

المسألة 1: الهيدروجين والمجرات

تهدف هذه المسألة إلى دراسة الخصائص الفيزيائية المميزة للمجرات، مثل ديناميكيته وبنيتها. وعلى وجه الخصوص، نوضح كيفية قياس توزيع الكتلة في مجرتنا من داخلها. ولهذا سنركز على الهيدروجين، وهو مكونها الرئيسي.

سنستخدم في هذه المسألة كلها $\hbar$ فقط، وهو معرف بالعلاقة $\hbar = h/2\pi$.

الجزء A - مقدمة

نموذج بور

نفترض أن ذرة الهيدروجين تتكون من إلكترون غير نسبي، كتلته m_e ، يدور حول بروتون ثابت. ونفترض طوال هذا الجزء أن حركته تجري في مدار دائري.

0.2 — A.1 نقطة

حدّد سرعة الإلكترون v في مدار دائري نصف قطره r .

في نموذج بور، نفترض أن مقدار الزخم الزاوي للإلكترون L مكّم، بحيث $L = n\hbar$ ، حيث $n > 0$ عدد صحيح. ونعرّف

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$$

0.5 — A.2 نقطة

بيّن أن نصف قطر كل مدار يُعطى بالعلاقة $r_n = n^2 r_1$ ، حيث يُسمّى r_1 نصف قطر بور. عبّر عن r_1 بدلالة α و m_e و $\hbar$ و c . واحسب قيمته العددية بثلاثة أرقام معنوية. عبّر عن v_1 وهي السرعة في المدار ذي نصف القطر r_1 بدلالة α و c .

0.5 — A.3 نقطة

حدّد الطاقة الميكانيكية للإلكترون E_n في مدار نصف قطره r_n بدلالة e و ϵ_0 و r_1 و n . حدّد E_1 في الحالة القاعية بدلالة α و m_e و c . احسب قيمتها العددية بوحدة eV.

البنيتان الدقيقة وفائقة الدقة للهيدروجين

يؤدي الانقلاب التلقائي النادر للف المغزلي للإلكترون إلى انبعاث فوتون، بمعدل مرة واحدة كل 10 ملايين سنة لكل ذرة هيدروجين. ويُستخدم هذا الانبعاث لتتبع الهيدروجين في الكون، ولذلك فهو أساسي في الفيزياء الفلكية. سندرس الانتقال المسؤول عن هذا الانبعاث على خطوتين.

أولاً، لننظر في التآثر بين الف المغزلي للإلكترون والحركة النسبية للإلكترون والبروتون. في الإطار المرجعي للإلكترون، يدور البروتون حول الإلكترون على مسافة r_1 . وينشأ عن ذلك مجال مغناطيسي $\vec{B}_1$.

0.5 — A.4 نقطة

حدّد مقدار المجال $\vec{B}_1$ ، أي B_1 ، عند موضع الإلكترون، بدلالة μ_0 و e و α و c و r_1 .

ثانيًا، يُولد اللَّفّ المغزلي للإلكترون عزمًا مغناطيسيًا $\vec{\mathcal{M}}_s$. ويبلغ مقداره تقريبًا $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. ترتبط البنية/الدقيقة (F) بفرق الطاقة ΔE_F بين إلكترون عزمه المغناطيسي $\vec{\mathcal{M}}_s$ موازٍ للمجال $\vec{B}_1$ ، وإلكترون عزمه $\vec{\mathcal{M}}_s$ معاكس لاتجاه $\vec{B}_1$. وبالمثل، ترتبط البنية فائقة الدقة (HF) بفرق الطاقة ΔE_{HF} ، الناتج عن التأثير بين العزمين المغناطيسيين للإلكترون والبروتون في حالتي توازيهما وتعاكس اتجاهيهما. ومن المعلوم أنه يُعطى تقريبًا بالعلاقة $\Delta E_{HF} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ ، حيث m_p كتلة البروتون.

0.5 — A.5 نقطة

عبر عن ΔE_F بدلالة α و E_1 .

أوجد تعبيرًا للطول الموجي λ_{HF} لفوتون ينبعث أثناء انتقال بين حالتي البنية فائقة الدقة، وأعط قيمته العددية برقمين معنويين.

الجزء B - منحنيات دوران المجرات

المعطيات

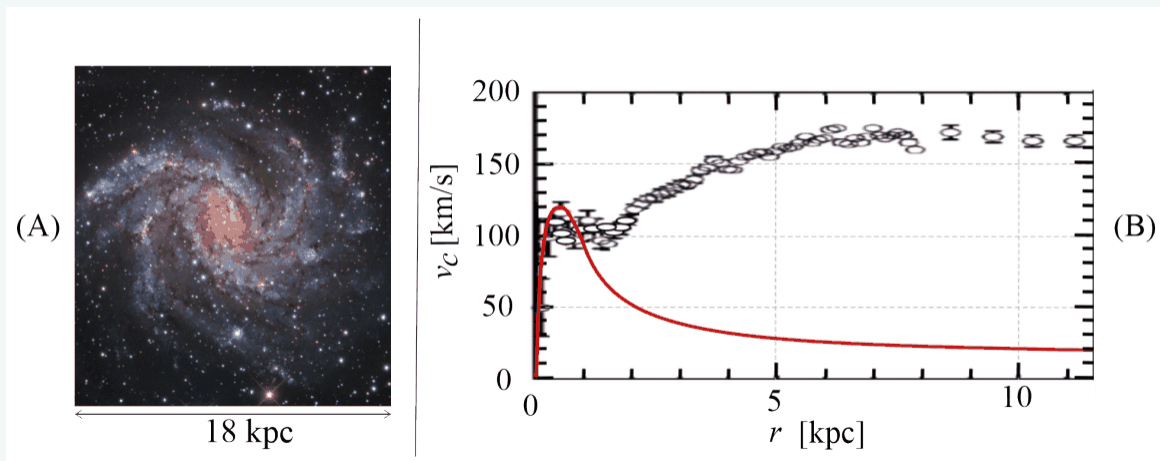
- الكيلوفرسخ الفلكي: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- الكتلة الشمسية: $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

نعتبر مجرة كروية مركزها نقطة ثابتة O . عند أي نقطة P ، لتكن $\rho = \rho(P)$ كثافة الكتلة الحجمية، و $\varphi = \varphi(P)$ جهد الجاذبية المرتبط بها (أي طاقة الوضع لكل وحدة كتلة). يعتمد كلٌّ من ρ و φ على $r = \|\vec{OP}\|$ فقط. وتقتصر حركة كتلة m تقع عند P ، بفعل المجال φ ، على مستوى يحتوي على O .

0.2 — B.1 نقطة

في حالة المدار الدائري، حدّد سرعة جسم v_c في مدار دائري يمرّ بالنقطة P ، بدلالة r و $\frac{d\varphi}{dr}$.

الشكل 1(A) صورة للمجرة الحلزونية NGC 6946 في النطاق المرئي (التُقطت بتلسكوب شولمان ذي القطر 0.8m في مركز ماونت ليمون لرصد السماء في أريزونا). وتمثّل الأشكال البيضاوية الصغيرة في الشكل 1(B) القياسات التجريبية للسرعة v_c في هذه المجرة. تُسمّى المنطقة المركزية ($r < 1 \text{ kpc}$) الانتفاخ المركزي. وفي هذه المنطقة، يكون توزيع الكتلة متجانسًا تقريبًا. يمثّل المنحنى الأحمر تنبؤًا بالسرعة v_c إذا كان النظام متجانسًا في الانتفاخ المركزي وكبليريًا $\varphi(r) = -\beta/r$ مع $\beta > 0$ خارجه، أي بافتراض أن الكتلة الكلية للمجرة متركزة في الانتفاخ المركزي.



الشكل 1: المجرة NGC 6946: الصورة (A) ومنحنى الدوران (B).

0.5 — B.2 نقطة

استنتج كتلة الانتفاخ المركزي M_b للمجرة NGC 6946 من منحنى الدوران الأحمر في الشكل 1(B)، بوحدة الكتلة الشمسية.

إن مقارنة النموذج الكبلري بالبيانات التجريبية تجعل الفلكيين واثقين من أن جزءًا من الكتلة غير مرئي في الصورة. لذا يفترضون أن كثافة الكتلة الفعلية للمجرة تُعطى بالعلاقة

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

حيث $C_m > 0$ و $r_m > 0$ ثابتان.

1.8 — B.3 نقطة

بيّن أن توزيع السرعة $v_{c,m}(r)$ ، الموافق لكثافة الكتلة في المعادلة 1، يمكن كتابته على الصورة

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}.$$

عبر عن k_1 و k_2 بدلالة C_m و r_m و G .

(تلميحان: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$ ، وكذلك: $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$ عندما $x \ll 1$.)

بسّط $v_{c,m}(r)$ عندما $r \ll r_m$ وعندما $r \gg r_m$.

بيّن أنه إذا كان $r \gg r_m$ ، فإن الكتلة $M_m(r)$ المحتواة داخل كرة نصف قطرها r ، ذات كثافة الكتلة المعطاة بالمعادلة 1، تأخذ صورة مبسطة لا تعتمد إلا على C_m و r .

قدّر كتلة المجرة NGC 6946 الموجودة فعليًا ضمن الصورة في الشكل 1(A).

الجزء C - توزيع الكتلة في مجرتنا

في حالة المجرة الحلزونية، يُعدّل نموذج المعادلة 1، ويُفترض عادةً أن جهد الجاذبية يُعطى بالعلاقة

$$\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right],$$

حيث z هو البعد عن المستوى المجري (المعرّف بالعلاقة $z = 0$)، وأصبح $r < r_0$ الآن نصف القطر المحوري، و $\varphi_0 > 0$ ثابت مطلوب تحديده. أما r_0 و z_0 فقيمتان ثابتتان.

0.5 — C.1 نقطة

أوجد معادلة الحركة بالنسبة إلى z للحركة الرأسية لكتلة نقطية m في هذا الجهد، بافتراض ثبات r . بيّن أنه إذا كان $r < r_0$ ، فإن المستوى المجري يمثل حالة اتزان مستقر، وذلك بإعطاء التردد الزاوي ω_0 للاهتزازات الصغيرة حوله.

من الآن فصاعدًا، نضع $z = 0$.

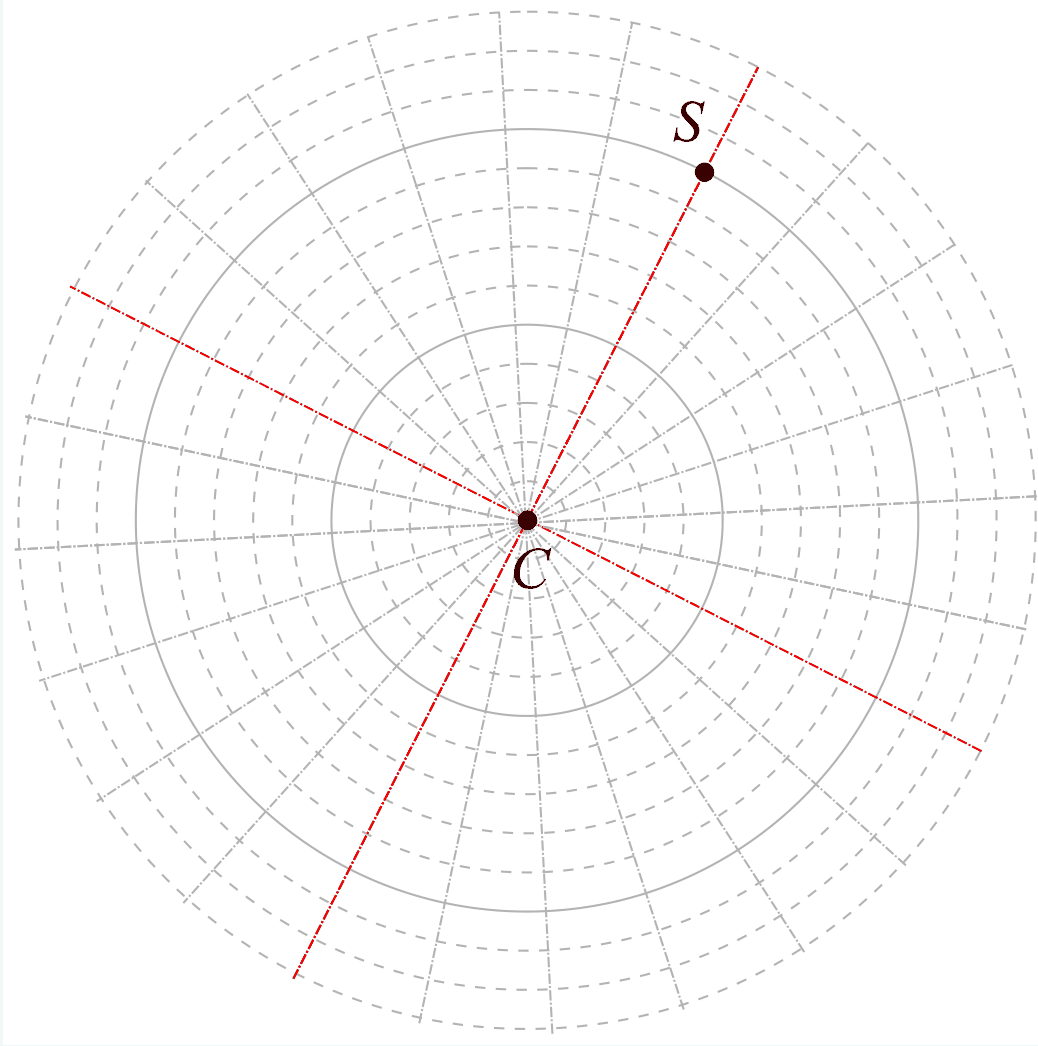
0.6 — C.2 نقطة

حدّد النظام، إما $r \gg r_m$ أو $r \ll r_m$ ، الذي يستعيد فيه نموذج المعادلة 1 جهدًا من الشكل $\varphi_G(r, 0)$ ، مع تعريف مناسب للثابت φ_0 .

في ظل هذا الشرط، لا تعود $v_c(r)$ معتمدة على r . عبر عنها بدلالة φ_0 .

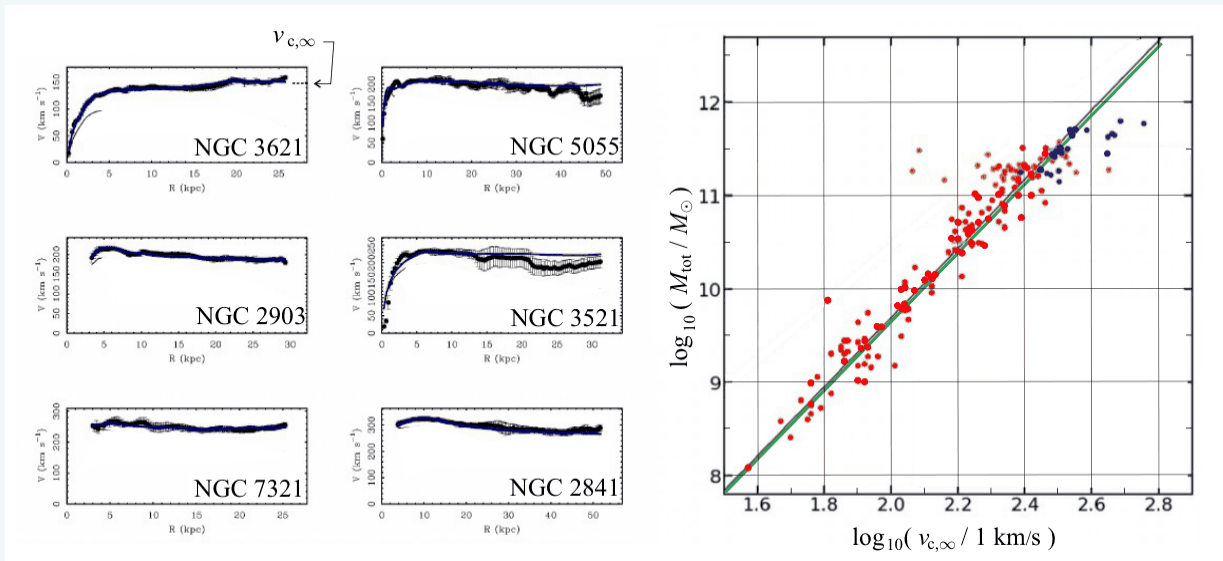
إذن، خارج الانتفاخ المركزي، لا يعتمد مقدار السرعة v_c على البعد عن مركز المجرة. وسنستخدم هذه الحقيقة، كما يفعل الفلكيون، لقياس توزيع الكتلة في المجرة من داخلها.

تتكون جميع الأجرام المجرية التي نعتبرها هنا لأغراض الرصد الفلكي، مثل النجوم أو السدم، أساسًا من الهيدروجين. ونفترض أنها تدور خارج الانتفاخ المركزي في مدارات دائرية حول مركز المجرة C . تتمثل S موضع الشمس، وتمثل E موضع جرم مجري معيّن يصدر إشعاعًا في طيف الهيدروجين. في المستوى المجري، نعتبر خط نظر SE يوافق اتجاه الرصد، على متجه الوحدة $\hat{u}_v$ (انظر الشكل 2).



الجزء D - علاقة تولي-فيشر ونظرية MOND

يُعدّ استواء منحني السرعة في المناطق الخارجية للمجرة NGC 6946 في الشكل 1 خاصية شائعة للمجرات الحلزونية، كما يُرى في الشكل 4 (يساراً). إن رسم قيمة السرعة الخارجية الثابتة $v_{c,\infty}$ بدلالة الكتلة الكلية المقاسة M_{tot} لكل مجرة يكشف عن ارتباط مثير للاهتمام يُسمّى علاقة تولي-فيشر، انظر الشكل 4 (يميناً).



الشكل 4. يسارًا: منحنيات دوران لمجرات حلزونية نموذجية - يمينًا: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ بدلالة $\log_{10}(v_{c,\infty})$ على مقياسين خطيين. تقابل النقاط الملونة مجرات مختلفة ومسوحًا مختلفة. ويمثل الخط الأخضر علاقة تولي-فيشر، وهي تتفق اتفاقًا جيدًا مع خط أفضل ملائمة للبيانات (بالأسود).

0.4 — D.1 نقطة

بافتراض أن نصف قطر المجرة R لا يعتمد على كتلتها، يبين أن نموذج المعادلة 1 (الجزء B) يعطي علاقة من الشكل $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ ، حيث ينبغي تحديد γ و η .

قارن هذا التعبير بعلاقة تولي-فيشر بحساب γ_{TF} .

في نظام التسارع المنخفض للغاية، من رتبة $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ، تقترح نظرية الديناميكا النيوتونية المعدلة (MOND) إمكانية تعديل قانون نيوتن الثاني باستخدام

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$$

حيث $a = \|\vec{a}\|$ هو مقدار التسارع، والدالة μ معرفة بالعلاقة $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$.

0.2 — D.2 نقطة

باستخدام بيانات المجرة NGC 6946 في الشكل 1، قدر، ضمن نظرية نيوتن، مقدار التسارع a_m لكتلة في المناطق الخارجية للمجرة NGC 6946.

0.8 — D.3 نقطة

لتكن m كتلة تتحرك في مدار دائري نصف قطره r بسرعة $v_{c,\infty}$ في مجال جاذبية كتلة ثابتة M .

ضمن نظرية MOND، مع $a \ll a_0$ ، حدد أس علاقة تولي-فيشر.

باستخدام بيانات المجرة NGC 6946 و/أو قانون تولي-فيشر، احسب a_0 لتبين أن MOND تعمل في النظام الصحيح.

0.9 — D.4 نقطة

بالنظر في الحالات ذات الصلة، حدد $v_c(r)$ لجميع قيم r في نظرية MOND، في حالة مجال جاذبية ناشئ عن كتلة M موزعة توزيعًا متجانسًا ضمن نصف قطر R_b .

ورقة المعطيات العامة

الثابت	الرمز	القيمة	الوحدة
سرعة الضوء في الفراغ	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
ثابت بلانك	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ثابت بلانك المختزل	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ثابت بولتزمان	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
ثابت أفوغادرو	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
ثابت الغاز المولي	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
الشحنة الأولية	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
ثابت الجذب العام	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
التسارع القياسي للجاذبية	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
ثابت ستيفان-بولتزمان	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
سماحية الفراغ (الثابت الكهربائي)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

الواحدة	القيمة	الرمز	الثابت
m^{-1}	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	R_∞	ثابت ريدبرغ
kg	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	m_e	كتلة الإلكترون
kg	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	m_p	كتلة البروتون
kg	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	m_n	كتلة النيوترون
kg	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	m_u	ثابت الكتلة الذرية
$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	eV	الإلكترون فولت

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

A.1 •

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2 •

$$r_n = n^2 r_1, \quad r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad v_1 = \alpha c.$$

A.3 •

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

A.4 •

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

A.5 •

$$\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1, \quad \lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c} \simeq 0.21 \text{ m}.$$

B.1 •

$$v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}.$$

B.2 •

$$M_b \sim 1 \times 10^9 M_\odot.$$

B.3 •

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m,$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3}} \frac{r}{r_m}, \quad v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq \sqrt{4\pi G C_m},$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq 4\pi C_m r, \quad M_{\text{في الشكل}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_{\odot}.$$

C.1 •

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

C.2 •

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m, \quad v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

C.3 •

$$v_{rE/S} = v_{\odot} \left(\frac{R_{\odot}}{R} - 1 \right) \sin \ell, \quad R = \frac{R_{\odot} v_{\odot} \sin \ell}{v_{\odot} \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

C.4 • بترقيم القمم وفق تزايد انزياح التردد:

$$(v_{r,1}, v_{r,2}, v_{r,3}) = (6.33, 31.7, 54.9) \text{ km s}^{-1},$$

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.95, 0.78, 0.67) R_{\odot}.$$

C.5 • على خط النظر $\ell = 30^\circ$ ، ضع علامتين عند نقطتي تقاطعه مع كلٍّ من الدوائر الثلاث ذات أنصاف الأقطار $0.95R_{\odot}$ و $0.78R_{\odot}$ و $0.67R_{\odot}$. المسافات القريبة والبعيدة عن الشمس هي

$$\frac{(d_{1,-}, d_{2,-}, d_{3,-})}{R_{\odot}} \simeq (0.0635, 0.272, 0.424),$$

$$\frac{(d_{1,+}, d_{2,+}, d_{3,+})}{R_{\odot}} \simeq (1.67, 1.46, 1.31).$$

تكشف المسوح المتكررة لخطوط الطول عن توزيع الهيدروجين والبنية الحلزونية، مع بقاء هذا الالتباس بين الموضعين القريب والبعيد.

D.1 •

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2, \quad \gamma_{TF} \approx 3.7 \text{ (4 قريب بيانيًا من)}.$$

D.2 •

$$a_m \simeq 9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}.$$

D.3 •

$$v_{c,\infty}^4 = G M a_0, \quad \gamma_{\text{MOND}} = 4, \quad a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

هذا هو مقياس التسارع ذي الصلة؛ ولا تثبت بيانات NGC 6946 المرسومة وحدها المتباينة الأقوى $a \ll a_0$.

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GMr^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0R_b^3}{GMr}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

النهاية المستمرة هي $v_c(0) = 0$.

الحل

لحساب القيم العددية الذرية، أحسب α من تعريفه والثابت المعطاة:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29735 \times 10^{-3}.$$

وهذا يختلف قليلاً عن التقريب المطبوع في نص المسألة.

A.1

توفر قوة كولوم التجاذبية القوة المركزية:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

ومن ثم،

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}.$$

A.2

يعطي شرط بور للتكميم

$$m_e v_n r_n = n\hbar.$$

بتربيع هذه العلاقة واستخدام معادلة القوى من A.1،

$$n^2 \hbar^2 = m_e^2 v_n^2 r_n^2 = \frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}.$$

وبالتالي،

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2} = n^2 \frac{\hbar}{m_e \alpha c}.$$

إن

$$r_1 = \frac{\hbar}{m_e \alpha c} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

بالنسبة إلى مدار الحالة القاعية،

$$v_1 = \frac{\hbar}{m_e r_1} = \boxed{\alpha c}.$$

وبصورة أعم، $v_n = \alpha c/n$. وبما أن $\alpha \ll 1$ ، فإن التقريب غير النسبي متسق.

A.3

باعتبار طاقة الوضع الكهروستاتيكية منعدمة عند اللانهاية،

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

تعطي معادلة القوى

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

ومن ثم تكون الطاقة الميكانيكية الكلية

$$E = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

عند $r_n = n^2 r_1$ ،

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 n^2}.$$

وعلى وجه الخصوص،

$$E_1 = -\frac{\alpha\hbar c}{2r_1} = \boxed{-\frac{1}{2}m_e\alpha^2 c^2}.$$

عددياً،

$$E_1 = -2.17987 \times 10^{-18} \text{ J} = \boxed{-13.6 \text{ eV}}.$$

A.4

في التصور المحدد ضمن الإطار المرجعي للإلكترون، يدور البروتون بسرعة $v_1 = \alpha c$. وزمن دورته المدارية والتيار المكافئ له هما

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad I = \frac{e}{T} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}.$$

المجال المغناطيسي عند مركز حلقة تيار دائرية هو

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_1}.$$

ومن ثم،

$$B_1 = \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

A.5

طاقة ثنائي قطب مغناطيسي في مجال هي

$$U = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}_1.$$

وعليه، فإن طاقتي حالتي التوازي وتعاكس الاتجاه هما $+\mathcal{M}_s B_1$ و $-\mathcal{M}_s B_1$. والفرق الموجب بين طاقتيهما هو

$$\Delta E_F = 2\mathcal{M}_s B_1.$$

باستخدام العزم المغناطيسي المحدد في المسألة،

$$\Delta E_F = 2 \frac{e\hbar}{m_e} \frac{\mu_0 e \alpha c}{4\pi r_1^2}.$$

ومع $e^2/(4\pi\epsilon_0) = \alpha\hbar c$ و $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$

$$\Delta E_F = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m_e r_1^2} = 2m_e \alpha^4 c^2.$$

بما أن $E_1 = -m_e \alpha^2 c^2 / 2$

$$\boxed{\Delta E_F = -4\alpha^2 E_1}.$$

يحقق فوتون الانتقال فائق الدقة العلاقة

$$\frac{2\pi \hbar c}{\lambda_{\text{HF}}} = \Delta E_{\text{HF}} \simeq 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F.$$

إذن

$$\boxed{\lambda_{\text{HF}} = \frac{\pi m_p \hbar}{3.72 m_e^2 \alpha^4 c}}.$$

القيم العددية الوسيطة هي

$$\Delta E_F \simeq 2.898 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad \lambda_{\text{HF}} \simeq 0.21116 \text{ m}.$$

وبرقمين معنويين،

$$\boxed{\lambda_{\text{HF}} = 0.21 \text{ m} = 21 \text{ cm}}.$$

B.1

تسارع الجاذبية هو

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

بمساواته بالتسارع المتجه إلى الداخل في مدار دائري،

$$-\frac{v_c^2}{r} \hat{r} = -\frac{d\varphi}{dr} \hat{r}.$$

ومن ثم،

$$\boxed{v_c = \sqrt{r \frac{d\varphi}{dr}}}.$$

B.2

خارج انتفاخ مركزي كروي، تعطي مبرهنة القشرة

$$\varphi(r) = -\frac{GM_b}{r} + \text{ثابت}.$$

وينتج عن ذلك

$$v_c^2 = \frac{GM_b}{r}, \quad M_b = \frac{rv_c^2}{G}.$$

قراءة تقريبية مناسبة للمنحنى الأحمر هي

$$r \simeq 10 \text{ kpc}, \quad v_c \simeq 20 \text{ km s}^{-1}.$$

ومن ثم

$$M_b \simeq \frac{(10 \times 3.09 \times 10^{19})(2.0 \times 10^4)^2}{6.67430 \times 10^{-11}} = 1.85 \times 10^{39} \text{ kg}.$$

بوحداث الكتلة الشمسية، تساوي هذه القيمة تقريباً $9.3 \times 10^8 M_\odot$. وبالنظر إلى دقة القراءة البيانية،

$$M_b \sim 10^9 M_\odot.$$

B.3

الكتلة المحتواة ضمن نصف القطر r هي

$$M_m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(x) x^2 dx = 4\pi C_m \int_0^r \frac{x^2}{r_m^2 + x^2} dx.$$

بتطبيق التكامل المعطى،

$$M_m(r) = 4\pi C_m \left[r - r_m \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

بفضل التناظر الكروي،

$$v_{c,m}^2(r) = \frac{GM_m(r)}{r} = 4\pi G C_m \left[1 - \frac{r_m}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_m}\right) \right].$$

بالمقارنة مع الصورة المطلوبة نحصل على

$$k_1 = 4\pi G C_m, \quad k_2 = 4\pi G C_m r_m.$$

عندما $r \ll r_m$ ، نضع $x = r/r_m$. عندئذٍ

$$1 - \frac{\arctan x}{x} \simeq 1 - \frac{x - x^3/3}{x} = \frac{x^2}{3}.$$

ومن ثم،

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{\frac{4\pi G C_m}{3}} \frac{r}{r_m}.$$

يرتفع منحني الدوران في المنطقة المركزية خطياً، كما هو متوقع لكثافة متجانسة تقريباً.

عندما $r \gg r_m$ ، فإن $\arctan(r/r_m) \rightarrow \pi/2$ ، بينما $r_m/r \rightarrow 0$. إذن

$$v_{c,m}(r) \simeq \sqrt{4\pi G C_m} \equiv v_{c,\infty},$$

و

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r = \frac{v_{c,\infty}^2 r}{G}.$$

القطر الظاهر في الصورة يساوي تقريباً 18 kpc، لذا نأخذ نصف القطر المحيط به مساوياً 9 kpc. وتبلغ السرعة الخارجية المرصودة تقريباً 170 km s^{-1} . ومن ثم

$$M_{\text{الشكل}} \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2 (9 \times 3.09 \times 10^{19})}{6.67430 \times 10^{-11}} \simeq 1.20 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

ومن ثم،

$$M_{\text{الشكل}} \simeq 6.1 \times 10^{10} M_\odot.$$

C.1

عند ثبات r ، تكون معادلة الحركة الرأسية

$$m\ddot{z} = -m \frac{\partial \varphi_G}{\partial z}.$$

باشتقاق الجهد المحدد نحصل على

$$\ddot{z} = \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) z e^{-z^2/z_0^2}.$$

عند $z = 0$ ، تنعدم القوة. وللاهمتزازات الصغيرة، $|z| \ll z_0$ ، لذا

$$e^{-z^2/z_0^2} \simeq 1.$$

تصبح المعادلة بعد التقريب الخطي

$$\ddot{z} + \frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) z = 0.$$

عندما $r < r_0$ ، يكون معاملها موجباً. لذا يمثل المستوى موضع اتزان مستقر، حيث

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\varphi_0}{z_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}.$$

C.2

عندما $r \gg r_m$ ، نحصل من B.3 على

$$M_m(r) \simeq 4\pi C_m r.$$

وعليه، يكون تدرّج الجهد الشعاعي

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_m(r)}{r^2} \simeq \frac{4\pi G C_m}{r}.$$

بالتكامل واختيار الثابت المضاف اختياراً مناسباً،

$$\varphi(r) \simeq 4\pi G C_m \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

إنّ النظام والمعامل المطلوبان هما

$$r \gg r_m, \quad \varphi_0 = 4\pi G C_m.$$

في المستوى،

$$v_c^2 = r \frac{\partial \varphi_G(r, 0)}{\partial r} = r \frac{\varphi_0}{r} = \varphi_0,$$

لذا

$$v_c(r) = \sqrt{\varphi_0}.$$

C.3

لتكن T قدم العمود النازل من C على خط النظر. تعطينا الهندسة

$$CT = R_\odot \sin \ell.$$

يكون إسقاط السرعة المماسية للشمس على خط النظر

$$\vec{v}_\odot \cdot \hat{u}_v = v_\odot \sin \ell.$$

بالنسبة إلى المصدر، تكون سرعته المماسية عمودية على CE . وإسقاطها على خط النظر هو

$$\vec{v}_E \cdot \hat{u}_v = v_E \frac{CT}{R} = v_E \frac{R_\odot}{R} \sin \ell.$$

يقتضي استواء منحنى الدوران أن $v_E = v_\odot$. وبالتالي،

$$v_{rE/S} = (\vec{v}_E - \vec{v}_\odot) \cdot \hat{u}_v = v_\odot \left(\frac{R_\odot}{R} - 1 \right) \sin \ell.$$

بحل المعادلة لإيجاد R ،

$$R = \frac{R_{\odot} v_{\odot} \sin \ell}{v_{\odot} \sin \ell + v_{rE/S}}.$$

C.4

باتباع الاصطلاح المقصود، المتسق مع ورقة الإجابة، نستخدم

$$v_r = +c \frac{f - f_0}{f_0},$$

حيث تدل القيم الموجبة على الابتعاد. وعليه، فإن محور $f - f_0$ المطبوع يحمل إشارة معاكسة لإشارة انزياح التردد المعتادة عند الابتعاد الموجب.

تقع القمم الثلاث تقريباً عند

$$\Delta f_1 = 0.030 \text{ MHz}, \quad \Delta f_2 = 0.150 \text{ MHz}, \quad \Delta f_3 = 0.260 \text{ MHz}.$$

بما أن

$$v_{\odot} \sin \ell = 220 \sin 30^\circ = 110 \text{ km s}^{-1},$$

تصبح صيغة نصف القطر

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{110}{110 + v_r},$$

حيث يُعبر عن v_r بوحدة km s^{-1} .

المصدر، بترتيب تزايد تردد القمة	Δf (MHz)	v_r (km s^{-1})، ثلاثة أرقام معنوية	$R/R_{\odot}$ ، رقمان معنويان
1	0.030	+6.33	0.95
2	0.150	+31.7	0.78
3	0.260	+54.9	0.67

C.5

على الرسم في ورقة الإجابة، ارسم شعاع الرصد من S ، بحيث يصنع زاوية 30° مع SC على الجانب المبيّن في الشكل 2. ارسم، أو حدّد، الدوائر التي مركزها C وأنصاف أقطارها

$$0.95R_{\odot}, \quad 0.78R_{\odot}, \quad 0.67R_{\odot}.$$

تتقاطع كل دائرة مع شعاع الرصد مرتين.

لتحديد المواضع كمياً، ليكن $d = SE$. يعطي قانون جيب التمام

$$R^2 = R_{\odot}^2 + d^2 - 2R_{\odot}d \cos \ell.$$

إذن

$$d_{\pm} = R_{\odot} \cos \ell \pm \sqrt{R^2 - R_{\odot}^2 \sin^2 \ell}.$$

عند $\ell = 30^\circ$ ، تكون أقرب نقطة من خط النظر إلى المركز محددة بالعلاقين

$$CT = 0.50R_{\odot}, \quad ST = R_{\odot} \cos 30^\circ = 0.866R_{\odot}.$$

جميع أنصاف الأقطار الثلاثة المستنتجة أكبر من CT وأصغر من $R_{\odot}$ ، لذا تقع نقطتا التقاطع كلتاهما أمام الشمس في اتجاه الرصد.

باستخدام أنصاف الأقطار غير المقربة من C.4:

المصدر	الموضع القريب $d_-/R_\odot$	الموضع البعيد $d_+/R_\odot$
1	0.0635	1.67
2	0.272	1.46
3	0.424	1.31

عند الابتعاد عن S على طول الشعاع، نَرِد النقاط المحتملة بالترتيب

$$1_{\text{near}}, 2_{\text{near}}, 3_{\text{near}}, T, 3_{\text{far}}, 2_{\text{far}}, 1_{\text{far}}.$$

يحدّد الطيف البعد عن مركز المجرة لكل مصدر، لكنه لا يستطيع التمييز بين موضعيه القريب والبعيد. ويتيح تكرار الرصد عند خطوط طول مختلفة رسم خريطة للبنى الغنية بالهيدروجين وكشف الأذرع الحلزونية للمجرة؛ وتلزم معلومات إضافية لإزالة الالتباس بين الموضعين القريب والبعيد لكل مصدر على حدة.

D.1

في النظام الخارجي من B.3،

$$M_{\text{tot}} \simeq 4\pi C_m R, \quad v_{c,\infty}^2 = 4\pi G C_m.$$

بحذف C_m

$$M_{\text{tot}} \simeq \frac{R}{G} v_{c,\infty}^2.$$

عندما يكون نصف القطر مستقلاً عن الكتلة،

$$\eta = \frac{R}{G}, \quad \gamma = 2.$$

لقانون قوة تجريبي، يعطي أخذ اللوغاريتمات

$$\log_{10} \left(\frac{M_{\text{tot}}}{M_\odot} \right) = \gamma_{TF} \log_{10} \left(\frac{v_{c,\infty}}{1 \text{ km s}^{-1}} \right) + \text{ثابت}.$$

إن γ_{TF} هو الميل في الشكل 4.

القراءتان التقريبيتان للخط الأخضر هما

$$(x, y) \simeq (1.6, 8.2), \quad (2.8, 12.6).$$

وهما تعطيان

$$\gamma_{TF} \simeq \frac{12.6 - 8.2}{2.8 - 1.6} \simeq 3.7.$$

تقترب علاقة التناسب المرصودة من قانون القوة الرابعة، وهي أشد انحداً بدرجة كبيرة من تنبؤ القوة الثانية الذي يعطيه النموذج النيوتوني ذو نصف القطر الثابت.

D.2

مقدار التسارع في مدار دائري هو

$$a_m = \frac{v_c^2}{r}.$$

باستخدام نقطة مرصودة في المنطقة الخارجية،

$$v_c \simeq 170 \text{ km s}^{-1}, \quad r \simeq 10 \text{ kpc},$$

نحصل على

$$a_m \simeq \frac{(1.70 \times 10^5)^2}{10 \times 3.09 \times 10^{19}} = \boxed{9.4 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-2}}.$$

D.3

في حدّ MOND العميق $a \ll a_0$ ،

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a/a_0}{1 + a/a_0} \simeq \frac{a}{a_0}.$$

تصبح معادلة الحركة المعدّلة في مجال الجاذبية النيوتوني للكتلة M

$$\frac{GMm}{r^2} \simeq m \frac{a^2}{a_0}.$$

في مدار دائري، $a = v_{c,\infty}^2/r$ ، لذا

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v_{c,\infty}^4}{a_0 r^2}.$$

يُختزل نصف القطر:

$$\boxed{v_{c,\infty}^4 = GMa_0}.$$

وبالتالي،

$$M = \frac{1}{Ga_0} v_{c,\infty}^4, \quad \boxed{\gamma_{\text{MOND}} = 4}.$$

ويفسّر ذلك أيضاً سبب استقلال السرعة المدارية الدائرية التقاربية عن نصف القطر.

للحصول على تقدير بياني للثابت a_0 ، يعطي الشكل 4 تقريباً

$$v_{c,\infty} \simeq 100 \text{ km s}^{-1}, \quad M \simeq 4 \times 10^9 M_{\odot}.$$

ومن ثم،

$$a_0 \simeq \frac{(1.0 \times 10^5)^4}{(6.67430 \times 10^{-11})(4 \times 10^9)(1.99 \times 10^{30})} \simeq 1.9 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}.$$

ضمن دقة الرسم،

$$\boxed{a_0 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}}.$$

وهذه القيمة من الرتبة المذكورة $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. وتعطي المقارنة مع D.2 النسبة $a_m/a_0 \sim 0.5$: فالبيانات المعروضة للمناطق الخارجية للمجرة تستكشف مقياس تسارع MOND، لكنها لا تثبت أن $a_m \ll a_0$.

لسرعة تقاربية ثابتة مقدارها 170 km s^{-1} ، يكون الشرط الصارم لحدّ MOND العميق

$$r \gg \frac{v_{c,\infty}^2}{a_0} \sim 5 \text{ kpc}.$$

ويزداد هذا التقريب دقة كلما ابتعدنا إلى الخارج. أما قرب الانتقال، فيجب استخدام دالة الاستيفاء الكاملة، كما في D.4.

D.4

كثافة الكرة المتجانسة هي

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_b^3}.$$

والكتلة المحتواة داخلها هي

$$M(< r) = \begin{cases} M(r/R_b)^3, & r \leq R_b, \\ M, & r \geq R_b. \end{cases}$$

تبقى قوة الجاذبية نيوتونية في صياغة القانون الثاني المعدّل المحددة في المسألة. ونعرّف مقدارها لكل وحدة من كتلة الاختبار بالعلاقة

$$g_N(r) = \frac{GM(< r)}{r^2} = \begin{cases} \frac{GMr}{R_b^3}, & r \leq R_b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

باستخدام دالة الاستيفاء الكاملة،

$$g_N = \mu \left(\frac{a}{a_0} \right) a = \frac{a^2}{a + a_0}.$$

ومن ثم

$$a^2 - g_N a - g_N a_0 = 0.$$

الجزر الفيزيائي غير السالب هو

$$a = \frac{g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N}}{2}.$$

بما أن $v_c^2 = ra$

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{2} \left(g_N + \sqrt{g_N^2 + 4a_0 g_N} \right) \right]^{1/2}.$$

يعطي التعويض التعبير الصالح في كامل المنطقتين:

$$v_c(r) = \begin{cases} \left[\frac{GM r^2}{2R_b^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 R_b^3}{GM r}} \right) \right]^{1/2}, & 0 < r \leq R_b, \\ \left[\frac{GM}{2r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_0 r^2}{GM}} \right) \right]^{1/2}, & r \geq R_b. \end{cases}$$

يتطابق التعبيران عند $r = R_b$ وتكون النهاية عند المركز $v_c(0) = 0$.

توضّح الحالات الحديثة شكل منحنى الدوران:

المنطقة	نظام التسارع	السرعة المدارية الدائرية
في الداخل، $r < R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_b^3}} r$
في الداخل، $r < R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq \left(\frac{GM a_0}{R_b^3} \right)^{1/4} r^{3/4}$
في الخارج، $r > R_b$	$g_N \gg a_0$	$v_c \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}$
في الخارج، $r > R_b$	$g_N \ll a_0$	$v_c \simeq (GM a_0)^{1/4}$

إذن يبدأ المنحنى من الصفر، ويتناسب مع $r^{3/4}$ بالقرب الكافي من المركز، ويقترب من قيمة ثابتة بعيداً في الخارج. ولا تظهر مناطق نيوتونية بسيطة إلا إذا كان التسارع عند سطح الكرة GM/R_b^2 أكبر من a_0 بدرجة كافية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: ساعة كوكس

في عام 1765، اخترع صانع الساعات البريطاني جيمس كوكس ساعةً مصدر طاقتها الوحيد هو تقلبات الضغط الجوي. استخدمت ساعة كوكس وعاءين يحتويان على الزئبق. وكانت تغيرات الضغط الجوي تتسبب في انتقال الزئبق بين الوعاءين، وفي حركة الوعاءين أحدهما بالنسبة إلى الآخر. وقد مثَّلت هذه الحركة مصدرًا للطاقة اللازمة لتشغيل الساعة نفسها.

نقترح تحليل هذا الجهاز. ونفترض في جميع ما يلي أن

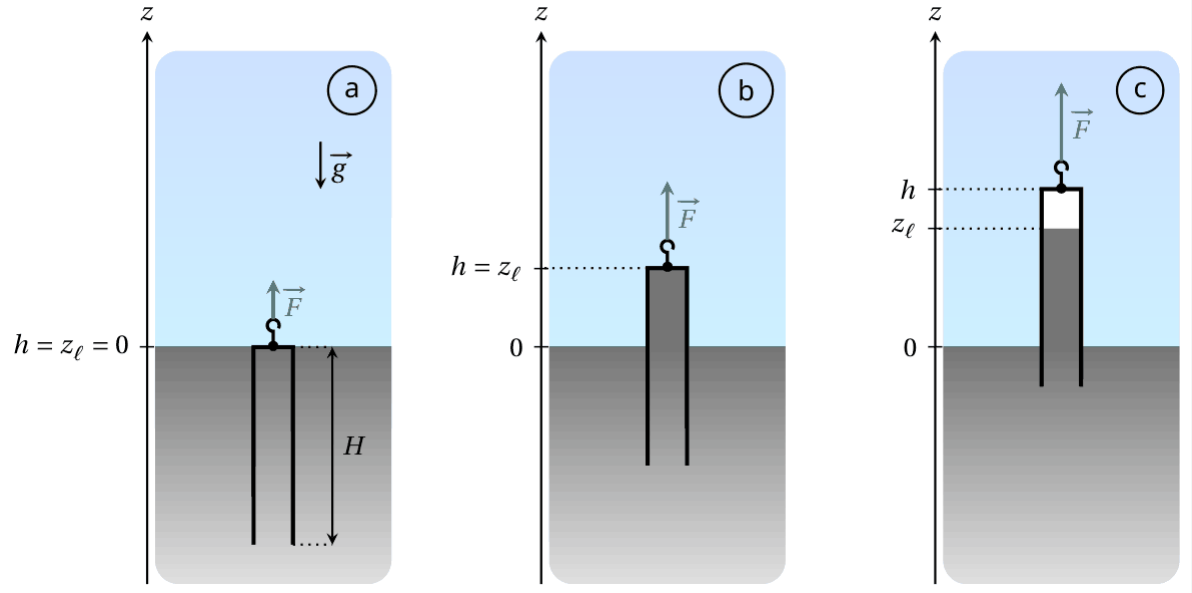
- مجال الجاذبية الأرضية $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ منتظم، حيث $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ و $\vec{u}_z$ متجه وحدة؛
- جميع السوائل غير قابلة للانضغاط، ويُرمز إلى كثافتها بـ ρ ؛
- لن تؤخذ تأثيرات التوتر السطحي في الحسبان؛
- تُهمل تغيرات الضغط الجوي مع الارتفاع؛
- درجة حرارة الوسط المحيط T_a منتظمة، وجميع التحولات متساوية الحرارة.



الشكل 1. تصور فني لساعة كوكس¹

الجزء A - سحب أنبوب مغمور

ننظر أولاً في حوض ماء يشغل الحيز نصف اللانهائي $z \leq 0$. ويكون الهواء فوقه عند ضغط $P_a = P_0$. يُغمر في الحوض أنبوب أسطواناني رأسي طوله $H = 1 \text{ m}$ ، ومساحة مقطعه $S = 10 \text{ cm}^2$ ، وكتلته $m = 0.5 \text{ kg}$. الطرف السفلي للأنبوب مفتوح، وطرفه العلوي مغلق. نرمز بـ h إلى منسوب قمة الأنبوب، وبـ z إلى منسوب الماء داخل الأنبوب. ويُهمل سمك جدران الأنبوب.



الشكل 2. رسم تخطيطي للأنبوب في أوضاع مختلفة

نبدأ من الحالة التي لا يحتوي فيها الأنبوب في الشكل 2 على أي غاز، وتكون قمته عند مستوى سطح الحوض: أي إن $h = 0$ و $z_l = 0$ (الحالة a). ثم يُرفع الأنبوب ببطء حتى يصل طرفه السفلي إلى مستوى سطح الحوض. ويُرمز إلى قوة السحب المؤثرة في الأنبوب بـ $\vec{F} = F\vec{u}_z$.

0.2 — A.1 نقطة

لوضع المبين في الشكل 2 (الحالة b)، عبّر عن الضغط P_w في الماء عند قمة الأنبوب. وعبّر أيضاً عن القوة $\vec{F}$ اللازمة لإبقاء الأنبوب في هذا الموضع. يجب كتابة التعابير بدلالة P_0, ρ, m, S, h, g و $\vec{u}_z$.

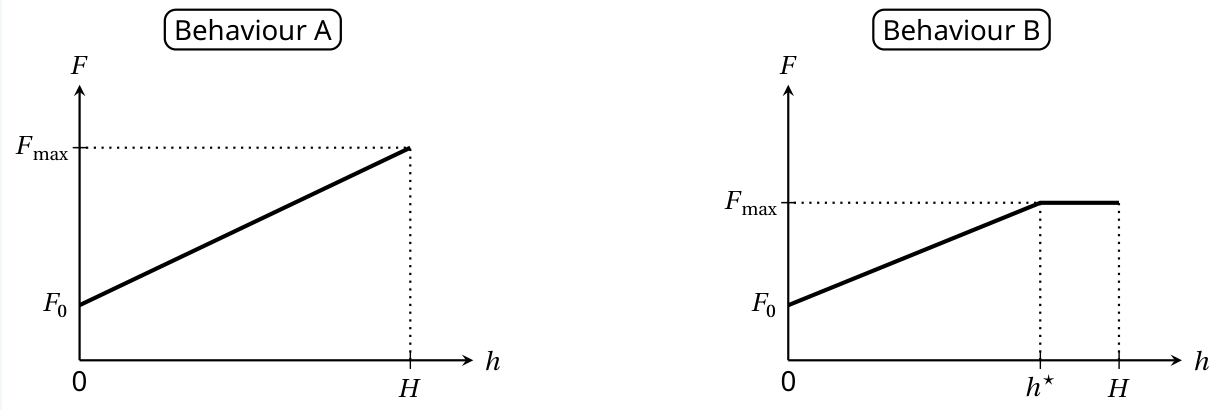
تُجرى ثلاث تجارب. وفي كل منها، يُرفع الأنبوب من الحالة الابتدائية المبينة في الشكل 2(a)، وفق الشروط المحددة في الجدول 1.

التجربة	السائل	T_a (C°)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	الماء	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	الماء	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	الماء	99	0.96×10^3	99.8×10^3

الجدول 1. الشروط التجريبية والقيم العددية للكميات الفيزيائية في كل تجربة

(يشير P_{sat} إلى ضغط البخار المشبع للمائع النقي)

في كل حالة، ندرس تغير القوة F التي يجب تطبيقها لإبقاء الأنبوب في حالة اتزان عند منسوب h ، مع تثبيت الضغط الخارجي عند $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa. ويمكن أن يظهر سلوكان مختلفان



0.8 — A.2 نقطة

لكل تجربة، أكمل الجدول في ورقة الإجابة لتبيين السلوك المتوقع والقيم العددية لكل من $F_{\max}$ و h^* (عندما يكون ذلك ذا صلة)، حيث يُعرف $F_{\max}$ و h^* في الشكلين اللذين يوضحان السلوكين.

Experiment	Behaviour (A or B ?)	h^* (cm)	$F_{\max}$ (N)
1			
2			
3			

عندما نستبدل الماء بالزئبق السائل (الذي ترد خواصه أدناه)، يُلاحظ السلوك B.

السائل	T_a (°C)	ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	P_{sat} (Pa)
الزئبق	20	13.5×10^3	0.163

0.3 — A.3 نقطة

عبر عن الخطأ النسبي، الذي يُرمز إليه بـ ε ، المرتكب عند حساب القوة العظمى $F_{\max}$ بإهمال P_{sat} مقارنةً بـ P_0 . أعطِ القيمة العددية لـ ε .

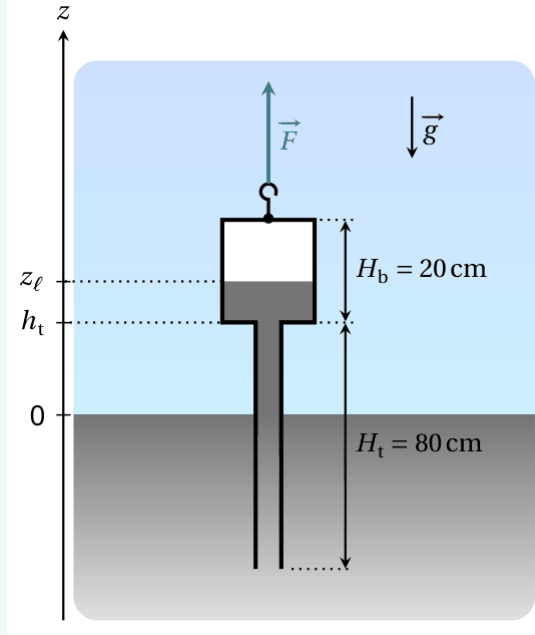
الجزء B - أنبوب بارومتري ذو جزأين

من الآن فصاعدًا، نستخدم الزئبق (كثافته $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) عند درجة حرارة الوسط المحيط $T_a = 20^\circ\text{C}$ ، ونأخذ $P_{\text{sat}} = 0$.

لننظر في أنبوب يعلوه خزان، نمثله بأسطوانتين موضوعتين إحداها فوق الأخرى ولهما أبعاد مختلفة، كما هو مبين في الشكل 3.

- الجزء السفلي (الذي سنظل نسميه الأنبوب) مساحة مقطعه S_t وارتفاعه $H_t = 80 \text{ cm}$ ؛
- الجزء العلوي (المسمى الانتفاخ) مساحة مقطعه $S_b > S_t$ وارتفاعه $H_b = 20 \text{ cm}$.

يُغمر هذا الأنبوب ذو الجزأين في حوض سائل نصف لانتهائي.



الشكل 3. رسم تخطيطي للأنبوب البارومتري ذي الجزأين

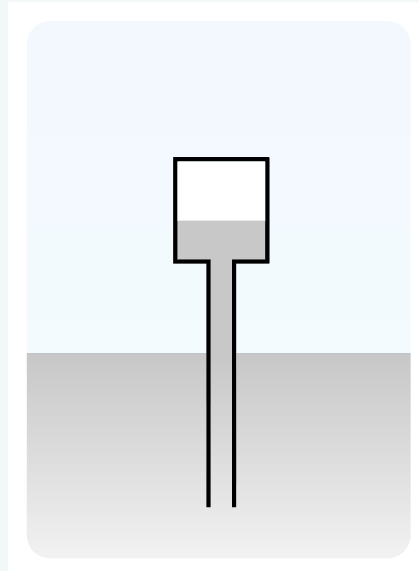
كما في الجزء A، يُحضّر النظام بحيث لا يحتوي الأنبوب على أي هواء. ونحدد الموضع الرأسي للأنبوب بمنسوب h_t لنقطة اتصال الأنبوب بالانتفاخ. ونرمز مجدداً إلى ارتفاع عمود الزئبق بـ z_ℓ . ويمكن الآن كتابة القوة $\vec{F}$ التي يجب بذلها لإبقاء الأنبوب في حالة اتزان في الوضع المبين في الشكل 3 على الصورة

$$\vec{F} = (m_{tb} + m_{add})g\vec{u}_z \quad (1)$$

حيث m_{tb} هي الكتلة الكلية للأنبوب ذي الجزأين (عندما يكون خالياً من الزئبق).

0.3 — B.1 نقطة

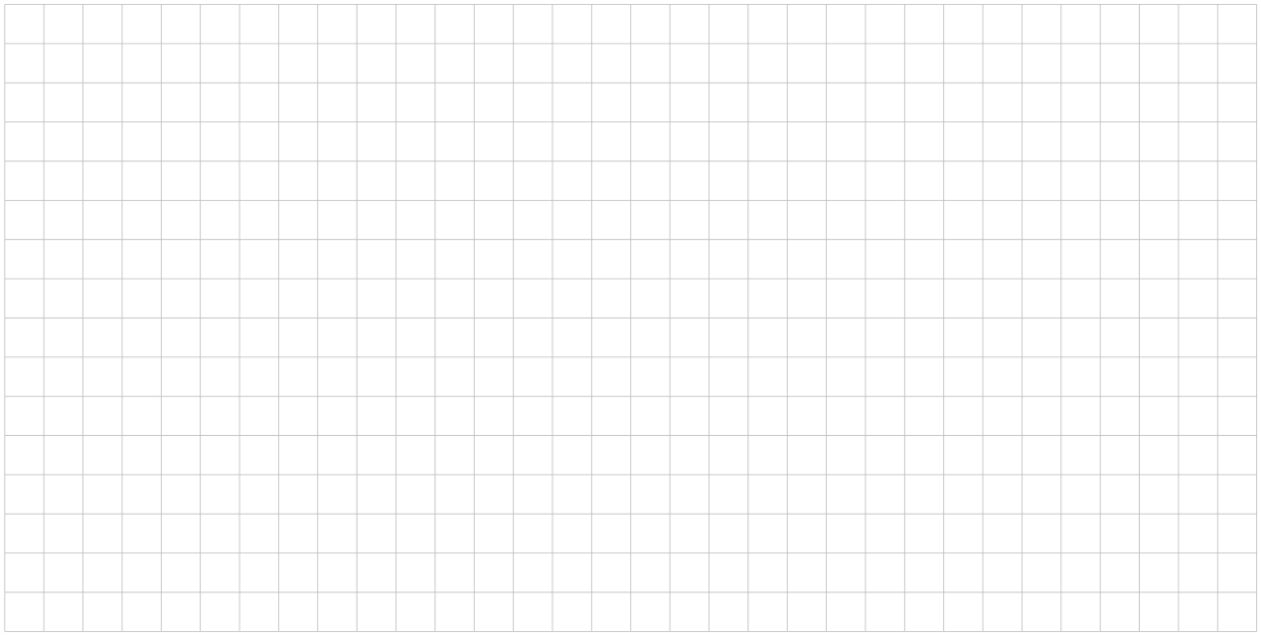
لنّ في ورقة الإجابة المنطقة التي تقابل حجم الزئبق السائل المسؤول عن الحد m_{add} الوارد في المعادلة (1).



تعتمد الكتلة m_{add} على كل من الارتفاع h_t والضغط الجوي P_a . في السؤال التالي، افترض أن الضغط الجوي ثابت عند $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$. انطلاقاً من الحالة التي يكون فيها النظام مغموراً بالكامل، يُرفع الأنبوب ببطء حتى تصبح قاعدته بمحاذاة سطح حوض السائل.

1.4 — B.2 نقطة

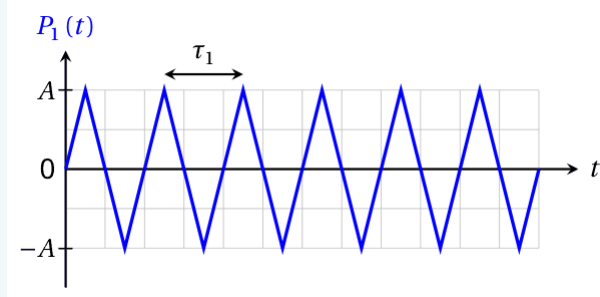
ارسم رسماً تخطيطياً لتغير الكتلة m_{add} بدلالة h_t ، من أجل $h_t \in [-H_b, H_t]$. بيّن على الرسم تعابير ميل القطع المختلفة، وكذلك القيمة التحليلية لـ h_t عند كل نقطة زاوية، بدلالة $H_t, P_0, \rho, g, S_b, S_t, H_b$.



أثناء رفع النظام مع بقاء $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ، نتوقف عندما يكون السطح الحر للسائل في منتصف الانتفاخ. نثبت قيمة h_t ، ثم نلاحظ تغيرات الكتلة m_{add} الناتجة عن تغيرات الضغط الجوي الموصوفة بالعلاقة

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

حيث يشير P_0 إلى القيمة المتوسطة، و P_1 حد اضطرابي. نمثل P_1 بدالة مثلثية دورية سعتها $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ ودورها τ_1 أسبوع واحد.



الشكل 4. نموذج مبسط للحد الاضطرابي $P_1(t)$

0.3 — B.3 نقطة

علمًا بأن $S_t = 5 \text{ cm}^2$ و $S_b = 200 \text{ cm}^2$ ، عبّر عن سعة Δm_{add} تغيرات الكتلة m_{add} مع الزمن، ثم أعط قيمتها العددية. افترض أن سطح السائل يبقى دائمًا داخل الانتفاخ.

الجزء C - ساعة كوكس

الآلية الفعلية التي طوّرها كوكس معقدة (الشكل 5). ندرس نسخة مبسطة، مبينة في الشكل 6 وموصوفة أدناه

- حوض سفلي أسطواناني يحتوي على حمام من الزئبق؛
- أنبوب بارومتري ذو جزأين مماثل لذلك المدروس في الجزء B، ما يزال مفرغًا تمامًا من أي هواء، ومغمور في الحمام؛

- يُعلّق كل من الحوض والأنبوب ذي الجزأين بكبل. يمر الكبلان (المفترض أنهما غير قابلين للاستطالة وكتلتهما مهملة) عبر منظومة بكرات مثالية، وينتهيان مثبتين على جانبي الكتلة نفسها M ، التي يمكنها الانزلاق على سطح أفقي؛
- الحجم الكلي للزئبق السائل الموجود في النظام هو $V_\ell = 5L$.

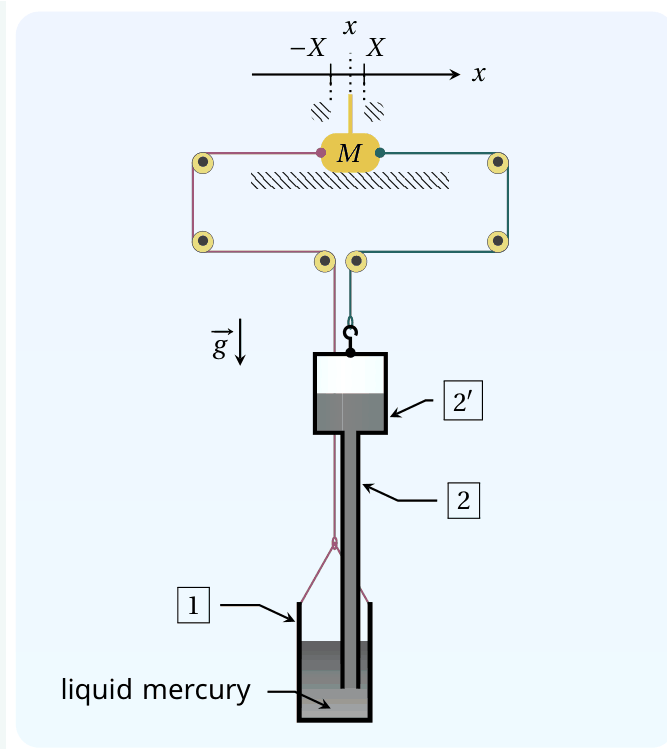
ترد ارتفاعات الأجزاء ومساحات مقاطعها وكتلتها في الجدول 2. يُحدد موضع الكتلة M بالإحداثي x لمركز كتلتها. نأخذ في الحسبان الاحتكاك الجاف بين المسند الأفقي والكتلة M ، دون تمييز بين معاملي الاحتكاك السكوني والحركي؛ ويُرمز إلى مقدار هذه القوة عند حدوث الانزلاق بـ F_s .

يحدّد مصدّان من إزاحة الكتلة M بحيث $-X \leq x \leq X$ (مع $X > 0$). افترض أن قيمة X تضمن أن

- قاع الأنبوب ذي الجزأين لا يلامس قاع الحوض أبداً، ولا يخرج من حمام السائل؛
- منسوب z_ℓ عمود الزئبق يقع دائماً داخل الانتفاخ العلوي.



الشكل 5. ساعة كوكس الفعلية² (من دون زئبق)



الشكل 6. رسم تخطيطي للنظام الذي يمثل الساعة

الرمز المرجعي	الاسم	الارتفاع	مساحة المقطع	الكتلة عند الفراغ
[1]	الحوض	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
[2]	الجزء الأنبوبي من الأنبوب البارومتري	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	الكتلة الكلية للأنبوب البارومتري: m_{tb}
[2']	انتفاخ الأنبوب البارومتري	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

الجدول 2. أبعاد النظام النموذجي ورموزه

يتطور النظام وهو على تماس مع الغلاف الجوي، الذي يتقلب ضغطه كما في الشكل 4 (مع بقاء السعة $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ والدور $\tau_1 = 1$ أسبوع). في البداية $t = 0$ تكون الكتلة M ساكنة عند $x = 0$ ، وتكون قوتا الشد اللتان يبذلها الكبلان على جانبي الكتلة M متوازنتين، مع $P_1(0) = 0$. نعرّف

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

حيث يستخدم التعبير الأخير العلاقة $S_t \ll S_b, S_c$ (التي سنفترض صحتها حتى نهاية المسألة).

1 — C.1 نقطة

حدد العتبة ξ^* التي تبقى الكتلة M عند تجاوزها ساكنة إلى أجل غير مسمى، أي عندما $\xi > \xi^*$.

للسؤال التالي فقط، افترض أن الكتلة M مثبتة مؤقتاً عند $x = X$.

1 — C.2 نقطة

أعط تعبيراً لقوة الشد الكلية $\vec{T} = T\vec{u}_x$ المؤثرة في الكتلة M بفعل شد الكبلين عند هذا الموضع، عندما $P_1 = 0$ ، بدلالة ρ, g, X ومساحات المقاطع ذات الصلة.

عندما $\xi < \xi^*$ ، وبالبداية مجدداً من $x = 0$ و $P_1 = 0$ ، يمكن ملاحظة سلوكين مختلفين من أجل $t \geq 0$. وللتمييز بينهما، نحتاج إلى إدخال معامل آخر

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

أكمل الجدول في ورقة الإجابة لتبيين الشرط الذي يتحقق في ظل كل نمط. يجب التعبير عن الشروط بمتباينات تتعلق بـ λ و λ . وارسم أيضاً رسماً تخطيطياً لتغيرات $x(t)/X$ من أجل $t \in [0, 3\tau_1]$ بحيث تتوافق مع تغيرات $P_1(t)/A$ المبينة مسبقاً. لا يلزم تحديد إحداثيات النقاط المميزة.

	Condition for observation	Graph of $x(t)/X$
Regime 1		
Regime 2		

في ساعة كوكس الفعلية، تُخزن الطاقة التي توفرها الآلية باستخدام منظومة مسننات ذات سقاطات، وتُستخدم لرفع ثقل موازن، كما في الساعة التقليدية. وفي النموذج المبسط المدروس هنا، تقابل الطاقة التي تستخلصها الساعة الطاقة المبددة بفعل قوة الاحتكاك التي يبذلها السطح الأفقي على الكتلة M . من الآن فصاعداً، نفترض أن أبعاد النظام مختارة بحيث يعمل في النمط الذي يتيح للساعة استخلاص الطاقة. ونفترض أيضاً أن النظام قد بلغ الحالة الدائمة. نرمز بـ W إلى الطاقة المبددة بفعل قوة الاحتكاك الجاف خلال دور τ_1 ، والتي يمكن التعبير عنها بدلالة X و F_s فقط.

مع ثبات سائر العوامل، يمكن ضبط X و F_s لتعظيم الطاقة W ؛ ونرمز بـ F_s^* و X^* إلى قيمتهما، على الترتيب، في الحالة المثلى.

1 — C.4 نقطة

باعتبار $S_b \simeq S_c$ و $S_t \ll S_b$ ، حدد تعبير F_s^* و X^* بدلالة ρ, g, S_c و A . عبّر عن الطاقة العظمى الموافقة W^* ، ثم احسب قيمتها العددية مع $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$.

نرمز بـ W_{pr}^* إلى شغل قوى الضغط الجوي الذي يتلقاه النظام في الحالة المثلى خلال دور τ_1 .

1.7 — C.5 نقطة

عبّر عن W_{pr}^* ، ثم احسب النسبة W^*/W_{pr}^* . قد يكون من المفيد تمثيل تطور النظام في مخطط (P, V) ، حيث V حجم النظام. نَسب الصور:

[1]: Bruno Vacaro

[2]: متحف فيكتوريا وألبرت، لندن.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

نعرف

$$L = \frac{P_0}{\rho g}, \quad D = S_b + S_c - S_t, \quad q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

A.1 •

$$P_w = P_0 - \rho g h, \quad \vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

A.2 •

التجربة	السلوك	h^* (cm), عندما يكون ذا صلة	$F_{\max}$ (N)
1	A	—	14.7
2	A	—	14.4
3	B	2.13	5.10

A.3 •

$$\varepsilon = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

يؤدي إهمال ضغط بخار الزئبق إلى تقدير القوة بأكبر من قيمتها الفعلية.

B.1 • ظلل كل الزئبق داخل الأنبوب والانفتاح فوق مستوى سطح الحمام الخارجي. في الوضع المبين،

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

B.2 •

$$m_{\text{add}}(h_t) = \begin{cases} \rho S_b (h_t + H_b), & -H_b \leq h_t \leq 0, \\ \rho (S_b H_b + S_t h_t), & 0 \leq h_t \leq L - H_b, \\ \rho [S_b L - (S_b - S_t) h_t], & L - H_b \leq h_t \leq L, \\ \rho S_t L, & L \leq h_t \leq H_t. \end{cases}$$

الميل المتعاقبة هي

$$\rho S_b, \quad \rho S_t, \quad -\rho (S_b - S_t), \quad 0.$$

تقع نقاط الزوايا عند

$$h_t = 0, \quad L - H_b \simeq 0.556 \text{ m}, \quad L \simeq 0.756 \text{ m}.$$

B.3 •

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g} = 1.02 \text{ kg}.$$

C.1 •

$$\xi^* = 2.$$

C.2 •

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

• C.3، من أجل $2 < \xi$:

النمط	الشرط	وصف $x(t)/X$
1: البقاء عند أحد المصدّين	$q > 1$ ، أو بصورة مكافئة $\xi + 2\lambda > 2$	تساوي في البداية 0، ثم ترتفع سريعاً إلى 1 وتبقى هناك.
2: أشواط متكررة	$q < 1$ ، أو بصورة مكافئة $\xi + 2\lambda < 2$	تساوي في البداية 0، ثم تتناوب بين مستويين ثابتين عند 1 و -1.

يبدأ أول شوط موجب عندما $P_1/A = \xi/2$. وتبدأ الأشواط السالبة اللاحقة عند $P_1/A = -q$ أثناء انخفاض الضغط، وتبدأ الأشواط الموجبة عند $P_1/A = q$ أثناء ارتفاع الضغط. الحد الفاصل $q = 1$ حالة حدية؛ إذ يسمح الاحتكاك السكوني المثالي ببقاء الكتلة عند المصدّ.

• C.4 الحالة المثلى الحدية المثالية هي

$$F_s^* = \frac{S_c A}{2} \simeq 5.25 \text{ N}, \quad X^* = \frac{A}{4\rho g} \simeq 0.945 \text{ mm},$$

$$W^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g} \simeq 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

• C.5

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} \simeq 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}, \quad \frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{1}{2}.$$

الحل

A.1

يعطي الاتزان الهيدروستاتيكي

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

الماء متصل بالحوض، حيث $P = P_0$ عند $z = 0$. ومن ثم، ما دام الماء ملائماً للقمة المغلقة،

$$P_w = P_0 - \rho g h.$$

يُولّد الضغط على السطح الخارجي للقمة قوة نحو الأسفل $P_0 S$ ، بينما يُولّد الماء أسفلها قوة نحو الأعلى $P_w S$. ولا تسهم الجدران الرأسية بأي قوة ضغط رأسية، كما أن سمكها مهمل. لذلك يتطلب الاتزان

$$F + P_w S - P_0 S - mg = 0.$$

إنّ

$$\vec{F} = (mg + \rho g S h) \vec{u}_z.$$

A.2

يظهر تجويف بخاري عندما يبلغ الضغط عند القمة ضغط البخار المشبع:

$$P_0 - \rho g h^* = P_{\text{sat}}.$$

ومن ثم

$$h^* = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}.$$

قبل حدوث ذلك، $F = mg + \rho g Sh$. وبعد تشكّل التجويف البخاري، يبقى ضغطه مساوياً لـ P_{sat} عند درجة الحرارة المحددة، ولذلك

$$F = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}).$$

تُجمع هذه التعابير في العلاقة

$$F(h) = mg + S \min\{\rho gh, P_0 - P_{\text{sat}}\}, \quad 0 \leq h \leq H.$$

وعليه:

- إذا كان $h^* \geq H$ ، يظهر السلوك A، وتكون $F_{\text{max}} = mg + \rho g SH$ ؛
- إذا كان $h^* < H$ ، يظهر السلوك B، وتكون $F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})$.

باستخدام $S = 10^{-3} \text{ m}^2$ ، $H = 1 \text{ m}$ ، و $mg = 4.90 \text{ N}$:

التجربة	ارتفاع التشبع المحسوب	المقارنة مع H	النتيجة
1	$\frac{100000 - 2340}{1000(9.8)} = 9.97 \text{ m}$	أكبر من H	$F_{\text{max}} = 14.7 \text{ N} : A$
2	$\frac{100000 - 47400}{970(9.8)} = 5.53 \text{ m}$	أكبر من H	$F_{\text{max}} = 14.406 \text{ N} \simeq 14.4 \text{ N} : A$
3	$\frac{100000 - 99800}{960(9.8)} = 0.02126 \text{ m}$	أصغر من H	$F_{\text{max}} = 5.10 \text{ N}$ ، $h^* = 2.13 \text{ cm} : B$

يبدأ كلا المنحنيين عند $F_0 = mg = 4.90 \text{ N}$.

A.3

بالنسبة إلى الزئبق، تكون القوة العظمى الفعلية وتقريبها

$$F_{\text{max}} = mg + S(P_0 - P_{\text{sat}}), \quad F_{\text{max}}^{(0)} = mg + SP_0.$$

يزيد التقريب عن القوة الفعلية بمقدار SP_{sat} . وبالنسبة إلى القوة الفعلية،

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{max}}^{(0)} - F_{\text{max}}}{F_{\text{max}}} = \frac{SP_{\text{sat}}}{mg + S(P_0 - P_{\text{sat}})}.$$

عددياً،

$$\varepsilon = \frac{10^{-3}(0.163)}{0.5(9.8) + 10^{-3}(100000 - 0.163)} = 1.55 \times 10^{-6}.$$

وهذا يساوي تقريباً 0.000155%.

B.1

الحمل الإضافي هو وزن الزئبق المرفوع فوق سطح الحمام الخارجي. أما الزئبق الواقع أسفل ذلك المستوى فيسند الحمام هيدروستاتيكياً.

لذلك، ظلّ في الرسم الموجود في ورقة الإجابة:

- الزئبق الموجود في الأنبوب الضيق من مستوى سطح الحمام الخارجي حتى نقطة اتصال الأنبوب بالانتفاخ؛
- كل الزئبق الموجود في الانتفاخ، من قاعه حتى سطحه الحر الداخلي.

لا تظلّ الزئبق الواقع أسفل مستوى سطح الحمام الخارجي. في الوضع المبين،

$$m_{\text{add}} = \rho [S_t h_t + S_b (z_\ell - h_t)].$$

بما أن الضغط فوق السطح الداخلي يساوي صفراً،

$$z_\ell = \frac{P_a}{\rho g}.$$

ومن ثم، فإن تعبيراً مكافئاً مفيداً هو

$$m_{\text{add}} = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t$$

عندما يقع السطح الحر داخل الانتفاخ وتكون نقطة الاتصال فوق الحمام الخارجي.

B.2

نُدخل الارتفاع البارومتري

$$L = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{10^5}{(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 0.75586 \text{ m.}$$

للأبعاد المعطاة،

$$0 < L - H_b < L < H_t.$$

يبقى الأنبوب ممتلئاً تماماً حتى تبلغ قمته المنسوب L . وبعد ذلك، يبقى السطح الحر الداخلي عند $z_\ell = L$ ، بينما يواصل الأنبوب الارتفاع. هناك أربعة مجالات متميزة هندسياً.

$$-H_b \leq h_t \leq 0.1$$

لا يعلو سطح الحمام سوى جزء من الانتفاخ ارتفاعه $h_t + H_b$:

$$m_{\text{add}} = \rho S_b(h_t + H_b).$$

يبدأ المنحنى عند $(-H_b, 0)$ ، بميل ρS_b .

$$0 \leq h_t \leq L - H_b.2$$

يقع الانتفاخ بأكمله وجزء من الأنبوب الضيق طوله h_t فوق سطح الحمام، وتكون جميعها ممتلئة بالزئبق:

$$m_{\text{add}} = \rho(S_b H_b + S_t h_t).$$

يواصل المنحنى الصعود بميل أصغر ρS_t .

$$L - H_b \leq h_t \leq L.3$$

يتشكل فراغ فوق الزئبق، الذي يبقى سطحه عند المنسوب L داخل الانتفاخ:

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t h_t + S_b(L - h_t)].$$

الميل هو $-\rho(S_b - S_t)$ ، لذا يتناقص المنحنى.

$$L \leq h_t \leq H_t.4$$

يكون الانتفاخ فارغاً، ويقع السطح الحر الداخلي داخل الأنبوب الضيق:

$$m_{\text{add}} = \rho S_t L = \frac{S_t P_0}{g}.$$

يكون المنحنى أفقياً.

المنحنى متصل، وله الرؤوس ونقطة النهاية الآتية:

h_t	m_{add}
$-H_b$	0
0	$\rho S_b H_b$
$L - H_b$	$\rho[S_b H_b + S_t(L - H_b)]$ القيمة العظمى
L	$\rho S_t L$
H_t	$\rho S_t L$

الإحداثيات الأفقية لنقاط الزوايا الثلاث هي

$$0, \quad \frac{P_0}{\rho g} - H_b, \quad \frac{P_0}{\rho g},$$

وتساوي عددياً 0، و 55.6 cm، و 75.6 cm.

B.3

عند الموضع الثابت المحدد، يبقى السطح الحر داخل الانتفاخ. إذن

$$m_{\text{add}}(t) = \frac{S_b[P_0 + P_1(t)]}{g} - \rho(S_b - S_t)h_t.$$

الحد الأول وحده هو الذي يتغير، لذا تكون السعة

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{S_b A}{g}.$$

مع $S_b = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$

$$\Delta m_{\text{add}} = \frac{0.0200(500)}{9.8} = 1.02 \text{ kg}.$$

هذه هي السعة حول القيمة المتوسطة؛ أما التغير من القيمة الدنيا إلى القيمة العليا فهو 2.04 kg. وسعة تغير ارتفاع السطح الموافقة هي

$$\frac{A}{\rho g} = 3.78 \text{ mm},$$

وهي أصغر بكثير من المسافة 10 cm الفاصلة بين منتصف الانتفاخ وأي من طرفيه.

C.1

نستخرج أولاً فرق قوتي شد الكبلين لقيمتين اعتباطيتين x و P_1 .

ليكن z_s منسوب سطح الزئبق الخارجي، و z_c منسوب قاع الحوض. وفق ترتيب الكبلين، فإن إزاحة الكتلة إلى اليمين بمقدار x :

- ترفع الحوض بمقدار x ؛
- تخفض الأنبوب البارومتري بمقدار x .

وعليه

$$z_c = z_{c0} + x, \quad h_t = h_{t0} - x.$$

يعطي الاتزان الهيدروستاتيكي

$$z_\ell - z_s = \frac{P_a}{\rho g}.$$

كتلة الزئبق الواقع فوق السطح الخارجي هي

$$m_{\text{add}} = \rho[S_t(h_t - z_s) + S_b(z_\ell - h_t)] = \frac{S_b P_a}{g} - \rho(S_b - S_t)(h_t - z_s).$$

بما أن حجم جدران الأنبوب مهمل، يمكن كتابة انحفاظ الزئبق على الصورة

$$V_\ell = S_c(z_s - z_c) + \frac{m_{\text{add}}}{\rho}.$$

بوضع $\delta m = m_{\text{add}} - m_{\text{add},0}$ ، ينتج من ذلك

$$\delta z_s = x - \frac{\delta m}{\rho S_c}.$$

بطرح التعبير الابتدائي لـ m_{add} من قيمته الحالية نحصل على

$$\delta m = \frac{S_b P_1}{g} + \rho(S_b - S_t)(x + \delta z_s).$$

وبالتالي،

$$\delta m = \frac{S_b S_c}{(S_b + S_c - S_t)g} P_1 + \frac{2\rho S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} x.$$

في وضع ساكن، تكون قوة شد الكبل من جهة الأنبوب

$$T_{\text{tb}} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}})g,$$

بينما تكون قوة الشد من جهة الحوض

$$T_c = (m_c + \rho V_\ell - m_{\text{add}})g.$$

الفرق الابتدائي بينهما يساوي صفراً. ومن ثم فإن القوة الجبرية المؤثرة في M ، والموجبة نحو اليمين، هي

$$T = T_{\text{tb}} - T_c = 2g \delta m.$$

نعرف

$$K = \frac{S_b S_c}{S_b + S_c - S_t}, \quad \alpha = \frac{2\rho g (S_b - S_t)}{S_b}.$$

قانون القوة الناتج هو

$$T = 2K(P_1 + \alpha x).$$

وتحقق المعاملات المعطاة

$$F_s = KA\xi, \quad \alpha X = A\lambda.$$

عند $x = 0$ ، يكون أكبر مقدار للقوة خلال دورة الضغط الجوي هو $2KA$. ويمكن للاحتكاك السكوني موازنتها طوال الدورة إذا كان

$$F_s \geq 2KA \iff \xi \geq 2.$$

إن العتبة المطلوبة هي

$$\xi^* = 2.$$

C.2

بوضع $x = X$ و $P_1 = 0$ في قانون القوة،

$$\vec{T} = \frac{4\rho g S_c (S_b - S_t)}{S_b + S_c - S_t} X \vec{u}_x.$$

وباستخدام $S_t \ll S_b, S_c$ ،

$$\vec{T} \simeq \frac{4\rho g S_b S_c}{S_b + S_c} X \vec{u}_x.$$

للإشارة الموجبة دلالة مهمة: فالإزاحة نحو اليمين تولّد قوة إضافية نحو اليمين. ويصبح الاتزان غير مستقر ميكانيكياً بمجرد أن يعجز الاحتكاك عن إبقاء الكتلة ساكنة.

C.3

لرسم المنحنيات التخطيطية، استخدم حدّ التغير البطيء للضغط الجوي المحرّك: إذ يكون الانتقال بين المصدّين سريعاً مقارنةً بدور الضغط البالغ أسبوعاً واحداً. ويوقف المصدّان النظام المتحرك.

نكتب

$$p = \frac{P_1}{A}, \quad y = \frac{x}{X}.$$

عندئذ

$$\frac{T}{KA} = 2(p + \lambda y), \quad \frac{F_s}{KA} = \xi.$$

في البداية $y = 0$ ، ويزداد p انطلاقاً من الصفر. تبدأ الحركة نحو اليمين عندما يتجاوز p القيمة

$$p = \frac{\xi}{2}.$$

بما أن $\partial T / \partial x = 2K\alpha > 0$ ، تزيد الحركة نحو اليمين القوة المحركة. وتصل الكتلة سريعاً إلى $y = +1$.

عند المصدِّ الأيمن، يتطلب الانطلاق نحو اليسار

$$T < -F_s.$$

إن

$$2(p + \lambda) < -\xi \iff p < -\left(\lambda + \frac{\xi}{2}\right).$$

نعرف

$$q = \lambda + \frac{\xi}{2}.$$

إذا كان $q > 1$ ، لا ينخفض الضغط أبداً بما يكفي لتحرير الكتلة. وإذا كان $q < 1$ ، يحدث الانطلاق خلال كل نصف دورة يتناقص فيه الضغط. والشرط المناظر للانطلاق عند المصدِّ الأيسر هو $p > q$.

وعليه، فإن النمطين هما:

النمط	الشرط	الوصف الدقيق للرسم التخطيطي
1: البقاء الدائم عند المصدِّ الأيمن	$\xi < 2$, $\xi + 2\lambda > 2$	ارسم $x/X = 0$ في البداية، ثم ارتفاعاً سريعاً إلى $+1$ على أول فرع يتزايد فيه الضغط عند $p = \xi/2$. تابع أفقياً عند $+1$ حتى $3\tau_1$.
2: حركة متكررة بين المصدِّين	$\xi < 2$, $\xi + 2\lambda < 2$	ابدأ بالارتفاع الابتدائي نفسه. ثم ارسم مقاطع أفقية ثابتة عند $+1$ و -1 ، تصل بينها انتقالات سريعة هابطة كلما بلغ الضغط المتناقص $p = -q$ ، وانتقالات صاعدة كلما بلغ الضغط المتزايد $p = q$.

لتحديد مواضع الانتقالات صراحةً، نضع $s = t/\tau_1$. يقع أول انتقال موجب عند

$$s = \frac{\xi}{8}.$$

في النمط الدوري، تقع الانتقالات السالبة ضمن المجال المطلوب عند

$$s = \frac{1}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{3}{2} + \frac{q}{4}, \quad \frac{5}{2} + \frac{q}{4},$$

وتقع الانتقالات الموجبة اللاحقة عند

$$s = 1 + \frac{q}{4}, \quad 2 + \frac{q}{4}.$$

تحدد هذه القيم بالكامل الرسم التخطيطي المطلوب لثلاثة أدوار.

عند $q = 1$ ، لا تُبلغ عتبة الانطلاق إلا عند قيمة قصوى أو دنيا للضغط، من دون تجاؤها. ويمكن للاحتكاك السكوني المثالي تماماً أن يُبقي الكتلة عند المصدِّ؛ وتضمن المتباينة الصارمة $q < 1$ استمرار الحركة الدورية.

C.4

في النمط الدوري الدائم، تنتقل الكتلة من أحد المصدِّين إلى الآخر ثم تعود خلال كل دور. وتكون مسافة انزلاقها الكلية $4X$ ، لذا

$$W = 4F_s X.$$

مع $S_t \ll S_b$ و $S_b \simeq S_c$

$$\xi \simeq \frac{2F_s}{S_c A}, \quad \lambda \simeq \frac{2\rho g X}{A}.$$

يصبح شرط الحركة الدورية

$$\xi + 2\lambda < 2 \iff F_s < S_c(A - 2\rho g X).$$

عند تثبيت X ، نقترب من أكبر طاقة ممكنة عندما يقترب F_s من هذا الحد الأعلى. ويكون غلافها الحدي

$$W(X) = 4S_c X(A - 2\rho g X).$$

بالتفاضل،

$$\frac{dW}{dX} = 4S_c(A - 4\rho g X).$$

وعليه، تكون الحالة المثلى

$$\boxed{X^* = \frac{A}{4\rho g}}, \quad \boxed{F_s^* = \frac{S_c A}{2}}.$$

وبصورة مكافئة،

$$\xi_{\text{opt}} = 1, \quad \lambda_{\text{opt}} = \frac{1}{2}.$$

إذن

$$\boxed{W^* = 4F_s^* X^* = \frac{S_c A^2}{2\rho g}}.$$

مع $S_c = 0.0210 \text{ m}^2$

$$F_s^* = \frac{0.0210(500)}{2} = 5.25 \text{ N},$$

$$X^* = \frac{500}{4(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m},$$

و

$$\boxed{W^* = \frac{0.0210(500)^2}{2(13.5 \times 10^3)(9.8)} = 1.98 \times 10^{-2} \text{ J}}.$$

على وجه الدقة، تقع هذه القيم على الحد الفاصل الحدي للانتقال. وهي تعطي القيمة العظمى الحدية المثالية التي نقترب منها من جهة النمط الدوري؛ ويتطلب التشغيل الموثوق هامشاً صغيراً داخل ذلك الحد.

C.5

يشمل الحجم المعني بشغل الضغط الجوي الفراغ المحصور فوق الزئبق. وحجم السائل وحجم مادة الوعاءين ثابتان، لذا

$$V = V_{\text{constant}} + V_{\text{vac}}, \quad V_{\text{vac}} = S_b(h_t + H_b - z_\ell).$$

نستخدم التقريب نفسه المستخدم في C.4:

$$S_b = S_c = S, \quad S_t = 0.$$

تعطي عندئذٍ علاقتا الانحفاظ والاتزان الهيدروستاتيكي المشتقتان في C.1

$$\delta z_s = -\frac{P_1}{2\rho g}, \quad \delta z_\ell = \frac{P_1}{2\rho g}.$$

بما أن $\delta h_t = -x$

$$V = V_{\text{ref}} - Sx - \frac{S}{2\rho g} P_1.$$

شغل الضغط الجوي الذي يتلقاه النظام هو

$$W_{\text{pr}} = - \oint P_a dV.$$

بالتعويض نحصل على

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_a dx + \frac{S}{2\rho g} \oint P_a dP_1.$$

ينعدم التكامل الثاني على دورة مغلقة. وكذلك $\oint P_0 dx = 0$. ولذلك

$$W_{\text{pr}} = S \oint P_1 dx.$$

في الحالة المثلى الحديثة، $q = 1$. يحدث الشوط الموجب عند $P_1 = +A$ ، مع $\Delta x = 2X^*$ ، بينما يحدث الشوط السالب عند $P_1 = -A$ ، مع $\Delta x = -2X^*$. وبالتالي،

$$W_{\text{pr}}^* = S[A(2X^*) + (-A)(-2X^*)] = 4SAX^*.$$

إن

$$W_{\text{pr}}^* = \frac{S_c A^2}{\rho g} = 3.97 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

في مخطط يكون فيه V على المحور الأفقي و P_a على المحور الرأسي، تكون الدورة متوازي أضلاع:

- عند كل مصد ثابت، $dV/dP_a = -S_c/(2\rho g)$ ، مما يعطي فرعين مائلين متوازيين؛
 - المسافة الأفقية بينهما هي $2S_c X^*$ ؛
 - تصلهما أشواط عند ضغط ثابت، عند $P_0 + A$ و $P_0 - A$ ؛
 - تُجتاز الدورة عكس اتجاه عقارب الساعة، فيكون الشغل المتلقى موجباً ويساوي مساحتها،
- $$(2A)(2S_c X^*) = 4S_c A X^*.$$

أخيراً،

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} = \frac{S_c A^2 / (2\rho g)}{S_c A^2 / (\rho g)} = \frac{1}{2}.$$

يتحول النصف الآخر إلى طاقة حركية أثناء الأشواط السريعة، ويتبدد عندما يُوقَف النظام المتحرك عند المصدّين.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: الشمبانيا!

تحذير: الإفراط في استهلاك الكحول مضر بالصحة، ويُحظر شرب الكحول دون السن القانونية.

الشمبانيا نبيذ فرنسي فوّار. ينتج عن تخمّر السكريات ثاني أكسيد الكربون (CO_2) داخل الزجاجة. يرتبط التركيز المولي لغاز CO_2 في الطور السائل c_ℓ بضغطه الجزئي P_{CO_2} في الطور الغازي بالعلاقة $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$ ، المعروفة بقانون هنري، حيث يُسمّى k_H ثابت هنري.

- التوتر السطحي للشمبانيا $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- كثافة السائل $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- ثابت هنري عند $T_0 = 20^\circ \text{C}$ $k_H(20^\circ \text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- ثابت هنري عند $T_0 = 6^\circ \text{C}$ $k_H(6^\circ \text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- الضغط الجوي $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- الغازات مثالية، ومعاملها الأديباتي $\gamma = 1.3$



الشكل 1. كأس مملوءة بالشمبانيا.

الجزء A. تنوِّي الفقاعات ونموّها وصعودها

نملاً كأساً مباشرة بعد فتح زجاجة شمبانيا عند درجة الحرارة $T_0 = 20^\circ \text{C}$. يبلغ الضغط في السائل P_0 ، وتبقى درجة حرارته ثابتة عند T_0 . يتجاوز تركيز CO_2 المذاب، c_ℓ ، تركيز الاتزان، وندرس تنوِّي فقاعة من CO_2 . نرمز إلى نصف قطرها بالرمز a ، وإلى ضغطها الداخلي بالرمز P_b .

0.2 — A.1 نقطة

عبر عن الضغط P_b بدلالة P_0 و a و σ .

يعتمد تركيز CO_2 المذاب في السائل على المسافة من الفقاعة. وعلى مسافة بعيدة، يستعيد التركيز القيمة c_ℓ ، ونرمز بالرمز c_b إلى التركيز بالقرب من سطح الفقاعة. وفقاً لقانون هنري، $c_b = k_H P_b$. ونفترض كذلك، في جميع أجزاء المسألة، أن الفقاعات لا تحتوي إلا على CO_2 .

بما أن $c_\ell \neq c_b$ ، تنتشر جزيئات CO_2 من المناطق ذات التركيز المرتفع إلى المناطق ذات التركيز المنخفض. ونفترض أيضاً أن أي جزيء من الطور السائل يصل إلى سطح الفقاعة ينتقل إلى البخار.

0.5 — A.2 نقطة

عبر عن نصف القطر الحرج a_c ، الذي يُتوقع أن تنمو الفقاعة إذا تجاوز نصف قطرها قيمته، بدلالة c_ℓ ، σ ، P_0 و c_0 ، حيث $c_0 = k_H P_0$. احسب عددياً a_c عندما $c_\ell = 4c_0$.

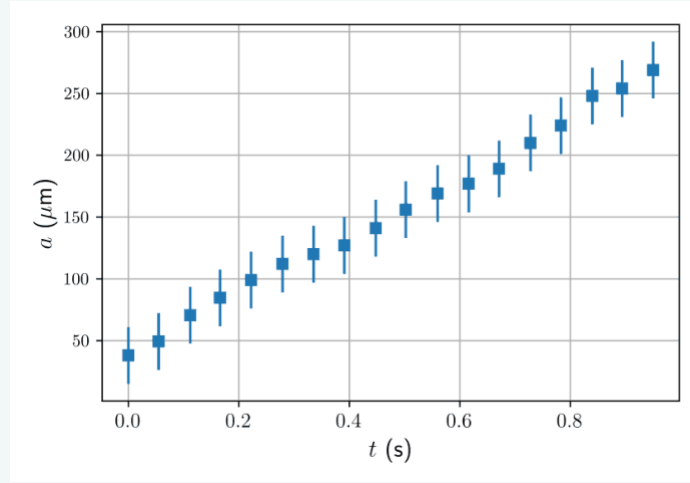
عملياً، تنمو الفقاعات أساساً انطلاقاً من تجاويف غازية موجودة مسبقاً. لذا، لنعتبر فقاعة نصف قطرها الابتدائي $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$. نرمز بالرمز j إلى عدد مولات CO_2 المنتقلة عبر سطح الفقاعة لكل وحدة مساحة ووحدة زمن. يمكن اعتماد نموذجين لوصف j .

- النموذج (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$ ، حيث D هو معامل انتشار CO_2 في السائل.
- النموذج (2) $j = K(c_\ell - c_b)$ ، حيث K ثابت هنا.

تُظهر التجربة أن نصف قطر الفقاعة $a(t)$ يعتمد على الزمن كما هو موضح في الشكل 2. هنا $c_\ell \approx 4c_0$ ، وبما أن الفقاعات كبيرة بما يكفي لتكون مرئية، يمكن إهمال الضغط الزائد الناجم عن التوتر السطحي، ويكون $P_b \approx P_0$.

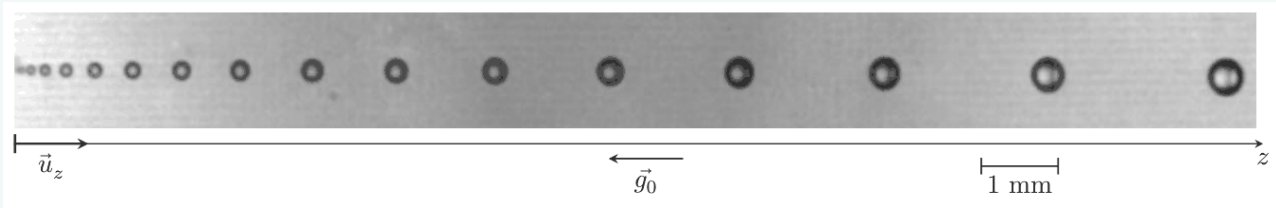
1.2 — A.3 نقطة

عبر عن عدد مولات CO_2 داخل الفقاعة، n_c ، بدلالة P_0, T_0, a ، وثابت الغاز المثالي R . أوجد $a(t)$ لكلا النموذجين. حدّد النموذج الذي يفسّر النتائج التجريبية في الشكل 2. وبناءً على إجابتك، احسب عددياً K أو D .



الشكل 2. التطور الزمني لنصف قطر فقاعة CO_2 في كأس شمبانيا (مقتبس بتصرّف من [1]).

تتفصل الفقاعات في نهاية المطاف عن قاع الكأس، وتواصل النمو أثناء صعودها. يُظهر الشكل 3. قطارًا من الفقاعات. لفقاعات القطار نصف القطر الابتدائي نفسه، وتتبع بتدريج ثابت $f_b = 20 \text{ Hz}$.



الشكل 3. قطار من الفقاعات. أُديرَت الصورة إلى الوضع الأفقي لتنسيق الصفحة (مقتبس بتصرّف من [1]).

في مجال السرعات المدروس هنا، تُعطى قوة مقاومة المائع F المؤثرة في فقاعة نصف قطرها a ، تتحرك بسرعة v في سائل لزجته الديناميكية η ، بقانون ستوكس $F = 6\pi\eta av$. تُظهر القياسات أنه يمكن افتراض أن الفقاعة تتحرك بسرعتها الحدية في كل لحظة.

0.8 — A.4 نقطة

أعطِ تعبيرات القوى الرئيسية المؤثرة في فقاعة تصعد رأسيًا. استنتج تعبير $v(a)$. أعطِ تقديرًا عددياً للزوجة η باستخدام ρ_ℓ و g_0 وكميات مقيسة من الشكل 3.

يظل وصف النمو شبه المستقر للفقاعات بمعدل $\frac{da}{dt}$ ساريًا أثناء صعودها.

0.5 — A.5 نقطة

عبر عن نصف قطر فقاعة تصل إلى السطح الحر، a_{H_ℓ} ، بدلالة الارتفاع المقطوع H_ℓ ، ومعدل النمو $q_a = \frac{da}{dt}$ ، وأي ثوابت قد تحتاج إليها. افترض أن $a_{H_\ell} \gg a_0$ وأن q_a ثابت، وأعطِ القيمة العددية لـ a_{H_ℓ} عند $H_\ell = 10 \text{ cm}$ ، وباستخدام q_a الموافق للشكل 2.

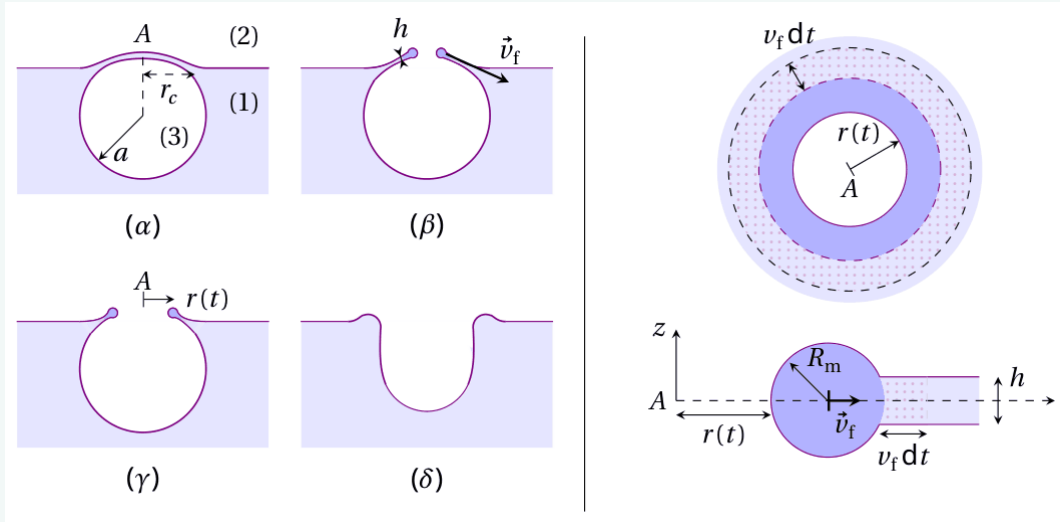
يوجد N_b من مواقع تنوُّي الفقاعات. افترض أن الفقاعات تتنوُّ بتدريج ثابت f_b عند قاع كأس شمبانيا (ارتفاع السائل فيها H_ℓ وحجمه V_ℓ)، مع استمرار إهمال a_0 . أهمل انتشار CO_2 عبر السطح الحر.

1.1 — A.6 نقطة

اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها $c_\ell(t)$. استنتج من هذه المعادلة الزمن المميز τ لتناقص تركيز CO_2 المذاب في السائل.

الجزء B. الانبعاث الصوتي لفقاعة تنفجر

تكون الفقاعات الصغيرة شبه كروية عند وصولها إلى السطح الحر. وما إن يرق الغشاء السائل الفاصل بين الفقاعة والهواء بما يكفي، حتى تتشكل فيه فتحة دائرية نصف قطرها r ، وتتسع بسرعة كبيرة بفعل التوتر السطحي (الشكل 4. يساراً). تتسع الفتحة بسرعة ثابتة v_f (الشكل 4. يميناً). ويظل الغشاء خارج الحافة ساكناً، بسماكة ثابتة h .

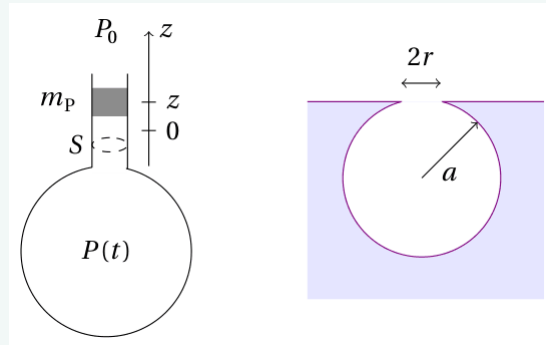


الشكل 4. (يساراً) (α) فقاعة عند السطح: (1) السائل، و(2) الهواء عند الضغط P_0 ، و(3) CO_2 عند الضغط P_b ؛ و(β) و(γ) تراجع الغشاء السائل، حيث تظهر الحافة باللون الأزرق الداكن؛ (δ) انهيار الفقاعة. (يميناً) تراجع الغشاء السائل عند الزمن t . في الأعلى: رسم تخطيطي للغشاء المنقوب كما يُرى من أعلى. في الأسفل: مقطع عرضي للحافة والغشاء المتراجع. خلال dt ، تضم الحافة إليها السائل المجاور (المنقطة).

بسبب العمليات التبدلية، لا يتحول إلى طاقة حركية إلا نصف الفرق بين طاقتي السطح عند t و $t + dt$ للحافة والسائل المتراكم. ونفترض كذلك أن تغيّر مساحة سطح الحافة مهمل مقارنة بتغيّر مساحة سطح الغشاء.

1.1 — B.1 نقطة

عبّر عن v_f بدلالة σ , ρ_ℓ ، و h .



الشكل 5. (يساراً) مرنان هلمهولتز. (يميناً) فقاعة بوصفها مهتزاً.

عندما ينفجر الغشاء، يتحرر الضغط الداخلي وينبعث صوت. نمثّل هذا الانبعاث الصوتي بمرنان هلمهولتز: تجويف مفتوح على الجو عند الضغط P_0 عبر فتحة عنق مساحتها S (الشكل 5. يساراً). في العنق، تتذبذب كتلة m_p حول موضعها بسعة صغيرة بفعل قوى الضغط المؤثرة فيها، عندما يتمدد الغاز داخل التجويف أو ينضغط أديباتياً. قوة الثقل المؤثرة في m_p مهمة مقارنة بقوى الضغط. ليكن V_0 حجم الغاز أسفل الكتلة m_p عند $P = P_0$ ، حين يكون $z = 0$.

1.1 — B.2 نقطة

عبّر عن تردد تذبذب m_p ، وهو f_0 . تلميح: عندما $\varepsilon \ll 1$ ، فإن $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

يمكن استخدام نموذج هلمهولتز لفقاعة نصف قطرها a . ويكون V_0 حجم الفقاعة المغلقة. وفقاً للمراجع العلمية، تبلغ كتلة المكبس المكافئ $m_p = 8\rho_g r^3/3$ ، حيث r نصف قطر الفتحة الدائرية، و $\rho_g = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ كثافة الغاز (الشكل 5. يميناً). أثناء عملية الانفجار، يتغير r من 0 إلى r_c ، المعطى بالعلاقة

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g_0}{\sigma}}.$$

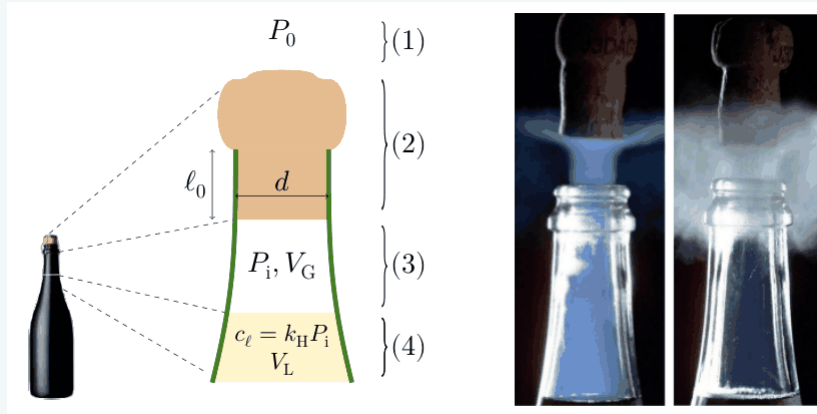
وفي الوقت نفسه، يزداد تردد الصوت المنبعث حتى قيمة عظمى تبلغ 40 kHz، وتبلغ مدة الانفجار $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

1.1 — B.3 نقطة

أوجد نصف القطر a وسماكة غشاء الشمبانيا h الفاصل بين الفقاعة والجو.

الجزء C. فرقة الشمبانيا

تبلغ الكمية الكلية من CO_2 في زجاجة $n_T = 0.2 \text{ mol}$ ، وهي إما مذابة في حجم $V_L = 750 \text{ mL}$ من الشمبانيا السائلة، أو غازية في الحجم $V_G = 25 \text{ mL}$ أسفل السدادة الفلينية (الشكل 6. يساراً). لا يحتوي V_G إلا على CO_2 . يخضع الاتزان بين طورَي CO_2 لقانون هنري. نفترض أن التمدد السريع لغاز CO_2 عند فتح الزجاجة أدياتي وعكوس. وتبقى درجة حرارة الوسط المحيط T_0 وضغطه $P_0 = 1 \text{ bar}$ ثابتين.



الشكل 6. يساراً: عنق زجاجة تقليدي: (1) الهواء المحيط، (2) السدادة الفلينية، (3) الحيز الغازي العلوي، (4) الشمبانيا السائلة. يميناً: ظاهرتان تُلاحظان عند فتح الزجاجة عند درجتَي حرارة مختلفتين (مقتبس بتصريف من [2]).

0.4 — C.1 نقطة

أعطِ القيمة العددية لضغط CO_2 الغازي في الزجاجة، P_i ، عند $T_0 = 6^\circ \text{C}$ وعند $T_0 = 20^\circ \text{C}$.

تؤدي خطوة أخرى من إنتاج الشمبانيا (غير موصوفة هنا) إلى القيم الآتية لـ P_i ، التي سنستخدمها في الأسئلة التالية: $P_i = 4.69 \text{ bar}$ عند $T_0 = 6^\circ \text{C}$ ، و $P_i = 7.45 \text{ bar}$ عند $T_0 = 20^\circ \text{C}$.

عند فتح الزجاجة، يمكن ملاحظة ظاهرتين مختلفتين تبعاً لـ T_0 (الشكل 6. يميناً).

- إما أن يظهر ضباب أزرق، بسبب تشكّل بلورات CO_2 الصلبة (مع تثبيط تكاثف الماء)؛
- أو أن يظهر ضباب أبيض مائل إلى الرمادي، بسبب تكاثف بخار الماء في الهواء المحيط بعنق الزجاجة. وفي هذه الحالة الأخيرة، لا تتشكل بلورات CO_2 الصلبة.

يتبع ضغط البخار المشبع $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ لانتقال CO_2 بين الطورين الصلب والغازي العلاقة:

$$\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$$

حيث T بوحدة K، و $A = 6.81$ ، و $B = 1.30 \times 10^3 \text{ K}$ ، و $C = -3.49 \text{ K}$.

0.7 — C.2 نقطة

أعطِ القيمة العددية لدرجة حرارة غاز CO_2 ، T_f ، في نهاية التمدد بعد فتح الزجاج، عند $T_0 = 6^\circ\text{C}$ وعند $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ، إذا لم يحدث أي انتقال طوري.

اختر العبارات الصحيحة (قد تكون عدة عبارات صحيحة):

1. عند $T_0 = 6^\circ\text{C}$ ، يظهر ضباب أبيض مائل إلى الرمادي أثناء فتح الزجاج.
2. عند $T_0 = 6^\circ\text{C}$ ، يظهر ضباب أزرق أثناء فتح الزجاج.
3. عند $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ، يظهر ضباب أبيض مائل إلى الرمادي أثناء فتح الزجاج.
4. عند $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ، يظهر ضباب أزرق أثناء فتح الزجاج.

أثناء فتح الزجاج، تندفع السدادة الفلينية إلى الخارج. نحدّد الآن أقصى ارتفاع H_c تصل إليه. افترض أن قوة الاحتكاك F التي يؤثر بها عنق الزجاج في السدادة الفلينية هي $F = \alpha A$ ، حيث A مساحة التلامس، و α ثابت يجب تحديده. في البداية، تتجاوز قوة الضغط قوة الاحتكاك بقليل. تبلغ كتلة السدادة $m = 10\text{ g}$ ، وقطرها $d = 1.8\text{ cm}$ ، وطول الجزء الأسطواني المنحشر ابتداءً في عنق الزجاج $\ell_0 = 2.5\text{ cm}$. ما إن تغادر السدادة عنق الزجاج، يمكن إهمال محصلة قوى الضغط.

1.3 — C.3 نقطة

أعطِ القيمة العددية لـ H_c إذا كانت درجة الحرارة الخارجية $T_0 = 6^\circ\text{C}$.

[1] Liger-Belair وآخرون، Am. J. Enol. Vitic، المجلد 50، العدد 3 (1999).

[2] Liger-Belair وآخرون، Sc. Reports 7، 10938 (2017).

جدول المعطيات العامة

الوحدة	القيمة	الرمز	الثابت
$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	c	سرعة الضوء في الفراغ
$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	h	ثابت بلانك
$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	ثابت بلانك المختزل
$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	k_B	ثابت بولتزمان
mol^{-1}	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	N_A	ثابت أفوغادرو
$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$8.314\,462\,618\,153\,24$	R	ثابت الغاز المولي
$\text{A} \cdot \text{s}$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	e	الشحنة الأولية
$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	G	ثابت الجذب العام
$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$9.806\,65$	g	تسارع الجاذبية القياسي
$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	σ	ثابت ستيفان-بولتزمان
$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	μ_0	نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)
$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	ϵ_0	سمحية الفراغ (الثابت الكهربائي)
m^{-1}	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	R_∞	ثابت ريدبرغ
kg	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	m_e	كتلة الإلكترون
kg	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	m_p	كتلة البروتون
kg	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	m_n	كتلة النيوترون
kg	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	m_u	ثابت الكتلة الذرية
$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	eV	الإلكترون فولت

الإجابات

هنا $\Delta c = c_\ell - c_0$ ، و g_0 هو تسارع الجاذبية المعطى في جدول المعطيات.

A.1 •

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

A.2 •

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0(c_\ell - c_0)}.$$

عندما $c_\ell = 4c_0$

$$a_c = 3.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.31 \mu\text{m}.$$

A.3 •

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0},$$

$$a_{(1)}(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0\Delta c}{P_0}t},$$

$$a_{(2)}(t) = a_0 + \frac{KRT_0\Delta c}{P_0}t.$$

يتوافق النموذج (2) مع النمو الخطي تقريباً:

$$q_a \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1},$$

$$K \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

A.4 • تؤثر قوة الطفو $4\pi\rho_\ell g_0 a^3/3$ إلى أعلى؛ وتؤثر مقاومة ستوكس $6\pi\eta a v$ ووزن الفقاعة المهمل إلى أسفل.

$$v(a) \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta},$$

$$\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

من قياسات تقريبية للشكل 3.

A.5 •

$$a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}.$$

A.6 •

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0),$$

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

B.1 •

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

B.2 •

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

B.3 •

$$a \approx 5.3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.53 \text{ mm},$$

$$h \approx 3.8 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.8 \mu\text{m}.$$

C.1 •

$$P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar},$$

$$P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}.$$

C.2 • باستخدام الضغوط البديلة المحددة لهذا الجزء:

$$T_f(6^\circ\text{C}) \approx 195.4 \text{ K } (-77.7^\circ\text{C}),$$

$$T_f(20^\circ\text{C}) \approx 184.4 \text{ K } (-88.7^\circ\text{C}).$$

العبارتان الصحيحتان هما **1 و 4**: ضباب أبيض مائل إلى الرمادي عند 6°C ، وضباب أزرق عند 20°C .

C.3 •

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

الحل

A.1

يعطي قانون يونغ-لابلاس قفزة الضغط عبر سطح فاصل منحنٍ بين سائل وغاز:

$$P_b - P_0 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

في حالة فقاعة كروية، يساوي كلٌّ من نصفَي قطري الانحناء الرئيسيين a . ومن ثم

$$P_b = P_0 + \frac{2\sigma}{a}.$$

يوجد سطح فاصل واحد بين السائل والغاز حول الفقاعة المغمورة.

A.2

يعطي قانون هنري عند سطح الفقاعة

$$c_b = k_H P_b = k_H \left(P_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) = c_0 + \frac{2\sigma c_0}{P_0 a}.$$

ينتشر الغاز إلى داخل الفقاعة، فيجعلها تنمو، عندما $c_\ell > c_b$. لذلك تحقق العتبة

$$c_\ell - c_0 = \frac{2\sigma c_0}{P_0 a_c},$$

ومن ثم

$$a_c = \frac{2\sigma c_0}{P_0 (c_\ell - c_0)}.$$

في سائل فوق مشبع، تنمو الفقاعات التي تحقق $a > a_c$ ، بينما تميل الفقاعات الأصغر إلى الذوبان.

عند $c_\ell = 4c_0$

$$a_c = \frac{2\sigma}{3P_0} = \frac{2(47 \times 10^{-3})}{3(1.0 \times 10^5)} = 3.13 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

وعليه

$$a_c \approx 0.31 \mu\text{m}.$$

A.3

في إطار التقريب المذكور $P_b \simeq P_0$ ، يعطي قانون الغاز المثالي

$$P_0 \frac{4\pi a^3}{3} = n_c RT_0,$$

وبالتالي

$$n_c = \frac{4\pi P_0 a^3}{3RT_0}.$$

معدل التدفق المولي إلى الداخل عبر سطح الفقاعة هو

$$\frac{dn_c}{dt} = 4\pi a^2 j.$$

باشتقاق تعبير الغاز المثالي عند ثبات P_0, T_0 ،

$$\frac{4\pi P_0 a^2}{RT_0} \frac{da}{dt} = 4\pi a^2 j,$$

وهو ما يُختزل إلى

$$\frac{da}{dt} = \frac{RT_0}{P_0} j.$$

في تجربة النمو القصيرة، نعتبر التركيز في عموم السائل ثابتاً ونستخدم $c_b \simeq c_0$.

في النموذج (1)،

$$\frac{da}{dt} = \frac{DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0 a}.$$

بالتكامل مع $a(0) = a_0$

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + \frac{2DRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t}.$$

يتنبأ هذا بمعدل نمو متناقص واعتماد تقاربي على $t^{1/2}$.

في النموذج (2)،

$$\frac{da}{dt} = \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} = q_a,$$

ومن ثم

$$a(t) = a_0 + \frac{KRT_0(c_\ell - c_0)}{P_0} t.$$

يُظهر الشكل 2 ميلاً ثابتاً تقريباً، مما يؤيد النموذج (2). بقراءة القيم التقريبية $a = 40 \mu\text{m}$ عند $t = 0$ و $a = 270 \mu\text{m}$ عند $t = 0.95 \text{ s}$.

$$q_a \approx \frac{(270 - 40) \times 10^{-6}}{0.95} \approx 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

عند 20°C ،

$$T_0 = 293.15\text{ K}, \quad c_0 = k_{\text{H}}P_0 = 33\text{ mol m}^{-3},$$

و $c_\ell - c_0 \simeq 3c_0 = 99\text{ mol m}^{-3}$ وعليه

$$K = \frac{P_0 q_a}{RT_0(c_\ell - c_0)} \approx \frac{10^5(2.4 \times 10^{-4})}{8.31446(293.15)(99)}.$$

إذن

$$\boxed{K \approx 1.0 \times 10^{-4}\text{ m s}^{-1}}.$$

A.4

ليكن اتجاه $\mathbf{u}_z$ رأسياً إلى أعلى. القوى هي قوة الطفو،

$$\mathbf{F}_B = \rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z,$$

وقوة مقاومة ستوكس،

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta a v \mathbf{u}_z,$$

ووزن الفقاعة،

$$\mathbf{W} = -\rho_g \frac{4\pi a^3}{3} g_0 \mathbf{u}_z.$$

عند السرعة الحدية، تنعدم محصلتها:

$$6\pi\eta a v = (\rho_\ell - \rho_g) \frac{4\pi a^3}{3} g_0.$$

بما أن $\rho_g \ll \rho_\ell$ ،

$$\boxed{v(a) = \frac{2(\rho_\ell - \rho_g)g_0 a^2}{9\eta} \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9\eta}}.$$

تتبع الفقاعات المتجاورة المسار نفسه، مع فرق في العمر مقداره

$$\Delta t = \frac{1}{f_b}.$$

لذلك تعطي المسافة بين مركزيها Δz

$$v \simeq \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_b \Delta z,$$

وتُقيَّم هذه السرعة تقريباً عند متوسط نصفي قطري الفقاعتين.

باستخدام مقياس الرسم في الشكل 3، تعطي الفقاعتان القريبتان من الطرف الأيمن تقريباً

$$a \simeq 0.24\text{ mm}, \quad \Delta z \simeq 2.3\text{ mm}.$$

وبالتالي،

$$v \simeq 20(2.3 \times 10^{-3}) = 4.6 \times 10^{-2}\text{ m s}^{-1},$$

و

$$\eta \simeq \frac{2\rho_\ell g_0 a^2}{9f_b \Delta z} = \frac{2(10^3)(9.80665)(0.24 \times 10^{-3})^2}{9(20)(2.3 \times 10^{-3})}.$$

ف نحصل على التقدير المستخلص من الشكل

$$\boxed{\eta \approx 2.7 \times 10^{-3} \text{ Pa s}}.$$

A.5

نجمع بين سرعة الصعود الحدية ومعدل النمو الشعاعي الثابت:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta} a^2, \quad \frac{da}{dt} = q_a.$$

بحذف الزمن،

$$\frac{dz}{da} = \frac{2\rho_\ell g_0}{9\eta q_a} a^2.$$

بالتكامل من القاع إلى السطح الحر،

$$H_\ell = \frac{2\rho_\ell g_0}{27\eta q_a} (a_{H_\ell}^3 - a_0^3).$$

إن، التعبير الذي يحتفظ بنصف القطر الابتدائي هو

$$a_{H_\ell} = \left(a_0^3 + \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}.$$

عندما $a_{H_\ell} \gg a_0$

$$\boxed{a_{H_\ell} \simeq \left(\frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} \right)^{1/3}}.$$

باستخدام $H_\ell = 0.10 \text{ m}$ ، و $q_a \simeq 2.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ ، واللزوجة المقدرة أعلاه،

$$\boxed{a_{H_\ell} \approx 4.5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.45 \text{ mm}}.$$

A.6

نستخدم الوصف شبه المستقر لقطار الفقاعات على المقياس الزمني لتناقص التركيز. ويُمثل السائل بتركيز متجانس في عمومه $c_\ell(t)$ ، ونُهمل في موازنة الفقد التغيرات في كمية الغاز المحتواة في الفقاعات التي لا تزال تصعد.

تحمل كل فقاعة تصل إلى السطح

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} a_{H_\ell}^3.$$

تعطي نتيجة A.5، مع إهمال a_0 ،

$$n_{\text{out}} = \frac{4\pi P_0}{3RT_0} \frac{27\eta q_a H_\ell}{2\rho_\ell g_0} = \frac{18\pi\eta H_\ell P_0}{\rho_\ell g_0 RT_0} q_a.$$

مع فقدان السائل للغاز المذاب، يعطي النموذج (2)

$$q_a(t) = \frac{KRT_0}{P_0} (c_\ell(t) - c_0).$$

وبالتالي

$$n_{\text{out}} = \frac{18\pi\eta K H_\ell}{\rho_\ell g_0} (c_\ell - c_0).$$

ينبعث $N_b f_b$ من الفقاعات في وحدة الزمن. ويعطي انحفاظ CO_2

$$V_\ell \frac{dc_\ell}{dt} = -N_b f_b n_{\text{out}},$$

ومن ثم

$$\frac{dc_\ell}{dt} = -\frac{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}{\rho_\ell g_0 V_\ell} (c_\ell - c_0).$$

الحل هو

$$c_\ell(t) = c_0 + [c_\ell(0) - c_0] e^{-t/\tau},$$

حيث

$$\tau = \frac{\rho_\ell g_0 V_\ell}{18\pi\eta K H_\ell N_b f_b}.$$

إن التركيز الزائد على c_0 هو الذي يتناقص أُسيًا.

B.1

خلال dt ، تجتاح الحافة المتراجعة منطقة حلقة مساحتها

$$dA = 2\pi r v_f dt.$$

للغشاء سطحان فاصلان بين السائل والغاز، لذا فإن النقص في الطاقة السطحية هو

$$-dE_s = 2\sigma dA.$$

وفق قاعدة التبدد المذكورة، يتحول نصف هذه الطاقة إلى طاقة حركية:

$$dE_k = \sigma dA.$$

الكتلة المتراكمة حديثاً هي

$$dm = \rho_\ell h dA.$$

بما أن سرعة الحافة تبقى ثابتة، فإن الزيادة في طاقتها الحركية هي

$$dE_k = \frac{1}{2} v_f^2 dm = \frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 dA.$$

بمساواة التعبيرين،

$$\frac{1}{2} \rho_\ell h v_f^2 = \sigma,$$

ومن ثم

$$v_f = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_\ell h}}.$$

B.2

تغير إزاحة المكبس إلى أعلى بمقدار z حجم الغاز المحصور إلى

$$V = V_0 + Sz.$$

في انضغاط أو تمدد أديباتي عكوس،

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma.$$

إن

$$P = P_0 \left(1 + \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}.$$

عندما $|Sz| \ll V_0$ ،

$$P \simeq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sz}{V_0}\right).$$

بإهمال وزن المكبس كما هو محدد، تكون معادلة حركته

$$m_p \ddot{z} = (P - P_0)S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} z.$$

هذه حركة توافقية بسيطة، حيث

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}.$$

وبالتالي

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m_p V_0}}.$$

B.3

بالنسبة إلى الفقاعة،

$$S = \pi r^2, \quad V_0 = \frac{4\pi a^3}{3}, \quad m_p = \frac{8\rho_g r^3}{3}.$$

بالتعويض في B.2 نحصل على

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma P_0 \pi^2 r^4}{(8\rho_g r^3/3)(4\pi a^3/3)} = \frac{9\gamma P_0 r}{128\pi \rho_g a^3}.$$

إن $f_0 \propto \sqrt{r}$ ، ويبلغ التردد قيمته العظمى عند $r = r_c$. باستخدام التعبير المعطى لـ r_c ،

$$f_{\max}^2 = \frac{9\gamma P_0}{128\pi \rho_g a^3} \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g a} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

وبالتالي

$$a = \frac{3\sqrt{3}\gamma P_0}{64\pi \rho_g f_{\max}^2} \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}.$$

مع $f_{\max} = 4.0 \times 10^4 \text{ Hz}$

$$a = \frac{3\sqrt{3}(1.3)(10^5)}{64\pi(1.8)(4.0 \times 10^4)^2} \sqrt{\frac{10^3(9.80665)}{47 \times 10^{-3}}} = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

وعليه

$$a \approx 0.53 \text{ mm}.$$

نصف القطر النهائي للفتحة هو

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}} \approx 1.50 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

بما أن الفتحة تتسع بسرعة ثابتة،

$$v_f = \frac{r_c}{t_b}, \quad t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms} = 3 \times 10^{-5} \text{ s},$$

ومن ثم

$$v_f \approx 5.0 \text{ m s}^{-1}.$$

أخيرًا، تعطي B.1

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_\ell v_f^2} = \frac{2\sigma t_b^2}{\rho_\ell r_c^2} \approx 3.77 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

إذن

$$\boxed{h \approx 3.8 \mu\text{m}}.$$

C.1

كميتا CO_2 المذاب والغازي هما، على الترتيب،

$$n_L = k_H P_i V_L, \quad n_G = \frac{P_i V_G}{RT_0}.$$

يعطي انحفاظ الكمية الكلية

$$n_T = P_i \left(k_H V_L + \frac{V_G}{RT_0} \right).$$

وبالتالي،

$$\boxed{P_i = \frac{n_T}{k_H V_L + V_G/(RT_0)}}.$$

نستخدم

$$V_L = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad V_G = 2.50 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

عند 6°C ، يكون $T_0 = 279.15 \text{ K}$

$$P_i = \frac{0.2}{(5.4 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 279.15)} \approx 4.81 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

عند 20°C ، يكون $T_0 = 293.15 \text{ K}$

$$P_i = \frac{0.2}{(3.3 \times 10^{-4})(7.50 \times 10^{-4}) + (2.50 \times 10^{-5})/(8.31446 \times 293.15)} \approx 7.76 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

هذه ضغوط مطلقة:

$$\boxed{P_i(6^\circ\text{C}) \approx 4.81 \text{ bar}}, \quad \boxed{P_i(20^\circ\text{C}) \approx 7.76 \text{ bar}}.$$

C.2

تحدد المسألة لهذا الجزء الضغوط البديلة

$$P_i(6^\circ\text{C}) = 4.69 \text{ bar}, \quad P_i(20^\circ\text{C}) = 7.45 \text{ bar}.$$

في التمدد الأديباتي العكوس لغاز مثالي،

$$PV^\gamma = \text{ثابت}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{ثابت}.$$

بحذف V ، واعتبار الضغط النهائي مساوياً لـ P_0 ،

$$\boxed{T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

إذن

$$T_f(6^\circ\text{C}) = 279.15 \left(\frac{1}{4.69} \right)^{0.3/1.3} \approx 195.4 \text{ K},$$

و

$$T_f(20^\circ\text{C}) = 293.15 \left(\frac{1}{7.45} \right)^{0.3/1.3} \approx 184.4 \text{ K}.$$

لتحديد ما إذا كان CO_2 الصلب يتشكل، نوجد درجة حرارة اتزان التسامي عند P_0 . بوضع $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2} = P_0$

$$0 = A - \frac{B}{T_s + C},$$

ومن ثم

$$T_s = \frac{B}{A} - C = \frac{1300}{6.81} + 3.49 \approx 194.4 \text{ K}.$$

بالنسبة إلى الزجاجة الأبرد ابتداءً،

$$195.4 \text{ K} > T_s.$$

وبالفعل، يعطي تعبير ضغط البخار المعطى

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(195.4 \text{ K}) \approx 1.09 \text{ bar} > P_0.$$

لا يبلغ الغاز حالة الإشباع بين الطورين الصلب والغازي خلال هذا التمدد. ووفق البدائل المذكورة، يتشكل ضباب أبيض مائل إلى الرمادي.

بالنسبة إلى الزجاجة الأدفأ ابتداءً،

$$184.4 \text{ K} < T_s,$$

و

$$P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}(184.4 \text{ K}) \approx 0.422 \text{ bar} < P_0.$$

من شأن التمدد دون تغير طوري أن ينتج CO_2 فوق مشبع، لذا تتشكل بلورات صلبة تعطي ضباباً أزرق.

وبالتالي

العبارتان 1 و 4 صحيحتان

قيم T_f المحسوبة هي درجات الحرارة الافتراضية المطلوبة في غياب التغير الطوري؛ ويعدّل تشكّل المادة الصلبة التطور الحراري الفعلي في حالة الزجاجة الدافئة.

C.3

نستخدم الضغط المحدد عند 6°C :

$$P_i = 4.69 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

لتكن x إزاحة السدادة إلى أعلى من موضعها الابتدائي، ولتكن

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

مساحة مقطعها العرضي.

عندما $0 \leq x \leq \ell_0$ ، تكون مساحة التلامس

$$A(x) = \pi d(\ell_0 - x),$$

ومن ثم تكون قوة الاحتكاك

$$F_{\text{fr}}(x) = \alpha \pi d(\ell_0 - x).$$

في البداية، تكاد محصلة قوى الضغط تتوازن مع الاحتكاك:

$$(P_i - P_0)S \simeq \alpha \pi d \ell_0.$$

لا يتجاوز وزن السدادة 0.098 N ، مقارنة بمحصلة قوى الضغط الابتدائية البالغة نحو 94 N ، لذا يمكن إهماله عند تقدير α . وعليه

$$\alpha \simeq \frac{(P_i - P_0)d}{4\ell_0} \approx 6.64 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

يشمل التمدد السريع الغاز الموجود ابتداءً في الحيز الغازي العلوي. ويكون حجمه وضغطه أثناء حركة السدادة

$$V(x) = V_G + Sx, \quad P(x) = P_i \left(\frac{V_G}{V_G + Sx} \right)^\gamma.$$

عندما تغادر السدادة العنق،

$$V_e = V_G + S\ell_0.$$

الشغل الذي يبذله الغاز الداخلي هو

$$W_{\text{gas}} = \int_0^{\ell_0} P(x)S \, dx = \int_{V_G}^{V_e} P_i \left(\frac{V_G}{V} \right)^\gamma dV,$$

مما يعطي

$$W_{\text{gas}} = \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_e} \right)^{\gamma-1} \right].$$

الشغل المبذول ضد الضغط الجوي هو

$$W_{\text{atm}} = P_0 S\ell_0,$$

والطاقة المبددة بالاحتكاك هي

$$W_{\text{fr}} = \int_0^{\ell_0} \alpha \pi d (\ell_0 - x) \, dx = \frac{1}{2} \alpha \pi d \ell_0^2 \simeq \frac{1}{2} (P_i - P_0) S\ell_0.$$

بعد خروج السدادة، تُهمل محصلة قوى الضغط وفق التعليمات. وبإهمال مقاومة الهواء، تتحول كل الطاقة الميكانيكية المتبقية إلى طاقة وضع ثقالية عند أعلى نقطة. بقياس H_c من موضع السدادة الابتدائي،

$$mg_0 H_c = W_{\text{gas}} - W_{\text{atm}} - W_{\text{fr}}.$$

وبالتالي

$$H_c = \frac{1}{mg_0} \left\{ \frac{P_i V_G}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_G}{V_G + S\ell_0} \right)^{\gamma-1} \right] - P_0 S\ell_0 - \frac{1}{2} (P_i - P_0) S\ell_0 \right\}.$$

عددياً،

$$S = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \quad V_e = 3.1362 \times 10^{-5} \text{ m}^3,$$

و

$$W_{\text{gas}} \approx 2.570 \text{ J}, \quad W_{\text{atm}} \approx 0.636 \text{ J}, \quad W_{\text{fr}} \approx 1.174 \text{ J}.$$

إن

$$H_c \approx \frac{2.570 - 0.636 - 1.174}{0.010(9.80665)} \approx 7.75 \text{ m}.$$

وبدقة مناسبة،

$$H_c \approx 7.7 \text{ m}.$$

إذا قيس الارتفاع من موضع السدادة عند مغادرتها العنق تماماً، نطرح $\ell_0 = 0.025 \text{ m}$ ؛ وتبقى الإجابة بعد التقريب 7.7 m .

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.