

IPhO 2024

Teorik sorular ve çözümler · İsfahan, İran · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2024/

Soru 1: Sera Etkisi

2021 yılında Syukuro Manabe ve Klaus Hasselmann, Dünya'nın iklimini modelleme ve insanların endüstriyel faaliyetlerinden kaynaklanan küresel ısınmayı doğru biçimde öngörme konusundaki çalışmaları nedeniyle Nobel Fizik Ödülü'nün yarısına layık görüldüler. Bu soruda, sera etkisine bağlı küresel ısınmanın basit bir modelini inceleyeceğiz. Sera gazları, Dünya atmosferinin Dünya'dan yayılan kızılötesi ışıını geçirme veya soğurma ile ilgili optik özelliklerini değiştirerek gezegenin ortalama sıcaklığının yükselmesine neden olur.

Farklı sıcaklıklardaki tüm cisimler ısı ışıını yayar. $u(\lambda, T)d\lambda$ niceliği, T sıcaklığındaki bir cismin λ ile $\lambda + d\lambda$ dalga boyları arasında birim alan başına yaydığı ısı ışıını gücünü gösterir. Planck'ın kara cisim ışıını kuramına göre

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

burada $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ve $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ değerlerindedir. $u(\lambda, T)$ fonksiyonunun maksimumuna karşılık gelen dalga boyu, $\lambda_{\max} T = b$ bağıntısından (Wien kayma yasası) bulunur. Nitekim denklem (1) kullanılarak $b = \frac{hc}{x_m k_B}$ olduğu gösterilebilir; burada boyutsuz x_m niceliği, $f(x) = 0$ biçimindeki bir denklemin aşikâr olmayan köküdür; aşağıdaki görevlerden birinde $f(x)$ fonksiyonunu bulmanız istenmektedir. Bir kara cismin tüm dalga boylarında birim alan başına yaydığı toplam ışıını gücü, Stefan–Boltzmann yasasıyla $U(T) = \sigma T^4$ olarak verilir; burada $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ değerindedir. Ayrıca Kirchhoff'un ışıını yasasına göre, ısı dengede belirli bir dalga boyunda üzerine gelen ışıının belli bir oranını soğuran bir cisim, aynı dalga boyunda kara cisim ışıınının aynı oranı kadar ışıını yayar.

Bu soru boyunca Güneş'in, ortalama yüzey sıcaklığı olan $T_S = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$ sıcaklığında bir kara cisim olduğunu varsayın. Güneş'in yarıçapı $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, Dünya ile Güneş arasındaki ortalama uzaklık ise $d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ değerindedir. Dünya üzerinde ışıını doğrultusuna dik birim alana gelen Güneş ışıınının spektral gücünü $\tilde{u}_S(\lambda)$ ile gösteriyoruz. Bu niceliğin tüm dalga boyları üzerinden integrali, yani $S_0 = \int \tilde{u}_S(\lambda) d\lambda$, Güneş sabiti olarak adlandırılır.

Bu soruda Dünya'nın ısı dengede olduğunu ve yüzeyinin tüm noktalarında aynı sıcaklığa sahip olduğunu varsayın. Sorunun tüm bölümlerinde, istenen niceliği önce soruda verilen veriler cinsinden parametrik biçimde ifade edin, ardından sayısal değerini üç anlamlı basamakla bulun. Gerekli birimler cevap kâğıdında belirtilmiştir.

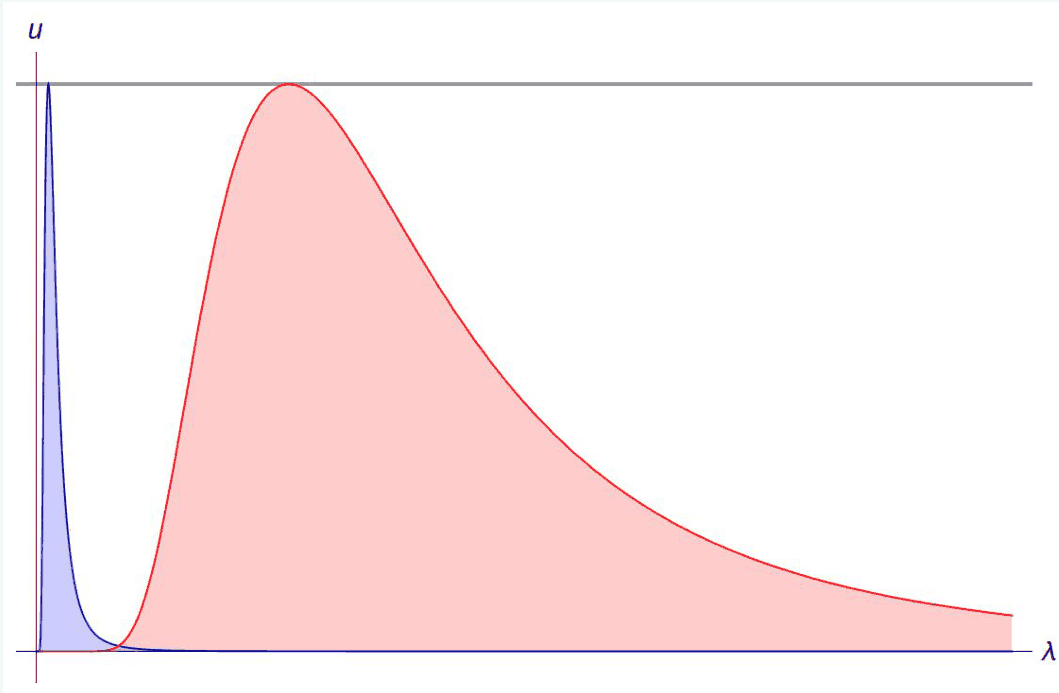
A. Kara Cisim Olarak Dünya

Bu bölümde Dünya'nın yüzeyini bir kara cisim olarak ele alın ve Dünya'nın atmosferini ihmal edin.

Bölüm	Görev	Puan
A-1	Güneş sabiti S_0 'ı bulun.	0.6 puan
A-2	Dünya'nın sıcaklığı T_E 'yi bulun.	0.6 puan
A-3	$f(x)$ fonksiyonunu bulun.	0.4 puan
A-4	x_m 'nin sayısal değerini hesaplayın ve bu x_m değerinden b 'nin değerini bulun.	0.4 puan
A-5	Güneş ve Dünya için $\lambda_{\max}$ 'ı bulun.	0.2 puan

Şekil 1'de $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ ve $u(\lambda, T_E)$ fonksiyonları λ 'ya bağlı olarak çizilmiştir; burada γ , iki tepe değerinin eşit olmasını sağlayacak şekilde $\tilde{u}_S(\lambda)$ 'yı yeniden ölçeklendiren boyutsuz bir katsayıdır.

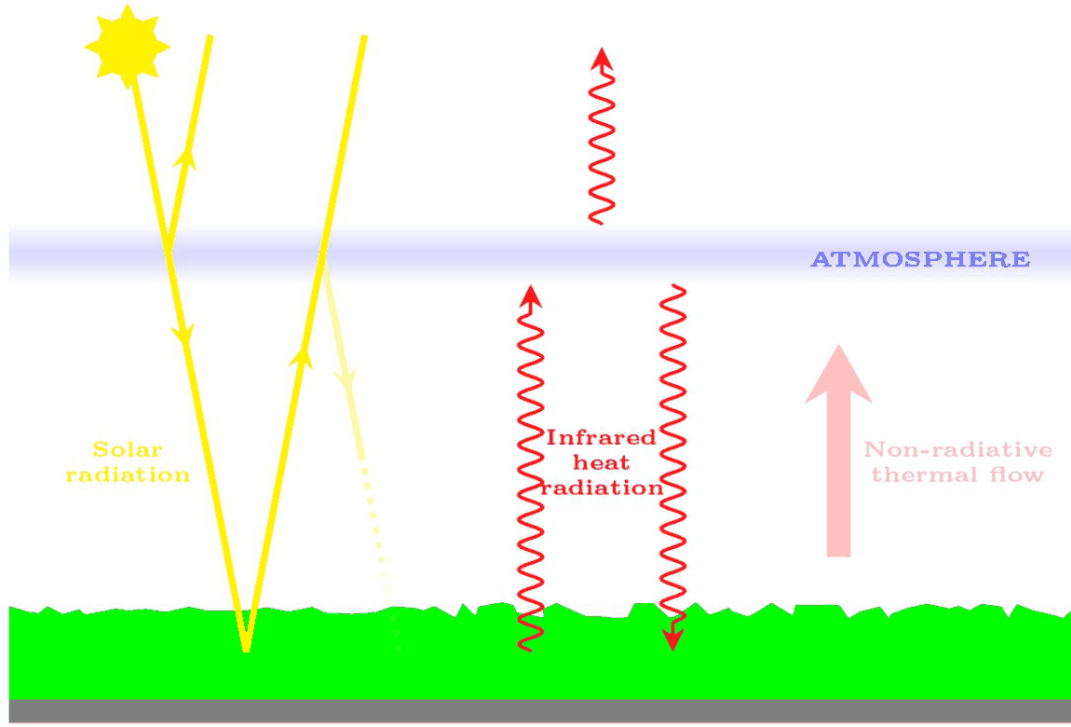
Bölüm	Görev	Puan
A-6	γ 'yı belirleyin.	0.8 puan



Şekil 1 - $u(\lambda, T_E)$ (kırmızı) ve $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ (mavi) fonksiyonlarının λ 'ya bağlı grafiği

B. Sera Etkisi

Bu bölümde, Dünya atmosferinin Dünya yüzeyinin biraz üzerinde ince bir tabaka olarak modellendiği basit bir model sunuyoruz; böylece atmosfer tabakasının alanı ile Dünya yüzeyinin alanı arasındaki fark ihmal edilebilir (bkz. şekil 2). Bundan sonra, Dünya ve Güneş'ten yayılan ısı ışınımının büyük kısmının, her birinin kendi $\lambda_{\max}$ değerine yakın dalga boylarında yayıldığını varsayın. Ayrıca "atmosfer tabakasının" yukarıdan veya aşağıdan gelen **görünür-morötesi** ışınımın $r_A = 0.255$ oranındaki kısmını yansıttığını ve geri kalanını tamamen geçirdiğini varsayın. Atmosferin **kızılötesi** ışınımın hiçbir kısmını yansıtmadığını, ancak **kızılötesi** ışınımın ε oranındaki kısmını soğurduğunu ve geri kalanını geçirdiğini varsayın. Sera etkisi olarak bilinen bu davranış, Dünya'nın ortalama sıcaklığını değiştirir. Dünya'nın yüzeyi ise **görünür-morötesi** ışınımın r_E oranındaki kısmını yansıtır ve bu ışınımın geri kalanını ve **kızılötesi** ışınımın tamamını soğurur.



Şekil 2 - Dünya ile atmosfer arasındaki ısı akışları

Bölüm	Görev	Puan
B-1	$\varepsilon = 1$ ve $r_E = 0$ olduğunu varsayarak Dünya'nın sıcaklığı T_E 'yi ve atmosferin sıcaklığı T_A 'yı hesaplayın.	1.0 puan

Şimdi $r_E \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda "Dünya + atmosfer" birleşik sistemi, Güneş ışınımının "albedo" olarak adlandırılan ve α ile gösterilen farklı bir oranını yansıtır.

Bölüm	Görev	Puan
B-2	Albedo α 'yı r_E ve r_A cinsinden belirleyin. Ardından $r_E = 0.102$ (ve $r_A = 0.255$) olduğunu varsayarak sayısal değerini hesaplayın.	1.6 puan
B-3	a) Dünya'nın sıcaklığını σ , α , S_0 ve ε cinsinden ifade edin. b) Verilen verileri ve hesaplanan albedoyu kullanarak, Dünya'nın günümüzdeki ortalama sıcaklığı olan $T_E = 288$ K değerini veren ε 'nin sayısal değerini bulun.	1.0 puan
B-4	$\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ 'nu bulun ve ε yüzde bir arttığında Dünya'nın sıcaklığının ne kadar artacağını belirleyin.	0.8 puan

$T_A = 245$ K ve $T_E = 288$ K olduğunu varsayın. Bu değerler gerçek verilerden elde edilmiştir ve önceki görevlerde bulduğunuz sonuçlardan farklı olabilir. Şimdi Dünya'dan atmosfere doğru $J_{NR} = k(T_E - T_A)$ şeklinde ışınlım dışı (örneğin taşınım ile gerçekleşen) bir ısı akışının sürdüğünü varsayın; burada k bir sabittir. J_{NR} niceliği, birim alan başına aktarılan güçtür.

Bölüm	Görev	Puan
B-5	ε ve k 'yi T_E , T_A , σ , α ve S_0 cinsinden hesaplayın.	1.6 puan

Bölüm	Görev	Puan
B-6	a) Bölüm B-5'te elde edilen denklemlerin ε'na göre türevini alarak, $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ ve $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$'nin sağladığı iki cebirsel denklemi bulun. b) Bu denklemleri kullanarak, ε'nın değerindeki yüzde birlik artış sonucunda Dünya'nın sıcaklığında meydana gelen değişimin sayısal değerini bulun.	1.0 puan

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Küresel ortalaması alınmış soğurulan Güneş ışınımı akısını şöyle tanımlayalım:

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Yüzde birlik artış, $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$ olarak alınmıştır. Sayısal sonuçlarda yuvarlanmamış ara değerler kullanılmıştır.

- A-1

$$S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 = 1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

- A-2

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 278 \text{ K}.$$

- A-3

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

- A-4

$$x_m = 4.97, \quad b = \frac{hc}{x_m k_B} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

- A-5

$$\lambda_{\max,S} = \frac{b}{T_S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max,E} = \frac{b}{T_E} = 10.4 \text{ } \mu\text{m}.$$

- A-6

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 1.20 \times 10^{-2}.$$

• B-1

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = 307 \text{ K},$$

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = 258 \text{ K}.$$

• B-2

$$\alpha = r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E} = 0.313.$$

• B-3(a)

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

• B-3(b)

$$\varepsilon = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4} = 0.809.$$

• B-4

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)} = 60.4 \text{ K},$$

$$\Delta T_E \simeq 0.489 \text{ K}.$$

Sıcaklık değişimi birinci mertebeden elde edilen sonuçtur; tam sonlu değişim 0.491 K'dir.

• B-5

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.849,$$

$$k = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)} = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

• B-6(a) $X = dT_E/d\varepsilon$ ve $Y = dT_A/d\varepsilon$ olmak üzere,

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4,$$

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

• B-6(b)

$$X = 61.7 \text{ K}, \quad Y = 47.8 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

Sıcaklık değişimi birinci mertebeden elde edilen sonuçtur; tam sonlu değişim 0.527 K'dir.

Çözüm

A-1

Güneş'in yaydığı toplam güç Stefan–Boltzmann yasasından bulunur:

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

Işınım gücünün korunumu gereği, bu ışınım gücü d yarıçaplı bir kürenin yüzeyine dağılır. Dolayısıyla,

$$S_0 = \frac{L_S}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$S_0 = 1353.076 \dots \text{ W m}^{-2} = \boxed{1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}}.$$

Aynı geometrik seyrelme her dalga boyunda geçerlidir:

$$\tilde{u}_S(\lambda) = \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u(\lambda, T_S).$$

A-2

Dünya'nın yarıçapını R_E ile gösterelim. Dünya, Güneş ışığını izdüşüm alanı πR_E^2 üzerinden alırken, $4\pi R_E^2$ alanlı yüzeyinin tamamı ısı ışınım yayar.

Kara cisim olarak ele alınan Dünya dengedeysen,

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4.$$

Böylece

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 277.920 \dots \text{ K}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{T_E = 278 \text{ K}}.$$

A-3

Sabit T için şu değişkeni tanımlayalım:

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Planck yasasının logaritmik türevi alındığında

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right].$$

Sonlu bir dalga boyundaki maksimumda bu türev sıfır olur, dolayısıyla

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

Buna göre uygun bir fonksiyon

$$\boxed{f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x}.$$

$x = 0$ cebirsel kökü, sonlu bir dalga boyundaki maksimuma değil, $\lambda \rightarrow \infty$ durumuna karşılık gelir. Aranılan kök pozitif ve sıfırdan farklıdır.

A-4

Sıfırdan farklı kök, örneğin Newton yöntemiyle elde edilebilir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5(1 - e^{-x_n}) - x_n}{5e^{-x_n} - 1}.$$

$x_0 = 5$ ile başlanırsa

$$x_m = 4.965114 \dots$$

$x_m = hc/(\lambda_{\max} k_B T)$ olduğundan,

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_m k_B} = b.$$

Verilen sabitler kullanıldığında,

$$b = \frac{1.24 \times 10^3}{(4.965114 \dots)(8.62 \times 10^{-5})} \text{ nm K} = 2.897244 \dots \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{x_m = 4.97, \quad b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}}.$$

Planck fonksiyonu dalga boyu aralığının her iki ucunda sıfıra yaklaşır ve bu nokta onun sonlu, pozitif dalga boylarındaki tek durağan noktasıdır; dolayısıyla maksimumdur.

A-5

Wien kayma yasası her bir cisme uygulandığında,

$$\lambda_{\max,S} = \frac{b}{T_S} = 502.122 \dots \text{ nm},$$

$$\lambda_{\max,E} = \frac{b}{T_E} = 10.4247 \dots \mu\text{m}.$$

Böylece

$$\boxed{\lambda_{\max,S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max,E} = 10.4 \mu\text{m}}.$$

Güneş'in tepe noktası görünür bölgede, Dünya'nın tepe noktası ise kızılötesi bölgededir.

A-6

Maksimumda $\lambda_{\max} = b/T$ olur ve üstel fonksiyonun argümanı x_m 'ye eşittir. Dolayısıyla,

$$u_{\max}(T) = \frac{2\pi hc^2}{b^5(e^{x_m} - 1)} T^5.$$

Böylece birim dalga boyu başına spektral gücün tepe değeri T^5 ile orantılıdır.

Çizilen iki tepenin yüksekliklerinin eşit olması için

$$\gamma \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u_{\max}(T_S) = u_{\max}(T_E),$$

olmalıdır; buradan

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5.$$

A-2'den,

$$\left(\frac{T_E}{T_S} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Dolayısıyla,

$$\gamma = \frac{T_E}{4T_S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = \boxed{1.20 \times 10^{-2}}.$$

B-1

B bölümünde belirtilen spektral yaklaşım, Güneş ışınımını görünür-morötesi, Dünya ve atmosferden yayılan ısı ışınımı ise kızılötesi olarak ele alır. Atmosfer, Güneş ışınımını soğurmaz. Kirchhoff yasasına göre atmosferin kızılötesi yayma katsayısı ε 'na eşittir; dolayısıyla her bir yüzü $\varepsilon \sigma T_A^4$ akısı yayar. Dünya'nın kızılötesi yayma katsayısı birdir.

Burada $\varepsilon = 1$ ve $r_E = 0$ 'dır. Yüzeyde soğurulan Güneş ışınımı akısının küresel ortalaması

$$Q_1 = \frac{(1 - r_A)S_0}{4}.$$

Atmosferin dengede olması için

$$\sigma T_E^4 = 2\sigma T_A^4,$$

olmalıdır; çünkü atmosfer, Dünya'nın yukarı doğru yaydığı ışınımı soğurur ve her iki yönde ışınım yayar.

Yüzeyin enerji dengesi

$$Q_1 + \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4.$$

Denklemler birleştirildiğinde,

$$\sigma T_A^4 = Q_1, \quad \sigma T_E^4 = 2Q_1.$$

Dolayısıyla,

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{258 \text{ K}},$$

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{307 \text{ K}}.$$

B-2

Gelen Güneş ışınımı gücünü bire normalize edelim. Atmosfer bunun r_A oranındaki kısmını doğrudan yansıtır. Yüzeyden bir kez yansıdıktan sonra uzaya kaçan kısım

$$(1 - r_A)r_E(1 - r_A).$$

Yüzey ile atmosfer arasındaki her ek gidiş dönüşte, kalan yansımış güç $r_A r_E$ çarpanı ile çarpılır.

Tüm katkılar toplandığında,

$$\begin{aligned}\alpha &= r_A + r_E(1 - r_A)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_A r_E)^n \\ &= r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E}.\end{aligned}$$

Eşdeğer olarak,

$$1 - \alpha = \frac{(1 - r_A)(1 - r_E)}{1 - r_A r_E}.$$

Verilen yansıtma katsayılarıyla,

$$\alpha = 0.313124\dots, \quad \boxed{\alpha = 0.313}.$$

Yansıtılmayan Güneş ışınımı gücünün tamamı yüzey tarafından soğurulur.

B-3

(a) Şu tanımı yapalım:

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Işınım dışı ısı aktarımı olmadığında yüzeyin ve atmosferin enerji dengeleri

$$\begin{aligned}Q + \varepsilon \sigma T_A^4 &= \sigma T_E^4, \\ \varepsilon \sigma T_E^4 &= 2\varepsilon \sigma T_A^4.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ için ikinci denklemden

$$T_A^4 = \frac{T_E^4}{2}.$$

Birinci denklemde yerine konulduğunda,

$$Q = \sigma T_E^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Böylece

$$\boxed{T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}}.$$

Bu ifade, $\varepsilon = 0$ durumuna da sürekli biçimde uzanır.

(b) Soğurma katsayısı için yeniden düzenlendiğinde,

$$\varepsilon = 2 \left(1 - \frac{Q}{\sigma T_E^4}\right) = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4}.$$

Yuvarlanmamış akılar

$$Q = 232.348778\dots \text{ W m}^{-2}, \quad \sigma(288 \text{ K})^4 = 390.079395\dots \text{ W m}^{-2}.$$

Böylece

$$\varepsilon = 0.808710\dots, \quad \boxed{\varepsilon = 0.809}.$$

B-4

S_0 ve α 'yı sabit tutalım. B-3'teki sonucun logaritmik türevi alındığında

$$\frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{8(1 - \varepsilon/2)} = \frac{1}{4(2 - \varepsilon)}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)}}.$$

B-3'teki denge durumunda,

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = 60.4387 \dots \text{ K} = \boxed{60.4 \text{ K}}.$$

Yüzde birlik bağıl artış için,

$$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon.$$

Birinci mertebede,

$$\Delta T_E \simeq \frac{dT_E}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{0.01\varepsilon T_E}{4(2 - \varepsilon)} = \boxed{0.489 \text{ K}}.$$

Karşılaştırma için, sonlu değişim doğrudan hesaplandığında

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = T_E \left[\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 - 1.01\varepsilon} \right)^{1/4} - 1 \right] = \boxed{0.491 \text{ K}}.$$

B-5

Yukarı yönlü ışınlım dışı akıyı hesaba katalım:

$$J_{\text{NR}} = k(T_E - T_A).$$

Yüzey bu enerjiyi kaybederken atmosfer kazanır. Denge denklemleri şu hâle gelir:

$$Q + \varepsilon \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A), \quad (2)$$

$$\varepsilon \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A) = 2\varepsilon \sigma T_A^4. \quad (3)$$

Kısalık için şöyle yazalım:

$$E = \sigma T_E^4, \quad A = \sigma T_A^4.$$

İki enerji dengesi toplandığında sistem içindeki ısı aktarımı elenir:

$$Q = (1 - \varepsilon)E + \varepsilon A.$$

Sağ taraf, uzaya kaçan ışınlımdır: atmosferden geçen yüzey ışınlımı ile atmosferin yukarı doğru yaydığı ışınlımın toplamı. Çözöldüğünde,

$$\boxed{\varepsilon = \frac{E - Q}{E - A} = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)}}.$$

Denklem (3)'ten

$$k(T_E - T_A) = \varepsilon(2A - E).$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{k = \frac{\varepsilon \sigma (2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A} = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)}}.$$

$T_E = 288 \text{ K}$ ve $T_A = 245 \text{ K}$ için,

$$E = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad A = 204.290135 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\varepsilon = 0.849, \quad k = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}}.$$

Elde edilen ısı akısı

$$J_{\text{NR}} = 15.7 \text{ W m}^{-2},$$

olup belirtilen yukarı yönde pozitifdir.

B-6

(a) ε değişirken S_0 , α ve k 'yı sabit tutalım ve her iki sıcaklığın da değişmesine izin verelim. Şu tanımları yapalım:

$$X = \frac{dT_E}{d\varepsilon}, \quad Y = \frac{dT_A}{d\varepsilon}.$$

Denklem (2)'nin türevi alındığında

$$\sigma T_A^4 + 4\varepsilon \sigma T_A^3 Y = 4\sigma T_E^3 X + k(X - Y).$$

Böylece

$$\boxed{(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4}.$$

Denklem (3)'ün türevi alındığında

$$\sigma T_E^4 + 4\varepsilon \sigma T_E^3 X + k(X - Y) = 2\sigma T_A^4 + 8\varepsilon \sigma T_A^3 Y.$$

Böylece

$$\boxed{-(4\varepsilon \sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4)}.$$

(b) Açık bir parametrik ifade vermek için

$$p = 4\sigma T_E^3, \quad q = 4\sigma T_A^3,$$

tanımlarını yapalım ve $E = \sigma T_E^4$, $A = \sigma T_A^4$ tanımlarını koruyalım. Sistemin determinanı

$$D = (p + k)(2\varepsilon q + k) - (\varepsilon q + k)(\varepsilon p + k) = \varepsilon(2 - \varepsilon)pq + k[(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q].$$

Y elendiğinde

$$\boxed{X = \frac{\varepsilon q E + k(E - A)}{D}}.$$

Benzer şekilde,

$$Y = \frac{(p + k)(E - 2A) + (\varepsilon p + k)A}{D}.$$

B-5'teki denge değerleri kullanıldığında,

$$X = 61.7352 \dots \text{ K}, \quad Y = 47.7734 \dots \text{ K}.$$

$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$ için,

$$\Delta T_E \simeq X \Delta\varepsilon = (61.7352 \dots)(0.01)(0.84897597 \dots) \text{ K}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}}.$$

Başlangıçtaki doğrusal olmayan denge denklemleri aynı k ile $\varepsilon_{\text{new}} = 1.01\varepsilon$ için çözüldüğünde sonlu değişim elde edilir:

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = 0.527 \text{ K}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

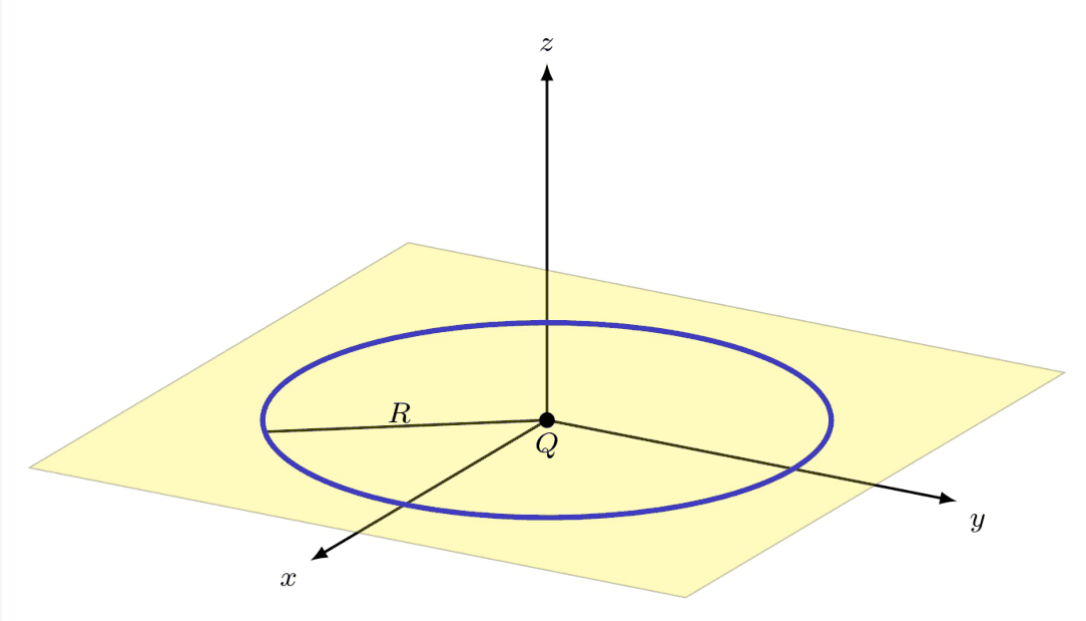
Soru 2: İyonların Tuzaklanması ve Atomların Soğutulması

Son birkaç on yılda atomların ve iyonların tuzaklanması ve soğutulması, fizikçiler için ilgi çekici bir konu olmuş ve bu alandaki çalışmalar birçok Nobel ödülüne layık görülmüştür. Bu sorunun ilk bölümünde, iyonları tuzaklamak için kullanılan ve "Paul tuzağı" olarak bilinen bir tekniği inceleyeceğiz. Wolfgang Paul ve Hans Dehmelt, bu çalışmalarını nedeniyle 1989 Nobel Fizik Ödülü'nün yarısını paylaşmıştır. Ardından, Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji ve William Daniel Phillips'e "atomları lazer ışığıyla soğutma ve tuzaklama yöntemlerini geliştirmelerinden dolayı" verilen 1997 Nobel Fizik Ödülü'nün basın açıklamasında anılan çalışmalardan biri olan Doppler soğutma tekniğini inceleyeceğiz.

A. Paul Tuzağı

Elektrostatik alanlarla yüklü bir parçacık için kararlı bir denge oluşturmanın mümkün olmadığı bilinmektedir. Bu nedenle, iyonlar için kararlı bir denge noktası oluşturmak daha gelişmiş teknikler gerektirir. Paul tuzağı bu tekniklerden biridir.

Yarıçapı R olan, düzgün dağılmış pozitif doğrusal yük yoğunluğu λ olan bir yük halkasını ele alalım. Kütlesi m olan pozitif bir Q noktasal yükü, halkanın merkezine yerleştirilmiştir.



Şekil 1 - Düzgün dağılmış doğrusal yük yoğunluğu λ ve yarıçapı R olan pozitif yüklü bir halka: koordinat sisteminin başlangıç noktası halkanın merkezindedir.

A-1	a) Kartezyen koordinatlarda (x, y, z) , yüklü halkanın merkezinin yakınında oluşturduğu elektrik alanı x/R , y/R ve z/R cinsinden birinci mertebeye kadar elde ediniz.	1.5 puan
-----	--	----------

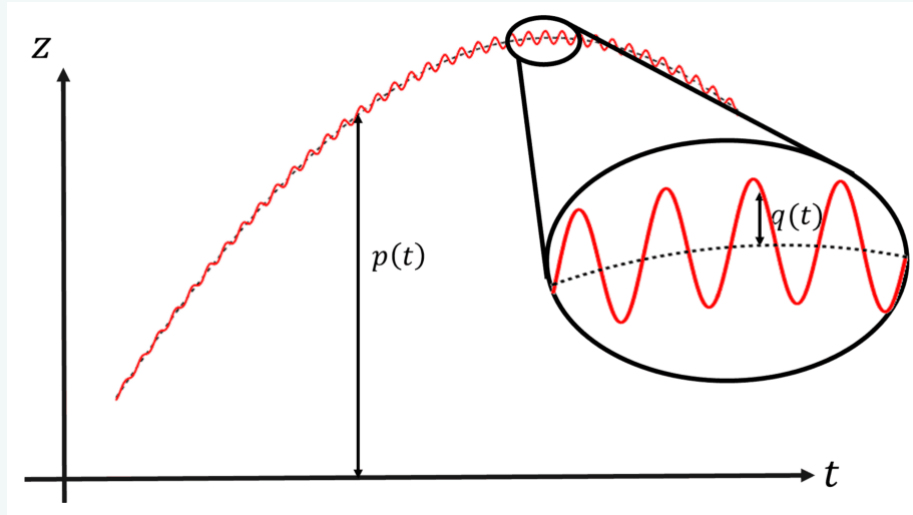
b) Kararlı dengenin bulunduğu doğrultularda, yüklü parçacığın halkanın merkezi çevresindeki küçük salınımlarının açısal frekansını bulunuz.

Q yükünü tüm doğrultularda tuzaklamak için, değişken alanlar uygulayarak dinamik bir denge oluşturmak istiyoruz. Yük yoğunluğunun $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$ olduğunu ve burada λ_0 , u ve Ω değerlerinin ayarlanabildiğini varsayınız. Işınım etkilerini ihmal edeceğiz. Bu durumda, halkanın merkezinden halka düzlemine dik doğrultudaki küçük yer değiştirmeler için hareket denklemi şu biçimde olacaktır:

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z \quad (1)$$

A-2 a ve k 'yi bilinen parametreler cinsinden yazınız. 0.4 puan

Şu basitleştirici varsayımları yaparak Denklem (1)'in yaklaşık bir çözümünü elde etmek istiyoruz: $a \ll 1$, $\Omega \gg k$ ve $a\Omega^2 \gg k^2$. Bu varsayımlarla, bu denklemin çözümünün iki kısıma ayrılacağı gösterilebilir: $z(t) = p(t) + q(t)$; burada $p(t)$ yavaş değişen bir bileşen, $q(t)$ ise ortalama değeri sıfır olan, küçük genlikli ve hızlı değişen bir bileşendir. Başka bir deyişle, $q(t)$ 'nin birkaç salınımı boyunca $p(t)$ sabit kabul edilebilir (bkz. Şekil 2).



Şekil 2 - Yüklü parçacığın hareket denklemi için tipik bir çözüm: $p(t)$ genel hareketi verirken $q(t)$ bu yörüngenin çevresindeki küçük salınımları temsil eder. Sağdaki elips, bu yörüngenin bir kısmının büyütülmüş görünümüdür.

A-3	a) Yukarıda belirtilen yaklaşımları kullanarak $q(t)$'nin hareket denklemini a, Ω ve p cinsinden bulunuz. b) Bu fonksiyonun sahip olması gereken özelliklere karşılık gelen uygun başlangıç koşullarını dikkate alarak bu denklemin çözümünü bulunuz.	1.8 puan
A-4	a) Hızlı değişen bileşenin ortalama etkisini kullanarak $p(t)$ için etkin bir hareket denklemi elde ediniz. b) Denge noktasının kararlılığını inceleyiniz ve kararlı denge koşulunu bulunuz.	1.5 puan

$\lambda_0 = 8 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ ve $R = 10 \text{ cm}$ olduğunu varsayınız. Bu düzeneği, hidrojen atomundan 100 kat daha ağır, tek iyonlaşmış bir atomu tuzaklamak için kullanmak istiyoruz.

A-5	$\hbar$ 'yı hesaplayınız. $a = 0.04$ olduğunu varsayarak bu iyonun hareketini kararlı hâle getirmek için gereken en küçük frekansı tahmin ediniz. Sorunun sonunda verilen verileri kullanınız.	0.4 puan
-----	--	----------

B. Doppler Soğutması

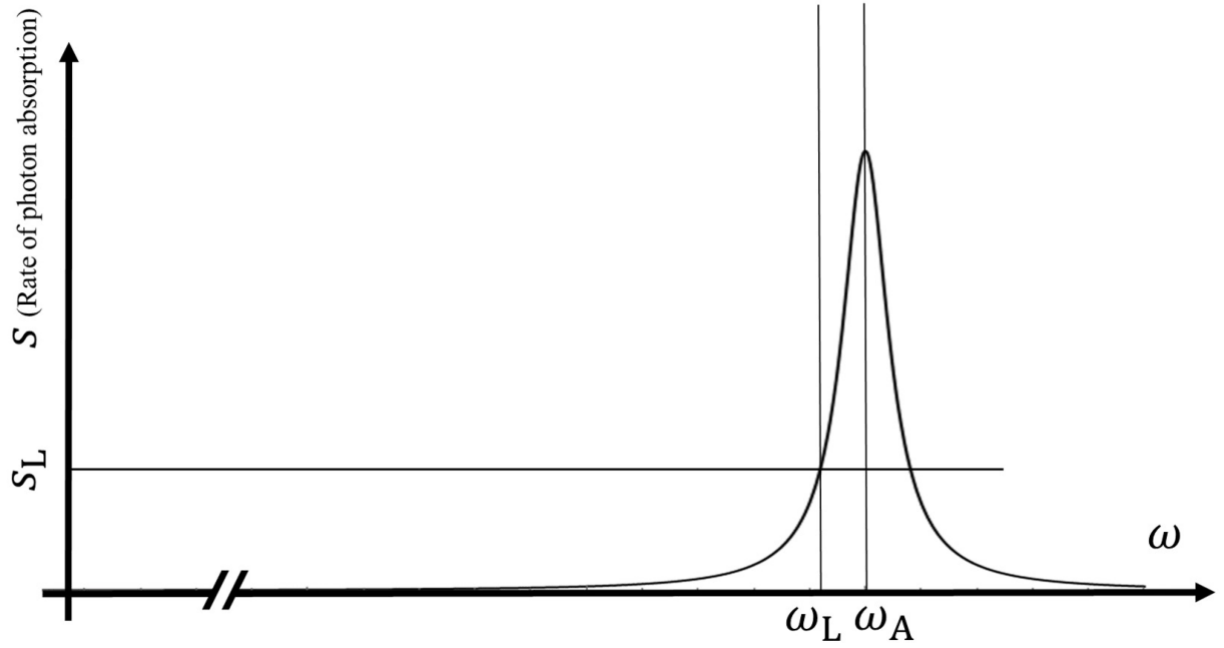
Tuzaklanmış bir atomu veya iyonu soğutmak gerekebilir. Kütlesi m olan tuzaklanmış bir atomun, aralarındaki enerji farkı $E_0 = \hbar\omega_A$ olan iki enerji düzeyine sahip olduğunu varsayınız. Alt düzeydeki elektronlar bir foton soğurarak üst düzeye geçebilir; ancak τ süresinin ardından alt düzeye döner ve frekansı ağırlıklı olarak $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$ aralığında olan bir foton yayarlar.

B-1	Heisenberg belirsizlik ilkesini kullanarak Γ 'yı bulunuz.	0.5 puan
-----	--	----------

Benzer bir akıl yürütmeye, tuzaklanmış atoma lazer ışığı gönderdiğimizde, lazerin açıl frekansı ω_L , $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$ aralığındaysa atom fotonu soğurabilir. Lazer ışığının ω_L frekansının ω_A 'dan biraz küçük olduğunu varsayınız. Belirli bir düzenek için, atomun referans sisteminde bir atomun foton soğurma hızı Şekil 3'te verilmiştir. Soğurulan foton daha sonra rastgele bir yönde yeniden yayılır. Basitlik için problemi bir boyutta ele alıyoruz; yani atomların yalnızca x doğrultusunda hareket edebildiğini ve lazer ışığının onlara hem soldan hem de sağdan geldiğini varsayıyoruz. Atomların hareketi nedeniyle, atomun referans sisteminde ışığın frekansı daha yüksek veya daha düşüktür. Atomların v hızı çok küçük olduğundan, yalnızca v/c mertebesindeki terimleri dikkate alıyor ve daha yüksek mertebeli tüm terimleri ihmal ediyoruz. Ayrıca $m \gg \hbar\omega_A/c^2$ olduğundan, atomun hızı fotonu soğurduktan sonra neredeyse değişmez. Bunun yanı sıra, Doppler etkisinden kaynaklanan frekans değişimi $\omega_A - \omega_L$ 'ye kıyasla o kadar küçüktür ki Şekil 3'teki grafikte s 'yi veren fonksiyon aşağıdaki doğrusal fonksiyonla yaklaşık olarak ifade edilebilir:

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L)$$

Burada s birim zamanda soğurulan foton sayısı, s_L , $\omega = \omega_L$ için s 'nin değeri ve α , eğriye ω_L 'de teğet olan doğrunun eğimidir. Yeniden yayılan fotonun frekansı, gelen fotonun frekansına hemen hemen eşittir; ancak foton pozitif veya negatif x yönünde eşit olasılıkla yayılır. Aslında burada ele alınan mertebeye kadar bu iki frekans aynıdır. Tüm süreci atomun referans sisteminde ele aldığımıza dikkat ediniz.



Şekil 3 - Belirli bir tuzak için frekansın fonksiyonu olarak foton soğurma hızı: atomun iki enerji düzeyi arasındaki enerji farkına karşılık gelen frekans ω_A ile, lazerin bundan biraz daha küçük olan frekansı ise ω_L ile gösterilmiştir.

B-2	a) Tuzaklanmış atomun laboratuvar referans sisteminde $v = v_x$ hızıyla hareket ettiğini varsayınız. Atomun referans sisteminde, iki yönden her birinden gelen fotonların atomlarla çarpışma hızını (s_+ ve s_- ile gösterilen) ve her yöndeki momentum soğurma hızını (π_+ ve π_- ile gösterilen) hesaplayınız. b) Laboratuvar referans sisteminde atoma etki eden etkin kuvveti v, $k_L = \omega_L/c$, $\hbar$ ve α 'nın fonksiyonu olarak belirleyiniz. $s_L \ll \alpha\omega_L$ olduğunu varsayınız.	1.7 puan
-----	---	----------

Bu teknikle ulaşılabilecek en düşük sıcaklığı bulmak istiyoruz. Belirli bir atomun hızının tam olarak sıfıra düşürüldüğünü ve tam o anda (iki yönden herhangi birinden gelen) bir fotonu soğurduğunu ve fotonu hemen hemen aynı frekansla, iki yönden herhangi birinde rastgele yeniden yaydığını varsayınız. Bu sürecin her τ zaman aralığında bir kez gerçekleştiğini varsayınız.

B-3	Böyle bir sürecin ardından ortaya çıkabilecek iki sonuç için atomun momentumunu dikkate alarak, atom tarafından soğurulan ortalama gücü hesaplayınız.	1.0 puan
B-4	B-2 görevinde hesaplanan kuvveti dikkate alarak dışarı aktarılan gücü hesaplayınız. Ardından, dengede v^2 'nin ortalama değerini hesaplayınız. Gazların kinetik teorisi hakkındaki bilgilerinizi kullanarak atomların sıcaklığını tahmin ediniz.	0.8 puan
B-5	Hidrojen atomundan 100 kat daha ağır bir atom için bu sıcaklığı tahmin ediniz. $\omega_L = 2 \times 10^{16}$ rad/s, $\tau = 5 \times 10^{-9}$ s ve $\alpha = 4$ olduğunu varsayınız.	0.4 puan

hidrojen atomunun kütlesi:	$m_H = 1.674 \times 10^{-27}$ kg
elektronun yükü:	$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
boşluğun elektriksel geçirgenliği:	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m
Boltzmann sabiti:	$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K
Planck sabiti:	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J · s

Cevaplar

- **A-1(a):**

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

- **A-1(b):** Halkanın düzlemindeki tüm doğrultularda denge karardır ve

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

z doğrultusunda denge kararsızdır.

- **A-2:**

$$a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}}.$$

- **A-3(a):** $\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t$.

- **A-3(b):** $q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t$. Hızlı bir çevrim boyunca p sabit kabul edildiğinde, uygun başlangıç koşulları $q(0) = -ap$, $\dot{q}(0) = 0$ olur.

- **A-4(a):**

$$\ddot{p} + \left(\frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2 \right) p = 0.$$

- **A-4(b):** Belirtilen yaklaşım çerçevesinde kararlı tuzaklama için gereken koşul

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

Yavaş eksenel hareketin açısal frekansı $\sqrt{a^2 \Omega^2 / 2 - k^2}$ olur.

- **A-5:**

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Tahmin edilen eşik değerleri

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

Bu eşğin üzerinde bir frekans seçiniz.

- **B-1:** Çizgi genişliğinin ölçgeği $\Gamma \sim 1/\tau$ olur; ömre bağlı yarı genişliğin geleneksel tanımı kullanıldığında,

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

- **B-2(a):** $+$, $+x$ yönünde ilerleyen fotonları gösterebilir ve $\pi_{\pm}$, işaretli x momentumu aktarım hızları olsun. O hâlde

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_{\pm} = \pm \hbar k_L \left[s_L \mp (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

- **B-2(b):**

$$F_x = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

- **B-3:**

$$P_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

- **B-4:** Enerjinin dışarı aktarılma hızının pozitif değeri

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Dengede,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}, \quad T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

- **B-5:**

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK}.$$

Çözüm

A-1(a)

Halka xy düzleminde bulunur ve toplam $2\pi R\lambda$ yükünü taşır. Coulomb yasasına göre simetri eksenindeki elektrik alanı

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

$|z| \ll R$ için,

$$E_z(0, 0, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

Yansıma ve dönme simetrileri, merkezin yakınındaki genel doğrusal alanın şu biçimde olmasını gerektirir:

$$E_x = Cx, \quad E_y = Cy, \quad E_z = Dz.$$

Eksen üzerinde elde edilen sonuç $D = \lambda/(2\epsilon_0 R^2)$ verir. Merkezin yakın çevresinde yük bulunmadığından Gauss yasası

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2C + D = 0.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla,

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

A-1(b)

Düzlemde Newton'un ikinci yasası

$$m\ddot{x} = -\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}x, \quad m\ddot{y} = -\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}y.$$

denklemlerini verir. Bunlar harmonik salınıcı denklemleridir. Dolayısıyla düzlemdeki her doğrultuda açısal frekans aynıdır:

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0 m R^2}}.$$

Eksen boyunca,

$$m\ddot{z} = \frac{Q\lambda}{2\varepsilon_0 R^2}z.$$

$Q, \lambda > 0$ için bu kuvvet merkezden uzaklaşma yönündedir; dolayısıyla eksenel denge kararsızdır.

A-2

Zamana bağlı yük yoğunluğu eksenel hareket denkleminde yerine konulduğunda

$$\ddot{z} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 m R^2}(\lambda_0 + u \cos \Omega t)z.$$

elde edilir. Denklem (1) ile karşılaştırıldığında

$$k^2 = \frac{Q\lambda_0}{2\varepsilon_0 m R^2}, \quad a = \frac{Qu}{2\varepsilon_0 m R^2 \Omega^2}.$$

bulunur. Burada a boyutsuzdur ve k 'nin birimi zamanın tersidir.

A-3(a)

Hareket denkleminde $z = p + q$ yazalım:

$$\ddot{p} + \ddot{q} = k^2 p + k^2 q + a\Omega^2 p \cos \Omega t + a\Omega^2 q \cos \Omega t.$$

Hızlı bir salınım boyunca p yaklaşık olarak sabittir. q 'nın genliği küçük olduğundan, $a \ll 1$ ve $a\Omega^2 \gg k^2$ olduğundan, hızlı değişen hareketi başat mertebede veren denklem

$$\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t.$$

A-3(b)

İntegrasyon sırasında p sabit tutulduğunda

$$q(t) = -ap \cos \Omega t + C_1 t + C_2.$$

elde edilir. Hızlı salınan bir bileşen, zamanla biriken bir sürüklenme içeremez; dolayısıyla $C_1 = 0$ olur. Ortalaması sıfır olmalıdır; bu da $C_2 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece

$$q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t.$$

p sabit tutulduğunda, buna karşılık gelen başlangıç koşulları

$$q(0) = -ap, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

q 'nin genliği, o andaki yavaş yer değiştirmenin a katıdır; bu, $a \ll 1$ ile tutarlıdır. p 'nin yavaş değişimini içeren düzeltmeler bu mertebede ihmal edilir.

A-4(a)

Tam denklemin, sürücü alanın bir periyodu boyunca ortalamasını alalım ve bu periyot boyunca p 'yi sabit kabul edelim.

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle \cos \Omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

olduğundan,

$$\ddot{p} = k^2 p + a\Omega^2 \langle q \cos \Omega t \rangle.$$

elde edilir. $q = -ap \cos \Omega t$ kullanıldığında,

$$\langle q \cos \Omega t \rangle = -\frac{ap}{2}.$$

Dolayısıyla,

$$\ddot{p} = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p.$$

k^2 , $a\Omega^2$ 'ye kıyasla küçük olsa da burada korunmalıdır: değişken alan, ortalama harekete yalnızca $a^2\Omega^2$ mertebesinde katkıda bulunur.

A-4(b)

Şu tanımları yapalım:

$$\omega_s^2 = \frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2.$$

$\omega_s^2 > 0$ ise yavaş yer değiştirme salınım yapar:

$$p(t) = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t,$$

ve yaklaşık toplam hareket,

$$z(t) \simeq p(t) (1 - a \cos \Omega t),$$

sınırlı kalır. Dolayısıyla eksenel kararlılık koşulu

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

$a > 0$ için bu koşul

$$\Omega > \frac{\sqrt{2} k}{a}.$$

biçimindedir. Bu eşliğin altında, yavaş hareket denkleminin üstel olarak büyüyen bir çözümü vardır. Eşitlik durumunda $\ddot{p} = 0$ olur; dolayısıyla sıfırdan farklı bir yavaş hareket hızı, sınırsız sürüklenmeye yol açar; eşitlik, hapsedilme sağlamaz.

Tamlık açısından enine hareket denklemi

$$\ddot{x} = - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a\Omega^2}{2} \cos \Omega t \right) x.$$

Aynı ortalama alma işlemi, bunun yavaş bileşeni X için

$$\ddot{X} + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{8} \right) X = 0,$$

sonucunu verir ve y için de aynı sonuç geçerlidir. Bu doğrultular, kullanılan yaklaşım çerçevesinde karardır; dolayısıyla aksel koşul, üç doğrultunun tümünde tuzaklama için gereken koşulu sağlar.

A-5

İyon için

$$Q = e, \quad m = 100m_H = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad R = 0.10 \text{ m}.$$

Böylece

$$k = \sqrt{\frac{(1.602 \times 10^{-19})(8 \times 10^{-9})}{2(8.854 \times 10^{-12})(1.674 \times 10^{-25})(0.10)^2}} = 2.079 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Verilen $a = 0.04$ için tahmin edilen eşik açısal frekansı

$$\Omega_{\text{th}} = \frac{\sqrt{2}k}{a} = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s}.$$

Buna karşılık gelen normal frekans

$$f_{\text{th}} = \frac{\Omega_{\text{th}}}{2\pi} = 1.170 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

Böylece,

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

Tahmin edilen bu eşiğin üzerinde bir frekans gereklidir. Eşikte,

$$\frac{\Omega_{\text{th}}}{k} \simeq 35, \quad \frac{a\Omega_{\text{th}}^2}{k^2} = 50,$$

olur; bu da varsayılan ölçek ayrımıyla tutarlıdır.

B-1

Uyarılmış durumun karakteristik ömrü τ 'dur. Enerji–zaman belirsizliği tahmini

$$\Delta E \tau \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

Karakteristik enerji yarı genişliği $\Delta E \simeq \hbar\Gamma$ olarak alındığında

$$\Gamma \tau \gtrsim \frac{1}{2}.$$

elde edilir. Sonlu ömür tarafından belirlenen bir genişlik için alışılmış tahmin bu nedenle

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

Belirsizlik ilkesinden çıkan sağlam sonuç, $\Gamma \sim 1/\tau$ ölçeğidir; sayısal çarpan, çizgi genişliğinin nasıl tanımlandığına bağlıdır.

B-2(a)

$+$, $+x$ yönünde ilerleyen fotonları; $-$ ise $-x$ yönünde ilerleyen fotonları gösterebilir. v hızıyla hareket eden bir atom için birinci mertebeden Doppler kaymaları

$$\omega'_+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \omega'_- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Atomla aynı yönde ilerleyen bir foton kırmızıya kayar; zıt yönde ilerleyen bir foton ise maviye kayar.

Verilen $s(\omega)$ fonksiyonu, atomun referans sistemindeki soğurma hızını zaten belirtmektedir. Bu frekanslardaki değerleri hesaplandığında

$$s_+ = s_L + \alpha(\omega'_+ - \omega_L) = s_L - \alpha\omega_L \frac{v}{c},$$
$$s_- = s_L + \alpha(\omega'_- - \omega_L) = s_L + \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

Böylece,

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

Soğurulan her fotonun işaretli momentumu $\pm \hbar\omega'_{\pm}/c$ olur. $\pi_{\pm}$, işaretli x momentumu aktarım hızları olarak tanımlandığında,

$$\pi_+ = \frac{\hbar\omega'_+}{c}s_+, \quad \pi_- = -\frac{\hbar\omega'_-}{c}s_-.$$

İfadeler açılıp yalnızca v/c cinsinden birinci mertebeli terimler korunduğunda,

$$\pi_+ = \hbar k_L \left[s_L - (s_L + \alpha\omega_L) \frac{v}{c} \right],$$

$$\pi_- = -\hbar k_L \left[s_L + (s_L + \alpha\omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

B-2(b)

Atomun referans sisteminde, iki yayılma yönü eşit olasılıklı olduğundan, yeniden yayılan fotonun ortalama momentumu sıfırdır. Bu nedenle ortalama kuvvet

$$F'_x = \pi_+ + \pi_- = -\frac{2\hbar\omega_L}{c^2}(s_L + \alpha\omega_L)v.$$

Burada kullanılan yaklaşım çerçevesinde, atomun referans sisteminde soğurulan ve yayılan enerjiler eşittir. Dolayısıyla ortalama kuvvet hesaplanırken geri tepme ihmal edildiğinde, tamamlanan çevrimde bu referans sistemindeki net enerji aktarımı sıfırdır. Laboratuvar referans sistemine dönüşüm yapıldığında, korunan mertebeye kadar boyuna kuvvet değişmez.

$s_L \ll \alpha\omega_L$ kullanılarak

$$F_x \simeq -\frac{2\alpha\hbar\omega_L^2}{c^2}v = -2\alpha\hbar k_L^2 v.$$

elde edilir. Lazer frekansı, soğurma eğrisinin yükselen tarafında yer alır; dolayısıyla $\alpha > 0$ olur. Bu nedenle kuvvet hıza zıt yöndedir ve kinetik enerjiyi azaltır.

B-3

Gelen foton $+x$ yönünde ilerlesin ve momentumunun büyüklüğü

$$p_\gamma = \hbar k_L.$$

olsun. Atomun başlangıçtaki momentumu sıfırdır. Momentumun korunumu, eşit olasılıklı iki sonuç verir:

Yayılma yönü	Atomun son momentumu	Son kinetik enerji	Olasılık
$+x$ yönünde, gelen fotonla aynı yönde	0	0	1/2
$-x$ yönünde, gelen fotona zıt yönde	$2p_\gamma$	$2p_\gamma^2/m$	1/2

Böylece, her soğurma–yayılma çevrimindeki ortalama kinetik enerji kazanımı

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2} \frac{(2p_\gamma)^2}{2m} = \frac{p_\gamma^2}{m}.$$

$-x$ yönünde ilerleyen bir gelen foton da aynı ortalama enerji kazanımını sağlar. Her τ süresinde bir tam çevrim gerçekleştiğinden,

$$P_{\text{in}} = \frac{\langle \Delta K \rangle}{\tau} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

B-4

Sönüm kuvvetinin atomun mekanik enerjisini değiştirme hızı

$$F_x v = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Dolayısıyla, enerjinin dışarı aktarılma hızı anlamına gelen pozitif çıkış gücü

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Isıl dengede, ortalama soğutma gücü geri tepmeden kaynaklanan ısınmayı dengeler:

$$2\alpha \hbar k_L^2 \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

Ortak çarpanlar sadeleştirildiğinde

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}.$$

Problem, hareketi bir boyutla sınırlar; bu nedenle enerjinin eşit paylaşımı ilkesi

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla,

$$T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

Bu modelde atom kütlesi ve lazerin dalga sayısı, denge sıcaklığı ifadesinde sadeleşir.

B-5

Verilen değerler kullanıldığında,

$$T = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2(4)(1.381 \times 10^{-23})(5 \times 10^{-9})} = 1.9098 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Dolayısıyla,

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK} \simeq 190 \mu\text{K}.$$

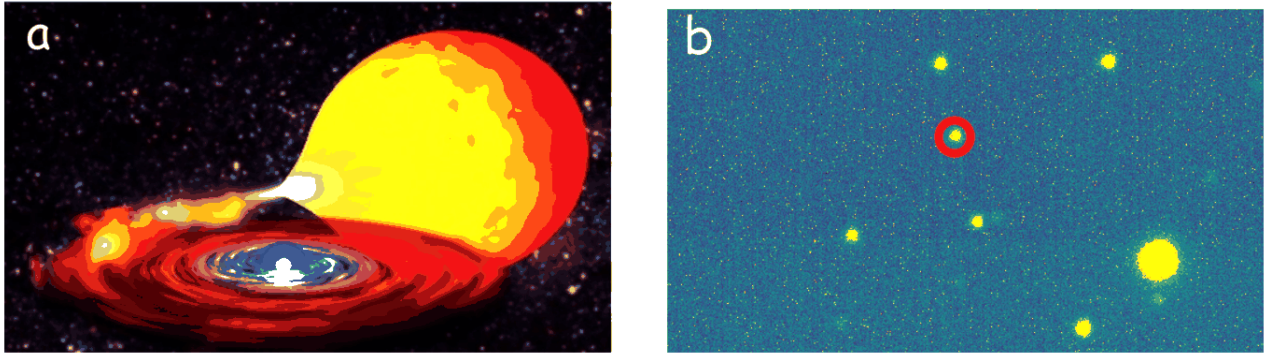
Belirtilen $m = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}$ kütlesi için buna karşılık gelen hız varyansı

$$\langle v^2 \rangle = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v_{\text{rms}} \simeq 0.126 \text{ m/s}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Karadul Pulsarı

Gözlenen yıldızların önemli bir bölümü çift yıldız sistemlerinde bulunur. Yıldızlardan biri ya da her ikisi, yüksek açısal hızla dönen ve elektromanyetik dalgalar yayan nötron yıldızları olabilir; bu tür yıldızlara pulsar denir. Bazen eş yıldız, nötron yıldızının üzerine yavaş yavaş düşerek onun kütlesini artıran geniş bir gaz kütesidir (Şekil 1-a). Böylece bir nötron yıldızı, eş yıldızının kütlesinin bir bölümünü zamanla yutar. Bu nedenle nötron yıldızı, çiftleşmeden sonra eşini yiyen dişi bir örümcek olan karadula (ya da kırmızı sırtlı örümceğe) benzetilmiştir. Karadulun üzerine düşen gazın ısınması, gözlenebilen bir ışınım üretir. En ağır nötron yıldızları çoğunlukla karadullardır ve temel fiziğin sınanması için doğal laboratuvarlar olarak işlev görürler. Şekil 1-b, İran Ulusal Gözlemevi'nin 3.4 metrelik optik teleskobuyla çekilmiş, PSR J2215+5135 nötron yıldızının eşinin görüntüsünü göstermektedir. Bu görüntüde herhangi bir nötron yıldızı görülmemektedir ve gözlenen ışık onun eşinden kaynaklanmaktadır.



Şekil 1 - (a) Eş yıldızdan nötron yıldızının üzerine düşen gazlar - (b) PSR J2215+5135 nötron yıldızının eşi

A. Bir Çift Yıldız Sistemi

Karadulun ve eş yıldızının, kütle merkezleri çevresinde dairesel yörüngelerde hareket eden iki noktasal kütle M_1 ve M_2 ile temsil edildiği basit bir model ele alın. Bu sistemin dinamiğini incelemek için, iki cismin durgun olduğu dönen bir koordinat sistemi kullanın. Koordinat sisteminin başlangıç noktasını kütle merkezinde seçin. İki noktasal kütle, başlangıç noktasının iki yanında x eksenü üzerinde, birbirlerinden a uzaklıkta bulunduğunu ve M_1 'in negatif x ekseninde yer aldığını varsayın. Hareket düzlemindeki herhangi bir (x, y) noktasında, birim deneme kütlesi için etkin potansiyel $\varphi(x, y)$, iki noktasal kütlelerin kütleçekim potansiyelleri ile merkezkaç potansiyelinin toplamıdır.

A-1	$\varphi(x, y)$ 'yi M_1 , M_2 , G ve a cinsinden yazın.	1.0 puan
A-2	$M_1 > M_2$ olduğunu varsayarak $\varphi(x, 0)$ fonksiyonunun grafiğini nitel olarak çizin.	0.7 puan

Yalnızca A-3 sorusu için $M_2 = M_1/3$ olduğunu kabul edin ve M_2 'nin çok düşük yoğunluklu, seyrek bir gazla çevrili olduğunu varsayın. Bu gazın kütlesi önemsizdir ve kütleçekim etkilerini ihmal ediyoruz. Bu gaz zarfının boyutu belirli bir sınırı aşarsa gaz, M_1 'in üzerine taşar. Taşmanın x eksenindeki $x = x_0$ noktasından gerçekleştiğini kabul edin.

A-3	$\frac{x_0}{a}$ 'nın sayısal değerini iki anlamlı basamakla bulun. Hesap makinesi kullanabilirsiniz.	0.5 puan
-----	--	----------

Yıldızların kütle merkezleri çevresindeki dolanım periyodu P olsun. Kütlenin M_2 'den M_1 'e, çok küçük bir $dM_1/dt = \beta$ hızıyla aktığını varsayın. Bu hız o kadar küçüktür ki her bir dolanım periyodu boyunca iki yıldız arasındaki uzaklık sabit kabul edilebilir. Ancak uzun bir süre sonra, hareket dairesel kalırken iki yıldız arasındaki uzaklık değişir.

A-4	a ve P 'nin değişim hızlarını β , M_1 , M_2 , G ve a cinsinden hesaplayın.	0.6 puan
-----	--	----------

M_2 'den ayrılan gaz, M_1 çevresinde dönen bir disk oluşturur ve sürtünme nedeniyle ısınır (Şekil 1-a). Gaz enerji kaybettiğinde M_1 'e doğru içeriye sarmal çizerek ilerler ve sonunda onun üzerine düşer. Kararlı durumda kütle, M_2 'den diske ve diskten M_1 'in üzerine sabit β hızıyla akar. Aynı zamanda ısınan disk, bir kara cisim gibi ısı ışınım yayar. Bu disk nötron yıldızına çok yakın olduğundan, diskin hareketinin analizinde M_2 yıldızının kütleçekim etkisi ihmal edilebilir. Gazın ısı kapasitesini de ihmal edin.

A-5	Disk, M_1 yıldızının merkezinden r uzaklıktaki sıcaklığını β , M_1 , G ve σ (Stefan-Boltzmann sabiti) cinsinden belirleyin.	1.0 puan
-----	--	----------

PSR J2215+5135 çift yıldız sisteminde nötron yıldızının kütlesi $M_{\text{NS}} = 2.27 M_{\odot}$ ve eş yıldızının kütlesi $M_S = 0.33 M_{\odot}$ 'dir; burada $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$, Güneş'in kütlesidir. Dolanım periyodu $P = 4.14 \text{ hr}$, Stefan-Boltzmann sabiti $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ve kütleçekim sabiti $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ 'dir.

Nötron yıldızına kütle akış hızının $\beta = \dot{M}_{\text{NS}} = 9 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ olduğunu varsayın.

A-6	Disk, $r = \frac{a}{10}$ yarıçapındaki sıcaklığını kelvin cinsinden hesaplayın.	0.5 puan
-----	---	----------

Ani bir patlamadan sonra M_1 yıldızının, kütlesinin bir bölümünü çok yüksek hızla çift yıldız sisteminin dışına fırlattığını ve kütlesinin M_1' olduğunu varsayın. Patlamadan sonra M_1' 'in M_2 'ye göre hızının büyüklüğü v' olsun.

A-7	Yeni çift yıldız sisteminin bağlı kalmasını sağlayan en büyük v' değerini M_1' , M_2 , G ve a cinsinden belirleyin. Patlamanın izotropik olduğunu varsayarsanız, çift yıldız sisteminin bağlı kalması için M_1' 'in en küçük değeri nedir?	0.7 puan
-----	--	----------

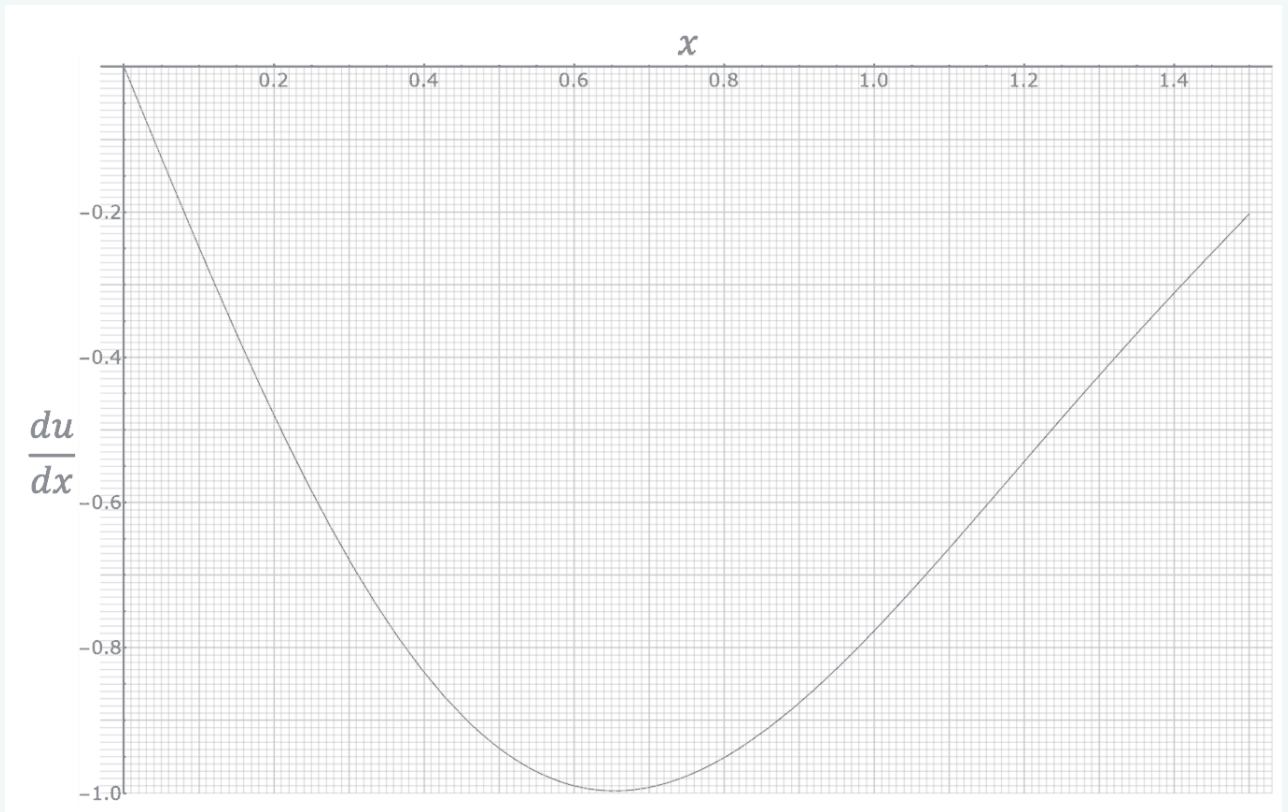
B. Bir Yıldızın Kararlılığının Analizi

Bu bölümde tek bir yıldızın kararlılığını inceliyoruz. K ve γ sabit olmak üzere, hal denklemi $p = K\rho^\gamma$ olan belirli bir tür madde içeren bir yıldız ele alın. $p(r)$ ve $\rho(r)$, sırasıyla yıldızın merkezinden r uzaklıktaki basınç ve yoğunluk olsun. Yıldızın merkezindeki basınç ve yoğunluk sırasıyla p_c ve ρ_c 'dir. B bölümünün tüm sorularında dışarı yönelen tüm vektörleri pozitif alın.

B-1	Yıldızın merkezine yakın yerlerde kütleçekim ivmesi $g(r)$ 'yi r ile G ve ρ_c sabitleri cinsinden belirleyin.	0.2 puan
-----	--	----------

B-2	Dengede $\rho(r)$ 'yi belirlemek için bir (diferansiyel) denklem türetin ve şu biçimde yazın: $\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0.$ h_1 ve h_2 fonksiyonlarını bulun.	0.6 puan
B-3	$r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$ biçiminde, uzunluk boyutuna sahip bir r_0 niceliği oluşturun.	0.4 puan
B-4	B-2 sorusundaki (diferansiyel) denklemi şu biçimde yeniden yazın: $\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x)u(x) = 0,$ burada $x = \frac{r}{r_0}$ ve $u = \frac{\rho}{\rho_c}$ 'dir. $A_1(u, x)$ ve $A_2(x)$ fonksiyonlarını bulun.	0.3 puan
B-5	$\gamma = 2$ için $u(x) = \frac{f(x)}{x}$ bulunur. $f(x)$ 'i belirleyin.	0.6 puan

Belirli bir yıldız için $\frac{du}{dx}$ 'in x 'in fonksiyonu olarak Şekil 2'deki eğriyle verildiğini varsayın.



Şekil 2 - $\frac{du}{dx}$ 'in grafiği

B-6	Şekil 2'deki eğrinin $x = 0$ noktası yakınındaki davranışını kullanarak γ 'yı 3 anlamlı basamakla bulun. Gerekirse verilen cetveli kullanın.	0.8 puan
-----	---	-------------

Sistemin kararlılığını analiz etmek için yıldızın denge durumundan az miktarda saptığını varsayıyoruz: dengede yarıçapı r olan küresel kabuğun artık $\tilde{r}$ yarıçapına sahip olduğunu, benzer biçimde g , p ve ρ parametrelerinin de sırasıyla $\tilde{g}$, $\tilde{p}$ ve $\tilde{\rho}$ değerlerine değiştiğini varsayıyoruz. Kolaylık olması için, yalnızca yıldızın merkezi yakınındaki küçük r değerlerini ele alacağız; bu bölgede $\tilde{r} = r(1 + \varepsilon(t))$ olduğunu varsayabiliriz; burada $\varepsilon(t) \ll 1$ 'dir.

B-7	$\tilde{\rho}$ ve $\tilde{g}$ 'yi ρ ve g cinsinden, ε 'da birinci mertebeye kadar bulun.	0.9 puan
-----	---	-------------

B-8	Denge yarıçapı r olan küresel tabaka için Newton'un hareket denklemini kullanarak $\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2}$ 'yi $\tilde{g}, \tilde{\rho}, K, \gamma$ ve $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ cinsinden bulun ($\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ ile, sabit t 'de $\tilde{\rho}$ 'nun $\tilde{r}$ 'ye göre türevini kastediyoruz.)	0.6 puan
B-9	$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ 'yi ε ve soruda verilen sabitler cinsinden elde edin. Kararlı denge için γ 'nın en küçük değerini ve yıldızın salınımının açısal frekansını bulun.	0.6 puan

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$M = M_1 + M_2$ yazalım ve yıldızların konumları $x_1 = -aM_2/M$ ve $x_2 = aM_1/M$ olsun.

- **A-1**

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2)$$

keyfî bir toplamsal sabit dışında.

- **A-2** Her birinde bir maksimum bulunan, kesinlikle konkav üç dal vardır. Potansiyel, x_1, x_2 'nin her iki yanında ve $x \rightarrow \pm\infty$ iken $-\infty$ 'ye gider. Alışılmış adlandırmayla maksimumların sıralaması

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2},$$

biçimindedir ve yükseklikleri

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3) < 0.$$

bağıntısını sağlar.

- **A-3**

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

- **A-4**

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

- **A-5** Yerel yörünge enerjisi salınımı ve her iki yüzeyden yayılan ışınlam kullanıldığında,

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

- **A-6**

$$T(a/10) \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

- **A-7** Kaçış hızı eşiği

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}},$$

olup bağlı bir yörünge için $v' < v'_{\text{crit}}$ gerekir. İzotropik kütle atımı için,

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

Her iki koşulda da eşitlik, sınırdaki parabolik kaçış durumuna karşılık gelir.

- **B-1**

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

- **B-2** Uygun bir normalizasyon seçimi şöyledir:

$$h_1(\rho, r) = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = 4\pi G r^2.$$

- **B-3**

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad r_0 = \sqrt{\frac{p_c}{G\rho_c^2}}.$$

- **B-4**

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

- **B-5**

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

- **B-6**

$$\gamma \simeq 1.67.$$

- **B-7**

$$\tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

- **B-8**

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K\gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

• B-9

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4) \varepsilon = 0.$$

Kritik değer $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$ 'tür; $\gamma > 4/3$ için geri çağırıcı kuvvetin yol açtığı salınımlar, eşitlikte ise sınırda bir davranış görülür. Bu salınımların açısal frekansı

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

şeklindedir.

Çözüm

A-1

$M = M_1 + M_2$ olsun. Kütle merkezi koşulu ve yıldızlar arasındaki uzaklık

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = a,$$

bağıntılarını verir; dolayısıyla

$$x_1 = -\frac{M_2}{M} a, \quad x_2 = \frac{M_1}{M} a.$$

Çift yıldız sisteminin açısal hızı Ω ise, yıldızlardan herhangi biri için Newton denklemi

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

sonucunu verir.

Birim deneme kütlesi başına kütleçekim potansiyeli, iki noktasal kütlelerin potansiyellerinin toplamıdır. Düzgün dönen referans sisteminde, dışarı yönelen merkezkaç ivmesi

$$\varphi_{\text{cf}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2).$$

potansiyelinden elde edilir. Dolayısıyla,

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3} (x^2 + y^2).$$

A-2

x ekseninde,

$$\varphi(x, 0) = -\frac{GM_1}{|x - x_1|} - \frac{GM_2}{|x - x_2|} - \frac{1}{2} \Omega^2 x^2.$$

Grafik taslağının kesin bir betimlemesi şöyledir:

- $x = x_1$ ve $x = x_2$ 'de aşağı yönlü düşey tekillikler vardır: potansiyel her bir yıldızın her iki yandan yaklaşırken $-\infty$ 'ye gider.
- Büyük pozitif veya negatif x değerlerinde,

$$\varphi(x, 0) \sim -\frac{1}{2} \Omega^2 x^2,$$

dolayısıyla her iki dış uç da $-\infty$ 'ye iner.

- Yıldızların ayırdığı üç aralığın her biri tam olarak bir maksimum içerir.

Son noktayı göstermek için, kütlelerin bulunduğu noktalar dışında,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2GM_1}{|x-x_1|^3} - \frac{2GM_2}{|x-x_2|^3} - \Omega^2 < 0.$$

Dolayısıyla her dal kesinlikle konkavdır. Türevi, iki ucu arasında pozitiften negatife değişerek bir maksimum verir.

Soldaki, içteki ve sağdaki maksimumları sırasıyla L_3, L_1, L_2 ile gösterelim. $M_1 > M_2$ olduğundan daha ağır yıldız başlangıç noktasına daha yakındır ve

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{GM_1}{|x_1|^2} - \frac{GM_2}{x_2^2} > 0.$$

Bu nedenle içteki maksimum, başlangıç noktasının sağındadır:

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2}.$$

Soldaki dış maksimum en yüksek, sağdaki dış maksimum ikinci en yüksek, içteki maksimum ise en düşüktür:

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3).$$

A-1'de seçilen toplamsal sabitle eğrinin tamamı negatiftir ve yatay eksenini kesmez. Düşey eksenini kestiği değer

$$\varphi(0,0) = -\frac{GM}{a} \left(\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_1} \right).$$

şeklinde dir.

A-3

Gaz, M_1 'e doğru ilk olarak etkin kuvvetin sıfır olduğu iç denge noktası L_1 'den geçer. Bu nokta, yıldızları birleştiren doğru boyunca $\varphi(x,0)$ 'ın bir maksimumu ve iki boyutlu etkin potansiyelin bir eyer noktasıdır.

Burada

$$M_1 = \frac{3}{4}M, \quad M_2 = \frac{1}{4}M,$$

olduğundan

$$x_1 = -\frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3a}{4}.$$

$z = x_0/a$ yazıldığında, yıldızlar arasındaki $\partial\varphi/\partial x = 0$ koşulu

$$\frac{3/4}{(z+1/4)^2} - \frac{1/4}{(3/4-z)^2} - z = 0.$$

halini alır.

$-1/4 < z < 3/4$ aralığındaki kök

$$z = 0.360743 \dots$$

değerindedir. Böylece iki anlamlı basamakla,

$$\boxed{\frac{x_0}{a} = 0.36}.$$

A-4

Kütle aktarımını korunumlu kabul edelim: M_2 'nin kaybettiği kütlenin tamamı M_1 'e ulaşır ve dış tork yoktur. Noktasal kütle modelinde, öz dönme ve akışta geçici olarak depolanan açısal momentum ihmal edilir. Böylece

$$\dot{M}_1 = \beta, \quad \dot{M}_2 = -\beta, \quad \dot{M} = 0,$$

olur ve yörüngesel açısal momentum korunur.

Dairesel yörüngeli bir çift yıldız sistemi için,

$$L = \frac{M_1 M_2}{M} a^2 \Omega = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}.$$

Bu ifadenin logaritmik türevi alınırsa,

$$0 = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right)}.$$

Kepler bağıntısı

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

sonucunu verir. M sabit olduğundan,

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3\beta \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

Böylece

$$\boxed{\dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right)}.$$

Kütle daha hafif yıldızdan daha ağır yıldızla aktığında hem aralarındaki uzaklık hem de periyot artar.

A-5

Yörüngelerin yaklaşık olarak dairesel Kepler yörüngeleri olduğu, radyal kinetik enerjinin ihmal edildiği ve madde bir halkadan geçerken kaybettiği yörüngesel mekanik enerjinin yerel olarak ışınlımla yayıldığı ince bir disk kullanalım.

Dairesel yörünge koşulu

$$v^2 = \frac{GM_1}{r}.$$

şeklinde. Dolayısıyla gazın birim kütle başına mekanik enerjisi

$$e(r) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_1}{r} = -\frac{GM_1}{2r}.$$

olur.

$dr > 0$ olmak üzere, r ile $r + dr$ arasında bir halka ele alalım. Madde, halkanın dış kenarından girer ve iç kenarından çıkar. β kütle akış hızında açığa çıkan güç

$$dL = \beta [e(r + dr) - e(r)] = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

olur.

Diskin her iki yüzeyi de ışınlam yayar. İki yüzeyin toplam halka alanı

$$dA = 2(2\pi r dr) = 4\pi r dr.$$

şeklindedir. Isı depolanmasını ihmal edip yerel enerji salınımını kara cisim ışınlamına eşitlersek,

$$4\pi r dr \sigma T^4 = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

Buradan

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

Özellikle, $T \propto r^{-3/4}$ tür.

A-6

Toplam kütle ve periyot şöyledir:

$$M = (2.27 + 0.33)(1.98 \times 10^{30}) = 5.148 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$P = 4.14(3600) = 14904 \text{ s}.$$

Kepler bağıntısı

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1.24548 \times 10^9 \text{ m}.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla

$$r = \frac{a}{10} = 1.24548 \times 10^8 \text{ m}.$$

1 yr $\simeq 3.156 \times 10^7$ s kullanıldığında,

$$\beta = \frac{9 \times 10^{-10}(1.98 \times 10^{30})}{3.156 \times 10^7} \simeq 5.65 \times 10^{13} \text{ kg s}^{-1}.$$

$M_1 = 2.27(1.98 \times 10^{30})$ kg için,

$$T = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(2.27 \times 1.98 \times 10^{30})(5.65 \times 10^{13})}{8\pi(5.67 \times 10^{-8})(1.24548 \times 10^8)^3} \right]^{1/4}.$$

Bu ifade

$$T \simeq 8.86 \times 10^3 \text{ K},$$

ya da

$$T \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

sonucunu verir.

A-7

Patlama ani olduğundan, hemen sonrasında yıldızlar arasındaki uzaklık a olarak kalır. Hızla fırlatılan madde uzaklaştıktan sonra, geriye kalan yıldızların bağıl yörünge enerjisi

$$E' = \frac{1}{2}\mu'v'^2 - \frac{GM'_1M_2}{a}, \quad \mu' = \frac{M'_1M_2}{M'_1 + M_2}.$$

şeklindedir.

Bağılı bir iki cisim yörüngesi için $E' < 0$ gerekir. Böylece

$$v'^2 < \frac{2G(M'_1 + M_2)}{a},$$

olur ve sınır hız

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}}.$$

şeklindedir. Eşitlik durumunda yörünge paraboliktir ve bağılı değildir.

Kütle atımı, patlayan yıldızın durgun olduğu referans sisteminde izotropikse geri tepme olmaz. Geriye kalan iki yıldızın da anlık hızları değişmez. Dolayısıyla bağılı süratleri, başlangıçtaki dairesel yörünge sürati olarak kalır:

$$v'^2 = \Omega^2 a^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}.$$

Bağılılık koşulunda yerine konulduğunda

$$M_1 + M_2 < 2(M'_1 + M_2),$$

ya da

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

elde edilir.

Eşdeğer olarak, çift yıldız sisteminin başlangıçtaki toplam kütesinin yarısından azı dışarı atılabilir:

$$M_1 - M'_1 < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Belirtilen en küçük değer kritik bir eşittir; eşitlik, sınırda kaçış verir.

B-1

Küresel simetri gereği, r yarıçapındaki kütleçekim alanına yalnızca bu yarıçapın içinde kalan kütle katkı sağlar. Merkez yakınında $\rho \simeq \rho_c$ olduğundan

$$m(r) \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_c r^3.$$

Dışarı yönelen ivme pozitif alınırsa,

$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

Dolayısıyla

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

B-2

Hidrostatik denge

$$\frac{dp}{dr} = \rho g.$$

koşulunu gerektirir. İçeride kalan kütle

$$g = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

bağıntılarını sağlar. Dolayısıyla,

$$\frac{d}{dr}(r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho.$$

$g = (1/\rho) dp/dr$ kullanıldığında,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

$p = K\rho^\gamma$ bağıntısından,

$$\frac{dp}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

Dolayısıyla aranan yoğunluk denklemi

$$\frac{d}{dr} \left(K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

şeklinde. Böylece geçerli bir seçim

$$h_1 = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2 = 4\pi G r^2.$$

olur. Her iki fonksiyonu da aynı sıfırdan farklı sabitle çarpmak eşdeğer bir denklem verir.

B-3

İlgili boyutlar şöyledir:

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}, \quad [p_c] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\rho_c] = M L^{-3}.$$

$G^l p_c^m \rho_c^n$ 'nin L boyutuna sahip olması koşulu

$$-l + m + n = 0, \quad 3l - m - 3n = 1, \quad -2l - 2m = 0.$$

denklemlerini verir. Çözüldüğünde,

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1.$$

Buradan

$$r_0 = \frac{\sqrt{p_c}}{\sqrt{G} \rho_c} = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}.$$

$p_c = K\rho_c^\gamma$ olduğundan,

$$r_0^2 = \frac{K\rho_c^{\gamma-2}}{G}.$$

biçiminde yazmak da yararlıdır.

B-4

$$r = r_0 x, \quad \rho = \rho_c u, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho_c}{r_0} \frac{du}{dx}$$

ifadelerini B-2'deki denklemde yerine koyalım:

$$K\gamma\rho_c^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi G r_0^2 \rho_c x^2 u = 0.$$

$G r_0^2 \rho_c = K \rho_c^{\gamma-1}$ olduğundan, $K \rho_c^{\gamma-1}$ 'e bölmek

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\gamma x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi x^2 u = 0}.$$

sonucunu verir. Böylece

$$\boxed{A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}}, \quad \boxed{A_2(x) = 4\pi x^2}.$$

Merkezdeki koşullar

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

şeklindedir; ikinci koşul düzgünlük ve küresel simetriden kaynaklanır.

B-5

$\gamma = 2$ için denklem

$$\frac{d}{dx} (x^2 u') + 2\pi x^2 u = 0.$$

biçimine indirgenir.

$u = f/x$ olsun. O halde

$$x^2 u' = x f' - f, \quad \frac{d}{dx} (x^2 u') = x f''.$$

$x > 0$ için,

$$f'' + 2\pi f = 0.$$

$k = \sqrt{2\pi}$ yazarsak genel çözüm

$$f = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

şeklindedir. $u = f/x$ 'in merkezde sonlu olması $B = 0$ gerektirir. Ardından $u(0) = 1$ normalizasyonu $Ak = 1$ verir. Dolayısıyla

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}},$$

ve

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi} x}.$$

Fiziksel yoğunluk profili, ilk sıfırı olan $x = \sqrt{\pi/2}$ noktasında sona erer.

B-6

Bu soru için genel γ değerine dönelim. Merkez yakınında düzgünlük,

$$u(x) = 1 + cx^2 + O(x^4), \quad u'(x) = 2cx + O(x^3).$$

açılımına izin verir.

Boyutsuz denge denkleminde yerine konulduğunda, x^2 mertebesinde,

$$6\gamma c + 4\pi = 0.$$

elde edilir. Buradan

$$u'(x) = -\frac{4\pi}{3\gamma}x + O(x^3).$$

Çizilen u' 'nin x 'e bağlılık eğrisinin başlangıç noktasındaki eğimi s ise,

$$s = u''(0) = -\frac{4\pi}{3\gamma}, \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3s}.$$

Şekil 2'de başlangıç noktasındaki teğetin eğimi yaklaşık olarak

$$s \simeq -2.51.$$

değerindedir. Böylece

$$\gamma \simeq \frac{4\pi}{3(2.51)} \simeq 1.67.$$

Bu, $\gamma = 5/3$ ile tutarlıdır.

B-7

Belirli bir maddesel kabuğu izleyelim. Kabuk r 'den

$$\tilde{r} = r(1 + \varepsilon).$$

yarıçapına hareket ederken kütlesi korunur. Merkez yakınındaki komşu kabuklara da aynı ölçek çarpanı uygulandığından,

$$d\tilde{r} = (1 + \varepsilon) dr.$$

İnce bir kabuktaki kütlenin korunumu

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r},$$

bağıntısını verir; böylece

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon)^3} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Dolayısıyla

$$\tilde{\rho} \simeq \rho(1 - 3\varepsilon).$$

Hareket eden kabuğun içinde kalan kütle de korunur. Dolayısıyla,

$$\tilde{g} = -\frac{Gm(r)}{\tilde{r}^2} = \frac{g}{(1 + \varepsilon)^2},$$

olur ve

$$\boxed{\tilde{g} \simeq g(1 - 2\varepsilon)}.$$

elde edilir. Burada g , dışarı yönün pozitif alınması kuralıyla tutarlı olarak negatiftir.

B-8

Basınçtan kaynaklanan dışarı yönlü ivme

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

şeklindedir. Kütleçekimini ekleyince Newton denklemi

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

olur.

Pertürbe edilmiş madde için aynı hal denklemini,

$$\tilde{p} = K \tilde{\rho}^\gamma,$$

kullanarak

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

elde ederiz. Buradan

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}}.$$

B-9

Sabit bir anda ε , merkez yakınındaki kabuğu tanımlayan r 'den bağımsızdır. Dolayısıyla

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, t) = (1 + \varepsilon)^{-3} \rho \left(\frac{\tilde{r}}{1 + \varepsilon} \right),$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = (1 + \varepsilon)^{-4} \frac{d\rho}{dr}.$$

Bu nedenle B-8'deki basınç terimi şu şekilde ölçeklenir:

$$K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}.$$

Pertürbe edilmemiş dengede,

$$K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = g.$$

Bu, $\tilde{g} = g(1 + \varepsilon)^{-2}$ ile birlikte

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g [(1 + \varepsilon)^{-2} - (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}].$$

sonucunu verir.

Birinci mertebeye kadar,

$$(1 + \varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon,$$

$$(1 + \varepsilon)^{2-3\gamma} = 1 + (2 - 3\gamma)\varepsilon.$$

Böylece

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = g(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

r , başlangıçtaki kabuğu tanımladığı ve sabit olduğu için,

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = r\ddot{\varepsilon}.$$

Merkez yakınındaki $g/r = -4\pi G\rho_c/3$ sonucu kullanılarak,

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Geri çağırıcı bir ivme için $-\varepsilon$ 'u çarpan katsayı pozitif olmalıdır. Dolayısıyla

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

Bu nedenle kritik değer

$$\gamma_{\text{crit}} = \frac{4}{3}.$$

olur.

Eşitlik durumunda bu mertebede geri çağırıcı kuvvet yoktur; $\gamma < 4/3$ için büyüyen bir pertürbasyon vardır. $\gamma > 4/3$ için hareket harmoniktir ve

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)} = \sqrt{4\pi G\rho_c \left(\gamma - \frac{4}{3}\right)}.$$

Grafikten elde edilen $\gamma \simeq 1.67$ değeri kararlı aralıkta yer alır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.