

IPhO 2024

理论题与解答 · 伊朗伊斯法罕 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2024/

题目 1: 温室效应

2021 年，真锅淑郎和克劳斯·哈塞尔曼因在地球气候建模以及准确预测人类工业活动引起的全球变暖方面的工作，共同获得了当年诺贝尔物理学奖的一半。本题将考察一个由温室效应引起全球变暖的简单模型。温室气体改变了地球大气对地球红外辐射的透射或吸收等光学性质，导致地球平均温度升高。

处于不同温度的所有物体都会发出热辐射。量 $u(\lambda, T)d\lambda$ 表示温度为 T 的物体在波长 λ 与 $\lambda + d\lambda$ 之间单位面积的热辐射功率。根据普朗克黑体辐射理论，有

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

其中， $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ， $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ 。 $u(\lambda, T)$ 取最大值时对应的波长由关系式 $\lambda_{\max} T = b$ （维恩位移定律）给出。事实上，利用式 (1) 可以证明， $b = \frac{hc}{x_m k_B}$ ，其中无量纲量 x_m 是形如 $f(x) = 0$ 的方程的非平凡根；在下面的一项任务中，你需要求出函数 $f(x)$ 。黑体在所有波长上单位面积的总辐射功率由斯特藩-玻尔兹曼定律给出，即 $U(T) = \sigma T^4$ ，其中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$ 。此外，根据基尔霍夫辐射定律，在热平衡时，若物体吸收某一特定波长入射辐射的一定比例，则该物体在同一波长发出的辐射也等于相应黑体辐射的同一比例。

本题始终假设太阳是温度等于其平均表面温度 $T_S = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$ 的黑体。太阳半径为 $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ ，地球与太阳之间的平均距离为 $d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 。用 $\tilde{u}_S(\lambda)$ 表示太阳辐射到地球处垂直于辐射方向的单位面积上的光谱功率。该量对所有波长的积分，即 $S_0 = \int \tilde{u}_S(\lambda) d\lambda$ ，称为太阳常数。

本题假设地球处于热平衡状态，且其表面各点温度相同。在本题所有部分中，请先用题目给定的数据，以参数表达式的形式表示所求物理量，再求出保留三位有效数字的数值。所需单位已在答题纸上注明。

A. 将地球视为黑体

在本部分中，将地球表面视为黑体，并忽略地球大气。

部分	任务	分值
A-1	求太阳常数 S_0 。	0.6 分
A-2	求地球温度 T_E 。	0.6 分
A-3	求函数 $f(x)$ 。	0.4 分
A-4	计算 x_m 的数值，并由此 x_m 值求出 b 的值。	0.4 分
A-5	求太阳和地球的 $\lambda_{\max}$ 。	0.2 分

图 1 绘出了函数 $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ 和 $u(\lambda, T_E)$ 随 λ 的变化曲线，其中 γ 是一个无量纲系数，用于对 $\tilde{u}_S(\lambda)$ 进行缩放，使两个峰值相等。

部分	任务	分值
A-6	确定 γ 。	0.8 分

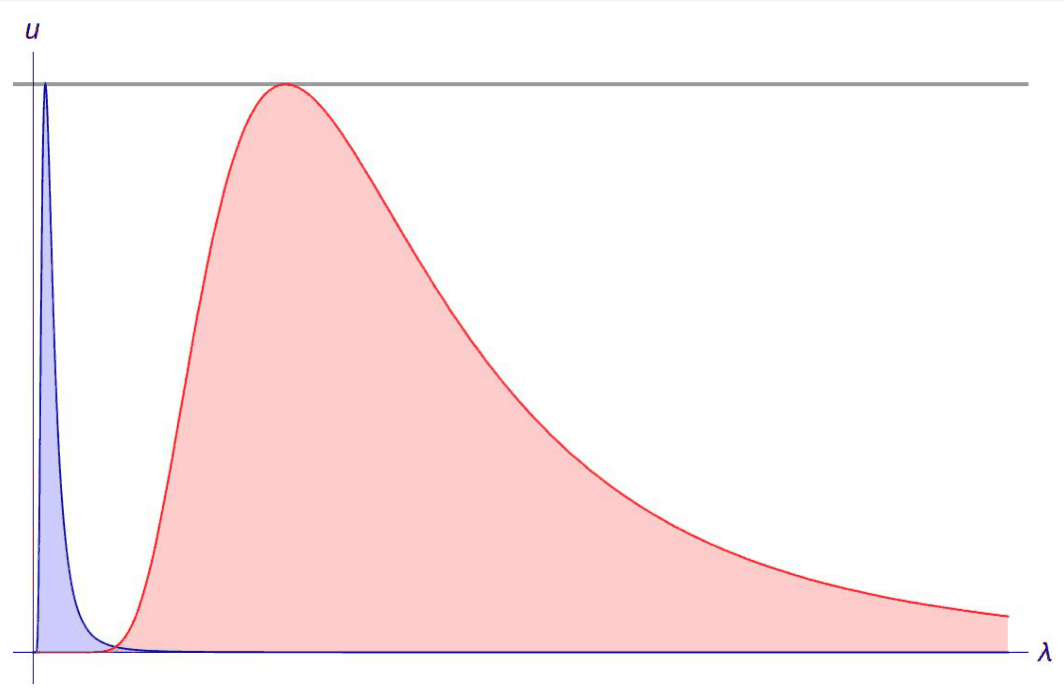


图 1 – $u(\lambda, T_E)$ (红色) 和 $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ (蓝色) 随 λ 的变化曲线

B. 温室效应

在本部分中，我们引入一个简单模型，将地球大气视为地表上方距离很小的一层薄层，从而可以忽略大气层面积与地球表面积的差异（见图 2）。在下文中，假设地球和太阳的热辐射主要在各自的 $\lambda_{\max}$ 附近的波长发出。还假设“大气层”对从上方或下方入射的**可见光—紫外线**辐射反射其中的 $r_A = 0.255$ ，其余部分全部透射。假设大气不反射任何**红外**辐射，但会吸收**红外**辐射中的 ε ，并透射其余部分。这种行为称为温室效应，它会改变地球的平均温度。另一方面，地球表面对**可见光—紫外线**辐射反射其中的 r_E ，吸收其余部分以及全部**红外**辐射。

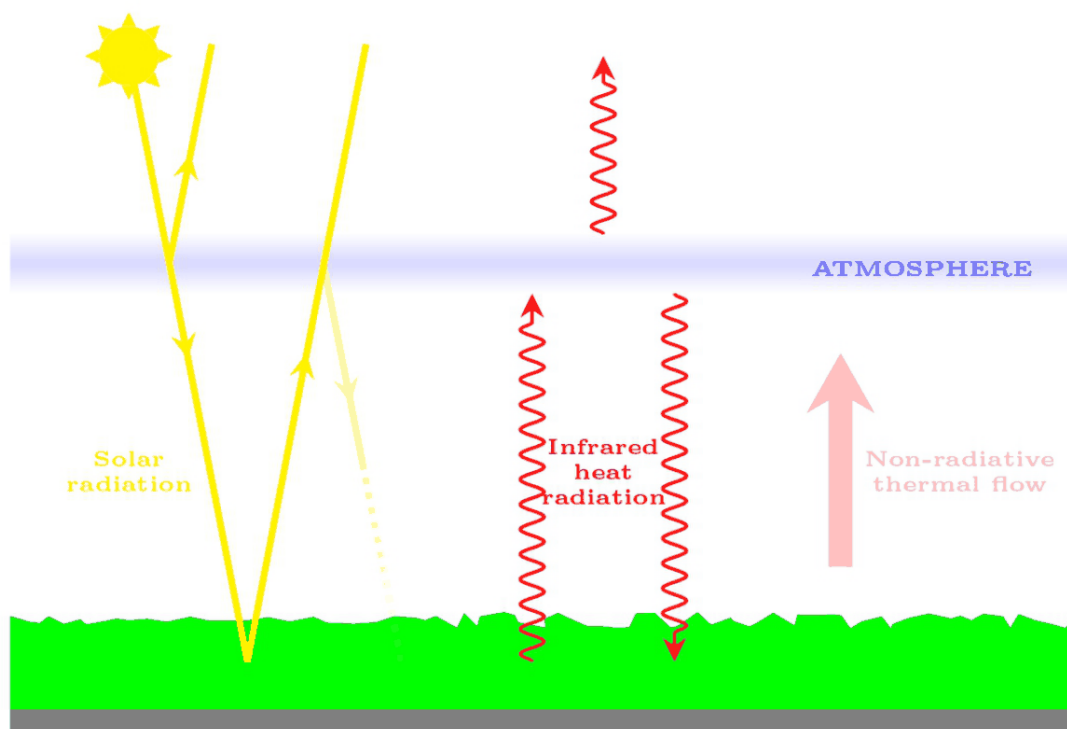


图 2 – 地球与大气之间的热流

部分	任务	分值
B-1	假设 $\varepsilon = 1$ 且 $r_E = 0$ ，计算地球温度 T_E 和大气温度 T_A 。	1.0 分

现在假设 $r_E \neq 0$ 。在这种情况下，“地球 + 大气”组成的整体系统反射太阳辐射的比例有所不同，该比例称为“反照率”，用 α 表示。

部分	任务	分值
B-2	用 r_E 和 r_A 表示反照率 α 。然后假设 $r_E = 0.102$ （且 $r_A = 0.255$ ），计算其数值。	1.6 分
B-3	a) 用 σ 、 α 、 S_0 和 ε 表示地球温度。 b) 利用给定数据和计算得到的反照率，求使地球达到当前平均温度 $T_E = 288\text{ K}$ 所对应的 ε 的数值。	1.0 分
B-4	求 $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ ，并确定当 ε 增加百分之一时，地球温度升高多少。	0.8 分

假设 $T_A = 245\text{ K}$ 且 $T_E = 288\text{ K}$ 。这些数值来自实际数据，可能与你在前面各项任务中得到的结果不同。现在假设从地球向大气持续传递非辐射（例如对流）热流 $J_{NR} = k(T_E - T_A)$ ，其中 k 为常量。量 J_{NR} 是单位面积的传热功率。

部分	任务	分值
B-5	用 T_E 、 T_A 、 σ 、 α 和 S_0 计算 ε 和 k 。	1.6 分

部分	任务	分值
B-6	a) 将 B-5 部分中得到的方程对 ε 求导, 求出 $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ 和 $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ 满足的两个代数方程。 b) 利用这些方程, 求出 ε 的值增加百分之一所引起的地球温度变化的数值。	1.0 分

题目译自官方英文原文。

答案

将全球平均吸收太阳辐射通量定义为

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

增加百分之一按 $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$ 理解。数值结果均使用未舍入的中间值计算。

- A-1

$$S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 = 1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

- A-2

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 278 \text{ K}.$$

- A-3

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

- A-4

$$x_m = 4.97, \quad b = \frac{hc}{x_m k_B} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

- A-5

$$\lambda_{\max,S} = \frac{b}{T_S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max,E} = \frac{b}{T_E} = 10.4 \text{ }\mu\text{m}.$$

- A-6

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 1.20 \times 10^{-2}.$$

- B-1

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = 307 \text{ K},$$

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = 258 \text{ K}.$$

• B-2

$$\alpha = r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E} = 0.313.$$

• B-3(a)

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

• B-3(b)

$$\varepsilon = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4} = 0.809.$$

• B-4

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)} = 60.4 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.489 \text{ K}.$$

此温度变化为一阶近似结果；精确的有限变化量为 0.491 K。

• B-5

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.849,$$

$$k = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)} = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

• B-6(a) 令 $X = dT_E/d\varepsilon$, $Y = dT_A/d\varepsilon$, 则

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4,$$

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

• B-6(b)

$$X = 61.7 \text{ K}, \quad Y = 47.8 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

此温度变化为一阶近似结果；精确的有限变化量为 0.527 K。

解答

A-1

由斯特藩-玻尔兹曼定律，太阳的总辐射功率为：

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

根据辐射功率守恒，这一光度分布在半径为 d 的球面上。因此，

$$S_0 = \frac{L_S}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

代入数值得

$$S_0 = 1353.076 \dots \text{ W m}^{-2} = \boxed{1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}}.$$

同样的几何衰减关系适用于每个波长：

$$\tilde{u}_S(\lambda) = \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u(\lambda, T_S).$$

A-2

用 R_E 表示地球半径。地球以其投影面积 πR_E^2 截获太阳光，而其整个表面 $4\pi R_E^2$ 都发出热辐射。

对于处于平衡的黑体地球，

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4.$$

于是

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 277.920 \dots \text{ K}.$$

因此，

$$\boxed{T_E = 278 \text{ K}}.$$

A-3

在 T 固定时，引入

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

对普朗克定律取对数后求导，得

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right].$$

在有限波长处的极大值点，该导数为零，因此

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

所以，一个合适的函数为

$$\boxed{f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x}.$$

代数根 $x = 0$ 对应于 $\lambda \rightarrow \infty$ ，而不是有限波长处的极大值。所需的根为非零正根。

A-4

例如，可以用牛顿法求出非零根：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5(1 - e^{-x_n}) - x_n}{5e^{-x_n} - 1}.$$

从 $x_0 = 5$ 开始迭代，得

$$x_m = 4.965114 \dots$$

由于 $x_m = hc/(\lambda_{\max} k_B T)$,

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_m k_B} = b.$$

利用给定常量，

$$b = \frac{1.24 \times 10^3}{(4.965114 \dots)(8.62 \times 10^{-5})} \text{ nm K} = 2.897244 \dots \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

因此,

$$\boxed{x_m = 4.97, \quad b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}}.$$

普朗克函数在波长区间的两个端点均趋于零, 而此点是其唯一的有限正波长驻点, 因此该点为最大值点。

A-5

分别对两个天体应用维恩位移定律,

$$\lambda_{\max, S} = \frac{b}{T_S} = 502.122 \dots \text{ nm},$$

$$\lambda_{\max, E} = \frac{b}{T_E} = 10.4247 \dots \mu\text{m}.$$

于是

$$\boxed{\lambda_{\max, S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max, E} = 10.4 \mu\text{m}}.$$

太阳的辐射峰位于可见光波段, 而地球的辐射峰位于红外波段。

A-6

在最大值处, $\lambda_{\max} = b/T$, 且指数函数的自变量等于 x_m 。因此,

$$u_{\max}(T) = \frac{2\pi hc^2}{b^5(e^{x_m} - 1)} T^5.$$

因此, 按单位波长计的光谱功率峰值与 T^5 成正比。

图中两条曲线的峰高相等, 要求

$$\gamma \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u_{\max}(T_S) = u_{\max}(T_E),$$

由此得

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5.$$

由 A-2,

$$\left(\frac{T_E}{T_S} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

因此,

$$\gamma = \frac{T_E}{4T_S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = \boxed{1.20 \times 10^{-2}}.$$

B-1

在 B 部分中, 题目给出的光谱近似将太阳辐射视为可见光—紫外线辐射, 将地球和大气的热辐射视为红外辐射。大气不吸收太阳辐射。根据基尔霍夫定律, 大气的红外发射率等于 ε , 因此大气层的每一面都发出通量为 $\varepsilon \sigma T_A^4$ 的辐射。地球的红外发射率为一。

此处 $\varepsilon = 1$, $r_E = 0$ 。地表吸收的全球平均太阳辐射通量为

$$Q_1 = \frac{(1 - r_A)S_0}{4}.$$

大气平衡要求

$$\sigma T_E^4 = 2\sigma T_A^4,$$

因为大气吸收地球向上发出的辐射，同时向两个方向发出辐射。

地表的平衡方程为

$$Q_1 + \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4.$$

联立上述方程，得

$$\sigma T_A^4 = Q_1, \quad \sigma T_E^4 = 2Q_1.$$

因此，

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{258 \text{ K}},$$

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{307 \text{ K}}.$$

B-2

将入射太阳辐射功率归一化为一。大气直接反射其中的 r_A 。经地表一次反射后逃逸到太空的比例为

$$(1 - r_A)r_E(1 - r_A).$$

在地表与大气之间每多往返一次，剩余的反射功率就乘以 $r_A r_E$ 。

将所有贡献相加，得

$$\begin{aligned} \alpha &= r_A + r_E(1 - r_A)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_A r_E)^n \\ &= r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E}. \end{aligned}$$

等价地，

$$1 - \alpha = \frac{(1 - r_A)(1 - r_E)}{1 - r_A r_E}.$$

代入给定反射率，得

$$\alpha = 0.313124\dots, \quad \boxed{\alpha = 0.313}.$$

所有未被反射的太阳辐射功率都由地表吸收。

B-3

(a) 定义

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

在没有非辐射热输运时，地表和大气的平衡方程为

$$\begin{aligned} Q + \varepsilon \sigma T_A^4 &= \sigma T_E^4, \\ \varepsilon \sigma T_E^4 &= 2\varepsilon \sigma T_A^4. \end{aligned}$$

对于 $\varepsilon > 0$ ，第二个方程给出

$$T_A^4 = \frac{T_E^4}{2}.$$

代入第一个方程，得

$$Q = \sigma T_E^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

所以

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

此表达式还可连续延拓至 $\varepsilon = 0$ 。

(b) 整理得到吸收率，

$$\varepsilon = 2 \left(1 - \frac{Q}{\sigma T_E^4}\right) = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4}.$$

未经舍入的通量为

$$Q = 232.348778 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad \sigma(288 \text{ K})^4 = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

于是

$$\varepsilon = 0.808710 \dots, \quad \boxed{\varepsilon = 0.809}.$$

B-4

保持 S_0 和 α 不变。对 B-3 的结果取对数后求导，得

$$\frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{8(1 - \varepsilon/2)} = \frac{1}{4(2 - \varepsilon)}.$$

因此，

$$\boxed{\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)}}.$$

在 B-3 的平衡状态下，

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = 60.4387 \dots \text{ K} = \boxed{60.4 \text{ K}}.$$

对于百分之一的相对增加，

$$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon.$$

在一阶近似下，

$$\Delta T_E \simeq \frac{dT_E}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{0.01\varepsilon T_E}{4(2 - \varepsilon)} = \boxed{0.489 \text{ K}}.$$

作为比较，直接计算有限变化量得

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = T_E \left[\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 - 1.01\varepsilon} \right)^{1/4} - 1 \right] = \boxed{0.491 \text{ K}}.$$

B-5

计入向上的非辐射热通量

$$J_{\text{NR}} = k(T_{\text{E}} - T_{\text{A}}).$$

地表损失这部分能量，而大气获得这部分能量。两者的平衡方程变为

$$Q + \varepsilon \sigma T_{\text{A}}^4 = \sigma T_{\text{E}}^4 + k(T_{\text{E}} - T_{\text{A}}), \quad (2)$$

$$\varepsilon \sigma T_{\text{E}}^4 + k(T_{\text{E}} - T_{\text{A}}) = 2\varepsilon \sigma T_{\text{A}}^4. \quad (3)$$

为简洁起见，记

$$E = \sigma T_{\text{E}}^4, \quad A = \sigma T_{\text{A}}^4.$$

将两个能量平衡方程相加，可消去内部传热项：

$$Q = (1 - \varepsilon)E + \varepsilon A.$$

右侧为逃逸到太空的辐射：透过大气的地表辐射与大气向上发出的辐射之和。解得

$$\varepsilon = \frac{E - Q}{E - A} = \frac{\sigma T_{\text{E}}^4 - Q}{\sigma(T_{\text{E}}^4 - T_{\text{A}}^4)}.$$

式 (3) 给出

$$k(T_{\text{E}} - T_{\text{A}}) = \varepsilon(2A - E).$$

因此，

$$k = \frac{\varepsilon \sigma (2T_{\text{A}}^4 - T_{\text{E}}^4)}{T_{\text{E}} - T_{\text{A}}} = \frac{(\sigma T_{\text{E}}^4 - Q)(2T_{\text{A}}^4 - T_{\text{E}}^4)}{(T_{\text{E}}^4 - T_{\text{A}}^4)(T_{\text{E}} - T_{\text{A}})}.$$

当 $T_{\text{E}} = 288 \text{ K}$, $T_{\text{A}} = 245 \text{ K}$ 时，

$$E = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad A = 204.290135 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

因此，

$$\varepsilon = 0.849, \quad k = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

由此得到的热通量为

$$J_{\text{NR}} = 15.7 \text{ W m}^{-2},$$

在规定的向上方向上为正。

B-6

(a) 当 ε 改变时，保持 S_0 、 α 和 k 不变，并允许两个温度均发生变化。令

$$X = \frac{dT_{\text{E}}}{d\varepsilon}, \quad Y = \frac{dT_{\text{A}}}{d\varepsilon}.$$

对式 (2) 求导，得

$$\sigma T_{\text{A}}^4 + 4\varepsilon \sigma T_{\text{A}}^3 Y = 4\sigma T_{\text{E}}^3 X + k(X - Y).$$

所以

$$(4\sigma T_{\text{E}}^3 + k)X - (4\varepsilon \sigma T_{\text{A}}^3 + k)Y = \sigma T_{\text{A}}^4.$$

对式 (3) 求导，得

$$\sigma T_E^4 + 4\varepsilon\sigma T_E^3 X + k(X - Y) = 2\sigma T_A^4 + 8\varepsilon\sigma T_A^3 Y.$$

于是

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

(b) 为给出显式的参数表达式，定义

$$p = 4\sigma T_E^3, \quad q = 4\sigma T_A^3,$$

并沿用 $E = \sigma T_E^4$ 、 $A = \sigma T_A^4$ 。方程组的行列式为

$$D = (p + k)(2\varepsilon q + k) - (\varepsilon q + k)(\varepsilon p + k) = \varepsilon(2 - \varepsilon)pq + k[(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q].$$

消去 Y ，得

$$X = \frac{\varepsilon q E + k(E - A)}{D}.$$

类似地，

$$Y = \frac{(p + k)(E - 2A) + (\varepsilon p + k)A}{D}.$$

利用 B-5 中的平衡值，

$$X = 61.7352 \dots \text{ K}, \quad Y = 47.7734 \dots \text{ K}.$$

对于 $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$ ，

$$\Delta T_E \simeq X\Delta\varepsilon = (61.7352 \dots)(0.01)(0.84897597 \dots) \text{ K}.$$

因此，

$$\Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

取 $\varepsilon_{\text{new}} = 1.01\varepsilon$ ，保持 k 相同，求解原始非线性平衡方程，得到有限变化量

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = 0.527 \text{ K}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：离子囚禁与原子冷却

近几十年来，原子和离子的囚禁与冷却一直是令物理学家着迷的课题，这一领域的研究成果已多次获得诺贝尔奖。在本题的第一部分，我们将探讨一种称为“保罗阱”的离子囚禁技术。沃尔夫冈·保罗和汉斯·德默尔特因这项工作共同获得了 1989 年诺贝尔物理学奖的一半奖金。接下来，我们将研究多普勒冷却技术。1997 年诺贝尔物理学奖授予朱棣文、克洛德·科恩-塔努吉和威廉·丹尼尔·菲利普斯，以表彰他们“发展了利用激光冷却和囚禁原子的方法”，多普勒冷却技术正是该奖项新闻公报中提及的研究成果之一。

A. 保罗阱

众所周知，仅靠静电场无法使带电粒子处于稳定平衡。因此，要为离子建立稳定平衡点，需要采用更为精巧的技术。保罗阱就是其中一种。

考虑一个半径为 R 、具有均匀正线电荷密度 λ 的带电圆环。在圆环中心放置一个质量为 m 的正点电荷 Q 。

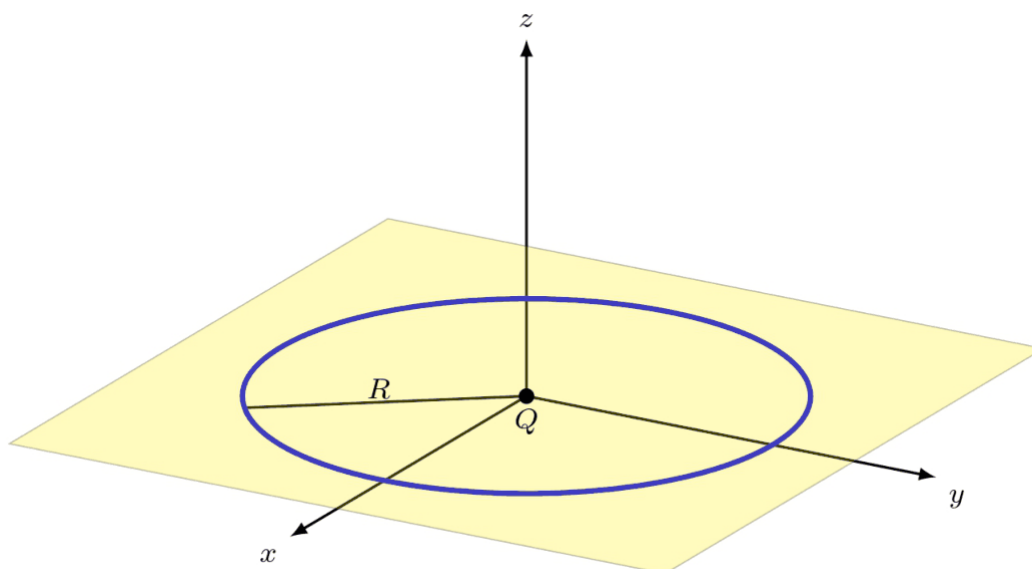


图 1 – 线电荷密度为 λ 、半径为 R 的均匀带正电圆环：坐标原点位于圆环中心。

A-1	a) 在笛卡尔坐标系 (x, y, z) 中，求带电圆环在其中心附近产生的电场，保留至 x/R、y/R 和 z/R 的一阶项。 b) 对于存在稳定平衡的方向，求带电粒子在圆环中心附近做小振动的角频率。	1.5 分
-----	--	-------

为了在所有方向上囚禁电荷 Q ，我们希望施加交变电场，以产生动态平衡。设线电荷密度为 $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$ ，其中 λ_0 、 u 和 Ω 均可调节。忽略辐射效应。这样，粒子在圆环中心附近沿垂直于圆环平面的方向发生小位移时，其运动方程为：

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z \quad (1)$$

A-2	用已知参数表示 a 和 k 。	0.4 分
-----	---------------------	-------

我们希望通过以下简化假设求出方程 (1) 的近似解： $a \ll 1$ 、 $\Omega \gg k$ 和 $a\Omega^2 \gg k^2$ 。在这些假设下，可以证明该方程的解可分为两部分： $z(t) = p(t) + q(t)$ ，其中 $p(t)$ 是缓慢变化的分量， $q(t)$ 是平均值为零、振幅很小的快速变化分量。换句话说，在 $q(t)$ 振动几个周期的时间内，可以认为 $p(t)$ 保持不变（见图 2）。

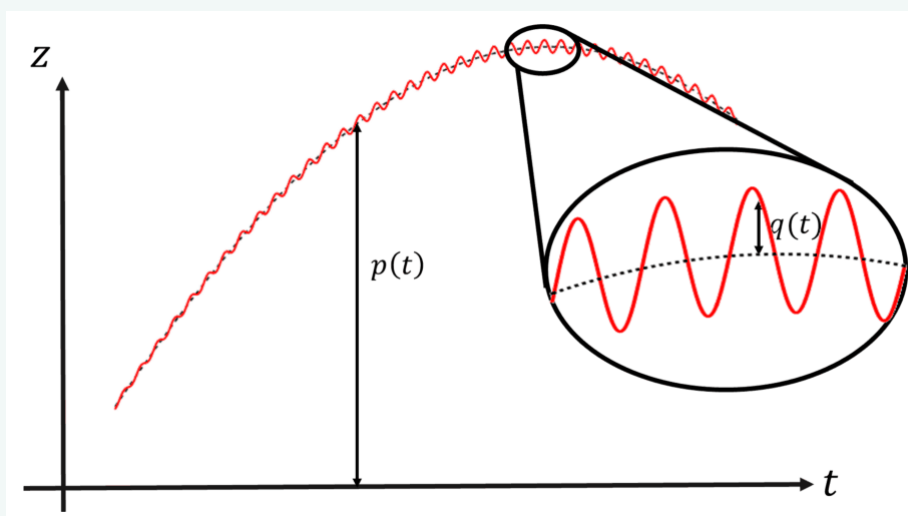


图 2 – 带电粒子运动方程的一个典型解： $p(t)$ 描述整体运动， $q(t)$ 表示围绕这一轨迹的小振动。右侧椭圆内为该轨迹局部的放大图。

A-3	a) 利用上述近似，求出 $q(t)$ 的运动方程，用 a 、 Ω 和 p 表示。 b) 根据该函数应具有的性质选取适当的初始条件，求解此方程。	1.8 分
A-4	a) 利用快速变化分量的平均效应，求出 $p(t)$ 的有效运动方程。 b) 研究平衡点的稳定性，并求出稳定平衡的条件。	1.5 分

设 $\lambda_0 = 8 \times 10^{-9}$ C/m, $R = 10$ cm。我们希望用这一装置囚禁一个质量为氢原子 100 倍的单电离原子。

A-5	计算 k 。设 $a = 0.04$ ，估算使该离子运动稳定所需的最低频率。使用题末给出的数据。	0.4 分
-----	--	-------

B. 多普勒冷却

有时需要冷却被囚禁的原子或离子。设一个质量为 m 的被囚禁原子具有两个能级，能级差为 $E_0 = \hbar\omega_A$ 。处于低能级的电子可以吸收一个光子并跃迁到高能级，但经过一段时间 τ 后，它们会返回低能级，并发射一个频率主要位于 $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$ 范围内的光子。

B-1	利用海森堡不确定性原理求 Γ 。	0.5 分
-----	-------------------------	-------

根据类似的推理，当我们用激光照射被囚禁的原子时，若激光的角频率 ω_L 位于区间 $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$ 内，原子就可能吸收光子。设激光频率 ω_L 略低于 ω_A 。对于某一特定装置，在原子参考系中，原子吸收光子的速率如图 3 所示。被吸收的光子随后沿随机方向重新发射。为简化起见，我们只考虑一维问题，即假设原子只能沿 x 方向运动，激光同时从左、右两侧照射原子。在原子参考系中，由于原子的运动，光的频率会升高或降低。由于原子的速度 v 很小，我们只保留 v/c 的一阶项，忽略所有高阶项。此外， $m \gg \hbar\omega_A/c^2$ ，因此原子吸收光子后速度几乎不变。同时，与 $\omega_A - \omega_L$ 相比，多普勒效应引起的频率变化很小，因此图 3 中的 s 函数可以用下面的线性函数近似：

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L)$$

其中， s 是单位时间内吸收的光子数， s_L 是 $\omega = \omega_L$ 时 s 的值， α 是曲线在 ω_L 处切线的斜率。重新发射的光子的频率几乎等于入射光子的频率，但它沿 x 正方向或负方向发射的概率相等。实际上，在此处所保留的近似阶次内，这两个频率相同。注意，我们是在原子参考系中考虑整个过程的。

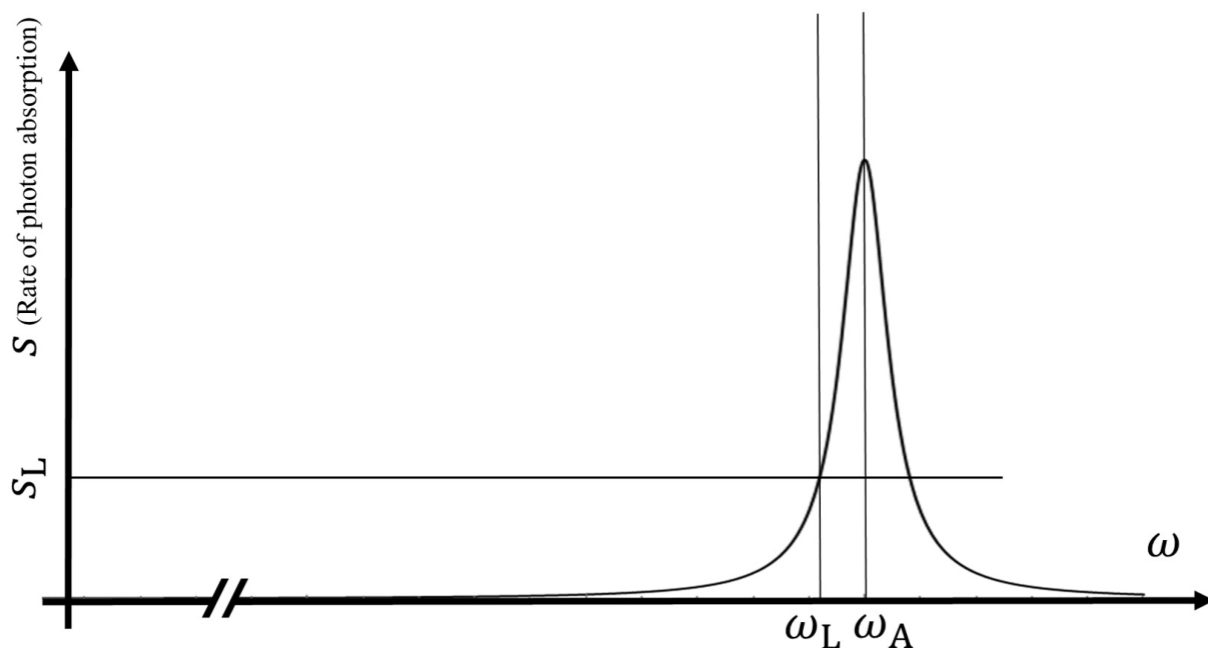


图 3 – 某一特定阱中光子吸收速率随频率的变化：与原子两个能级之差对应的频率用 ω_A 表示，略低于它的激光频率用 ω_L 表示。

B-2	a) 设被囚禁原子在实验室参考系中的速度为 $v = v_x$。在原子参考系中，计算分别从两个方向入射的光子与原子碰撞的速率（记为 s_+ 和 s_-），以及各方向的动量吸收速率（记为 π_+ 和 π_-）。 b) 求实验室参考系中原子受到的有效力，将其表示为 v、$k_L = \omega_L/c$、$\hbar$ 和 α 的函数。设 $s_L \ll \alpha\omega_L$，	1.7 分
-----	--	-------

我们希望求出利用这一技术能够达到的最低温度。假设某个原子的速度恰好降为零，就在此刻，它吸收一个光子（从任一方向入射），然后以几乎相同的频率，随机沿两个方向之一重新发射光子。设这一过程每隔 τ 时间发生一次。

B-3	考虑这一过程的两种可能结果中原子的末动量，计算原子吸收的平均功率。	1.0 分
B-4	利用任务 B-2 中求得的力计算输出功率。然后，求平衡时 v^2 的平均值。利用气体动理论知识估算原子的温度。	0.8 分
B-5	对质量为氢原子 100 倍的原子，估算这一温度。设 $\omega_L = 2 \times 10^{16} \text{ rad/s}$ 、 $\tau = 5 \times 10^{-9} \text{ s}$ ，且 $\alpha = 4$ 。	0.4 分

氢原子的质量：	$m_H = 1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}$
电子的电荷量：	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
真空介电常数：	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
玻尔兹曼常数：	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
普朗克常数：	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

题目译自官方英文原文。

答案

- A-1(a):

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

- A-1(b): 圆环平面内的所有方向均稳定，其角频率为

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

z 方向不稳定。

- A-2:

$$a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}}.$$

- A-3(a): $\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t$ 。

- A-3(b): $q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t$ 。在一个快速振动周期内将 p 视为常量时，适当的初始条件为 $q(0) = -ap$ 、 $\dot{q}(0) = 0$ 。

- A-4(a):

$$\ddot{p} + \left(\frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2 \right) p = 0.$$

- A-4(b): 在所述近似下，稳定囚禁要求

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

轴向慢振动的角频率为 $\sqrt{a^2 \Omega^2 / 2 - k^2}$ 。

- A-5:

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

估算的阈值为

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

应选择高于此阈值的频率。

- B-1: 线宽的量级为 $\Gamma \sim 1/\tau$ ；采用通常的寿命半宽定义，

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

- B-2(a): 用 $+$ 表示沿 $+x$ 方向传播的光子, 并令 $\pi_{\pm}$ 为带符号的 x 方向动量传递速率。则

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_{\pm} = \pm \hbar k_L \left[s_L \mp (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

- B-2(b):

$$F_x = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

- B-3:

$$P_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

- B-4: 以正值表示的能量移除速率为

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

平衡时,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}, \quad T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

- B-5:

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK}.$$

解答

A-1(a)

圆环位于 xy 平面内, 所带总电荷为 $2\pi R\lambda$ 。根据库仑定律, 它在对称轴上产生的电场为

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

当 $|z| \ll R$ 时,

$$E_z(0, 0, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

反射对称性和旋转对称性要求中心附近的一般线性电场具有以下形式:

$$E_x = Cx, \quad E_y = Cy, \quad E_z = Dz.$$

轴向结果给出 $D = \lambda/(2\epsilon_0 R^2)$ 。中心附近没有电荷, 因此由高斯定律可得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2C + D = 0.$$

所以,

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

A-1(b)

在圆环平面内, 由牛顿第二定律可得

$$m\ddot{x} = -\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}x, \quad m\ddot{y} = -\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}y.$$

这些都是简谐振动方程。因此，平面内各个方向的振动角频率相同，均为

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 m R^2}}.$$

沿轴向，

$$m\ddot{z} = \frac{Q\lambda}{2\varepsilon_0 R^2}z.$$

当 $Q, \lambda > 0$ 时，此力指向远离中心的方向，因此轴向平衡不稳定。

A-2

将随时间变化的线电荷密度代入轴向运动方程，得

$$\ddot{z} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 m R^2}(\lambda_0 + u \cos \Omega t)z.$$

与方程 (1) 比较可得

$$k^2 = \frac{Q\lambda_0}{2\varepsilon_0 m R^2}, \quad a = \frac{Qu}{2\varepsilon_0 m R^2 \Omega^2}.$$

这里 a 是无量纲量， k 的单位为时间的倒数。

A-3(a)

将 $z = p + q$ 代入运动方程：

$$\ddot{p} + \ddot{q} = k^2 p + k^2 q + a\Omega^2 p \cos \Omega t + a\Omega^2 q \cos \Omega t.$$

在一次快速振动过程中， p 近似保持不变。由于 q 的振幅很小、 $a \ll 1$ ，且 $a\Omega^2 \gg k^2$ ，快速变化分量的主导阶方程为

$$\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t.$$

A-3(b)

积分时将 p 视为常量，得到

$$q(t) = -ap \cos \Omega t + C_1 t + C_2.$$

快速振动分量不能包含随时间持续增长的漂移项，因此 $C_1 = 0$ 。其平均值必须为零，这要求 $C_2 = 0$ 。所以

$$q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t.$$

将 p 固定时，对应的初始条件为

$$q(0) = -ap, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

q 的振幅为局部慢变位移的 a 倍，与 $a \ll 1$ 一致。在这一近似阶次下，忽略涉及 p 缓慢变化的修正。

A-4(a)

在一个驱动周期内对完整方程取平均，并在该周期内将 p 视为常量。由于

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle \cos \Omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

得到

$$\ddot{p} = k^2 p + a\Omega^2 \langle q \cos \Omega t \rangle.$$

利用 $q = -ap \cos \Omega t$, 可得

$$\langle q \cos \Omega t \rangle = -\frac{ap}{2}.$$

因此,

$$\ddot{p} = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p.$$

尽管 k^2 与 $a\Omega^2$ 相比很小, 此处仍必须保留它: 交变电场对平均运动的贡献仅为 $a^2\Omega^2$ 阶。

A-4(b)

定义

$$\omega_s^2 = \frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2.$$

若 $\omega_s^2 > 0$, 慢变位移将发生振动:

$$p(t) = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t,$$

而完整的近似运动

$$z(t) \simeq p(t) (1 - a \cos \Omega t),$$

保持有界。因此, 轴向稳定性条件为

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

对于 $a > 0$, 该条件为

$$\Omega > \frac{\sqrt{2} k}{a}.$$

低于这一阈值时, 慢变运动方程具有指数增长的解。取等号时, $\ddot{p} = 0$, 因此非零的慢变速度会导致无界漂移; 等号情形不能实现囚禁。

为完整起见, 横向运动方程为

$$\ddot{x} = - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a\Omega^2}{2} \cos \Omega t \right) x.$$

采用相同的平均方法, 对于其慢变分量 X , 得到

$$\ddot{X} + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{8} \right) X = 0,$$

y 方向也完全相同。在此近似下, 这些方向均稳定, 因此轴向条件就给出了在三个方向上均实现囚禁所需的条件。

A-5

该离子的参数为

$$Q = e, \quad m = 100m_H = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad R = 0.10 \text{ m}.$$

于是

$$k = \sqrt{\frac{(1.602 \times 10^{-19})(8 \times 10^{-9})}{2(8.854 \times 10^{-12})(1.674 \times 10^{-25})(0.10)^2}} = 2.079 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

因此,

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

对于给定的 $a = 0.04$, 估算的阈值角频率为

$$\Omega_{\text{th}} = \frac{\sqrt{2}k}{a} = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s}.$$

对应的普通频率为

$$f_{\text{th}} = \frac{\Omega_{\text{th}}}{2\pi} = 1.170 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

所以,

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

所选频率必须高于这一估算阈值。在阈值处,

$$\frac{\Omega_{\text{th}}}{k} \simeq 35, \quad \frac{a\Omega_{\text{th}}^2}{k^2} = 50,$$

这与所假定的尺度分离一致。

B-1

激发态的特征寿命为 τ 。能量—时间不确定性关系给出的估算为

$$\Delta E \tau \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

将特征能量半宽取为 $\Delta E \simeq \hbar\Gamma$, 得到

$$\Gamma \tau \gtrsim \frac{1}{2}.$$

对于由有限寿命决定的线宽, 通常的估算因而为

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

不确定性原理能够可靠给出的是量级关系 $\Gamma \sim 1/\tau$; 数值因子取决于线宽的定义方式。

B-2(a)

用 $+$ 标记沿 $+x$ 方向传播的光子, 用 $-$ 标记沿 $-x$ 方向传播的光子。对于以速度 v 运动的原子, 一阶多普勒频移给出

$$\omega'_+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \omega'_- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

与原子同向传播的光子发生红移; 与原子反向传播的光子发生蓝移。

题目给出的函数 $s(\omega)$ 已经规定了原子参考系中的吸收速率。将这些频率代入, 得到

$$s_+ = s_L + \alpha(\omega'_+ - \omega_L) = s_L - \alpha\omega_L \frac{v}{c},$$

$$s_- = s_L + \alpha(\omega'_- - \omega_L) = s_L + \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

于是,

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c}.$$

每个被吸收光子的带符号动量为 $\pm \hbar \omega'_{\pm}/c$ 。将 $\pi_{\pm}$ 定义为带符号的 x 方向动量传递速率, 则

$$\pi_+ = \frac{\hbar \omega'_+}{c} s_+, \quad \pi_- = -\frac{\hbar \omega'_-}{c} s_-.$$

展开并仅保留 v/c 的一阶项, 得到

$$\pi_+ = \hbar k_L \left[s_L - (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right],$$

$$\pi_- = -\hbar k_L \left[s_L + (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

B-2(b)

在原子参考系中, 由于两个发射方向等概率, 重新发射的光子的平均动量为零。因此平均力为

$$F'_x = \pi_+ + \pi_- = -\frac{2\hbar \omega_L}{c^2} (s_L + \alpha \omega_L) v.$$

在这里采用的近似下, 原子参考系中吸收与发射的能量相等。因此, 在计算平均力时忽略反冲, 一个完整循环在该参考系中的净能量传递为零。变换到实验室参考系后, 纵向力在所保留的近似阶次内不变。

利用 $s_L \ll \alpha \omega_L$, 得到

$$F_x \simeq -\frac{2\alpha \hbar \omega_L^2}{c^2} v = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

激光频率位于吸收曲线的上升侧, 因此 $\alpha > 0$ 。所以该力与速度方向相反, 使动能减小。

B-3

设入射光子沿 $+x$ 方向传播, 其动量大小为

$$p_{\gamma} = \hbar k_L.$$

原子的初始动量为零。由动量守恒可得以下两种等概率的结果:

发射方向	原子的末动量	末动能	概率
沿 $+x$ 方向, 与入射方向相同	0	0	1/2
沿 $-x$ 方向, 与入射方向相反	$2p_{\gamma}$	$2p_{\gamma}^2/m$	1/2

因此, 每个吸收-发射循环中动能的平均增加量为

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{2} (0) + \frac{1}{2} \frac{(2p_{\gamma})^2}{2m} = \frac{p_{\gamma}^2}{m}.$$

沿 $-x$ 方向传播的入射光子给出的平均能量增加量相同。由于每隔 τ 完成一个循环,

$$P_{\text{in}} = \frac{\langle \Delta K \rangle}{\tau} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

B-4

阻尼力使原子机械能变化的速率为

$$F_x v = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

因此，以正值表示的输出功率，即能量移除速率，为

$$P_{\text{out}} = 2\alpha\hbar k_L^2 v^2.$$

热平衡时，平均冷却功率与反冲加热功率相平衡：

$$2\alpha\hbar k_L^2 \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

约去公因子，得到

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}.$$

本题将运动限制在一维，因此由能量均分定理可得

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T.$$

所以，

$$T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

在这一模型中，原子质量和激光波数在平衡温度的表达式中相消。

B-5

代入给定数值，

$$T = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2(4)(1.381 \times 10^{-23})(5 \times 10^{-9})} = 1.9098 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

因此，

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK} \simeq 190 \text{ } \mu\text{K}.$$

对于给定的质量 $m = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}$ ，相应的速度方差为

$$\langle v^2 \rangle = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v_{\text{rms}} \simeq 0.126 \text{ m/s}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：黑寡妇脉冲星

在已观测到的恒星中，双星占相当大的比例。其中一颗或两颗恒星可能是以很高的角速度自转并发射电磁波的中子星；这样的恒星称为脉冲星。有时，伴星是一团膨胀的气体，这些气体逐渐落到中子星上，使其质量增加（图 1-a）。这样，中子星逐渐吞噬其伴星的一部分质量。因此，人们将这种中子星比作黑寡妇蜘蛛（或红背蜘蛛），即交配后吃掉配偶的雌蜘蛛。落向黑寡妇的气体受热，产生可观测到的辐射。质量最大的中子星往往是黑寡妇，它们是检验基础物理的天然实验室。图 1-b 显示了伊朗国家天文台的 3.4 米光学望远镜拍摄的中子星 PSR J2215+5135 的伴星图像。在这幅图像中看不到中子星，所观测到的光来自它的伴星。

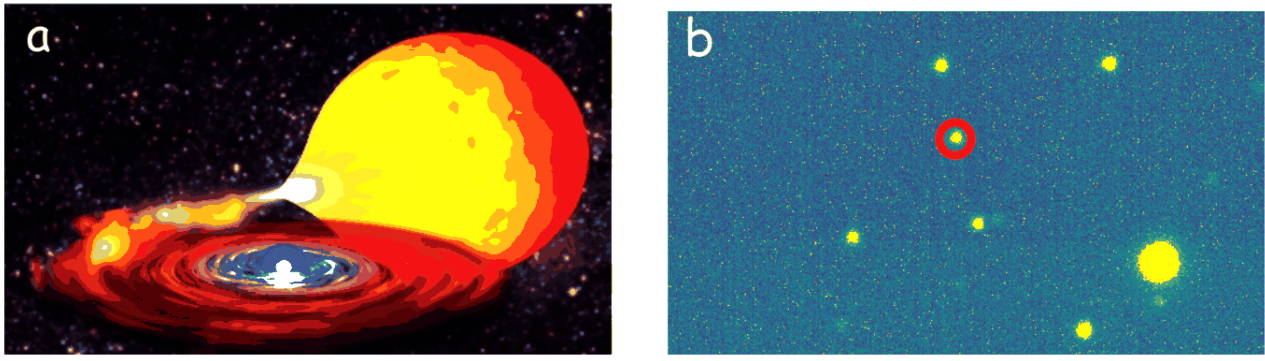


图 1 – (a) 从伴星落向中子星的气体 – (b) 中子星 PSR J2215+5135 的伴星

A. 双星系统

考虑一个简单模型，将黑寡妇及其伴星表示为两个质点，质量分别为 M_1 和 M_2 ，它们绕共同质心做圆周运动。为研究该系统的动力学，考虑一个旋转坐标系，在该坐标系中两个天体均静止。取质心为坐标原点。假设两个质点位于 x 轴上、分处原点两侧，相距 a ，且 M_1 位于 x 轴负半轴上。在运动平面内的任意一点 (x, y) ，单位试探质量的有效势 $\varphi(x, y)$ 为两个质点的引力势与离心势之和。

A-1	用 M_1 、 M_2 、 G 和 a 表示 $\varphi(x, y)$ 。	1.0 分
A-2	假设 $M_1 > M_2$ ，定性画出函数 $\varphi(x, 0)$ 的图像。	0.7 分

假设（仅在 A-3 中） $M_2 = M_1/3$ ，且 M_2 周围包裹着密度极低的稀薄气体。这些气体的质量微不足道，忽略其引力效应。如果气体包层的尺寸超过某一特定限度，气体就会溢流到 M_1 上。假设溢流发生在 x 轴上的 $x = x_0$ 处。

A-3	求 $\frac{x_0}{a}$ 的数值，保留两位有效数字。可以使用计算器。	0.5 分
-----	---	-------

设两颗恒星绕共同质心运动的周期为 P 。假设物质以极小的速率 $dM_1/dt = \beta$ 从 M_2 流向 M_1 。这一速率如此之小，以至于在每个公转周期内，两颗恒星之间的距离可以视为不变。然而，经过很长一段时间后，两颗恒星之间的距离会发生变化，而运动仍保持为圆周运动。

A-4	用 β 、 M_1 、 M_2 、 G 和 a 表示 a 和 P 的变化率。	0.6 分
-----	--	-------

从 M_2 脱离的气体形成一个绕 M_1 旋转的盘，并因摩擦而升温（图 1-a）。随着气体损失能量，它沿螺旋轨迹向内靠近 M_1 ，最终落到其表面。在稳态下，物质以恒定速率 β 从 M_2 流入盘，再从盘落到 M_1 上。与此同时，受热的盘以黑体形式发出热辐射。该盘形成于非常靠近中子星的位置，因此在分析盘的运动时，可以忽略恒星 M_2 的引力。同时，忽略气体的热容。

A-5	用 β 、 M_1 、 G 和 σ （斯特藩-玻尔兹曼常量）表示盘在距恒星 M_1 中心 r 处的温度。	1.0 分
-----	---	-------

在双星系统 PSR J2215+5135 中，中子星的质量为 $M_{\text{NS}} = 2.27 M_{\odot}$ ，伴星的质量为 $M_{\text{S}} = 0.33 M_{\odot}$ ，其中 $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ 为太阳质量。公转周期为 $P = 4.14 \text{ hr}$ ，斯特藩-玻尔兹曼常量为 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ，引力常量为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ 。

假设流向中子星的质量流率为 $\beta = \dot{M}_{\text{NS}} = 9 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ 。

A-6	计算盘在半径 $r = \frac{a}{10}$ 处的温度，以开尔文为单位。	0.5 分
-----	---	-------

假设在一次突然爆发后，恒星 M_1 将其一部分质量以极高速度抛出双星系统，其质量变为 M_1' 。设爆发后 M_1' 相对于 M_2 的速度大小为 v' 。

A-7	用 M'_1 、 M_2 、 G 和 a 表示使新双星系统保持束缚的 v' 的最大值。假设爆发是各向同性的，要使双星系统保持束缚， M'_1 的最小值是多少？	0.7分
-----	---	------

B. 恒星稳定性分析

本部分研究单颗恒星的稳定性。考虑一颗由某种特定物质构成的恒星，该物质的状态方程为 $p = K\rho^\gamma$ ，其中 K 和 γ 为常量。设 $p(r)$ 和 $\rho(r)$ 分别为距恒星中心 r 处的压强和密度。恒星中心的压强和密度分别为 p_c 和 ρ_c 。在 B 部分的所有题目中，对所有矢量均取向外为正方向。

B-1	用 r 以及常量 G 和 ρ_c 表示恒星中心附近的引力加速度 $g(r)$ 。	0.2分
B-2	推导确定平衡时 $\rho(r)$ 的（微分）方程，并将其写成如下形式： $\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0$ 。求函数 h_1 和 h_2 。	0.6分
B-3	构造一个具有长度量纲、形式为 $r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$ 的量 r_0 。	0.4分
B-4	将 B-2 中的（微分）方程改写为如下形式： $\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x)u(x) = 0$ ，其中 $x = \frac{r}{r_0}$ ， $u = \frac{\rho}{\rho_c}$ 。求函数 $A_1(u, x)$ 和 $A_2(x)$ 。	0.3分
B-5	对于 $\gamma = 2$ ，可得 $u(x) = \frac{f(x)}{x}$ 。求 $f(x)$ 。	0.6分

假设某颗恒星的 $\frac{du}{dx}$ 随 x 变化的关系由图 2 中的曲线给出。

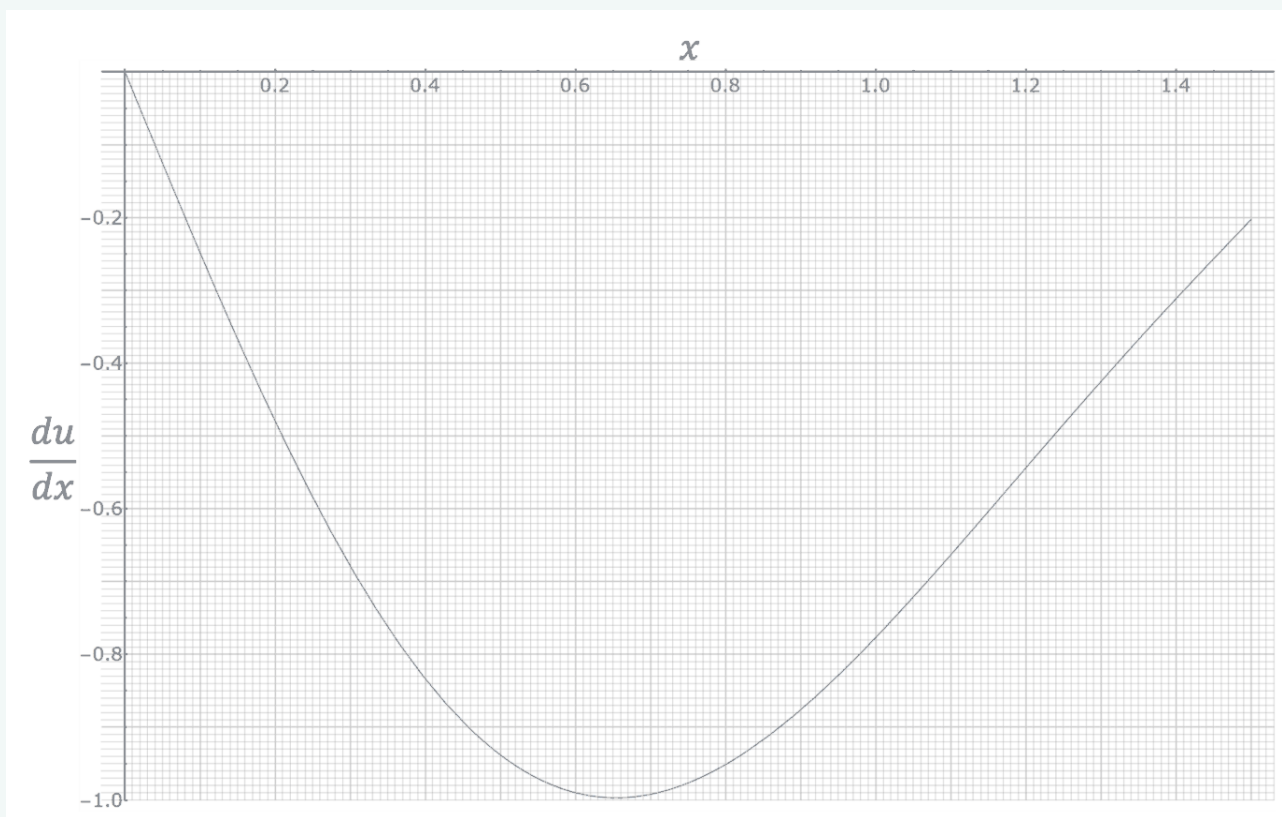


图 2 - $\frac{du}{dx}$ 的图像

B-6	利用图 2 中曲线在 $x = 0$ 附近的行为, 求 γ , 保留 3 位有效数字。如有必要, 可使用所提供的直尺。	0.8 分
为分析系统的稳定性, 假设恒星略微偏离其平衡态: 原先在半径 r 处处于平衡的球壳, 现在的半径为 $\tilde{r}$; 类似地, 参数 g、p 和 ρ 分别变为 $\tilde{g}$、$\tilde{p}$ 和 $\tilde{\rho}$。为方便起见, 只考虑恒星中心附近较小的 r, 此时可以假设 $\tilde{r} = r(1 + \varepsilon(t))$, 其中 $\varepsilon(t) \ll 1$。		
B-7	用 ρ 和 g 表示 $\tilde{\rho}$ 和 $\tilde{g}$, 保留到 ε 的一阶。	0.9 分
B-8	对平衡半径为 r 的球层应用牛顿运动方程, 用 $\tilde{g}$ 、 $\tilde{\rho}$ 、 K 、 γ 和 $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}$ 表示 $\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2}$ ($\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}$ 表示在 t 不变时, $\tilde{\rho}$ 对 $\tilde{r}$ 的导数)。	0.6 分
B-9	用 ε 和题目给出的常量表示 $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$ 。求稳定平衡所需的 γ 的最小值, 并求恒星振动的角频率。	0.6 分

题目译自官方英文原文。

答案

记 $M = M_1 + M_2$, 设两颗恒星的位置为 $x_1 = -aM_2/M$ 和 $x_2 = aM_1/M$ 。

• A-1

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2)$$

可相差一个加性常数。

- A-2 共有三个严格凹的分支, 每个分支各有一个极大值。在 x_1, x_2 两侧, 以及当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 势均趋于 $-\infty$ 。采用通常的标记, 极大值位置的顺序为

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2},$$

其高度满足

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3) < 0.$$

• A-3

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

• A-4

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

- A-5 利用局部轨道能量的释放和盘的双面辐射,

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

• A-6

$$T(a/10) \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

- A-7 逃逸速度的临界值为

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}},$$

束缚轨道要求 $v' < v'_{\text{crit}}$ 。对于各向同性抛射，

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

任一条件取等号时，均对应临界的抛物线逃逸情形。

- B-1

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

- B-2 一种方便的归一化选择为

$$h_1(\rho, r) = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = 4\pi G r^2.$$

- B-3

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad r_0 = \sqrt{\frac{p_c}{G\rho_c^2}}.$$

- B-4

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

- B-5

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

- B-6

$$\gamma \simeq 1.67.$$

- B-7

$$\tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

- B-8

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K\gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

• B-9

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)\varepsilon = 0.$$

临界值为 $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$ ，当 $\gamma > 4/3$ 时有回复振动，取等号时处于临界状态。振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

解答

A-1

设 $M = M_1 + M_2$ 。由质心条件和两星间距可得

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = a,$$

因此

$$x_1 = -\frac{M_2}{M}a, \quad x_2 = \frac{M_1}{M}a.$$

若双星的角速度为 Ω ，对任一恒星应用牛顿运动方程可得

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

单位试探质量的引力势是两个质点引力势的和。在匀速旋转参考系中，向外的离心加速度由下列势产生：

$$\varphi_{\text{cf}} = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2).$$

因此，

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2).$$

A-2

在 x 轴上，

$$\varphi(x, 0) = -\frac{GM_1}{|x - x_1|} - \frac{GM_2}{|x - x_2|} - \frac{1}{2}\Omega^2 x^2.$$

图像的准确描述如下：

- 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 处有向下发散的竖直奇点：从每颗恒星的任一侧接近时，势均趋于 $-\infty$ 。
- 当 x 为很大的正值或负值时，

$$\varphi(x, 0) \sim -\frac{1}{2}\Omega^2 x^2,$$

因此两个外端都下降至 $-\infty$ 。

- 被两颗恒星分隔出的三个区间中，每个区间恰有一个极大值。

为证明最后一点，在质点以外的位置，

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2GM_1}{|x-x_1|^3} - \frac{2GM_2}{|x-x_2|^3} - \Omega^2 < 0.$$

因此，每个分支均严格凹。其导数在从一端到另一端的过程中由正变负，因而有一个极大值。

将左侧、内部和右侧的极大值点分别记为 L_3, L_1, L_2 。由于 $M_1 > M_2$ ，较重的恒星更靠近原点，并且

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{GM_1}{|x_1|^2} - \frac{GM_2}{x_2^2} > 0.$$

因此，内部极大值点位于原点右侧：

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2}.$$

左侧外部极大值最高，右侧外部极大值次之，内部极大值最低：

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3).$$

采用 A-1 中选取的加性常数，整条曲线均为负值，与横轴没有交点。其纵轴截距为

$$\varphi(0,0) = -\frac{GM}{a} \left(\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_1} \right).$$

A-3

气体首先通过内部平衡点 L_1 流向 M_1 ，该点处有效力为零。沿两星连线，该点是 $\varphi(x,0)$ 的极大值点；在二维有效势中，它是一个鞍点。

此处

$$M_1 = \frac{3}{4}M, \quad M_2 = \frac{1}{4}M,$$

因此

$$x_1 = -\frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3a}{4}.$$

记 $z = x_0/a$ ，则两星之间的条件 $\partial\varphi/\partial x = 0$ 变为

$$\frac{3/4}{(z+1/4)^2} - \frac{1/4}{(3/4-z)^2} - z = 0.$$

位于 $-1/4 < z < 3/4$ 内的根为

$$z = 0.360743\dots$$

因此，保留两位有效数字，

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

A-4

将质量转移视为保守过程： M_2 损失的全部质量都到达 M_1 ，且不存在外力矩。在质点模型中，忽略自转以及暂时储存在物质流中的角动量。因此

$$\dot{M}_1 = \beta, \quad \dot{M}_2 = -\beta, \quad \dot{M} = 0,$$

且轨道角动量守恒。

对于圆轨道双星，

$$L = \frac{M_1 M_2}{M} a^2 \Omega = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}.$$

取其对数导数,

$$0 = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

因此

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

由开普勒关系可得

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

由于 M 为常量,

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3\beta \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

于是

$$\dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

当物质从较轻的恒星流向较重的恒星时, 间距和周期均增大。

A-5

采用薄盘模型, 假设盘中物质沿近似圆形的开普勒轨道运动, 径向动能可忽略, 且物质穿过一个环带时损失的轨道机械能在当地辐射出去。

圆轨道条件为

$$v^2 = \frac{GM_1}{r}.$$

因此, 气体的单位质量机械能为

$$e(r) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_1}{r} = -\frac{GM_1}{2r}.$$

考虑位于 r 与 $r + dr$ 之间的环带, 其中 $dr > 0$ 。物质从其外缘进入, 从其内缘离开。当质量流率为 β 时, 释放的功率为

$$dL = \beta [e(r + dr) - e(r)] = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

盘的两面均辐射。两面的环带总面积为

$$dA = 2(2\pi r dr) = 4\pi r dr.$$

忽略热量储存, 并令局部能量释放等于黑体辐射, 得

$$4\pi r dr \sigma T^4 = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

故

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

特别地, $T \propto r^{-3/4}$ 。

A-6

总质量和周期为

$$M = (2.27 + 0.33)(1.98 \times 10^{30}) = 5.148 \times 10^{30} \text{ kg},$$
$$P = 4.14(3600) = 14904 \text{ s}.$$

由开普勒关系可得

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1.24548 \times 10^9 \text{ m}.$$

因此

$$r = \frac{a}{10} = 1.24548 \times 10^8 \text{ m}.$$

利用 $1 \text{ yr} \simeq 3.156 \times 10^7 \text{ s}$,

$$\beta = \frac{9 \times 10^{-10}(1.98 \times 10^{30})}{3.156 \times 10^7} \simeq 5.65 \times 10^{13} \text{ kg s}^{-1}.$$

代入 $M_1 = 2.27(1.98 \times 10^{30}) \text{ kg}$,

$$T = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(2.27 \times 1.98 \times 10^{30})(5.65 \times 10^{13})}{8\pi(5.67 \times 10^{-8})(1.24548 \times 10^8)^3} \right]^{1/4}.$$

由此得

$$T \simeq 8.86 \times 10^3 \text{ K},$$

或

$$\boxed{T \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A-7

爆发是突然发生的, 因此爆发后瞬间两星间距仍为 a 。当高速抛射的物质离开后, 剩余两颗恒星的相对轨道能量为

$$E' = \frac{1}{2}\mu'v'^2 - \frac{GM'_1M_2}{a}, \quad \mu' = \frac{M'_1M_2}{M'_1 + M_2}.$$

束缚的二体轨道要求 $E' < 0$ 。因此

$$v'^2 < \frac{2G(M'_1 + M_2)}{a},$$

极限速度为

$$\boxed{v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}}}.$$

取等号时, 轨道为抛物线, 并非束缚轨道。

如果抛射在爆发恒星的静止参考系中是各向同性的, 则不存在反冲。剩余两颗恒星的瞬时速度均不变。因此, 它们的相对速率仍为原来的圆轨道速率:

$$v'^2 = \Omega^2 a^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}.$$

代入束缚条件可得

$$M_1 + M_2 < 2(M'_1 + M_2),$$

即

$$\boxed{M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}}.$$

等价地，抛出的质量必须小于双星原有总质量的一半：

$$M_1 - M'_1 < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

所述最小值是一个临界阈值；取等号时恰好发生临界逃逸。

B-1

由球对称性，只有半径 r 内所包含的质量对该处的引力场有贡献。在中心附近， $\rho \simeq \rho_c$ ，因此

$$m(r) \simeq \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3.$$

取向外的加速度为正，

$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \simeq -\frac{4\pi}{3} G \rho_c r.$$

因此

$$\boxed{g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3} G \rho_c r}.$$

B-2

流体静力学平衡要求

$$\frac{dp}{dr} = \rho g.$$

内部所包含的质量满足

$$g = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

因此，

$$\frac{d}{dr}(r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho.$$

利用 $g = (1/\rho) dp/dr$,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

由 $p = K \rho^\gamma$,

$$\frac{dp}{dr} = K \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

因此，所求的密度方程为

$$\frac{d}{dr} \left(K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

所以，一组可行的选择为

$$h_1 = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2 = 4\pi G r^2.$$

将两个函数同乘一个非零常数，可得到等价的方程。

B-3

相关量纲为

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}, \quad [p_c] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\rho_c] = M L^{-3}.$$

要求 $G^l p_c^m \rho_c^n$ 具有量纲 L ，可得

$$-l + m + n = 0, \quad 3l - m - 3n = 1, \quad -2l - 2m = 0.$$

解得

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1.$$

故

$$r_0 = \frac{\sqrt{p_c}}{\sqrt{G} \rho_c} = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}.$$

由于 $p_c = K \rho_c^\gamma$ ，还可方便地写成

$$r_0^2 = \frac{K \rho_c^{\gamma-2}}{G}.$$

B-4

将

$$r = r_0 x, \quad \rho = \rho_c u, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho_c}{r_0} \frac{du}{dx}$$

代入 B-2 中的方程：

$$K\gamma \rho_c^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi G r_0^2 \rho_c x^2 u = 0.$$

由于 $G r_0^2 \rho_c = K \rho_c^{\gamma-1}$ ，除以 $K \rho_c^{\gamma-1}$ 得

$$\frac{d}{dx} \left(\gamma x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi x^2 u = 0.$$

于是

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

中心处的条件为

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

后一个条件由正则性和球对称性得到。

B-5

对于 $\gamma = 2$, 方程化为

$$\frac{d}{dx}(x^2 u') + 2\pi x^2 u = 0.$$

令 $u = f/x$ 。则

$$x^2 u' = x f' - f, \quad \frac{d}{dx}(x^2 u') = x f''.$$

对于 $x > 0$,

$$f'' + 2\pi f = 0.$$

记 $k = \sqrt{2\pi}$, 通解为

$$f = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

中心处 $u = f/x$ 有限, 要求 $B = 0$ 。归一化条件 $u(0) = 1$ 随后给出 $Ak = 1$ 。因此

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}},$$

且

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi} x}.$$

具有物理意义的密度分布在其第一个零点 $x = \sqrt{\pi/2}$ 处终止。

B-6

本题回到一般的 γ 。在中心附近, 由正则性可作展开

$$u(x) = 1 + cx^2 + O(x^4), \quad u'(x) = 2cx + O(x^3).$$

代入无量纲平衡方程, 取 x^2 阶项, 得

$$6\gamma c + 4\pi = 0.$$

故

$$u'(x) = -\frac{4\pi}{3\gamma}x + O(x^3).$$

若 s 为所绘 u' 随 x 变化曲线在 origin 处的斜率, 则

$$s = u''(0) = -\frac{4\pi}{3\gamma}, \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3s}.$$

图 2 中曲线在 origin 处的切线斜率约为

$$s \simeq -2.51.$$

因此

$$\gamma \simeq \frac{4\pi}{3(2.51)} \simeq 1.67.$$

这与 $\gamma = 5/3$ 一致。

B-7

跟踪一个特定的物质壳层。当它从 r 移动到

$$\tilde{r} = r(1 + \varepsilon).$$

时，其质量守恒。由于中心附近相邻壳层具有相同的尺度因子，

$$d\tilde{r} = (1 + \varepsilon) dr.$$

薄壳层的质量守恒给出

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r},$$

因此

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon)^3} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

于是

$$\boxed{\tilde{\rho} \simeq \rho(1 - 3\varepsilon)}.$$

运动壳层内部所包含的质量也守恒。因此，

$$\tilde{g} = -\frac{Gm(r)}{\tilde{r}^2} = \frac{g}{(1 + \varepsilon)^2},$$

从而得到

$$\boxed{\tilde{g} \simeq g(1 - 2\varepsilon)}.$$

这里 g 为负，与规定的向外为正的约定一致。

B-8

向外的压强加速度为

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

加入引力后，牛顿运动方程为

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

对受扰动物质使用同一状态方程，

$$\tilde{p} = K \tilde{\rho}^\gamma,$$

得到

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

故

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}}.$$

B-9

在固定时刻， ε 与中心附近壳层的标记 r 无关。因此

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, t) = (1 + \varepsilon)^{-3} \rho\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \varepsilon}\right),$$

且

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = (1 + \varepsilon)^{-4} \frac{d\rho}{dr}.$$

因此，B-8 中的压强项按如下关系缩放：

$$K\gamma\tilde{\rho}^{\gamma-2}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = K\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}(1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}.$$

在未受扰动的平衡态中，

$$K\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr} = g.$$

结合 $\tilde{g} = g(1 + \varepsilon)^{-2}$ ，可得

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = g[(1 + \varepsilon)^{-2} - (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}].$$

保留到一阶，

$$\begin{aligned}(1 + \varepsilon)^{-2} &= 1 - 2\varepsilon, \\ (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma} &= 1 + (2 - 3\gamma)\varepsilon.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = g(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

由于 r 是原壳层的标记，为常量，

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = r\ddot{\varepsilon}.$$

利用中心附近的结果 $g/r = -4\pi G\rho_c/3$ ，

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

要使加速度具有回复作用， $-\varepsilon$ 的系数必须为正。因此

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

所以临界值为

$$\gamma_{\text{crit}} = \frac{4}{3}.$$

取等号时，在这一阶近似下没有回复力；当 $\gamma < 4/3$ 时，存在随时间增长的扰动。当 $\gamma > 4/3$ 时，运动为简谐运动，其角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)} = \sqrt{4\pi G\rho_c\left(\gamma - \frac{4}{3}\right)}.$$

从图像得到的数值 $\gamma \simeq 1.67$ 位于稳定范围内。

解答已与官方解答核对。