohrs und der Erweiterung oberhalb der äußeren Badoberfläche**. In der dargestellten Anordnung gilt

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

- B.2

$$m_{\text{add}}(h_t) = \begin{cases} \rho S_b (h_t + H_b), & -H_b \leq h_t \leq 0, \\ \rho (S_b H_b + S_t h_t), & 0 \leq h_t \leq L - H_b, \\ \rho [S_b L - (S_b - S_t) h_t], & L - H_b \leq h_t \leq L, \\ \rho S_t L, & L \leq h_t \leq H_t. \end{cases}$$

Die aufeinanderfolgenden Steigungen sind

$$\rho S_b, \quad \rho S_t, \quad -\rho (S_b - S_t), \quad 0.$$

Die Knickpunkte liegen bei

$$h_t = 0, \quad L - H_b \simeq 0.556 \text{ m}, \quad L \simeq 0.756 \text{ m}.$$

- B.3

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g} = 1.02 \text{ kg}.$$

- C.1

$$\xi^* = 2.$$

- C.2

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

- C.3, für $\xi < 2$:

Regime	Bedingung	Beschreibung von $x(t)/X$
1: Verbleib an einem Anschlag	$q > 1$, äquivalent zu $\xi + 2\lambda > 2$	Zunächst 0, dann rascher Anstieg auf +1 und anschließender Verbleib dort.
2: wiederholte Hübe	$q < 1$, äquivalent zu $\xi + 2\lambda < 2$	Zunächst 0, dann Wechsel zwischen Plateaus bei +1 und -1.

Der erste positive Hub beginnt bei $P_1/A = \xi/2$. Nachfolgende negative Hübe beginnen bei $P_1/A = -q$ bei fallendem Druck und positive Hübe bei $P_1/A = q$ bei steigendem Druck. Die Grenze $q = 1$ ist ein Grenzfall; ideale Haftreibung erlaubt es der Masse, am Anschlag zu verbleiben.

- C.4 Das ideale Grenzo optimum ist

$$F_s^* = \frac{S_c A}{2} \simeq 5.25 \text{ N}, \quad X^* = \frac{A}{4\rho g} \simeq 0.945 \text{ mm},$$

$$W^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g} \simeq 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

- C.5

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} \simeq 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}, \quad \frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{1}{2}.$$

Lösung

A.1

Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht folgt

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Das Wasser steht mit dem Bad in Verbindung, in dem bei $z = 0$ der Druck $P = P_0$ herrscht. Solange das Wasser mit dem geschlossenen oberen Ende in Kontakt bleibt, gilt folglich

$$P_w = P_0 - \rho g h.$$

Der Druck auf der Außenseite des oberen Rohrendes erzeugt eine nach unten gerichtete Kraft $P_0 S$, während das Wasser darunter eine nach oben gerichtete Kraft $P_w S$ erzeugt. Die senkrechten Wände tragen keine vertikale Druckkraft bei, und ihre Dicke wird vernachlässigt. Für das Gleichgewicht muss daher gelten

$$F + P_w S - P_0 S - mg = 0.$$

Somit ist

$$\vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

A.2

Ein Dampfhlraum entsteht, sobald der Druck am oberen Ende den Sättigungsdampfdruck erreicht:

$$P_0 - \rho g h^* = P_{\text{sat}}.$$

Daraus folgt

$$h^* = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}.$$

Zuvor gilt $F = mg + \rho g S h$. Nachdem sich ein Dampfhlraum gebildet hat, bleibt sein Druck bei der vorgegebenen Temperatur gleich P_{sat} , sodass

$$F = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

Diese Ausdrücke lassen sich zusammenfassen zu

$$F(h) = mg + S \min\{\rho g h, P_0 - P_{\text{sat}}\}, \quad 0 \leq h \leq H.$$

Damit gilt:

- Falls $h^* \geq H$, tritt Verhalten A auf, und es gilt $F_{\text{max}} = mg + \rho g S H$;
- falls $h^* < H$, tritt Verhalten B auf, und es gilt $F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})$.

Mit $S = 10^{-3} \text{ m}^2$, $H = 1 \text{ m}$ und $mg = 4.90 \text{ N}$ ergibt sich:

Versuch	Berechnete Sättigungshöhe	Vergleich mit H	Ergebnis
1	$\frac{100000 - 2340}{1000(9.8)} = 9.97 \text{ m}$	Oberhalb von H	A; $F_{\text{max}} = 14.7 \text{ N}$
2	$\frac{100000 - 47400}{970(9.8)} = 5.53 \text{ m}$	Oberhalb von H	A; $F_{\text{max}} = 14.406 \text{ N} \simeq 14.4 \text{ N}$
3	$\frac{100000 - 99800}{960(9.8)} = 0.02126 \text{ m}$	Unterhalb von H	B; $h^* = 2.13 \text{ cm}$, $F_{\text{max}} = 5.10 \text{ N}$

Beide Graphen beginnen bei $F_0 = mg = 4.90 \text{ N}$.

A.3

Für Quecksilber lauten die tatsächliche maximale Kraft und ihr Näherungswert

$$F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad F_{\text{max}}^{(0)} = mg + S P_0.$$

Die Näherung überschätzt die Kraft um $S P_{\text{sat}}$. Bezogen auf die tatsächliche Kraft gilt

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{max}}^{(0)} - F_{\text{max}}}{F_{\text{max}}} = \frac{S P_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{10^{-3}(0.163)}{0.5(9.8) + 10^{-3}(100000 - 0.163)} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

Dies entspricht ungefähr 0.000155%.

B.1

Die zusätzliche Last ist das Gewicht des Quecksilbers, das über die äußere Badoberfläche angehoben wurde. Quecksilber unterhalb dieses Niveaus wird hydrostatisch vom Bad getragen.

Daher sind in der Abbildung auf dem Antwortblatt zu schraffieren:

- das Quecksilber im engen Rohr von der äußeren Badoberfläche bis zum Übergang zwischen Rohr und Erweiterung;
- das gesamte Quecksilber in der Erweiterung, von ihrem Boden bis zu ihrer inneren freien Oberfläche.

Das Quecksilber unterhalb der äußeren Badoberfläche darf nicht schraffiert werden. Für die dargestellte Anordnung gilt

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

Da der Druck oberhalb der inneren Oberfläche null ist, gilt

$$z_\ell = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Ein äquivalenter nützlicher Ausdruck lautet daher

$$m_{\text{add}} = \frac{S_b P_a}{g} - \rho (S_b - S_t) h_t$$

wenn die freie Oberfläche in der Erweiterung und der Übergang oberhalb der äußeren Badoberfläche liegt.

B.2

Wir führen die barometrische Höhe ein:

$$L = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 0.75586 \text{ m.}$$

Für die gegebenen Abmessungen gilt

$$0 < L - H_b < L < H_t.$$

Bis das obere Ende die Höhe L erreicht, bleibt das Rohr vollständig gefüllt. Danach bleibt die innere freie Oberfläche bei $z_\ell = L$, während das Rohr weiter angehoben wird.

Es gibt vier geometrisch unterschiedliche Intervalle.

1. $-H_b \leq h_t \leq 0$.

Nur ein Abschnitt der Erweiterung mit der Höhe $h_t + H_b$ liegt oberhalb des Bads:

$$m_{\text{add}} = \rho S_b (h_t + H_b).$$

Der Graph beginnt bei $(-H_b, 0)$ mit der Steigung ρS_b .

2. $0 \leq h_t \leq L - H_b$.

Die gesamte Erweiterung und ein Abschnitt des engen Rohrs der Länge h_t liegen oberhalb des Bads und sind vollständig mit Quecksilber gefüllt:

$$m_{\text{add}} = \rho(S_b H_b + S_t h_t).$$

Der Graph steigt mit der kleineren Steigung ρS_t weiter an.

$$3. \quad L - H_b \leq h_t \leq L.$$

Über dem Quecksilber bildet sich ein Vakuum, während seine Oberfläche innerhalb der Erweiterung auf der Höhe L bleibt:

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t h_t + S_b(L - h_t)].$$

Die Steigung beträgt $-\rho(S_b - S_t)$, der Graph fällt also ab.

$$4. \quad L \leq h_t \leq H_t.$$

Die Erweiterung ist leer, und die innere freie Oberfläche liegt im engen Rohr:

$$m_{\text{add}} = \rho S_t L = \frac{S_t P_0}{g}.$$

Der Graph verläuft horizontal.

Der Graph ist stetig und hat die folgenden Eckpunkte und den folgenden Endpunkt:

h_t	m_{add}
$-H_b$	0
0	$\rho S_b H_b$
$L - H_b$	$\rho[S_b H_b + S_t(L - H_b)]$, das Maximum
L	$\rho S_t L$
H_t	$\rho S_t L$

Die horizontalen Koordinaten seiner drei Knickpunkte lauten

$$0, \quad \frac{P_0}{\rho g} - H_b, \quad \frac{P_0}{\rho g},$$

numerisch 0, 55.6 cm und 75.6 cm.

B.3

In der vorgegebenen festen Position bleibt die freie Oberfläche innerhalb der Erweiterung. Somit gilt

$$m_{\text{add}}(t) = \frac{S_b[P_0 + P_1(t)]}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t.$$

Nur der erste Term ändert sich, sodass die Amplitude beträgt

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g}.$$

Mit $S_b = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$ folgt

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{0.0200(500)}{9.8} = 1.02 \text{ kg}.$$

Dies ist die Amplitude um den Mittelwert; die Differenz zwischen Höchst- und Tiefstwert beträgt 2.04 kg. Die entsprechende Amplitude der Oberflächenhöhe ist

$$\frac{A}{\rho g} = 3.78 \text{ mm},$$

also deutlich kleiner als der Abstand von 10 cm zwischen der Mitte der Erweiterung und ihrem jeweiligen Ende.

C.1

Wir bestimmen zunächst die Differenz der Seilkräfte für beliebige x und P_1 .

Mit z_s bezeichnen wir die äußere Quecksilberoberfläche und mit z_c den Behälterboden. Aufgrund der Seilanordnung bewirkt eine Verschiebung der Masse um x nach rechts:

- ein Anheben des Behälters um x ;
- ein Absenken des Barometerrohrs um x .

Daher gilt

$$z_c = z_{c0} + x, \quad h_t = h_{t0} - x.$$

Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht folgt

$$z_\ell - z_s = \frac{P_a}{\rho g}.$$

Das Quecksilber oberhalb der äußeren Oberfläche hat die Masse

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t(h_t - z_s) + S_b(z_\ell - h_t)] = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)(h_t - z_s).$$

Da das Volumen der Rohrwände vernachlässigbar ist, lässt sich die Erhaltung der Quecksilbermenge schreiben als

$$V_\ell = S_c(z_s - z_c) + \frac{m_{\text{add}}}{\rho}.$$

Mit $\delta m = m_{\text{add}} - m_{\text{add},0}$ folgt daraus

$$\delta z_s = x - \frac{\delta m}{\rho S_c}.$$

Subtrahiert man den anfänglichen Ausdruck für m_{add} von seinem aktuellen Wert, erhält man

$$\delta m = \frac{S_b P_1}{g} + \rho(S_b - S_t)(x + \delta z_s).$$

Folglich gilt

$$\boxed{\delta m = \frac{S_b S_c}{(S_b + S_c - S_t)g} P_1 + \frac{2\rho S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} x}.$$

In einer ruhenden Anordnung beträgt die Seilkraft auf der Rohrseite

$$T_{\text{tb}} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g,$$

während die Seilkraft auf der Behälterseite beträgt

$$T_c = (m_c + \rho V_\ell - m_{\text{add}})g.$$

Ihre anfängliche Differenz ist null. Die vorzeichenbehaftete Kraft auf M , positiv nach rechts, ist daher

$$T = T_{\text{tb}} - T_c = 2g \delta m.$$

Wir definieren

$$K = \frac{S_b S_c}{S_b + S_c - S_t}, \quad \alpha = \frac{2\rho g(S_b - S_t)}{S_b}.$$

Das resultierende Kraftgesetz lautet

$$T = 2K(P_1 + \alpha x).$$

Für die gegebenen Parameter gilt

$$F_s = KA\xi, \quad \alpha X = A\lambda.$$

Bei $x = 0$ beträgt der maximale Kraftbetrag während des Luftdruckzyklus $2KA$. Die Haftreibung kann ihn während des gesamten Zyklus ausgleichen, wenn

$$F_s \geq 2KA \iff \xi \geq 2.$$

Somit lautet der gesuchte Schwellenwert

$$\xi^* = 2.$$

C.2

Setzen wir $P_1 = 0$ und $x = X$ in das Kraftgesetz ein, erhalten wir

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x.$$

Mit $S_t \ll S_b, S_c$ folgt

$$\vec{T} \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

Das positive Vorzeichen ist wesentlich: Eine Verschiebung nach rechts erzeugt eine zusätzliche Kraft nach rechts. Das Gleichgewicht ist mechanisch instabil, sobald die Reibung die Masse nicht mehr halten kann.

C.3

Für die Skizzen verwenden wir den Grenzfall langsamer Anregung durch den Luftdruck: Der Übergang zwischen den Anschlägen erfolgt schnell im Vergleich zur einwöchigen Druckperiode. Die Anschläge bringen das bewegte System zum Stillstand.

Wir schreiben

$$p = \frac{P_1}{A}, \quad y = \frac{x}{X}.$$

Dann gilt

$$\frac{T}{KA} = 2(p + \lambda y), \quad \frac{F_s}{KA} = \xi.$$

Anfangs ist $y = 0$, und p steigt von null an. Die Bewegung nach rechts beginnt, sobald p den folgenden Wert überschreitet:

$$p = \frac{\xi}{2}.$$

Da $\partial T / \partial x = 2K\alpha > 0$ gilt, erhöht eine Bewegung nach rechts die antreibende Kraft. Die Masse erreicht rasch $y = +1$.

Am rechten Anschlag erfordert das Loslösen nach links

$$T < -F_s.$$

Somit gilt

$$2(p + \lambda) < -\xi \iff p < -\left(\lambda + \frac{\xi}{2}\right).$$

Wir definieren

$$q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

Für $q > 1$ wird der Druck niemals niedrig genug, um die Masse vom Anschlag zu lösen. Für $q < 1$ löst sie sich in jedem Halbzyklus mit abnehmendem Druck. Die entsprechende Bedingung für das Loslösen am linken Anschlag lautet $p > q$.

Die beiden Regime sind daher:

Regime	Bedingung	Genaue Beschreibung der Skizze
1: dauerhafter Verbleib am rechten Anschlag	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda > 2$	Zeichnen Sie zunächst $x/X = 0$, gefolgt von einem raschen Anstieg auf $+1$ auf dem ersten ansteigenden Druckast bei $p = \xi/2$. Führen Sie den Graphen bei $+1$ horizontal bis $3\tau_1$ fort.
2: wiederholte Bewegung zwischen den Anschlägen	$\xi < 2,$ $\xi + 2\lambda < 2$	Beginnen Sie mit demselben anfänglichen Anstieg. Zeichnen Sie anschließend horizontale Plateaus bei $+1$ und -1 , verbunden durch rasche Übergänge nach unten, sobald der fallende Druck $p = -q$ erreicht, und durch Übergänge nach oben, sobald der steigende Druck $p = q$ erreicht.

Um die Übergänge explizit zu positionieren, setzen wir $s = t/\tau_1$. Der erste positive Übergang liegt bei

$$s = \frac{\xi}{8}.$$

Im zyklischen Regime liegen die negativen Übergänge innerhalb des gefragten Intervalls bei

$$s = \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{3}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{5}{2} + \frac{q}{4},$$

und die nachfolgenden positiven Übergänge liegen bei

$$s = 1 + \frac{q}{4}, \quad 2 + \frac{q}{4}.$$

Damit ist die geforderte Skizze über drei Perioden vollständig festgelegt.

Bei $q = 1$ wird die Loslöseschwelle lediglich an einem Druckextremum berührt. Exakte ideale Haftreibung kann die Masse am Anschlag halten; ein anhaltender zyklischer Betrieb wird durch die strikte Ungleichung $q < 1$ gewährleistet.

C.4

Im eingeschwungenen zyklischen Regime bewegt sich die Masse während jeder Periode von einem Anschlag zum anderen und zurück. Ihre gesamte Gleitstrecke beträgt $4X$, sodass

$$\boxed{W = 4F_s X}.$$

Mit $S_b \simeq S_c$ und $S_t \ll S_b$ gilt

$$\xi \simeq \frac{2F_s}{S_c A}, \quad \lambda \simeq \frac{2\rho g X}{A}.$$

Die Bedingung für den zyklischen Betrieb wird zu

$$\xi + 2\lambda < 2 \iff F_s < S_c(A - 2\rho gX).$$

Bei festem X nähert sich die Energie ihrem größtmöglichen Wert, wenn sich F_s dieser oberen Schranke nähert. Ihre Grenzkurve lautet

$$W(X) = 4S_cX(A - 2\rho gX).$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$\frac{dW}{dX} = 4S_c(A - 4\rho gX).$$

Das Optimum liegt daher bei

$$\boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g}}, \quad \boxed{F_s^* = \frac{S_c A}{2}}.$$

Äquivalent gilt

$$\xi_{\text{opt}} = 1, \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist

$$\boxed{W^* = 4F_s^* X^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g}}.$$

Mit $S_c = 0.0210 \text{ m}^2$ ergibt sich

$$F_s^* = \frac{0.0210(500)}{2} = 5.25 \text{ N},$$

$$X^* = \frac{500}{4(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m},$$

und

$$\boxed{W^* = \frac{0.0210(500)^2}{2(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}}.$$

Streng genommen liegen diese Werte auf der Grenzlinie des Umschaltens. Sie ergeben das ideale Grenzmaximum, dem man sich von der Seite des zyklischen Betriebs nähert; für einen zuverlässigen Betrieb ist ein kleiner Abstand innerhalb dieser Grenze erforderlich.

C.5

Das für die Arbeit des Luftdrucks relevante Volumen umfasst das oberhalb des Quecksilbers eingeschlossene Vakuum. Das Flüssigkeitsvolumen und das Materialvolumen der Gefäße sind konstant, sodass

$$V = V_{\text{constant}} + V_{\text{vac}}, \quad V_{\text{vac}} = S_b(h_t + H_b - z_\ell).$$

Wir verwenden dieselbe Näherung wie in C.4:

$$S_b = S_c = S, \quad S_t = 0.$$

Aus der in C.1 hergeleiteten Erhaltungsbeziehung und den hydrostatischen Beziehungen folgt dann

$$\delta z_s = -\frac{P_1}{2\rho g}, \quad \delta z_\ell = \frac{P_1}{2\rho g}.$$

Da $\delta h_t = -x$ gilt, erhalten wir

$$V = V_{\text{ref}} - Sx - \frac{S}{2\rho g} P_1.$$

Die dem System zugeführte Arbeit des Luftdrucks ist

$$W_{\text{pr}} = - \oint P_a dV.$$

Einsetzen ergibt

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_a dx + \frac{S}{2\rho g} \oint P_a dP_1.$$

Das zweite Integral verschwindet über einen geschlossenen Zyklus. Außerdem gilt $P_0 \oint dx = 0$. Daher ist

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_1 dx.$$

Im Grenzoptimum gilt $q = 1$. Der positive Hub erfolgt bei $P_1 = +A$ mit $\Delta x = 2X^*$, während der negative Hub bei $P_1 = -A$ mit $\Delta x = -2X^*$ erfolgt. Folglich gilt

$$W_{\text{pr}}^* = S[A(2X^*) + (-A)(-2X^*)] = 4SAX^*.$$

Somit ist

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

In einem Diagramm mit V auf der horizontalen und P_a auf der vertikalen Achse ist der Zyklus ein Parallelogramm:

- An jedem festen Anschlag gilt $dV/dP_a = -S_c/(2\rho g)$, wodurch zwei parallele geneigte Äste entstehen;
- ihr horizontaler Abstand beträgt $2S_c X^*$;
- Hübe bei konstantem Druck verbinden sie bei $P_0 + A$ und $P_0 - A$;
- der Zyklus wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, wodurch eine positive zugeführte Arbeit entsteht, die seinem Flächeninhalt entspricht,

$$(2A)(2S_c X^*) = 4S_c A X^*.$$

Schließlich gilt

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{S_c A^2/(2\rho g)}{S_c A^2/(\rho g)} = \frac{1}{2}.$$

Die andere Hälfte wird während der raschen Hübe in kinetische Energie umgewandelt und dissipiert, wenn das bewegte System an den Anschlägen zum Stillstand gebracht wird.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Champagner!

Warnung: Übermäßiger Alkoholkonsum ist gesundheitsschädlich, und der Konsum von Alkohol unterhalb des gesetzlichen Mindestalters ist verboten.

Champagner ist ein französischer Schaumwein. Durch die Vergärung von Zucker entsteht Kohlendioxid (CO_2) in der Flasche. Die Stoffmengenkonzentration von CO_2 in der flüssigen Phase c_ℓ und der Partialdruck P_{CO_2} in der Gasphase hängen über $c_\ell = k_{\text{H}} P_{\text{CO}_2}$ zusammen. Dieser Zusammenhang ist als Henry-Gesetz bekannt; k_{H} wird als Henry-Konstante bezeichnet.

Daten

- Oberflächenspannung von Champagner $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- Dichte der Flüssigkeit $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Henry-Konstante bei $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $k_{\text{H}}(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Henry-Konstante bei $T_0 = 6^\circ\text{C}$, $k_{\text{H}}(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Atmosphärendruck $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Die Gase sind ideal und haben einen Adiabatenexponenten $\gamma = 1.3$



Abb. 1. Ein mit Champagner gefülltes Glas.

Teil A. Keimbildung, Wachstum und Aufstieg von Blasen

Unmittelbar nach dem Öffnen einer Champagnerflasche bei der Temperatur $T_0 = 20^\circ\text{C}$ füllen wir ein Glas. Der Druck in der Flüssigkeit beträgt P_0 , und ihre Temperatur bleibt konstant bei T_0 . Die Konzentration c_ℓ des gelösten CO_2 übersteigt die Gleichgewichtskonzentration, und wir untersuchen die Keimbildung einer CO_2 -Blase. Ihren Radius bezeichnen wir mit a und ihren Innendruck mit P_b .

A.1 — 0.2 Punkte

Drücken Sie den Druck P_b durch P_0 , a und σ aus.

In der Flüssigkeit hängt die Konzentration des gelösten CO_2 vom Abstand zur Blase ab. In großer Entfernung nimmt sie wieder den Wert c_ℓ an; die Konzentration nahe der Blasenoberfläche bezeichnen wir mit c_b . Nach dem Henry-Gesetz gilt $c_b = k_{\text{H}} P_b$. Außerdem nehmen wir in der gesamten Aufgabe an, dass die Blasen ausschließlich CO_2 enthalten.

Da $c_\ell \neq c_b$, diffundieren CO_2 -Moleküle aus Bereichen hoher in Bereiche niedriger Konzentration. Wir nehmen zudem an, dass jedes Molekül aus der flüssigen Phase, das die Blasenoberfläche erreicht, in die Dampfphase übergeht.

A.2 — 0.5 Punkte

Drücken Sie den kritischen Radius a_c , oberhalb dessen eine Blase voraussichtlich wächst, durch P_0, σ, c_ℓ und c_0 aus, wobei $c_0 = k_H P_0$ ist. Berechnen Sie den Zahlenwert von a_c für $c_\ell = 4c_0$.

In der Praxis wachsen Blasen hauptsächlich aus bereits vorhandenen gasgefüllten Hohlräumen. Betrachten Sie daher eine Blase mit dem Anfangsradius $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$. Die Stoffmenge an CO_2 , die pro Flächen- und Zeiteinheit an der Blasenoberfläche übertragen wird, wird mit j bezeichnet. Für j kommen zwei Modelle infrage.

- Modell (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$, wobei D der Diffusionskoeffizient von CO_2 in der Flüssigkeit ist.
- Modell (2) $j = K(c_\ell - c_b)$, wobei K hier eine Konstante ist.

Experimentell ergibt sich für den Blasenradius $a(t)$ die in **Abb. 2** dargestellte Zeitabhängigkeit. Hier gilt $c_\ell \approx 4c_0$, und da die Blasen groß genug sind, um sichtbar zu sein, kann der durch die Oberflächenspannung verursachte Überdruck vernachlässigt werden; somit gilt $P_b \approx P_0$.

A.3 — 1.2 Punkte

Drücken Sie die Stoffmenge n_c des CO_2 in der Blase durch a, P_0, T_0 und die universelle Gaskonstante R aus. Bestimmen Sie $a(t)$ für beide Modelle. Geben Sie an, welches Modell die experimentellen Ergebnisse in **Abb. 2** erklärt. Berechnen Sie je nach Ihrer Antwort den Zahlenwert von K oder D .

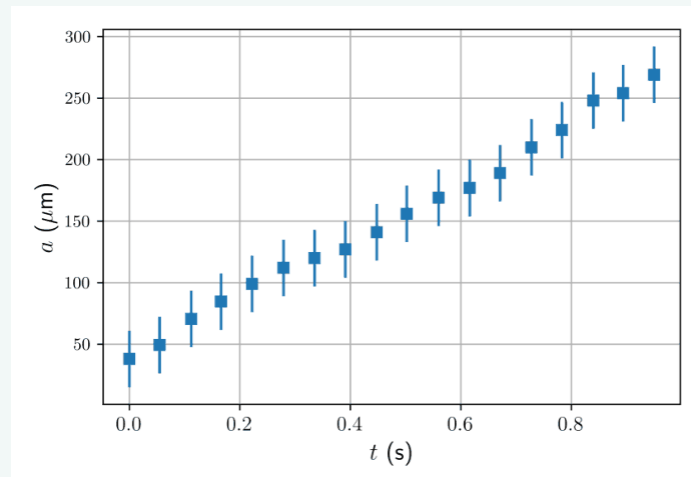


Abb. 2. Zeitliche Entwicklung des Radius einer CO_2 -Blase in einem Glas Champagner (nach [1]).

Schließlich lösen sich die Blasen vom Glasboden und wachsen während ihres Aufstiegs weiter.

Abb. 3. zeigt eine Blasenkette. Die Blasen dieser Kette haben denselben Anfangsradius und werden mit einer konstanten Frequenz $f_b = 20 \text{ Hz}$ freigesetzt.

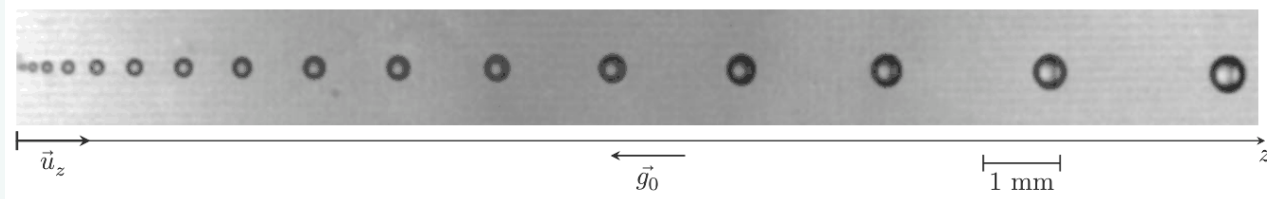


Abb. 3. Eine Blasenkette. Für das Seitenlayout wurde das Foto in die Horizontale gedreht (nach [1]).

Im hier untersuchten Geschwindigkeitsbereich ist die Widerstandskraft F auf eine Blase mit dem Radius a , die sich mit der Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität η bewegt, durch das Stokes-Gesetz $F = 6\pi\eta av$ gegeben. Messungen zeigen, dass zu jedem Zeitpunkt angenommen werden kann, dass sich die Blase mit ihrer Endgeschwindigkeit bewegt.

A.4 — 0.8 Punkte

Geben Sie die Ausdrücke für die wesentlichen Kräfte an, die auf eine senkrecht aufsteigende Blase wirken. Leiten Sie den Ausdruck für $v(a)$ her. Schätzen Sie den Zahlenwert von η mithilfe von ρ_ℓ , g_0 und Größen ab, die Sie aus **Abb. 3** abmessen.

Das quasistationäre Blasenwachstum mit der Rate $q_a = \frac{da}{dt}$ gilt auch während des Blasenanstiegs.

A.5 — 0.5 Punkte

Drücken Sie den Radius a_{H_ℓ} einer Blase beim Erreichen der freien Oberfläche durch die zurückgelegte Höhe H_ℓ , die Wachstumsrate $q_a = \frac{da}{dt}$ und gegebenenfalls benötigte Konstanten aus. Nehmen Sie $a_{H_\ell} \gg a_0$ und ein konstantes q_a an und geben Sie den Zahlenwert von a_{H_ℓ} für $H_\ell = 10 \text{ cm}$ und das zu **Abb. 2** gehörige q_a an.

Es gibt N_b Keimbildungsstellen für Blasen. Nehmen Sie an, dass die Blasen mit einer konstanten Frequenz f_b am Boden eines Champagnerglases entstehen (Höhe H_ℓ bei einem Volumen V_ℓ), wobei a_0 weiterhin vernachlässigbar ist. Vernachlässigen Sie die Diffusion von CO_2 an der freien Oberfläche.

A.6 — 1.1 Punkte

Stellen Sie die Differentialgleichung für $c_\ell(t)$ auf. Bestimmen Sie aus dieser Gleichung die charakteristische Zeit τ für die Abnahme der Konzentration des gelösten CO_2 in der Flüssigkeit.

Teil B. Schallemission einer platzenden Blase

Kleine Blasen sind beim Erreichen der freien Oberfläche nahezu kugelförmig. Sobald der Flüssigkeitsfilm, der die Blase von der Luft trennt, ausreichend dünn geworden ist, bildet sich im Film ein kreisförmiges Loch mit dem Radius r , das sich, angetrieben durch die Oberflächenspannung, sehr schnell öffnet (**Abb. 4.** links). Das Loch öffnet sich mit konstanter Geschwindigkeit v_f (**Abb. 4.** rechts). Der Film außerhalb des Randwulstes bleibt in Ruhe und hat eine konstante Dicke h .

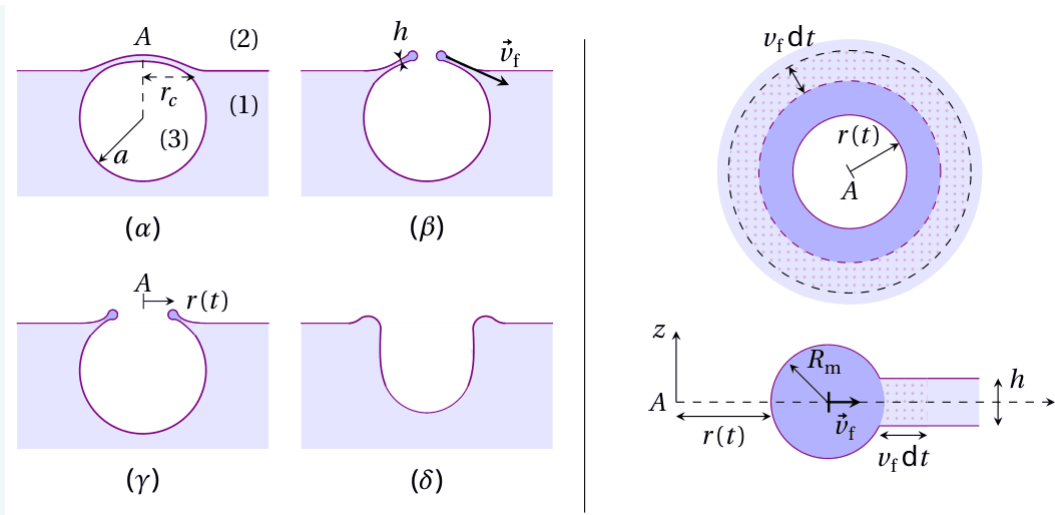


Abb. 4. (Links) (α) Blase an der Oberfläche: (1) Flüssigkeit, (2) Luft beim Druck P_0 und (3) CO_2 beim Druck P_b , (β) und (γ) Zurückziehen des Flüssigkeitsfilms, wobei der Randwulst dunkelblau dargestellt ist, (δ) Kollaps der Blase. (Rechts) Zurückziehen des Flüssigkeitsfilms zum Zeitpunkt t . Oben: Skizze des durchlöchernten Films in der Draufsicht. Unten: Querschnitt durch den Randwulst und den sich zurückziehenden Film. Während dt nimmt der Randwulst benachbarte Flüssigkeit auf (gepunktet).

Aufgrund dissipativer Prozesse wird nur die Hälfte der Differenz der Oberflächenenergie des Randwulstes und der aufgenommenen Flüssigkeit zwischen t und $t + dt$ in kinetische Energie umgewandelt. Wir nehmen außerdem an, dass die Änderung der Oberfläche des Randwulstes gegenüber derjenigen des Films vernachlässigbar ist.

B.1 — 1.1 Punkte

Drücken Sie v_f durch ρ_ℓ , σ und h aus.

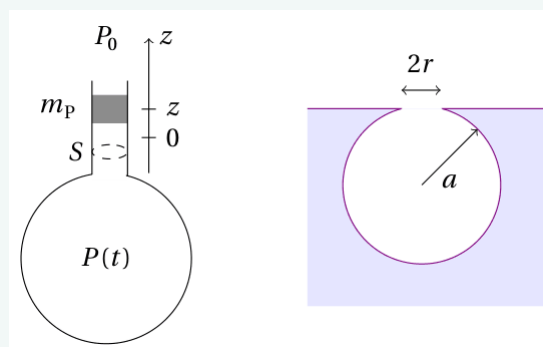


Abb. 5. (Links) Ein Helmholtz-Resonator. (Rechts) Eine Blase als Oszillator.

Wenn der Film platzt, baut sich der Innendruck ab und es wird Schall emittiert. Wir modellieren diese Schallemission durch einen Helmholtz-Resonator: einen Hohlraum, der über eine enge Halsöffnung mit der Querschnittsfläche S mit der Atmosphäre beim Druck P_0 verbunden ist (**Abb. 5. links**). Im Hals führt eine Masse m_p aufgrund der auf sie wirkenden Druckkräfte Schwingungen kleiner Amplitude aus, während sich das Gas im Hohlraum adiabatisch ausdehnt oder zusammengezogen wird. Die Gewichtskraft auf m_p ist gegenüber den Druckkräften vernachlässigbar. Sei V_0 das Volumen des Gases unterhalb der Masse m_p für $P = P_0$ bei $z = 0$.

B.2 — 1.1 Punkte

Geben Sie einen Ausdruck für die Schwingungsfrequenz f_0 von m_p an. Hinweis: Für $\varepsilon \ll 1$ gilt $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

Das Helmholtz-Modell lässt sich auf eine Blase mit dem Radius a anwenden. V_0 ist das Volumen der geschlossenen Blase. Laut Literatur beträgt die Masse des äquivalenten Kolbens $m_p = 8\rho_g r^3/3$, wobei r der Radius der kreisförmigen Öffnung und $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ die Dichte des Gases ist (**Abb. 5. rechts**). Während des Platzens wächst r von 0 auf r_c , gegeben durch

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

Gleichzeitig steigt die Frequenz des emittierten Schalls bis zu einem Maximalwert von 40 kHz, und die Dauer des Platzens beträgt $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

B.3 — 1.1 Punkte

Bestimmen Sie den Radius a und die Dicke h des Champagnerfilms, der die Blase von der Atmosphäre trennt.

Teil C. Die Champagnerkorken knallen lassen

In einer Flasche beträgt die gesamte Stoffmenge an CO_2 $n_T = 0.2 \text{ mol}$. Es liegt entweder gelöst im Volumen $V_L = 750 \text{ mL}$ des flüssigen Champagners oder als Gas im Volumen $V_G = 25 \text{ mL}$ unter dem Korken vor (**Abb. 6. links**). V_G enthält ausschließlich CO_2 . Das Gleichgewicht zwischen den beiden CO_2 -Phasen folgt dem Henry-Gesetz. Wir nehmen an, dass die schnelle Expansion des gasförmigen CO_2 beim Öffnen der Flasche adiabatisch und reversibel verläuft. Die Umgebungstemperatur T_0 und der Umgebungsdruck $P_0 = 1 \text{ bar}$ sind konstant.

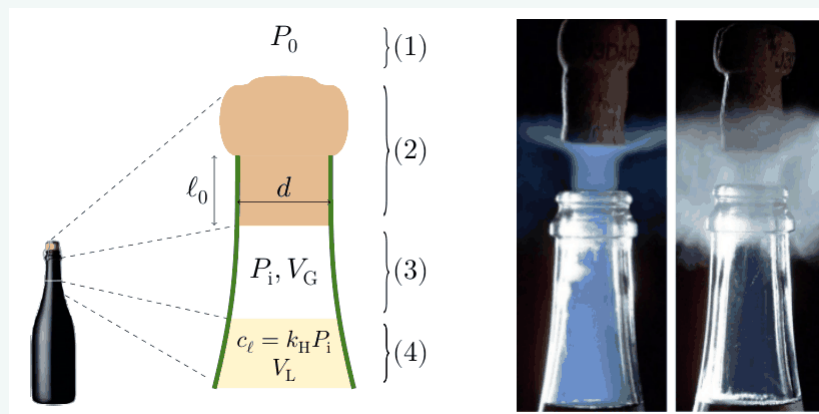


Abb. 6. Links: herkömmlicher Flaschenhals: (1) Umgebungsluft, (2) Korken, (3) Kopfraum, (4) flüssiger Champagner. Rechts: Zwei Phänomene, die beim Öffnen der Flasche bei zwei verschiedenen Temperaturen beobachtet werden (nach [2]).

C.1 — 0.4 Punkte

Geben Sie den Zahlenwert des Drucks P_i des gasförmigen CO_2 in der Flasche für $T_0 = 6^\circ\text{C}$ und $T_0 = 20^\circ\text{C}$ an.

Ein weiterer Schritt der Champagnerherstellung (hier nicht beschrieben) führt zu den folgenden Werten von P_i , die wir für die nächsten Fragen verwenden: $P_i = 4.69 \text{ bar}$ bei $T_0 = 6^\circ\text{C}$ und $P_i = 7.45 \text{ bar}$ bei $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Beim Öffnen der Flasche können abhängig von T_0 zwei verschiedene Phänomene beobachtet werden (**Abb. 6.** rechts).

- Entweder erscheint ein blauer Nebel aufgrund der Bildung fester CO_2 -Kristalle (wobei die Kondensation von Wasser unterdrückt wird);
- oder es erscheint ein grauweißer Nebel aufgrund der Kondensation von Wasserdampf in der Luft um den Flaschenhals. In diesem letzteren Fall bilden sich keine festen CO_2 -Kristalle.

Für den Sättigungsdampfdruck $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ des Feststoff-Gas-Übergangs von CO_2 gilt:

$$\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$$

mit T in K, $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3 \text{ K}$ und $C = -3.49 \text{ K}$.

C.2 — 0.7 Punkte

Geben Sie den Zahlenwert der Temperatur T_f des CO_2 -Gases am Ende der Expansion nach dem Öffnen einer Flasche für $T_0 = 6^\circ\text{C}$ und für $T_0 = 20^\circ\text{C}$ an, falls kein Phasenübergang stattgefunden hätte.

Wählen Sie die zutreffenden Aussagen aus (mehrere Aussagen sind möglich):

1. Bei $T_0 = 6^\circ\text{C}$ erscheint beim Öffnen der Flasche ein grauweißer Nebel.
2. Bei $T_0 = 6^\circ\text{C}$ erscheint beim Öffnen der Flasche ein blauer Nebel.
3. Bei $T_0 = 20^\circ\text{C}$ erscheint beim Öffnen der Flasche ein grauweißer Nebel.
4. Bei $T_0 = 20^\circ\text{C}$ erscheint beim Öffnen der Flasche ein blauer Nebel.

Beim Öffnen der Flasche wird der Korken herausgeschleudert. Wir bestimmen nun die maximale Höhe H_c , die er erreicht. Nehmen Sie an, dass die vom Flaschenhals auf den Korken ausgeübte Reibungskraft F durch $F = \alpha A$ gegeben ist, wobei A die Kontaktfläche und α eine zu bestimmende Konstante ist. Anfangs übersteigt die Druckkraft die Reibungskraft geringfügig. Die Masse des Korkens beträgt $m = 10 \text{ g}$, sein Durchmesser $d = 1.8 \text{ cm}$ und die Länge des zylindrischen Teils, der anfangs im Flaschenhals steckt, $\ell_0 = 2.5 \text{ cm}$. Sobald der Korken den Flaschenhals verlassen hat, können Sie die resultierende Druckkraft vernachlässigen.

C.3 — 1.3 Punkte

Geben Sie den Zahlenwert von H_c an, wenn die Außentemperatur $T_0 = 6^\circ\text{C}$ beträgt.

[1] Liger-Belair et al, Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, No. 3 (1999).

[2] Liger-Belair et al., Sc. Reports **7**, 10938 (2017).

Allgemeines Datenblatt

Konstante	Symbol	Wert	Einheit
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Planck-Konstante	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Konstante	Symbol	Wert	Einheit
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Universelle Gaskonstante	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Universelle Gravitationskonstante	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Normfallbeschleunigung	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Vakuumpermeabilität (magnetische Feldkonstante)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vakuumpermittivität (elektrische Feldkonstante)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Rydberg-Konstante	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Masse des Elektrons	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Masse des Protons	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Masse des Neutrons	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Atomare Massenkonstante	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Elektronenvolt	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier ist $\Delta c = c_\ell - c_0$, und g_0 ist die im Datenblatt angegebene Fallbeschleunigung.

- A.1

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

- A.2

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

Für $c_\ell = 4c_0$ gilt

$$a_c = 3.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.31 \mu\text{m}.$$

- **A.3**

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0},$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0\Delta c}{P_0}t},$$

$$a_{(2)}(t) = a_0 + \frac{KRT_0\Delta c}{P_0}t.$$

Modell (2) beschreibt das näherungsweise lineare Wachstum:

$$q_a \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}, \quad K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

- **A.4** Die Auftriebskraft $4\pi\rho_\ell g_0 a^3/3$ wirkt nach oben; die Stokes-Reibungskraft $6\pi\eta a v$ und die vernachlässigbare Gewichtskraft der Blase wirken nach unten.

$$v(a) \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}, \quad \eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

aus näherungsweisen Messungen anhand von Abb. 3.

- **A.5**

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

- **A.6**

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0), \quad \tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

- **B.1**

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

- **B.2**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

- **B.3**

$$a \approx 5.3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.53 \text{ mm}, \quad h \approx 3.8 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.8 \mu\text{m}.$$

- **C.1**

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

- **C.2** Mit den für diesen Teil vorgegebenen Ersatzwerten der Drücke:

$$T_f(6^\circ\text{C}) \approx 195.4 \text{ K } (-77.7^\circ\text{C}),$$

$$T_f(20^\circ\text{C}) \approx 184.4 \text{ K } (-88.7^\circ\text{C}).$$

Die zutreffenden Aussagen sind **1 und 4**: grauweißer Nebel bei 6°C , blauer Nebel bei 20°C .

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

Lösung

A.1

Das Young-Laplace-Gesetz beschreibt den Drucksprung an einer gekrümmten Flüssigkeits-Gas-Grenzfläche:

$$P_b - P_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Bei einer kugelförmigen Blase sind beide Hauptkrümmungsradien gleich a . Somit gilt

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

Die eingetauchte Blase ist von einer einzigen Flüssigkeits-Gas-Grenzfläche umgeben.

A.2

Das Henry-Gesetz an der Blasenoberfläche liefert

$$c_b = k_H P_b = k_H \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) = c_0 + \frac{2\sigma c_0}{P_0 a}.$$

Gas diffundiert in die Blase und lässt sie wachsen, wenn $c_\ell > c_b$ ist. Für den Schwellenwert gilt daher

$$c_\ell - c_0 = \frac{2\sigma c_0}{P_0 a_c},$$

also

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0 (c_\ell - c_0)}.$$

In einer übersättigten Flüssigkeit wachsen Blasen mit $a > a_c$, während kleinere Blasen dazu neigen, sich aufzulösen.

Mit $c_\ell = 4c_0$ gilt

$$a_c = \frac{2\sigma}{3P_0} = \frac{2(47 \times 10^{-3})}{3(1.0 \times 10^5)} = 3.13 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Daher

$$a_c \approx 0.31 \mu\text{m}.$$

A.3

Unter der angegebenen Näherung $P_b \simeq P_0$ ergibt die ideale Gasgleichung

$$P_0 \frac{4\pi a^3}{3} = n_c R T_0,$$

und damit

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0}.$$

Der Stoffmengenstrom durch die Blasenoberfläche beträgt

$$\frac{dn_c}{dt} = 4\pi a^2 j.$$

Durch Differenzieren des Ausdrucks aus der idealen Gasgleichung bei konstanten P_0, T_0 folgt

$$\frac{4\pi P_0 a^2}{RT_0} \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 j,$$

was sich vereinfacht zu

$$\frac{da}{dt} = \frac{RT_0}{P_0} j.$$

Für das kurze Wachstumsexperiment nehmen wir die Konzentration im Flüssigkeitsinneren als konstant an und verwenden $c_b \simeq c_0$.

Für **Modell (1)** gilt

$$\frac{da}{dt} = \frac{DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0 a}.$$

Integration mit $a(0) = a_0$ ergibt

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t}.$$

Dies sagt eine abnehmende Wachstumsrate und asymptotisch eine $t^{1/2}$ -Abhängigkeit voraus.

Für **Modell (2)** gilt

$$\frac{da}{dt} = \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} = q_a,$$

also

$$a(t) = a_0 + \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t.$$

Abbildung 2 zeigt eine näherungsweise konstante Steigung und stützt damit **Modell (2)**. Liest man ungefähr $a = 40 \mu\text{m}$ bei $t = 0$ und $a = 270 \mu\text{m}$ bei $t = 0.95 \text{ s}$ ab, erhält man

$$q_a \approx \frac{(270 - 40) \times 10^{-6}}{0.95} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

Bei 20°C gilt

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad c_0 = k_H P_0 = 33 \text{ mol m}^{-3},$$

und $c_\ell - c_0 \simeq 3c_0 = 99 \text{ mol m}^{-3}$. Daher

$$K = \frac{P_0 q_a}{RT_0(c_\ell - c_0)} \approx \frac{10^5 (2.4 \times 10^{-4})}{8.31446 (293.15) (99)}.$$

Somit

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

A.4

Sei $\mathbf{u}_z$ senkrecht nach oben gerichtet. Es wirken die Auftriebskraft

$$\mathbf{F}_B = \rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z,$$

die Stokes-Reibungskraft

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta a v \mathbf{u}_z,$$

und die Gewichtskraft der Blase

$$\mathbf{W} = -\rho_g \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z.$$

Bei der Endgeschwindigkeit verschwindet ihre Summe:

$$6\pi\eta a v = (\rho_\ell - \rho_g) \frac{4\pi a^3}{3} g_0.$$

Da $\rho_g \ll \rho_\ell$, gilt

$$v(a) = \frac{2(\rho_\ell - \rho_g)g_0 a^2}{9\eta} \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}.$$

Benachbarte Blasen folgen derselben Bahn mit einem Altersunterschied von

$$\Delta t = \frac{1}{f_b}.$$

Aus dem Abstand Δz ihrer Mittelpunkte folgt daher

$$v \simeq \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_b \Delta z,$$

wobei die Geschwindigkeit näherungsweise beim mittleren Radius des Blasenpaares ausgewertet wird.

Mit dem Maßstab in Abb. 3 ergeben sich für die beiden Blasen nahe dem rechten Ende ungefähr

$$a \simeq 0.24 \text{ mm}, \quad \Delta z \simeq 2.3 \text{ mm}.$$

Folglich gilt

$$v \simeq 20(2.3 \times 10^{-3}) = 4.6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1},$$

und

$$\eta \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9f_b \Delta z} = \frac{2(10^3)(9.80665)(0.24 \times 10^{-3})^2}{9(20)(2.3 \times 10^{-3})}.$$

Dies liefert die grafische Abschätzung

$$\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}.$$

A.5

Wir kombinieren die Endgeschwindigkeit des Aufstiegs mit der konstanten radialen Wachstumsrate:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta} a^2, \quad \frac{da}{dt} = q_a.$$

Durch Eliminieren der Zeit folgt

$$\frac{dz}{da} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta q_a} a^2.$$

Integration vom Boden bis zur freien Oberfläche ergibt

$$H_\ell = \frac{2\rho_\ell g_0}{27\eta q_a} (a_{H_\ell}^3 - a_0^3).$$

Der Ausdruck unter Beibehaltung des Anfangsradius lautet somit

$$a_{H_\ell} = \left(a_0^3 + \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

Mit $a_{H_\ell} \gg a_0$ gilt

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

Mit $H_\ell = 0.10 \text{ m}$, $q_a \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ und der oben abgeschätzten Viskosität ergibt sich

$$a_{H_\ell} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

A.6

Wir verwenden die quasistationäre Beschreibung der Blasenkette auf der Zeitskala der Konzentrationsabnahme. Die Flüssigkeit wird durch eine räumlich einheitliche Konzentration $c_\ell(t)$ in ihrem Inneren beschrieben, und Änderungen der Gasmenge in den noch aufsteigenden Blasen werden in der Verlustbilanz vernachlässigt.

Jede Blase, die die Oberfläche erreicht, transportiert die Stoffmenge

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} a_{H_\ell}^3.$$

Das Ergebnis aus A.5 liefert bei vernachlässigbarem a_0

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} = \frac{18\pi\eta H_\ell P_0}{\rho_\ell g_0 RT_0} q_a.$$

Während die Flüssigkeit gelöstes Gas verliert, ergibt Modell (2)

$$q_a(t) = \frac{KRT_0}{P_0} (c_\ell(t) - c_0).$$

Daher

$$n_{\text{out}} = \frac{18\pi\eta K H_\ell}{\rho_\ell g_0} (c_\ell - c_0).$$

Pro Zeiteinheit werden $N_b f_b$ Blasen freigesetzt. Die Erhaltung der Stoffmenge an CO_2 ergibt

$$V_\ell \frac{dc_\ell}{dt} = -N_b f_b n_{\text{out}},$$

also

$$\frac{dc_\ell}{dt} = - \frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0).$$

Die Lösung lautet

$$c_\ell(t) = c_0 + [c_\ell(0) - c_0] e^{-t/\tau},$$

wobei

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

Die Überschussskonzentration gegenüber c_0 nimmt also exponentiell ab.

B.1

Während dt überstreicht der sich zurückziehende Randwulst eine Kreisringfläche von

$$dA = 2\pi r v_f dt.$$

Der Film besitzt zwei Flüssigkeits-Gas-Oberflächen, sodass die Abnahme der Oberflächenenergie beträgt:

$$-dE_s = 2\sigma dA.$$

Nach der angegebenen Dissipationsregel wird die Hälfte davon in kinetische Energie umgewandelt:

$$dE_k = \sigma dA.$$

Die neu aufgenommene Masse beträgt

$$dm = \rho_\ell h dA.$$

Da die Geschwindigkeit des Randwulstes konstant bleibt, beträgt die Zunahme seiner kinetischen Energie

$$dE_k = \frac{1}{2} v_f^2 dm = \frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 dA.$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke ergibt

$$\frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 = \sigma,$$

also

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

B.2

Eine Auslenkung z des Kolbens nach oben ändert das eingeschlossene Gasvolumen auf

$$V = V_0 + Sz.$$

Für eine reversible adiabatische Kompression oder Expansion gilt

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma.$$

Somit

$$P = P_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0} \right)^{-\gamma}.$$

Für $|Sz| \ll V_0$ gilt

$$P \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0} \right).$$

Wenn die Gewichtskraft des Kolbens wie vorgegeben vernachlässigt wird, lautet seine Bewegungsgleichung

$$m_p \ddot{z} = (P - P_0)S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} z.$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}.$$

Daher

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

B.3

Für die Blase gilt

$$S = \pi r^2, \quad V_0 = \frac{4\pi a^3}{3}, \quad m_p = \frac{8\rho_g r^3}{3}.$$

Einsetzen in B.2 ergibt

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma P_0 \pi^2 r^4}{(8\rho_g r^3/3)(4\pi a^3/3)} = \frac{9\gamma P_0 r}{128\pi \rho_g a^3}.$$

Somit gilt $f_0 \propto \sqrt{r}$, und die maximale Frequenz tritt bei $r = r_c$ auf. Mit dem gegebenen Ausdruck für r_c folgt

$$f_{\max}^2 = \frac{9\gamma P_0}{128\pi \rho_g a^3} \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g a} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

Daher

$$a = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g f_{\max}^2} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

Mit $f_{\max} = 4.0 \times 10^4$ Hz ergibt sich

$$a = \frac{3\sqrt{3}(1.3)(10^5)}{64\pi(1.8)(4.0 \times 10^4)^2} \sqrt{\frac{10^3(9.80665)}{47 \times 10^{-3}}} = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Also

$$a \approx 0.53 \text{ mm}.$$

Der endgültige Öffnungsradius beträgt

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} \approx 1.50 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Da sich die Öffnung mit konstanter Geschwindigkeit erweitert, gilt

$$v_f = \frac{r_c}{t_b}, \quad t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms} = 3 \times 10^{-5} \text{ s},$$

also

$$v_f \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}.$$

Schließlich ergibt B.1

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_\ell v_f^2} = \frac{2\sigma t_b^2}{\rho_\ell r_c^2} \approx 3.77 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

Somit

$$\boxed{h \approx 3.8 \mu\text{m}}.$$

C.1

Die Stoffmengen des gelösten beziehungsweise gasförmigen CO_2 betragen

$$n_L = k_H P_i V_L, \quad n_G = \frac{P_i V_G}{RT_0}.$$

Die Erhaltung der gesamten Stoffmenge ergibt

$$n_T = P_i \left(k_H V_L + \frac{V_G}{RT_0} \right).$$

Folglich

$$\boxed{P_i = \frac{n_T}{k_H V_L + V_G/(RT_0)}}.$$

Wir verwenden

$$V_L = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad V_G = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

Bei 6°C , $T_0 = 279.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(5.4 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 279.15)} \approx 4.81 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Bei 20°C , $T_0 = 293.15 \text{ K}$:

$$P_i = \frac{0.2}{(3.3 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 293.15)} \approx 7.76 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Dies sind Absolutdrücke:

$$\boxed{P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}}, \quad \boxed{P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}}.$$

C.2

Für diesen Teil gibt die Aufgabe die folgenden Ersatzwerte der Drücke vor:

$$P_i(6^\circ\text{C}) = 4.69 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) = 7.45 \text{ bar}.$$

Für die reversible adiabatische Expansion eines idealen Gases gilt

$$PV^\gamma = \text{konstant}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{konstant}.$$

Durch Eliminieren von V und mit dem Enddruck P_0 folgt

$$\boxed{T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

Somit

$$T_f(6^\circ\text{C}) = 279.15 \left(\frac{1}{4.69} \right)^{0.3/1.3} \approx 195.4 \text{ K},$$

und

$$T_f(20^\circ\text{C}) = 293.15 \left(\frac{1}{7.45} \right)^{0.3/1.3} \approx 184.4 \text{ K}.$$

Um festzustellen, ob sich festes CO_2 bildet, bestimmen wir die Temperatur des Sublimationsgleichgewichts bei P_0 . Setzen wir $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2} = P_0$, so gilt

$$0 = A - \frac{B}{T_s + C},$$

also

$$T_s = \frac{B}{A} - C = \frac{1300}{6.81} + 3.49 \approx 194.4 \text{ K}.$$

Für die anfangs kalte Flasche gilt

$$195.4 \text{ K} > T_s.$$

Tatsächlich liefert der angegebene Ausdruck für den Dampfdruck

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(195.4 \text{ K}) \approx 1.09 \text{ bar} > P_0.$$

Das Gas erreicht während dieser Expansion keine Sättigung bezüglich der festen Phase. Gemäß den angegebenen Alternativen bildet sich **grauweißer Nebel**.

Für die anfangs wärmere Flasche gilt

$$184.4 \text{ K} < T_s,$$

und

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(184.4 \text{ K}) \approx 0.422 \text{ bar} < P_0.$$

Die Expansion ohne Phasenübergang würde übersättigtes CO_2 erzeugen, sodass sich feste Kristalle bilden und **blauer Nebel** entsteht.

Daher

Die Aussagen 1 und 4 sind richtig.

Die berechneten Werte von T_f sind die gesuchten hypothetischen Temperaturen ohne Phasenübergang; bei der warmen Flasche verändert die Feststoffbildung den tatsächlichen Temperaturverlauf.

C.3

Wir verwenden den vorgegebenen Druck bei 6°C :

$$P_i = 4.69 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Sei x die Verschiebung des Korkens aus seiner Anfangslage nach oben, und sei

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

seine Querschnittsfläche.

Für $0 \leq x \leq \ell_0$ beträgt die Kontaktfläche

$$A(x) = \pi d(\ell_0 - x),$$

sodass die Reibungskraft gegeben ist durch

$$F_{\text{fr}}(x) = \alpha \pi d(\ell_0 - x).$$

Anfangs hält die resultierende Druckkraft der Reibung nahezu das Gleichgewicht:

$$(P_i - P_0)S \simeq \alpha \pi d \ell_0.$$

Die Gewichtskraft des Korkens beträgt nur 0.098 N, verglichen mit einer anfänglichen resultierenden Druckkraft von etwa 94 N, sodass sie bei der Abschätzung von α vernachlässigt werden kann. Daher

$$\alpha \simeq \frac{(P_i - P_0)d}{4\ell_0} \approx 6.64 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

An der schnellen Expansion ist das Gas beteiligt, das sich anfangs im Kopfraum befindet. Sein Volumen und sein Druck während der Bewegung des Korkens sind

$$V(x) = V_G + Sx, \quad P(x) = P_i \left(\frac{V_G}{V_G + Sx} \right)^\gamma.$$

Wenn der Korken den Flaschenhals verlässt, gilt

$$V_e = V_G + S\ell_0.$$

Die vom Gas im Inneren verrichtete Arbeit beträgt

$$W_{\text{gas}} = \int_0^{\ell_0} P(x)S \, dx = \int_{V_G}^{V_e} P_i \left(\frac{V_G}{V} \right)^\gamma dV,$$

woraus folgt

$$W_{\text{gas}} = \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_e} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Die Arbeit gegen den Atmosphärendruck beträgt

$$W_{\text{atm}} = P_0 S \ell_0,$$

und die durch Reibung dissipierte Energie beträgt

$$W_{\text{fr}} = \int_0^{\ell_0} \alpha \pi d(\ell_0 - x) \, dx = \frac{1}{2} \alpha \pi d \ell_0^2 \simeq \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0.$$

Nach dem Austritt des Korkens wird die resultierende Druckkraft wie gefordert vernachlässigt. Wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, ist am höchsten Punkt die gesamte verbleibende mechanische Energie in potenzielle Energie im Schwerfeld umgewandelt. Wird H_c von der Anfangslage des Korkens aus gemessen, gilt

$$mg_0 H_c = W_{\text{gas}} - W_{\text{atm}} - W_{\text{fr}}.$$

Daher

$$H_c = \frac{1}{mg_0} \left\{ \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_G + S\ell_0} \right)^{\gamma-1} \right] - P_0 S \ell_0 - \frac{1}{2} (P_i - P_0) S \ell_0 \right\}.$$

Numerisch ergibt sich

$$S = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad V_e = 3.1362 \times 10^{-5} \text{ m}^3,$$

und

$$W_{\text{gas}} \approx 2.570 \text{ J}, \quad W_{\text{atm}} \approx 0.636 \text{ J}, \quad W_{\text{fr}} \approx 1.174 \text{ J}.$$

Somit

$$H_c \approx \frac{2.570 - 0.636 - 1.174}{0.010(9.80665)} \approx 7.75 \text{ m}.$$

Auf eine sinnvolle Genauigkeit gerundet:

$$\boxed{H_c \approx 7.7 \text{ m}}.$$

Wird die Höhe von der Position des Korkens beim Verlassen des Flaschenhalses aus gemessen, ist $\ell_0 = 0.025 \text{ m}$ abzuziehen; das gerundete Ergebnis bleibt 7.7 m .

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.