

IPhO 2024

Теоретические задачи и решения · Исфахан, Иран · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2024/

Задача 1: Парниковый эффект

В 2021 году Сюкуро Манабэ и Клаус Хассельман были удостоены половины Нобелевской премии по физике за работы по моделированию климата Земли и точному предсказанию глобального потепления, вызванного промышленной деятельностью человека. В этой задаче мы рассмотрим простую модель глобального потепления, обусловленного парниковым эффектом. Парниковые газы изменяют оптические свойства земной атмосферы, связанные с пропусканием и поглощением инфракрасного излучения Земли, что приводит к повышению средней температуры планеты.

Все тела при различных температурах испускают тепловое излучение. Величина $u(\lambda, T)d\lambda$ представляет собой мощность теплового излучения с единицы площади тела при температуре T в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Согласно теории излучения абсолютно чёрного тела Планка,

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

где $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ и $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$. Длина волны, соответствующая максимуму $u(\lambda, T)$, определяется соотношением $\lambda_{\max} T = b$ (закон смещения Вина). Действительно, используя уравнение (1), можно показать, что $b = \frac{hc}{x_m k_B}$, где безразмерная величина x_m — нетривиальный корень уравнения вида $f(x) = 0$; в одном из следующих заданий вам предстоит найти функцию $f(x)$. Полная мощность излучения абсолютно чёрного тела с единицы площади во всём диапазоне длин волн определяется законом Стефана — Больцмана: $U(T) = \sigma T^4$, где $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Кроме того, согласно закону теплового излучения Кирхгофа, в состоянии теплового равновесия тело, поглощающее некоторую долю падающего излучения на определённой длине волны, испускает на той же длине волны такую же долю излучения абсолютно чёрного тела.

Во всей задаче считайте Солнце абсолютно чёрным телом со средней температурой поверхности $T_S = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$. Радиус Солнца равен $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, а среднее расстояние между Землёй и Солнцем — $d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$. Обозначим через $\tilde{u}_S(\lambda)$ спектральную плотность мощности солнечного излучения, падающего на единицу площади на Земле, перпендикулярную направлению излучения. Интеграл этой величины по всем длинам волн, то есть $S_0 = \int \tilde{u}_S(\lambda) d\lambda$, называется солнечной постоянной.

В этой задаче считайте, что Земля находится в тепловом равновесии и имеет одинаковую температуру во всех точках поверхности. Во всех частях задачи выражайте искомую величину в общем виде через данные условия, а затем находите её численное значение с

точностью до трёх значащих цифр. Требуемые единицы измерения указаны в бланке ответов.

А. Земля как абсолютно чёрное тело

В этой части считайте поверхность Земли абсолютно чёрным телом и пренебрегайте земной атмосферой.

Часть	Задание	Баллы
А-1	Найдите солнечную постоянную S_0 .	0.6 балла
А-2	Найдите температуру Земли T_E .	0.6 балла
А-3	Найдите функцию $f(x)$.	0.4 балла
А-4	Вычислите численное значение x_m и по этому значению x_m найдите значение b .	0.4 балла
А-5	Найдите $\lambda_{\max}$ для Солнца и Земли.	0.2 балла

На рисунке 1 представлены графики функций $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ и $u(\lambda, T_E)$ в зависимости от λ , где γ — безразмерный коэффициент, изменяющий масштаб $\tilde{u}_S(\lambda)$ так, чтобы значения обоих максимумов совпадали.

Часть	Задание	Баллы
А-6	Определите γ .	0.8 балла

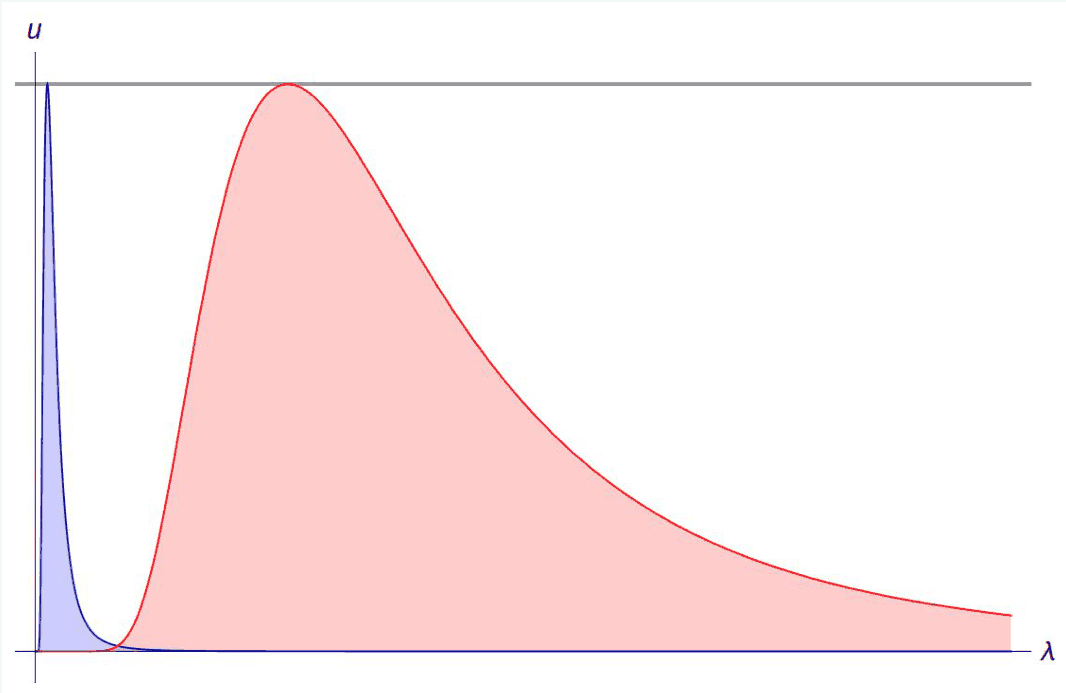


Рисунок 1 — Графики зависимостей $u(\lambda, T_E)$ (красный) и $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ (синий) от λ

В. Парниковый эффект

В этой части мы вводим простую модель, в которой земная атмосфера представлена тонким слоем на небольшой высоте над поверхностью Земли, так что разностью площадей атмосферного слоя и земной поверхности можно пренебречь (см. рисунок 2). Далее считайте, что основная часть теплового излучения Земли и Солнца приходится на длины волн, близкие к соответствующему значению $\lambda_{\max}$. Также считайте, что «атмосферный слой» отражает долю $r_A = 0.255$ **видимого и ультрафиолетового** излучения, падающего сверху или снизу, и полностью пропускает остальную его часть. Считайте, что атмосфера совсем не отражает **инфракрасное** излучение, однако поглощает долю ε **инфракрасного** излучения и пропускает остальное. Такое поведение, известное как парниковый эффект, изменяет среднюю температуру Земли. Поверхность Земли, в свою очередь, отражает долю r_E **видимого и ультрафиолетового** излучения и поглощает оставшуюся часть этого излучения, а также всё **инфракрасное** излучение.

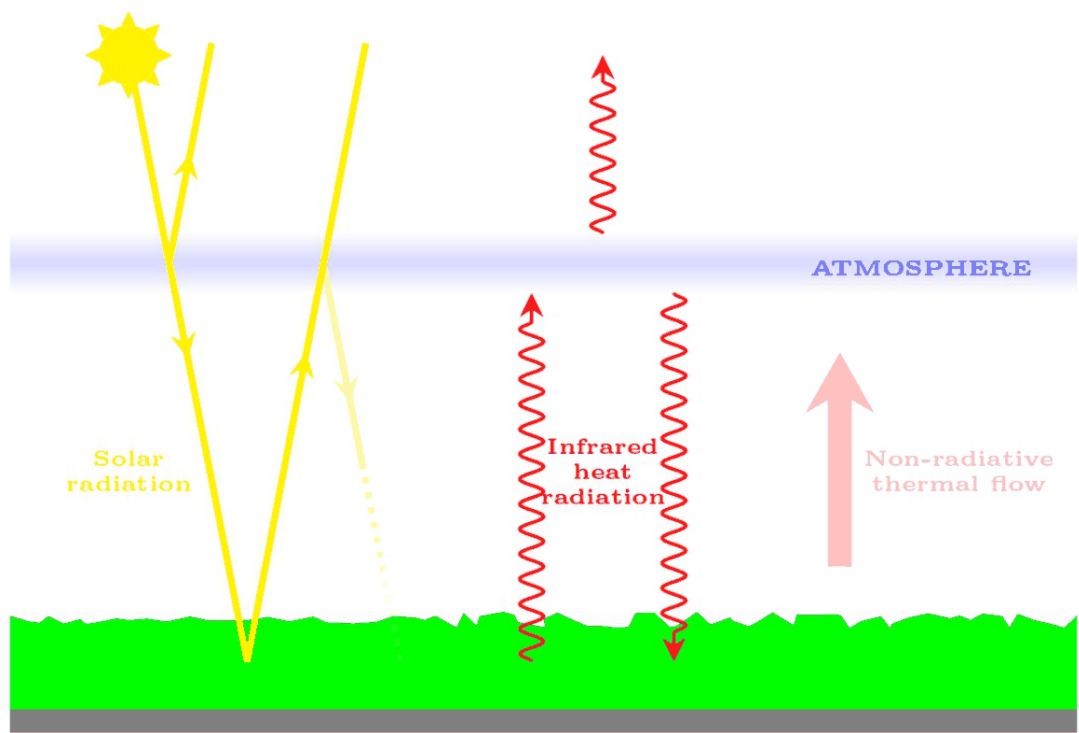


Рисунок 2 — Тепловые потоки между Землёй и атмосферой

Часть	Задание	Баллы
В-1	Считая, что $\varepsilon = 1$ и $r_E = 0$, вычислите температуру Земли T_E и температуру атмосферы T_A .	1.0 балла

Теперь предположим, что $r_E \neq 0$. В этом случае система «Земля + атмосфера» отражает другую долю солнечного излучения, называемую «альбедо» и обозначаемую α .

Часть	Задание	Баллы
В-2	Выразите альбедо α через r_E и r_A . Затем вычислите его численное значение, считая $r_E = 0.102$ (и $r_A = 0.255$).	1.6 балла

Часть	Задание	Баллы
В-3	а) Выразите температуру Земли через σ , α , S_0 и ε .	1.0 балла
	б) Используя данные условия и вычисленное альбеда, найдите численное значение ε , при котором средняя температура Земли равна современному значению $T_E = 288$ К.	
В-4	Найдите $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ и определите, на сколько повысится температура Земли, если ε увеличится на один процент.	0.8 балла

Примите $T_A = 245$ К и $T_E = 288$ К. Эти значения получены из реальных данных и могут отличаться от результатов, которые вы получили в предыдущих заданиях. Теперь предположим, что от Земли к атмосфере существует нерадиационный (например, конвективный) тепловой поток $J_{NR} = k(T_E - T_A)$, где k — постоянная. Величина J_{NR} представляет собой передаваемую мощность на единицу площади.

Часть	Задание	Баллы
В-5	Вычислите ε и k , выразив их через T_E , T_A , σ , α и S_0 .	1.6 балла
В-6	а) Дифференцируя уравнения, полученные в части В-5, по ε , найдите два алгебраических уравнения, которым удовлетворяют $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ и $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$.	1.0 балла
	б) Используя эти уравнения, найдите численное значение изменения температуры Земли при увеличении ε на один процент.	

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Определим усреднённый по всей поверхности Земли поглощённый поток солнечного излучения как

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Под увеличением на один процент понимается $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$. Численные результаты получены без округления промежуточных значений.

• A-1

$$S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 = 1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

• A-2

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 278 \text{ K}.$$

• A-3

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

• A-4

$$x_m = 4.97, \quad b = \frac{hc}{x_m k_B} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

• A-5

$$\lambda_{\max, S} = \frac{b}{T_S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max, E} = \frac{b}{T_E} = 10.4 \text{ } \mu\text{m}.$$

• A-6

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 1.20 \times 10^{-2}.$$

• B-1

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A) S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = 307 \text{ K},$$

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A) S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = 258 \text{ K}.$$

• B-2

$$\alpha = r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E} = 0.313.$$

• B-3(a)

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha) S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

• B-3(b)

$$\varepsilon = 2 - \frac{(1 - \alpha) S_0}{2\sigma T_E^4} = 0.809.$$

• B-4

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)} = 60.4 \text{ K},$$

$$\Delta T_E \simeq 0.489 \text{ K}.$$

Изменение температуры приведено в первом порядке приближения; точное конечное изменение равно 0.491 K.

• B-5

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.849,$$

$$k = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)} = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

- **B-6(a)** При обозначениях $X = dT_E/d\varepsilon$ и $Y = dT_A/d\varepsilon$,

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4,$$

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

- **B-6(b)**

$$X = 61.7 \text{ K}, \quad Y = 47.8 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

Изменение температуры приведено в первом порядке приближения; точное конечное изменение равно 0.527 K.

Решение

A-1

Полная мощность излучения Солнца определяется законом Стефана — Больцмана:

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

В силу сохранения мощности излучения эта светимость распределяется по сфере радиуса d . Следовательно,

$$S_0 = \frac{L_S}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Подстановка даёт

$$S_0 = 1353.076 \dots \text{ W m}^{-2} = \boxed{1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}}.$$

Тот же геометрический закон ослабления справедлив для каждой длины волны:

$$\tilde{u}_S(\lambda) = \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u(\lambda, T_S).$$

A-2

Обозначим радиус Земли через R_E . Земля перехватывает солнечное излучение площадью своей проекции πR_E^2 , а тепловое излучение испускает всей поверхностью $4\pi R_E^2$.

Для Земли как абсолютно чёрного тела в равновесии

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4.$$

Отсюда

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 277.920 \dots \text{ K}.$$

Следовательно,

$$\boxed{T_E = 278 \text{ K}}.$$

A-3

При фиксированной T введём

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Логарифмическое дифференцирование закона Планка даёт

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right].$$

В максимуме при конечной длине волны эта производная обращается в нуль, поэтому

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

Таким образом, подходящая функция имеет вид

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

Алгебраический корень $x = 0$ соответствует $\lambda \rightarrow \infty$, а не максимуму при конечной длине волны. Искомый корень положителен и отличен от нуля.

A-4

Ненулевой корень можно найти, например, методом Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5(1 - e^{-x_n}) - x_n}{5e^{-x_n} - 1}.$$

При начальном значении $x_0 = 5$ получаем

$$x_m = 4.965114 \dots$$

Поскольку $x_m = hc/(\lambda_{\max} k_B T)$,

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_m k_B} = b.$$

Используя приведённые в условии постоянные, получаем

$$b = \frac{1.24 \times 10^3}{(4.965114 \dots)(8.62 \times 10^{-5})} \text{ nm K} = 2.897244 \dots \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Следовательно,

$$x_m = 4.97, \quad b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Функция Планка стремится к нулю на обоих концах диапазона длин волн, а найденная точка является её единственной стационарной точкой при конечной положительной длине волны, поэтому это максимум.

A-5

Применяя закон смещения Вина к каждому телу, получаем

$$\lambda_{\max, S} = \frac{b}{T_S} = 502.122 \dots \text{ nm},$$

$$\lambda_{\max, E} = \frac{b}{T_E} = 10.4247 \dots \mu\text{m}.$$

Таким образом,

$$\lambda_{\max, S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max, E} = 10.4 \mu\text{m}.$$

Максимум солнечного излучения находится в видимом диапазоне, а максимум излучения Земли — в инфракрасном.

A-6

В максимуме $\lambda_{\max} = b/T$, а показатель экспоненты равен x_m . Поэтому

$$u_{\max}(T) = \frac{2\pi hc^2}{b^5(e^{x_m} - 1)} T^5.$$

Таким образом, максимальная спектральная плотность мощности на единицу интервала длин волн пропорциональна T^5 .

Для равенства высот двух максимумов на графике необходимо

$$\gamma \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u_{\max}(T_S) = u_{\max}(T_E),$$

откуда

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5.$$

Из A-2 следует

$$\left(\frac{T_E}{T_S} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{T_E}{4T_S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = \boxed{1.20 \times 10^{-2}}.$$

B-1

В части В принятое спектральное приближение относит солнечное излучение к видимому и ультрафиолетовому диапазонам, а тепловое излучение Земли и атмосферы — к инфракрасному. Атмосфера не поглощает солнечное излучение. По закону Кирхгофа её коэффициент излучения в инфракрасном диапазоне равен ε , поэтому каждая сторона слоя испускает поток $\varepsilon \sigma T_A^4$. Коэффициент излучения Земли в инфракрасном диапазоне равен единице.

Здесь $\varepsilon = 1$ и $r_E = 0$. Усреднённый по всей поверхности Земли поток солнечного излучения, поглощаемый поверхностью, равен

$$Q_1 = \frac{(1 - r_A) S_0}{4}.$$

Условие равновесия атмосферы имеет вид

$$\sigma T_E^4 = 2\sigma T_A^4,$$

поскольку атмосфера поглощает направленное вверх излучение Земли и излучает в обоих направлениях.

Баланс энергии на поверхности имеет вид

$$Q_1 + \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4.$$

Объединяя уравнения, получаем

$$\sigma T_A^4 = Q_1, \quad \sigma T_E^4 = 2Q_1.$$

Следовательно,

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{258 \text{ K}},$$

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{307 \text{ K}}.$$

В-2

Примем мощность падающего солнечного излучения за единицу. Атмосфера сразу отражает долю r_A . Доля, уходящая в космос после одного отражения от поверхности, равна

$$(1 - r_A)r_E(1 - r_A).$$

Каждый дополнительный проход от поверхности к атмосфере и обратно умножает оставшуюся отражённую мощность на $r_A r_E$.

Суммируя все вклады, получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= r_A + r_E(1 - r_A)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_A r_E)^n \\ &= r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E}. \end{aligned}$$

Эквивалентная запись:

$$1 - \alpha = \frac{(1 - r_A)(1 - r_E)}{1 - r_A r_E}.$$

При заданных коэффициентах отражения

$$\alpha = 0.313124\dots, \quad \boxed{\alpha = 0.313}.$$

Всё солнечное излучение, которое не отражается, поглощается поверхностью.

В-3

(a) Определим

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

В отсутствие нерадиационного переноса тепла уравнения баланса энергии для поверхности и атмосферы имеют вид

$$\begin{aligned} Q + \varepsilon \sigma T_A^4 &= \sigma T_E^4, \\ \varepsilon \sigma T_E^4 &= 2\varepsilon \sigma T_A^4. \end{aligned}$$

При $\varepsilon > 0$ второе уравнение даёт

$$T_A^4 = \frac{T_E^4}{2}.$$

Подставляя в первое уравнение, получаем

$$Q = \sigma T_E^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Отсюда

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

Это выражение также непрерывно продолжается на случай $\varepsilon = 0$.

(b) Выражая коэффициент поглощения, получаем

$$\varepsilon = 2 \left(1 - \frac{Q}{\sigma T_E^4} \right) = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4}.$$

Неокруглённые значения потоков равны

$$Q = 232.348778 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad \sigma(288 \text{ K})^4 = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon = 0.808710 \dots, \quad \boxed{\varepsilon = 0.809}.$$

B-4

Считаем S_0 и α постоянными. Логарифмическое дифференцирование результата B-3 даёт

$$\frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{8(1 - \varepsilon/2)} = \frac{1}{4(2 - \varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)}}.$$

В состоянии равновесия из B-3

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = 60.4387 \dots \text{ K} = \boxed{60.4 \text{ K}}.$$

При относительном увеличении на один процент

$$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon.$$

В первом порядке приближения

$$\Delta T_E \simeq \frac{dT_E}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{0.01\varepsilon T_E}{4(2 - \varepsilon)} = \boxed{0.489 \text{ K}}.$$

Для сравнения, непосредственное вычисление конечного изменения даёт

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = T_E \left[\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 - 1.01\varepsilon} \right)^{1/4} - 1 \right] = \boxed{0.491 \text{ K}}.$$

B-5

Учтём направленный вверх нерадиационный поток

$$J_{\text{NR}} = k(T_E - T_A).$$

Поверхность теряет эту энергию, а атмосфера получает её. Уравнения их равновесия принимают вид

$$Q + \varepsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A), \quad (2)$$

$$\varepsilon \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A) = 2\varepsilon \sigma T_A^4. \quad (3)$$

Для краткости обозначим

$$E = \sigma T_E^4, \quad A = \sigma T_A^4.$$

Сложение двух уравнений энергетического баланса исключает внутренний теплообмен:

$$Q = (1 - \varepsilon)E + \varepsilon A.$$

Правая часть представляет собой излучение, уходящее в космос: прошедшее через атмосферу излучение поверхности и направленное вверх излучение атмосферы. Решая уравнение, получаем

$$\varepsilon = \frac{E - Q}{E - A} = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)}.$$

Уравнение (3) даёт

$$k(T_E - T_A) = \varepsilon(2A - E).$$

Следовательно,

$$k = \frac{\varepsilon \sigma (2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A} = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)}.$$

При $T_E = 288 \text{ K}$ и $T_A = 245 \text{ K}$,

$$E = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad A = 204.290135 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = 0.849, \quad k = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

Получающийся тепловой поток равен

$$J_{\text{NR}} = 15.7 \text{ W m}^{-2},$$

то есть положителен в заданном направлении вверх.

B-6

(a) При изменении ε считаем S_0 , α и k постоянными, а обеим температурам позволяем изменяться. Положим

$$X = \frac{dT_E}{d\varepsilon}, \quad Y = \frac{dT_A}{d\varepsilon}.$$

Дифференцирование уравнения (2) даёт

$$\sigma T_A^4 + 4\varepsilon \sigma T_A^3 Y = 4\sigma T_E^3 X + k(X - Y).$$

Отсюда

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4.$$

Дифференцирование уравнения (3) даёт

$$\sigma T_E^4 + 4\varepsilon \sigma T_E^3 X + k(X - Y) = 2\sigma T_A^4 + 8\varepsilon \sigma T_A^3 Y.$$

Таким образом,

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

(b) Чтобы получить явное выражение через параметры, определим

$$p = 4\sigma T_E^3, \quad q = 4\sigma T_A^3,$$

и сохраним обозначения $E = \sigma T_E^4$, $A = \sigma T_A^4$. Определитель системы равен

$$D = (p + k)(2\varepsilon q + k) - (\varepsilon q + k)(\varepsilon p + k) = \varepsilon(2 - \varepsilon)pq + k[(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q].$$

Исключая Y , получаем

$$X = \frac{\varepsilon q E + k(E - A)}{D}.$$

Аналогично,

$$Y = \frac{(p + k)(E - 2A) + (\varepsilon p + k)A}{D}.$$

Используя равновесные значения из В-5, получаем

$$X = 61.7352 \dots \text{ К}, \quad Y = 47.7734 \dots \text{ К}.$$

При $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$,

$$\Delta T_E \simeq X \Delta\varepsilon = (61.7352 \dots)(0.01)(0.84897597 \dots) \text{ К}.$$

Следовательно,

$$\Delta T_E \simeq 0.524 \text{ К}.$$

Решение исходных нелинейных уравнений баланса при $\varepsilon_{\text{new}} = 1.01\varepsilon$ с тем же k даёт конечное изменение

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = 0.527 \text{ К}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Удержание ионов и охлаждение атомов

В последние десятилетия удержание и охлаждение атомов и ионов привлекают большой интерес физиков; за работы в этой области было присуждено несколько Нобелевских премий. В первой части этой задачи мы рассмотрим метод удержания ионов, известный как «ловушка Пауля». За эту работу Вольфганг Пауль и Ханс Демельт получили половину Нобелевской премии по физике за 1989 год. Затем мы исследуем метод доплеровского охлаждения — одну из работ, упомянутых в пресс-релизе о Нобелевской премии по физике за 1997 год, присуждённой Стивену Чу, Клоду Козну-Таннуджи и Уильяму Дэниелу Филлипсу «за разработку методов охлаждения и удержания атомов лазерным светом».

А. Ловушка Пауля

Известно, что с помощью электростатических полей невозможно создать устойчивое равновесие для заряженной частицы. Поэтому для создания точки устойчивого равновесия для ионов требуются более сложные методы. Одним из них является ловушка Пауля.

Рассмотрим заряженное кольцо радиуса R с однородной положительной линейной плотностью заряда λ . В центре кольца помещён положительный точечный заряд Q массой m .

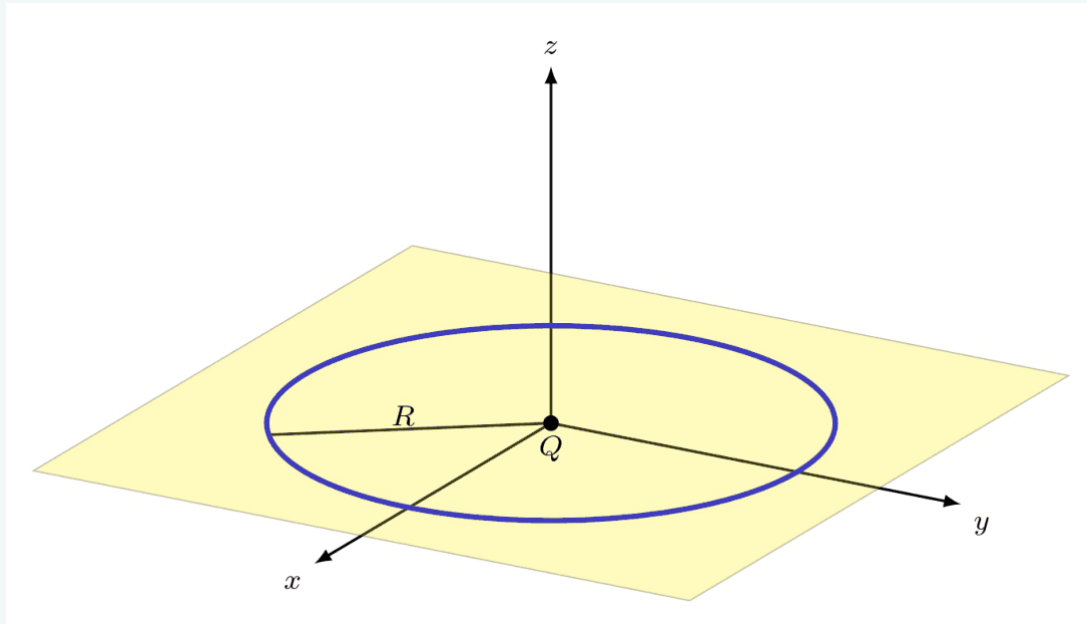


Рисунок 1 — Положительно заряженное кольцо с однородной линейной плотностью заряда λ и радиусом R : начало системы координат находится в центре кольца.

A-1	а) В декартовых координатах (x, y, z) найдите электрическое поле заряженного кольца вблизи его центра с точностью до первого порядка по x/R, y/R и z/R. б) Найдите угловую частоту малых колебаний заряженной частицы около центра кольца в тех направлениях, в которых существует устойчивое равновесие.	1.5 балла
-----	---	-----------

Чтобы полностью удерживать заряд Q , мы хотим приложить переменные поля для создания динамического равновесия. Предположим, что плотность заряда равна $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$, где λ_0 , u и Ω — регулируемые параметры. Излучением будем пренебрегать. Тогда уравнение движения при малых смещениях относительно центра кольца в направлении, перпендикулярном его плоскости, примет вид:

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z \quad (1)$$

A-2	Выразите a и k через известные параметры. 0.4 балла
-----	---

Мы хотим получить приближённое решение уравнения (1), приняв следующие упрощающие предположения: $a \ll 1$, $\Omega \gg k$ и $a\Omega^2 \gg k^2$. При этих предположениях можно показать, что решение этого уравнения можно разделить на две части: $z(t) = p(t) + q(t)$, где $p(t)$ — медленно меняющаяся составляющая, а $q(t)$ — быстро меняющаяся составляющая малой амплитуды с нулевым средним значением. Иными словами, $p(t)$ можно считать постоянной на протяжении нескольких колебаний $q(t)$ (см. рисунок 2).

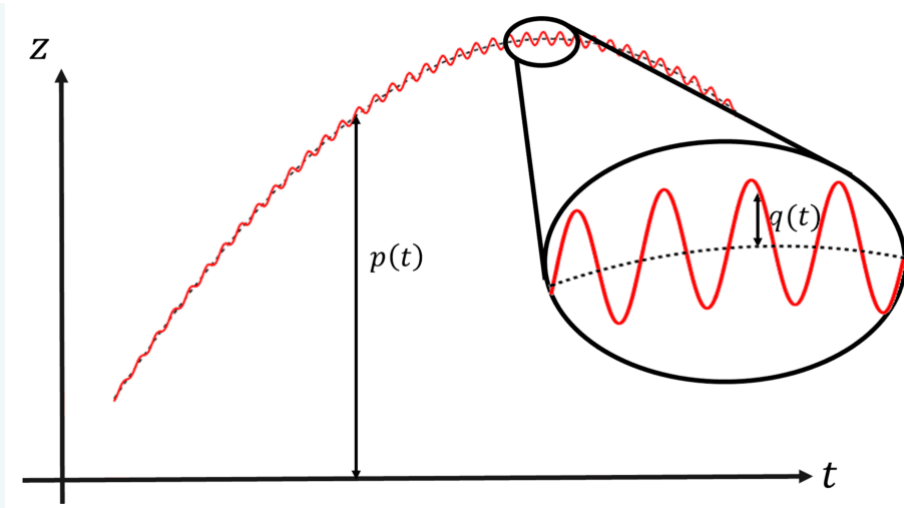


Рисунок 2 — Типичное решение уравнения движения заряженной частицы: $p(t)$ описывает общее движение, а $q(t)$ — малые колебания около этой траектории. В эллипсе справа увеличенно показан участок этой траектории.

A-3	а) Используя приведённые выше приближения, найдите уравнение движения для $q(t)$ через a , Ω и p .	1.8 балла
	б) Найдите решение этого уравнения, выбрав подходящие начальные условия, соответствующие требуемым свойствам этой функции.	
A-4	а) Учитывая среднее воздействие быстро меняющейся составляющей, получите эффективное уравнение движения для $p(t)$.	1.5 балла
	б) Исследуйте устойчивость точки равновесия и найдите условие устойчивого равновесия.	

Предположим, что $\lambda_0 = 8 \times 10^{-9}$ С/м и $R = 10$ см. Мы хотим использовать это устройство для удержания однократно ионизованного атома, масса которого в 100 раз больше массы атома водорода.

A-5	Вычислите k . Примите $a = 0.04$ и оцените наименьшую частоту, необходимую для стабилизации движения этого иона. Используйте данные, приведённые в конце условия задачи.	0.4 балла
-----	--	-----------

В. Доплеровское охлаждение

Может возникнуть необходимость охладить удерживаемый атом или ион. Предположим, что удерживаемый атом массой m имеет два энергетических уровня с разностью энергий $E_0 = \hbar\omega_A$. Электроны на нижнем уровне могут поглотить фотон и перейти на верхний уровень, но через время τ они вернутся на нижний уровень и испустят фотон, частота которого преимущественно лежит в интервале $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$.

B-1	Используя принцип неопределённости Гейзенберга, найдите Γ .	0.5 балла
-----	--	-----------

По аналогичным соображениям, если осветить удерживаемый атом лазерным светом и угловая частота лазера ω_L попадает в интервал $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$, атом может поглотить фотон. Предположим, что частота ω_L лазерного света немного ниже ω_A . Для некоторого устройства скорость поглощения фотонов атомом в системе отсчёта атома показана на

рисунке 3. Затем поглощённый фотон переизлучается в случайном направлении. Для упрощения рассмотрим одномерную задачу, то есть предположим, что атомы могут двигаться только в направлении x , а лазерный свет падает на них как слева, так и справа. В системе отсчёта атома частота света выше или ниже из-за движения атомов. Поскольку скорость v атомов очень мала, мы учитываем только члены порядка v/c и пренебрегаем всеми членами более высоких порядков. Кроме того, $m \gg \hbar\omega_A/c^2$, так что скорость атома после поглощения фотона почти не меняется. Изменение частоты вследствие эффекта Доплера также настолько мало по сравнению с $\omega_A - \omega_L$, что функцию s на графике рисунка 3 можно аппроксимировать следующей линейной функцией:

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L)$$

где s — число фотонов, поглощаемых в единицу времени, s_L — значение s при $\omega = \omega_L$, а α — угловой коэффициент касательной к кривой при ω_L . Частота переизлучённого фотона почти равна частоте падающего фотона, но он испускается с равной вероятностью в положительном или отрицательном направлении оси x . В действительности с точностью до рассматриваемого здесь порядка эти две частоты совпадают. Обратите внимание, что весь процесс рассматривается в системе отсчёта атома.

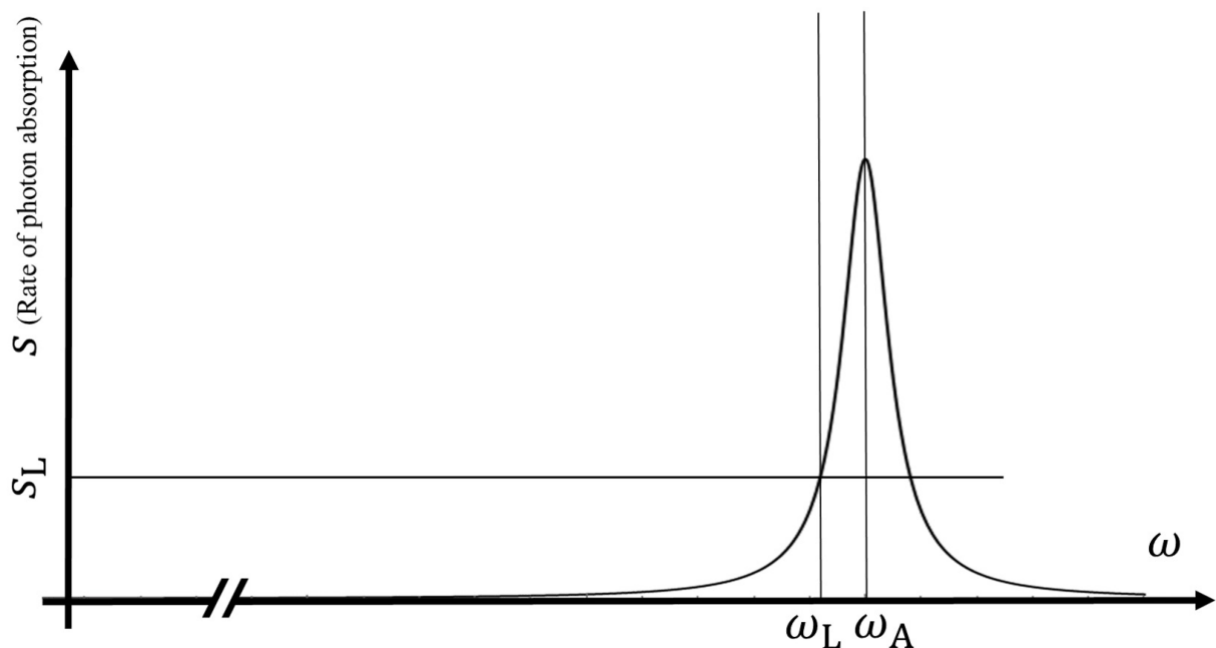


Рисунок 3 — Скорость поглощения фотонов в зависимости от частоты для некоторой ловушки: частота, соответствующая разности энергий двух атомных уровней, обозначена ω_A , а немного меньшая частота лазера обозначена ω_L .

B-2	а) Предположим, что удерживаемый атом движется в лабораторной системе отсчёта со скоростью $v = v_x$. В системе отсчёта атома вычислите число столкновений фотонов с атомами в единицу времени для фотонов, падающих с каждого из двух направлений (обозначьте эти величины s_+ и s_-), а также скорость поглощения импульса в каждом направлении (обозначьте эти величины π_+ и π_-). б) Определите эффективную силу, действующую на атом в лабораторной системе отсчёта, как функцию v, $k_L = \omega_L/c$, $\hbar$ и α. Считайте, что $s_L \ll \alpha\omega_L$,	1.7 балла
-----	---	-----------

Мы хотим найти наименьшую температуру, достижимую с помощью этого метода. Предположим, что скорость некоторого атома уменьшилась точно до нуля и в этот самый момент он поглощает фотон (падающий с любого из двух направлений), а затем переизлучает фотон случайным образом в одном из двух направлений с почти той же частотой. Предположим, что этот процесс происходит один раз за каждые τ единиц времени.

B-3	Рассмотрев импульс атома после такого процесса для двух возможных исходов, вычислите среднюю мощность, поглощаемую атомом.	1.0 балла
B-4	Рассмотрите силу, вычисленную в задании B-2, и вычислите мощность отвода энергии. Затем вычислите среднее значение v^2 в состоянии равновесия. Используя знания молекулярно-кинетической теории газов, оцените температуру атомов.	0.8 балла
B-5	Оцените эту температуру для атома, масса которого в 100 раз больше массы атома водорода. Примите $\omega_L = 2 \times 10^{16} \text{ rad/s}$, $\tau = 5 \times 10^{-9} \text{ s}$ и $\alpha = 4$.	0.4 балла

масса атома водорода:	$m_H = 1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}$
заряд электрона:	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
электрическая постоянная:	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
постоянная Больцмана:	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
постоянная Планка:	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A-1(a):**

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

- **A-1(b):** Равновесие устойчиво во всех направлениях в плоскости кольца, причём

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

В направлении z равновесие неустойчиво.

- **A-2:**

$$a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}}.$$

- **A-3(a):** $\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t$.

- **A-3(b):** $q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t$. Если считать p постоянной в течение периода быстрого колебания, подходящие начальные условия имеют вид $q(0) = -ap$, $\dot{q}(0) = 0$.

- **A-4(a):**

$$\ddot{p} + \left(\frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2 \right) p = 0.$$

- **A-4(b):** В рамках указанного приближения для устойчивого удержания необходимо

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

Угловая частота медленных осевых колебаний равна $\sqrt{a^2 \Omega^2 / 2 - k^2}$.

- **A-5:**

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Оценка пороговой частоты даёт

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

Следует выбрать частоту выше этого порога.

- **B-1:** Характерный масштаб ширины линии равен $\Gamma \sim 1/\tau$; при обычном определении естественной полуширины

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

- **B-2(a):** Пусть знак $+$ обозначает фотоны, распространяющиеся вдоль $+x$, а $\pi_{\pm}$ — скорости передачи проекции импульса на ось x с учётом знака. Тогда

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_{\pm} = \pm \hbar k_L \left[s_L \mp (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

- **B-2(b):**

$$F_x = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

- **B-3:**

$$P_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

- **B-4:** Положительная величина мощности отвода энергии равна

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

В равновесии

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}, \quad T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

- **B-5:**

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK}.$$

Решение

A-1(a)

Кольцо лежит в плоскости xy и несёт суммарный заряд $2\pi R\lambda$. По закону Кулона его электрическое поле на оси симметрии равно

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

При $|z| \ll R$

$$E_z(0, 0, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

Зеркальная и вращательная симметрия требуют, чтобы общий вид линейного поля вблизи центра был следующим:

$$E_x = Cx, \quad E_y = Cy, \quad E_z = Dz.$$

Из результата для оси получаем $D = \lambda/(2\epsilon_0 R^2)$. В окрестности центра зарядов нет, поэтому по теореме Гаусса

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2C + D = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

A-1(b)

Второй закон Ньютона для движения в плоскости даёт

$$m\ddot{x} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} x, \quad m\ddot{y} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} y.$$

Это уравнения гармонического осциллятора. Следовательно, во всех направлениях в плоскости угловая частота одинакова:

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

Вдоль оси

$$m\ddot{z} = \frac{Q\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

При $Q, \lambda > 0$ эта сила направлена от центра, поэтому равновесие в осевом направлении неустойчиво.

A-2

Подставляя зависящую от времени плотность заряда в уравнение движения вдоль оси, получаем

$$\ddot{z} = \frac{Q}{2\epsilon_0 m R^2} (\lambda_0 + u \cos \Omega t) z.$$

Сравнение с уравнением (1) даёт

$$k^2 = \frac{Q\lambda_0}{2\varepsilon_0 m R^2}, \quad a = \frac{Qu}{2\varepsilon_0 m R^2 \Omega^2}.$$

Здесь a — безразмерная величина, а k имеет размерность обратного времени.

A-3(a)

Подставим $z = p + q$ в уравнение движения:

$$\ddot{p} + \ddot{q} = k^2 p + k^2 q + a\Omega^2 p \cos \Omega t + a\Omega^2 q \cos \Omega t.$$

В течение быстрого колебания p приблизительно постоянна. Поскольку амплитуда q мала, $a \ll 1$ и $a\Omega^2 \gg k^2$, уравнение для быстрой составляющей в главном порядке имеет вид

$$\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t.$$

A-3(b)

Считая p постоянной при интегрировании, получаем

$$q(t) = -ap \cos \Omega t + C_1 t + C_2.$$

Быстро осциллирующая составляющая не может содержать векового дрейфа, поэтому $C_1 = 0$.

Её среднее значение должно быть равно нулю, что требует $C_2 = 0$. Таким образом,

$$q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t.$$

При фиксированном p соответствующие начальные условия имеют вид

$$q(0) = -ap, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Амплитуда q составляет долю a от величины медленного смещения в данный момент, что согласуется с $a \ll 1$. В этом порядке приближения поправками, связанными с медленным изменением p , пренебрегаем.

A-4(a)

Усредним полное уравнение за период внешнего воздействия, считая p постоянной в течение этого периода. Поскольку

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle \cos \Omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\ddot{p} = k^2 p + a\Omega^2 \langle q \cos \Omega t \rangle.$$

Используя $q = -ap \cos \Omega t$,

$$\langle q \cos \Omega t \rangle = -\frac{ap}{2}.$$

Следовательно,

$$\ddot{p} = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p.$$

Хотя k^2 мало по сравнению с $a\Omega^2$, здесь его необходимо сохранить: переменное поле вносит вклад в усреднённое движение лишь в порядке $a^2 \Omega^2$.

A-4(b)

Введём обозначение

$$\omega_s^2 = \frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2.$$

Если $\omega_s^2 > 0$, медленное смещение совершает колебания:

$$p(t) = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t,$$

а полное приближённое движение

$$z(t) \simeq p(t) (1 - a \cos \Omega t),$$

остаётся ограниченным. Таким образом, условие устойчивости в осевом направлении имеет вид

$$\boxed{a^2 \Omega^2 > 2k^2.}$$

При $a > 0$ это означает

$$\boxed{\Omega > \frac{\sqrt{2} k}{a}.}$$

Ниже этого порога уравнение для медленного движения имеет экспоненциально растущее решение. При равенстве $\ddot{p} = 0$, поэтому ненулевая скорость медленного движения приводит к неограниченному дрейфу; равенство не обеспечивает удержания.

Для полноты рассмотрим уравнение поперечного движения:

$$\ddot{x} = - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a \Omega^2}{2} \cos \Omega t \right) x.$$

Та же процедура усреднения даёт для его медленной составляющей X

$$\ddot{X} + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{8} \right) X = 0,$$

и аналогично для y . В рамках приближения равновесие в этих направлениях устойчиво, поэтому условие осевой устойчивости задаёт требование для удержания во всех трёх направлениях.

A-5

Для иона имеем

$$Q = e, \quad m = 100m_{\text{H}} = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad R = 0.10 \text{ m}.$$

Тогда

$$k = \sqrt{\frac{(1.602 \times 10^{-19})(8 \times 10^{-9})}{2(8.854 \times 10^{-12})(1.674 \times 10^{-25})(0.10)^2}} = 2.079 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\boxed{k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.}$$

Для заданного $a = 0.04$ оценка пороговой угловой частоты равна

$$\Omega_{\text{th}} = \frac{\sqrt{2} k}{a} = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s}.$$

Соответствующая обычная частота равна

$$f_{\text{th}} = \frac{\Omega_{\text{th}}}{2\pi} = 1.170 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz.}}$$

Требуется частота выше этого оценочного порога. На пороге

$$\frac{\Omega_{\text{th}}}{k} \simeq 35, \quad \frac{a\Omega_{\text{th}}^2}{k^2} = 50,$$

что согласуется с предполагаемым разделением масштабов.

В-1

Возбуждённое состояние имеет характерное время жизни τ . Оценка по соотношению неопределённостей для энергии и времени даёт

$$\Delta E \tau \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

Отождествляя характерную энергетическую полуширину с $\Delta E \simeq \hbar\Gamma$, получаем

$$\Gamma \tau \gtrsim \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для ширины, обусловленной конечным временем жизни, обычная оценка имеет вид

$$\boxed{\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}}.$$

Надёжный вывод из принципа неопределённости — характерный масштаб $\Gamma \sim 1/\tau$; численный коэффициент зависит от определения ширины линии.

В-2(а)

Обозначим знаком $+$ фотоны, распространяющиеся вдоль $+x$, а знаком $-$ — фотоны, распространяющиеся вдоль $-x$. Для атома, движущегося со скоростью v , доплеровские сдвиги в первом порядке дают

$$\omega'_+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \omega'_- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Фотон, движущийся в том же направлении, что и атом, испытывает красное смещение; фотон, движущийся навстречу атому, — синее смещение.

Заданная функция $s(\omega)$ уже определяет скорость поглощения в системе отсчёта атома.

Вычисляя её при этих частотах, получаем

$$s_+ = s_L + \alpha(\omega'_+ - \omega_L) = s_L - \alpha\omega_L \frac{v}{c},$$

$$s_- = s_L + \alpha(\omega'_- - \omega_L) = s_L + \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

Таким образом,

$$\boxed{s_{\pm} = s_L \mp \alpha\omega_L \frac{v}{c}}.$$

Каждый поглощённый фотон имеет проекцию импульса $\pm \hbar\omega'_{\pm}/c$. Определяя $\pi_{\pm}$ как скорости передачи проекции импульса на ось x с учётом знака, получаем

$$\pi_+ = \frac{\hbar\omega'_+}{c}s_+, \quad \pi_- = -\frac{\hbar\omega'_-}{c}s_-.$$

Раскрывая скобки и сохраняя только члены первого порядка по v/c , получаем

$$\pi_+ = \hbar k_L \left[s_L - (s_L + \alpha\omega_L)\frac{v}{c} \right],$$

$$\pi_- = -\hbar k_L \left[s_L + (s_L + \alpha\omega_L)\frac{v}{c} \right].$$

В-2(b)

В системе отсчёта атома средний импульс переизлучения равен нулю, поскольку два направления испускания равновероятны. Поэтому средняя сила равна

$$F'_x = \pi_+ + \pi_- = -\frac{2\hbar\omega_L}{c^2}(s_L + \alpha\omega_L)v.$$

В используемом здесь приближении поглощённая и испущенная энергии в системе отсчёта атома равны. Поэтому, если при вычислении средней силы пренебречь отдачей, суммарная передача энергии за полный цикл в этой системе отсчёта равна нулю. При переходе в лабораторную систему продольная сила остаётся неизменной с точностью до учитываемого порядка.

Используя $s_L \ll \alpha\omega_L$, получаем

$$F_x \simeq -\frac{2\alpha\hbar\omega_L^2}{c^2}v = -2\alpha\hbar k_L^2 v.$$

Частота лазера находится на возрастающем участке кривой поглощения, поэтому $\alpha > 0$. Следовательно, сила направлена против скорости и уменьшает кинетическую энергию.

В-3

Пусть падающий фотон распространяется вдоль $+x$ и имеет модуль импульса

$$p_{\gamma} = \hbar k_L.$$

Первоначально импульс атома равен нулю. Из закона сохранения импульса следуют два равновероятных исхода:

Направление испускания	Конечный импульс атома	Конечная кинетическая энергия	Вероятность
Вдоль $+x$, в направлении падающего фотона	0	0	1/2
Вдоль $-x$, против направления падающего фотона	$2p_{\gamma}$	$2p_{\gamma}^2/m$	1/2

Таким образом, средний прирост кинетической энергии за один цикл поглощения–испускания равен

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2} \frac{(2p_{\gamma})^2}{2m} = \frac{p_{\gamma}^2}{m}.$$

Падающий фотон, движущийся вдоль $-x$, даёт такой же средний прирост энергии. Поскольку за время τ происходит один полный цикл,

$$P_{\text{in}} = \frac{\langle \Delta K \rangle}{\tau} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

В-4

Скорость изменения механической энергии атома под действием тормозящей силы равна

$$F_x v = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Следовательно, положительная мощность отвода энергии, то есть скорость её удаления, равна

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

В тепловом равновесии средняя мощность охлаждения компенсирует нагрев вследствие отдачи:

$$2\alpha \hbar k_L^2 \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

Сокращая общие множители, получаем

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}.$$

В задаче движение ограничено одним измерением, поэтому теорема о равнораспределении энергии даёт

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

Следовательно,

$$T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

В этой модели масса атома и волновое число лазерного излучения сокращаются в выражении для равновесной температуры.

В-5

Подставляя заданные значения, получаем

$$T = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2(4)(1.381 \times 10^{-23})(5 \times 10^{-9})} = 1.9098 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Следовательно,

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK} \simeq 190 \text{ } \mu\text{K}.$$

Для заданной массы $m = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}$ соответствующая дисперсия скорости равна

$$\langle v^2 \rangle = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v_{\text{rms}} \simeq 0.126 \text{ m/s}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Пульсар «Чёрная вдова»

Значительная часть наблюдаемых звёзд входит в состав двойных систем. Одна или обе звезды могут быть нейтронными звёздами, вращающимися с большой угловой скоростью и испускающими электромагнитные волны; такие звёзды называют пульсарами. Иногда звезда-компаньон представляет собой протяжённое газовое образование, вещество которого постепенно падает на нейтронную звезду и увеличивает её массу (рисунок 1-а). Таким образом, нейтронная звезда постепенно поглощает часть массы своего компаньона. По этой причине нейтронную звезду сравнивают с чёрной вдовой (или красноспинным пауком) — самкой паука, поедающей своего партнёра после спаривания. Нагрев газа, падающего на чёрную вдову, приводит к излучению, которое можно наблюдать. Самые массивные нейтронные звёзды часто являются чёрными вдовами и служат естественными лабораториями для проверки фундаментальных физических законов. На рисунке 1-б показано изображение компаньона нейтронной звезды PSR J2215+5135, полученное с помощью 3.4-метрового оптического телескопа Иранской национальной обсерватории. Нейтронная звезда на этом изображении не видна; наблюдаемый свет испускается её компаньоном.

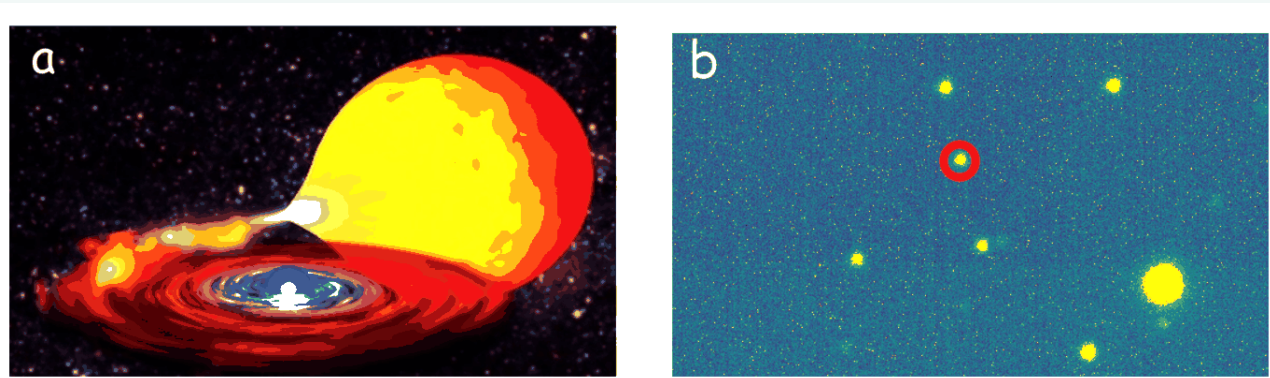


Рисунок 1 - (а) Падение газа звезды-компаньона на нейтронную звезду - (б) Компаньон нейтронной звезды PSR J2215+5135

А. Двойная система

Рассмотрим простую модель, в которой чёрная вдова и её звезда-компаньон представлены двумя точечными массами M_1 и M_2 , движущимися по круговым орбитам вокруг своего центра масс. Для исследования динамики этой системы рассмотрим вращающуюся систему координат, в которой оба тела неподвижны. Поместим начало координат в центр масс. Предположим, что обе точечные массы находятся на оси x по разные стороны от начала координат на расстоянии a друг от друга, причём M_1 расположена на отрицательной полуоси x . В произвольной точке (x, y) плоскости движения эффективный потенциал $\varphi(x, y)$ для единичной пробной массы равен сумме гравитационных потенциалов двух точечных масс и центробежного потенциала.

A-1	Запишите $\varphi(x, y)$ через M_1 , M_2 , G и a .	1.0 балла
A-2	Считая, что $M_1 > M_2$, качественно постройте график функции $\varphi(x, 0)$.	0.7 балла

Пусть (только в задании А-3) $M_2 = M_1/3$, и предположим, что M_2 окружена разреженным газом с очень низкой плотностью. Масса этого газа незначительна, и его гравитационным воздействием можно пренебречь. Если размер этой газовой оболочки превысит определённый предел, газ начнёт перетекать на M_1 . Пусть перетекание происходит через точку $x = x_0$ на оси x .

А-3	Найдите численное значение $\frac{x_0}{a}$ с точностью до двух значащих цифр. Можно воспользоваться калькулятором.	0.5 балла
-----	--	-----------

Обозначим период обращения звёзд вокруг их центра масс через P . Предположим, что вещество перетекает от M_2 к M_1 с очень малой скоростью $dM_1/dt = \beta$. Эта скорость настолько мала, что в течение каждого периода обращения расстояние между звёздами можно считать постоянным. Однако за длительное время расстояние между звёздами меняется, а движение остаётся круговым.

А-4	Вычислите скорости изменения a и P через β , M_1 , M_2 , G и a .	0.6 балла
-----	--	-----------

Газ, отделившийся от M_2 , образует диск, вращающийся вокруг M_1 , и нагревается за счёт трения (рисунок 1-а). По мере потери энергии газ движется по спирали к M_1 и в конце концов падает на неё. В стационарном состоянии вещество перетекает с постоянной скоростью β от M_2 в диск и из диска на M_1 . При этом нагретый диск испускает тепловое излучение как абсолютно чёрное тело. Этот диск образуется очень близко к нейтронной звезде, поэтому при анализе движения диска можно пренебречь гравитационным притяжением звезды M_2 . Также пренебрегите теплоёмкостью газа.

А-5	Определите температуру диска на расстоянии r от центра звезды M_1 через β , M_1 , G и σ (постоянную Стефана—Больцмана).	1.0 балла
-----	--	-----------

В двойной системе PSR J2215+5135 масса нейтронной звезды равна $M_{\text{NS}} = 2.27 M_{\odot}$, а масса её звезды-компаньона равна $M_S = 0.33 M_{\odot}$, где $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ — масса Солнца. Период обращения равен $P = 4.14 \text{ hr}$, постоянная Стефана—Больцмана равна $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, а гравитационная постоянная равна $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$.

Предположим, что скорость поступления массы на нейтронную звезду составляет $\beta = \dot{M}_{\text{NS}} = 9 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

А-6	Вычислите температуру диска на радиусе $r = \frac{a}{10}$ в кельвинах.	0.5 балла
-----	--	-----------

Предположим, что при внезапном взрыве звезда M_1 выбрасывает часть своей массы за пределы двойной системы с очень большой скоростью, и её масса становится равной M'_1 . Обозначим модуль скорости M'_1 относительно M_2 после взрыва через v' .

А-7	Определите максимальное значение v' через M'_1 , M_2 , G и a , при котором новая двойная система остаётся связанной. Считая взрыв изотропным, найдите минимальное значение M'_1 , при котором двойная система остаётся связанной.	0.7 балла
-----	---	-----------

В. Анализ устойчивости звезды

В этой части мы исследуем устойчивость одиночной звезды. Рассмотрим звезду, состоящую из определённого вида вещества с уравнением состояния $p = K\rho^\gamma$, где K и γ — постоянные. Пусть $p(r)$ и $\rho(r)$ — соответственно давление и плотность на расстоянии r от центра звезды. Давление и плотность в центре звезды равны соответственно p_c и ρ_c . Во всех заданиях части В считайте направление наружу положительным для всех векторных величин.

В-1	Определите гравитационное ускорение $g(r)$ вблизи центра звезды через r и постоянные G и ρ_c .	0.2 балла
В-2	Выведите (дифференциальное) уравнение для определения $\rho(r)$ в состоянии равновесия и запишите его в следующем виде: $\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0$. Найдите функции h_1 и h_2 .	0.6 балла
В-3	Составьте величину r_0 вида $r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$, имеющую размерность длины.	0.4 балла
В-4	Перепишите (дифференциальное) уравнение из задания В-2 в следующем виде: $\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x)u(x) = 0$, где $x = \frac{r}{r_0}$ и $u = \frac{\rho}{\rho_c}$. Найдите функции $A_1(u, x)$ и $A_2(x)$.	0.3 балла
В-5	При $\gamma = 2$ получается $u(x) = \frac{f(x)}{x}$. Определите $f(x)$.	0.6 балла

Предположим, что для некоторой звезды зависимость $\frac{du}{dx}$ от x задаётся кривой, приведённой на рисунке 2.

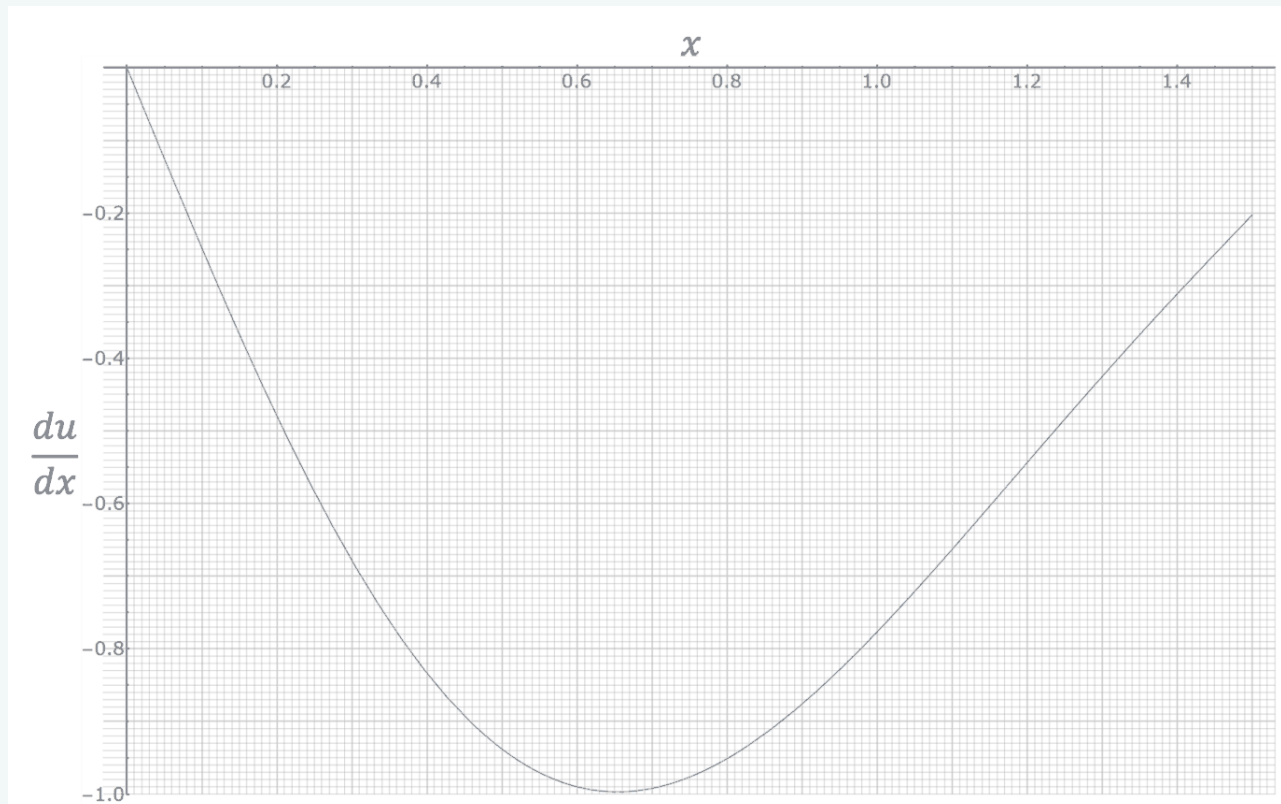


Рисунок 2 - График $\frac{du}{dx}$

В-6	Используя поведение кривой на рисунке 2 вблизи точки $x = 0$, найдите γ с точностью до 3 значащих цифр. При необходимости воспользуйтесь выданной линейкой.	0.8 балла
-----	---	-----------

Для анализа устойчивости системы предположим, что звезда немного отклоняется от состояния равновесия: сферическая оболочка, имевшая в равновесии радиус r , теперь имеет радиус $\tilde{r}$; аналогично параметры g , p и ρ изменились соответственно на $\tilde{g}$, $\tilde{p}$ и $\tilde{\rho}$. Для удобства будем рассматривать только малые r вблизи центра звезды, для которых можно считать, что $\tilde{r} = r(1 + \varepsilon(t))$, где $\varepsilon(t) \ll 1$.

В-7	Найдите $\tilde{\rho}$ и $\tilde{g}$ через ρ и g в первом порядке по ε .	0.9 балла
В-8	Используя уравнение движения Ньютона для сферического слоя с равновесным радиусом r , найдите $\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2}$ через $\tilde{g}$, $\tilde{\rho}$, K , γ и $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ (под $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ понимается производная $\tilde{\rho}$ по $\tilde{r}$ при постоянном t).	0.6 балла
В-9	Получите $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ через ε и постоянные, заданные в условии. Найдите минимальное значение γ для устойчивого равновесия и угловую частоту колебаний звезды.	0.6 балла

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Обозначим $M = M_1 + M_2$, а координаты звёзд зададим как $x_1 = -aM_2/M$ и $x_2 = aM_1/M$.

- **A-1**

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2)$$

с точностью до аддитивной постоянной.

- **A-2** Имеются три строго вогнутые ветви, каждая с одним максимумом. Потенциал стремится к $-\infty$ по обе стороны от x_1, x_2 , а также при $x \rightarrow \pm\infty$. В стандартных обозначениях максимумы расположены в следующем порядке:

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2},$$

а их высоты удовлетворяют соотношению

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3) < 0.$$

- **A-3**

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

- **A-4**

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

- **A-5** С учётом локального выделения орбитальной энергии и излучения с обеих сторон диска

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

- **A-6**

$$T(a/10) \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

- **A-7** Пороговая скорость ухода равна

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}},$$

причём для связанной орбиты требуется $v' < v'_{\text{crit}}$. При изотропном выбросе

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

Равенство в любом из этих условий соответствует предельному случаю ухода по параболической орбите.

- **B-1**

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3} G \rho_c r.$$

- **B-2** Один из удобных вариантов нормировки:

$$h_1(\rho, r) = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = 4\pi G r^2.$$

- **B-3**

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad r_0 = \sqrt{\frac{p_c}{G\rho_c^2}}.$$

- **B-4**

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

- **B-5**

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

- **B-6**

$$\gamma \simeq 1.67.$$

• В-7

$$\tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

• В-8

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K\gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

• В-9

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4) \varepsilon = 0.$$

Критическое значение равно $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$; при $\gamma > 4/3$ возникают колебания под действием возвращающей силы, а при равенстве имеет место предельный случай. Угловая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

Решение

А-1

Пусть $M = M_1 + M_2$. Условие для центра масс и расстояние между звёздами дают

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = a,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{M_2}{M} a, \quad x_2 = \frac{M_1}{M} a.$$

Если угловая скорость обращения двойной системы равна Ω , то уравнение Ньютона для любой из звёзд даёт

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

Гравитационный потенциал на единицу пробной массы равен сумме потенциалов двух точечных масс. В равномерно вращающейся системе отсчёта направленное наружу центробежное ускорение определяется потенциалом

$$\varphi_{\text{cf}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2).$$

Следовательно,

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3} (x^2 + y^2).$$

А-2

На оси x

$$\varphi(x, 0) = -\frac{GM_1}{|x - x_1|} - \frac{GM_2}{|x - x_2|} - \frac{1}{2} \Omega^2 x^2.$$

Точное описание эскиза графика имеет следующий вид:

- При $x = x_1$ и $x = x_2$ имеются вертикальные особенности, направленные вниз: потенциал стремится к $-\infty$ при приближении к каждой звезде с любой стороны.
- При больших положительных или отрицательных x

$$\varphi(x, 0) \sim -\frac{1}{2}\Omega^2 x^2,$$

поэтому оба внешних конца графика уходят к $-\infty$.

- Каждый из трёх интервалов, разделённых звёздами, содержит ровно один максимум.

Чтобы доказать последнее утверждение, вдали от точечных масс запишем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2GM_1}{|x - x_1|^3} - \frac{2GM_2}{|x - x_2|^3} - \Omega^2 < 0.$$

Таким образом, каждая ветвь строго вогнута. При переходе от одного её конца к другому производная меняет знак с положительного на отрицательный, что даёт один максимум.

Обозначим левый, внутренний и правый максимумы соответственно через L_3, L_1, L_2 . Поскольку $M_1 > M_2$, более массивная звезда находится ближе к началу координат, и

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{GM_1}{|x_1|^2} - \frac{GM_2}{x_2^2} > 0.$$

Следовательно, внутренний максимум расположен справа от начала координат:

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2}.$$

Левый внешний максимум расположен выше всех, правый внешний максимум — ниже него, а внутренний максимум — ниже всех:

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3).$$

При выборе аддитивной постоянной, принятом в А-1, вся кривая лежит ниже нуля и не пересекает горизонтальную ось. Её пересечение с вертикальной осью определяется значением

$$\varphi(0, 0) = -\frac{GM}{a} \left(\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_1} \right).$$

А-3

Газ начинает перетекать к M_1 через внутреннюю точку равновесия L_1 , в которой эффективная сила обращается в нуль. Эта точка является максимумом $\varphi(x, 0)$ вдоль прямой, соединяющей звёзды, и седловой точкой двумерного эффективного потенциала.

Здесь

$$M_1 = \frac{3}{4}M, \quad M_2 = \frac{1}{4}M,$$

поэтому

$$x_1 = -\frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3a}{4}.$$

Вводя обозначение $z = x_0/a$, запишем условие $\partial\varphi/\partial x = 0$ между звёздами в виде

$$\frac{3/4}{(z + 1/4)^2} - \frac{1/4}{(3/4 - z)^2} - z = 0.$$

Корень на интервале $-1/4 < z < 3/4$ равен

$$z = 0.360743 \dots$$

Таким образом, с точностью до двух значащих цифр

$$\boxed{\frac{x_0}{a} = 0.36}.$$

A-4

Считаем перенос вещества консервативным: вся масса, теряемая M_2 , достигает M_1 , а внешний момент сил отсутствует. В модели точечных масс пренебрегаем собственным вращением звёзд и моментом импульса, временно находящимся в потоке вещества. Следовательно,

$$\dot{M}_1 = \beta, \quad \dot{M}_2 = -\beta, \quad \dot{M} = 0,$$

и орбитальный момент импульса сохраняется.

Для двойной системы с круговыми орбитами

$$L = \frac{M_1 M_2}{M} a^2 \Omega = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}.$$

Взяв логарифмическую производную, получаем

$$0 = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

Поэтому

$$\boxed{\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right)}.$$

Закон Кеплера даёт

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Поскольку M постоянна,

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3\beta \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

Таким образом,

$$\boxed{\dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right)}.$$

При перетекании вещества от менее массивной звезды к более массивной увеличиваются и расстояние между звёздами, и период обращения.

A-5

Рассмотрим тонкий диск с почти круговыми кеплеровскими орбитами, пренебрежимо малой радиальной кинетической энергией и локальным излучением орбитальной механической энергии, теряемой веществом при пересечении кольцевого участка диска.

Условие движения по круговой орбите имеет вид

$$v^2 = \frac{GM_1}{r}.$$

Следовательно, механическая энергия газа на единицу массы равна

$$e(r) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_1}{r} = -\frac{GM_1}{2r}.$$

Рассмотрим кольцо между r и $r + dr$, где $dr > 0$. Вещество поступает через его внешний край и уходит через внутренний. При скорости переноса массы β выделяемая мощность равна

$$dL = \beta[e(r + dr) - e(r)] = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

Излучают обе стороны диска. Их суммарная площадь в пределах кольца равна

$$dA = 2(2\pi r dr) = 4\pi r dr.$$

Пренебрегая накоплением тепла и приравнивая локальное выделение энергии к излучению абсолютно чёрного тела, получаем

$$4\pi r dr \sigma T^4 = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

Отсюда

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

В частности, $T \propto r^{-3/4}$.

A-6

Полная масса и период равны

$$M = (2.27 + 0.33)(1.98 \times 10^{30}) = 5.148 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$P = 4.14(3600) = 14904 \text{ s}.$$

Закон Кеплера даёт

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1.24548 \times 10^9 \text{ m}.$$

Следовательно,

$$r = \frac{a}{10} = 1.24548 \times 10^8 \text{ m}.$$

Используя $1 \text{ yr} \simeq 3.156 \times 10^7 \text{ s}$, получаем

$$\beta = \frac{9 \times 10^{-10}(1.98 \times 10^{30})}{3.156 \times 10^7} \simeq 5.65 \times 10^{13} \text{ kg s}^{-1}.$$

При $M_1 = 2.27(1.98 \times 10^{30}) \text{ kg}$

$$T = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(2.27 \times 1.98 \times 10^{30})(5.65 \times 10^{13})}{8\pi(5.67 \times 10^{-8})(1.24548 \times 10^8)^3} \right]^{1/4}.$$

Это даёт

$$T \simeq 8.86 \times 10^3 \text{ K},$$

или

$$T \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

A-7

Взрыв происходит мгновенно, поэтому расстояние между звёздами сразу после него остаётся равным a . После того как быстро выброшенное вещество покинет систему, энергия относительного орбитального движения оставшихся звёзд равна

$$E' = \frac{1}{2} \mu' v'^2 - \frac{GM'_1 M_2}{a}, \quad \mu' = \frac{M'_1 M_2}{M'_1 + M_2}.$$

Для связанной орбиты двух тел требуется $E' < 0$. Следовательно,

$$v'^2 < \frac{2G(M'_1 + M_2)}{a},$$

и предельная скорость равна

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}}.$$

При равенстве орбита является параболической и не является связанной.

Если выброс изотропен в системе отсчёта взрывающейся звезды, отдача отсутствует.

Мгновенные скорости обеих оставшихся звёзд не изменяются. Поэтому их относительная скорость остаётся равной исходной скорости движения по круговой орбите:

$$v'^2 = \Omega^2 a^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}.$$

Подстановка в условие связанности даёт

$$M_1 + M_2 < 2(M'_1 + M_2),$$

или

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

Иными словами, может быть выброшено менее половины первоначальной полной массы двойной системы:

$$M_1 - M'_1 < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Указанный минимум является критическим порогом; равенство соответствует предельному случаю ухода.

B-1

В силу сферической симметрии гравитационное поле на радиусе r создаётся только массой, заключённой внутри этого радиуса. Вблизи центра $\rho \simeq \rho_c$, поэтому

$$m(r) \simeq \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3.$$

Считая ускорение, направленное наружу, положительным, получаем

$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

Следовательно,

$$\boxed{g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.}$$

В-2

Условие гидростатического равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = \rho g.$$

Для массы, заключённой внутри радиуса r , справедливы соотношения

$$g = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr}(r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho.$$

Используя $g = (1/\rho) dp/dr$, получаем

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

Из $p = K\rho^\gamma$ следует

$$\frac{dp}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

Таким образом, искомое уравнение для плотности имеет вид

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left(K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.}$$

Поэтому один из допустимых вариантов:

$$\boxed{h_1 = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}}, \quad \boxed{h_2 = 4\pi G r^2}.$$

Умножение обеих функций на одну и ту же ненулевую постоянную даёт эквивалентное уравнение.

В-3

Размерности соответствующих величин равны

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}, \quad [p_c] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\rho_c] = M L^{-3}.$$

Требование, чтобы $G^l p_c^m \rho_c^n$ имело размерность L , даёт

$$-l + m + n = 0, \quad 3l - m - 3n = 1, \quad -2l - 2m = 0.$$

Решая эту систему, находим

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1.$$

Отсюда

$$r_0 = \frac{\sqrt{p_c}}{\sqrt{G} \rho_c} = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}.$$

Поскольку $p_c = K \rho_c^\gamma$, полезно также записать

$$r_0^2 = \frac{K \rho_c^{\gamma-2}}{G}.$$

В-4

Подставим

$$r = r_0 x, \quad \rho = \rho_c u, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho_c}{r_0} \frac{du}{dx}$$

в уравнение из В-2:

$$K \gamma \rho_c^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi G r_0^2 \rho_c x^2 u = 0.$$

Поскольку $G r_0^2 \rho_c = K \rho_c^{\gamma-1}$, деление на $K \rho_c^{\gamma-1}$ даёт

$$\frac{d}{dx} \left(\gamma x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi x^2 u = 0.$$

Таким образом,

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

Условия в центре имеют вид

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

причём последнее следует из регулярности решения и сферической симметрии.

В-5

При $\gamma = 2$ уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx} (x^2 u') + 2\pi x^2 u = 0.$$

Пусть $u = f/x$. Тогда

$$x^2 u' = x f' - f, \quad \frac{d}{dx} (x^2 u') = x f''.$$

При $x > 0$

$$f'' + 2\pi f = 0.$$

Обозначив $k = \sqrt{2\pi}$, запишем общее решение:

$$f = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Конечность $u = f/x$ в центре требует $B = 0$. Тогда нормировка $u(0) = 1$ даёт $Ak = 1$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}},$$

и

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi} x}.$$

Физический профиль плотности заканчивается в его первом нуле, $x = \sqrt{\pi/2}$.

В-6

В этом задании вернёмся к произвольному γ . Вблизи центра регулярность решения допускает разложение

$$u(x) = 1 + cx^2 + O(x^4), \quad u'(x) = 2cx + O(x^3).$$

Подстановка в безразмерное уравнение равновесия даёт в порядке x^2

$$6\gamma c + 4\pi = 0.$$

Отсюда

$$u'(x) = -\frac{4\pi}{3\gamma}x + O(x^3).$$

Если s — угловой коэффициент касательной к графику зависимости u' от x в начале координат, то

$$s = u''(0) = -\frac{4\pi}{3\gamma}, \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3s}.$$

Касательная в начале координат на рисунке 2 имеет угловой коэффициент приблизительно

$$s \simeq -2.51.$$

Таким образом,

$$\gamma \simeq \frac{4\pi}{3(2.51)} \simeq 1.67.$$

Это согласуется с $\gamma = 5/3$.

В-7

Проследим за определённой материальной оболочкой. Её масса сохраняется при перемещении с радиуса r на радиус

$$\tilde{r} = r(1 + \varepsilon).$$

Поскольку к соседним оболочкам вблизи центра применяется тот же масштабный множитель,

$$d\tilde{r} = (1 + \varepsilon) dr.$$

Сохранение массы тонкой оболочки даёт

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r},$$

поэтому

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon)^3} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Следовательно,

$$\tilde{\rho} \simeq \rho(1 - 3\varepsilon).$$

Масса, заключённая внутри движущейся оболочки, также сохраняется. Следовательно,

$$\tilde{g} = -\frac{Gm(r)}{\tilde{r}^2} = \frac{g}{(1 + \varepsilon)^2},$$

откуда

$$\boxed{\tilde{g} \simeq g(1 - 2\varepsilon)}.$$

Здесь g отрицательно в соответствии с заданным выбором направления наружу в качестве положительного.

В-8

Направленное наружу ускорение, обусловленное давлением, равно

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

Добавляя гравитацию, запишем уравнение Ньютона:

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

Используя то же уравнение состояния для возмущённого вещества,

$$\tilde{p} = K \tilde{\rho}^\gamma,$$

получаем

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

Отсюда

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}}.$$

В-9

В фиксированный момент времени ε не зависит от метки r , обозначающей оболочку вблизи центра. Поэтому

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, t) = (1 + \varepsilon)^{-3} \rho\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \varepsilon}\right),$$

и

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = (1 + \varepsilon)^{-4} \frac{d\rho}{dr}.$$

Следовательно, член, связанный с давлением, в В-8 преобразуется следующим образом:

$$K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}.$$

В невозмущённом равновесии

$$K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = g.$$

Вместе с $\tilde{g} = g(1 + \varepsilon)^{-2}$ это даёт

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g [(1 + \varepsilon)^{-2} - (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}].$$

В первом порядке

$$(1 + \varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon,$$

$$(1 + \varepsilon)^{2-3\gamma} = 1 + (2 - 3\gamma)\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Поскольку r обозначает исходную оболочку и постоянно,

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = r\ddot{\varepsilon}.$$

Используя полученное вблизи центра соотношение $g/r = -4\pi G\rho_c/3$, находим

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Чтобы ускорение было возвращающим, коэффициент при $-\varepsilon$ должен быть положительным. Следовательно,

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

Поэтому критическое значение равно

$$\gamma_{\text{crit}} = \frac{4}{3}.$$

При равенстве возвращающая сила в этом порядке отсутствует; при $\gamma < 4/3$ существует нарастающее возмущение. При $\gamma > 4/3$ движение является гармоническим с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)} = \sqrt{4\pi G\rho_c \left(\gamma - \frac{4}{3} \right)}.$$

Полученное по графику значение $\gamma \simeq 1.67$ находится в области устойчивости.

Решение проверено по официальному решению.