

IPhO 2024

Problemas teóricos y soluciones · Isfahán, Irán · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2024/

Problema 1: El efecto invernadero

En 2021, Syukuro Manabe y Klaus Hasselmann recibieron la mitad del Premio Nobel de Física por su trabajo en la modelización del clima terrestre y la predicción precisa del calentamiento global causado por las actividades industriales humanas. En este problema, examinaremos un modelo sencillo del calentamiento global debido al efecto invernadero. Los gases de efecto invernadero alteran las propiedades ópticas de la atmósfera terrestre en cuanto a la transmisión o absorción de la radiación infrarroja de la Tierra, lo que provoca un aumento de la temperatura media del planeta.

Todos los objetos, a distintas temperaturas, emiten radiación térmica. La cantidad $u(\lambda, T)d\lambda$ indica la potencia de radiación térmica por unidad de área de un objeto a temperatura T entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$. Según la teoría de Planck de la radiación del cuerpo negro, tenemos

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

en la que $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ y $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$. La longitud de onda correspondiente al máximo de $u(\lambda, T)$ se obtiene de la relación $\lambda_{\text{max}} T = b$ (ley de desplazamiento de Wien). En efecto, utilizando la ecuación (1), se puede demostrar que $b = \frac{hc}{x_m k_B}$, donde la cantidad adimensional x_m es la raíz no trivial de una ecuación de la forma $f(x) = 0$; en una de las siguientes tareas se pide hallar la función $f(x)$. La potencia total radiada por unidad de área de un cuerpo negro en todas las longitudes de onda viene dada por la ley de Stefan–Boltzmann como $U(T) = \sigma T^4$, donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$. Además, según la ley de radiación de Kirchhoff, en equilibrio térmico, un cuerpo que absorbe una determinada fracción de la radiación incidente a una longitud de onda específica emite esa misma fracción de la radiación del cuerpo negro a esa misma longitud de onda.

A lo largo de este problema, suponga que el Sol es un cuerpo negro a su temperatura superficial media de $T_S = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$. El radio del Sol es $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ y la distancia media entre la Tierra y el Sol es $d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$. Denotamos por $\tilde{u}_S(\lambda)$ la potencia solar espectral que incide sobre una unidad de área en la Tierra perpendicular a la dirección de la radiación. La integral de esta cantidad sobre todas las longitudes de onda, es decir, $S_0 = \int \tilde{u}_S(\lambda) d\lambda$, se denomina constante solar.

En este problema, suponga que la Tierra está en equilibrio térmico y tiene la misma temperatura en todos los puntos de su superficie. En todas las partes del problema, exprese la cantidad solicitada en forma paramétrica en función de los datos proporcionados en el problema y, a

continuación, halle su valor numérico con tres cifras significativas. Las unidades requeridas se indican en la hoja de respuestas.

A. La Tierra como cuerpo negro

En esta parte, considere la superficie terrestre como un cuerpo negro y desprecie la atmósfera terrestre.

Parte	Tarea	Puntos
A-1	Halle la constante solar, S_0 .	0.6 pt
A-2	Halle la temperatura de la Tierra, T_E .	0.6 pt
A-3	Halle la función $f(x)$.	0.4 pt
A-4	Calcule el valor numérico de x_m y, a partir de este valor x_m , halle el valor de b .	0.4 pt
A-5	Halle $\lambda_{\max}$ para el Sol y la Tierra.	0.2 pt

En la figura 1 se representan las funciones $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ y $u(\lambda, T_E)$ en función de λ , donde γ es un coeficiente adimensional que permite reescalar $\tilde{u}_S(\lambda)$ de modo que los valores de los dos máximos coincidan.

Parte	Tarea	Puntos
A-6	Determine γ .	0.8 pt

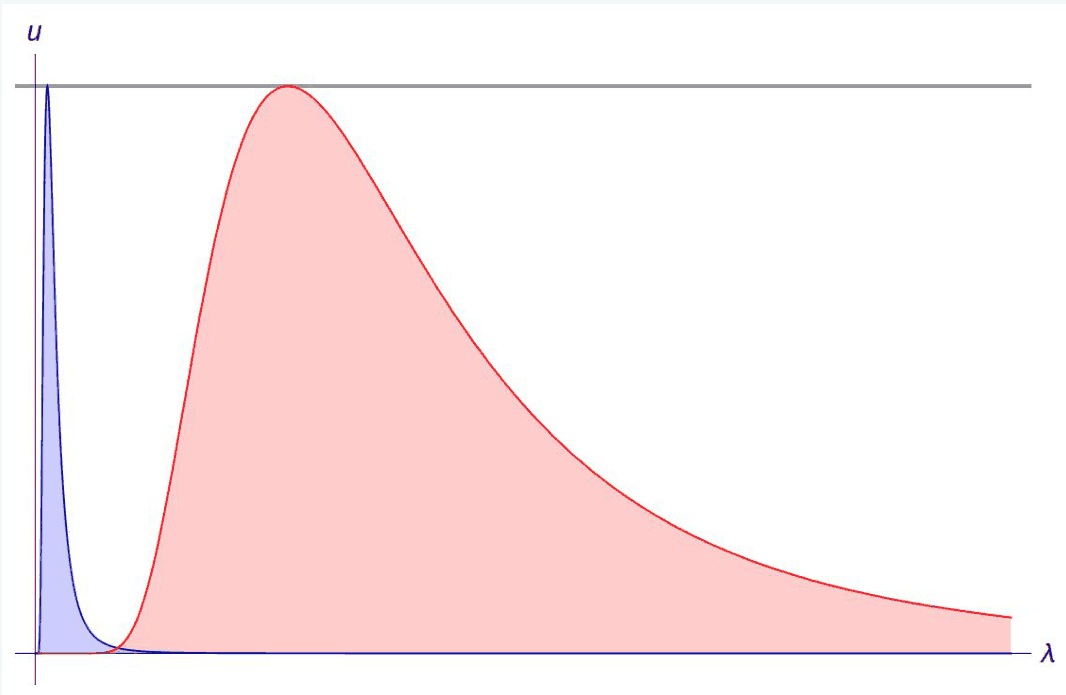


Figura 1 - Gráfica de $u(\lambda, T_E)$ (rojo) y $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ (azul) en función de λ

B. El efecto invernadero

En esta parte, introducimos un modelo sencillo en el que la atmósfera terrestre se modeliza como una capa delgada situada a poca distancia por encima de la superficie terrestre, de modo que se puede despreciar la diferencia entre el área de la capa atmosférica y el área de la superficie terrestre (véase la figura 2). En lo que sigue, suponga que la mayor parte de la radiación térmica de la Tierra y del Sol se emite a longitudes de onda próximas a la $\lambda_{\max}$ de cada uno. Suponga también que la «capa atmosférica» refleja una fracción $r_A = 0.255$ de la radiación **visible-**

ultravioleta incidente desde arriba o desde abajo, y transmite por completo el resto. Suponga que la atmósfera no refleja ninguna parte de la radiación **infrarroja**; sin embargo, absorbe una fracción ε de la radiación **infrarroja** y transmite el resto. Este comportamiento, conocido como efecto invernadero, modifica la temperatura media de la Tierra. La superficie terrestre, por su parte, refleja una fracción r_E de la radiación **visible-ultravioleta** y absorbe el resto de esta radiación y toda la radiación **infrarroja**.

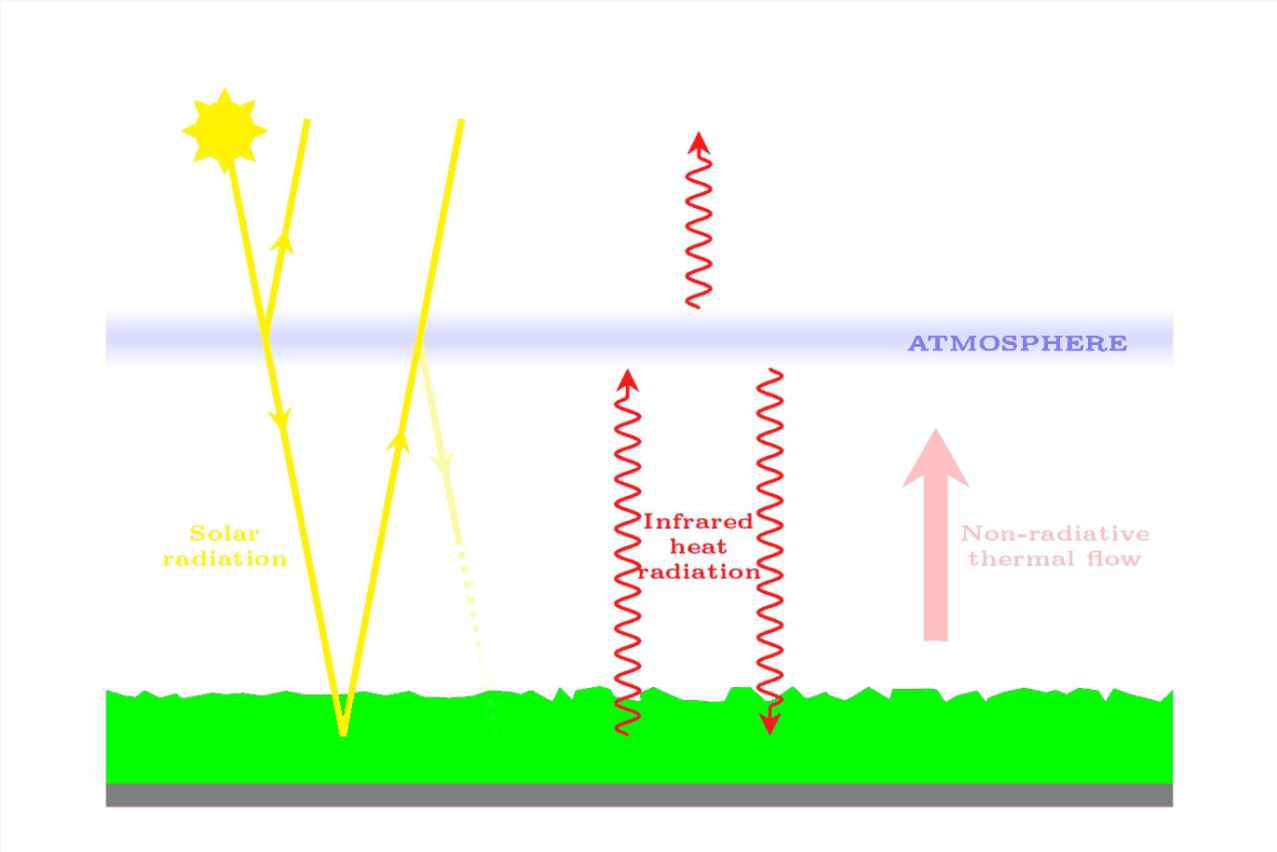


Figura 2 - Flujos térmicos entre la Tierra y la atmósfera

Parte	Tarea	Puntos
B-1	Suponga que $\varepsilon = 1$ y $r_E = 0$, y calcule la temperatura de la Tierra T_E y la temperatura de la atmósfera T_A .	1.0 pt

Suponga ahora que $r_E \neq 0$. En este caso, el sistema conjunto «Tierra + atmósfera» refleja una fracción diferente de la radiación solar, denominada «albedo» y denotada por α .

Parte	Tarea	Puntos
B-2	Determine el albedo, α , en función de r_E y r_A . A continuación, calcule su valor numérico suponiendo que $r_E = 0.102$ (y $r_A = 0.255$).	1.6 pt
B-3	a) Exprese la temperatura de la Tierra en función de σ , α , S_0 y ε . b) Utilizando los datos proporcionados y el albedo calculado, halle el valor numérico de ε que conduce a la temperatura media actual de $T_E = 288\text{ K}$ de la Tierra.	1.0 pt
B-4	Halle $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ y determine cuánto aumenta la temperatura de la Tierra si ε aumenta un uno por ciento.	0.8 pt

Suponga que $T_A = 245 \text{ K}$ y $T_E = 288 \text{ K}$. Estos valores proceden de datos reales y pueden diferir de los resultados que haya obtenido en las tareas anteriores. Suponga ahora que se mantiene un flujo térmico no radiativo (por ejemplo, convectivo) $J_{NR} = k(T_E - T_A)$ desde la Tierra hacia la atmósfera, donde k es una constante. La cantidad J_{NR} es la potencia transmitida por unidad de área.

Parte	Tarea	Puntos
B-5	Calcule ε y k en función de T_E , T_A , σ , α y S_0 .	1.6 pt
B-6	a) Derivando las ecuaciones obtenidas en la parte B-5 con respecto a ε, halle las dos ecuaciones algebraicas que satisfacen $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ y $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$. b) Utilice estas ecuaciones para hallar el valor numérico del cambio de temperatura de la Tierra como resultado de un aumento del uno por ciento en el valor de ε.	1.0 pt

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Definimos el flujo solar absorbido promediado sobre todo el planeta como

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Se interpreta un aumento del uno por ciento como $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$. Los resultados numéricos utilizan valores intermedios sin redondear.

- A-1

$$S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 = 1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

- A-2

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 278 \text{ K}.$$

- A-3

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

- A-4

$$x_m = 4.97, \quad b = \frac{hc}{x_m k_B} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

- A-5

$$\lambda_{\max,S} = \frac{b}{T_S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max,E} = \frac{b}{T_E} = 10.4 \text{ }\mu\text{m}.$$

• A-6

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 1.20 \times 10^{-2}.$$

• B-1

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = 307 \text{ K},$$

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = 258 \text{ K}.$$

• B-2

$$\alpha = r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E} = 0.313.$$

• B-3(a)

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

• B-3(b)

$$\varepsilon = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4} = 0.809.$$

• B-4

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)} = 60.4 \text{ K},$$

$$\Delta T_E \simeq 0.489 \text{ K}.$$

El cambio de temperatura es el resultado de primer orden; el cambio finito exacto es 0.491 K.

• B-5

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.849,$$

$$k = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)} = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

• B-6(a) Con $X = dT_E/d\varepsilon$ e $Y = dT_A/d\varepsilon$,

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4,$$

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

• B-6(b)

$$X = 61.7 \text{ K}, \quad Y = 47.8 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

El cambio de temperatura es el resultado de primer orden; el cambio finito exacto es 0.527 K.

Solución

A-1

La potencia total radiada por el Sol se obtiene de la ley de Stefan–Boltzmann:

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

La conservación de la potencia radiada distribuye esta luminosidad sobre una esfera de radio d . Por consiguiente,

$$S_0 = \frac{L_S}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Al sustituir los valores se obtiene

$$S_0 = 1353.076 \dots \text{ W m}^{-2} = \boxed{1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}}.$$

La misma dilución geométrica se aplica a cada longitud de onda:

$$\tilde{u}_S(\lambda) = \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u(\lambda, T_S).$$

A-2

Sea R_E el radio de la Tierra. La Tierra intercepta la luz solar sobre su área proyectada πR_E^2 , mientras que toda su superficie $4\pi R_E^2$ emite radiación térmica.

Para una Tierra considerada como un cuerpo negro en equilibrio,

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4.$$

Así,

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 277.920 \dots \text{ K}.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_E = 278 \text{ K}}.$$

A-3

Para un valor fijo de T , introducimos

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

La derivación logarítmica de la ley de Planck da

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right].$$

En un máximo a una longitud de onda finita, esta derivada se anula, de modo que

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

Por lo tanto, una función adecuada es

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

La raíz algebraica $x = 0$ corresponde a $\lambda \rightarrow \infty$, y no a un máximo a una longitud de onda finita. La raíz buscada es positiva y distinta de cero.

A-4

La raíz distinta de cero se puede obtener, por ejemplo, mediante el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5(1 - e^{-x_n}) - x_n}{5e^{-x_n} - 1}.$$

Partiendo de $x_0 = 5$, se obtiene

$$x_m = 4.965114 \dots$$

Como $x_m = hc/(\lambda_{\max} k_B T)$,

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_m k_B} = b.$$

Utilizando las constantes proporcionadas,

$$b = \frac{1.24 \times 10^3}{(4.965114 \dots)(8.62 \times 10^{-5})} \text{ nm K} = 2.897244 \dots \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Por tanto,

$$x_m = 4.97, \quad b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

La función de Planck tiende a cero en ambos extremos del intervalo de longitudes de onda, y este es su único punto estacionario finito y positivo, por lo que es el máximo.

A-5

Aplicando la ley de desplazamiento de Wien a cada cuerpo,

$$\lambda_{\max, S} = \frac{b}{T_S} = 502.122 \dots \text{ nm},$$

$$\lambda_{\max, E} = \frac{b}{T_E} = 10.4247 \dots \mu\text{m}.$$

Así,

$$\lambda_{\max, S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max, E} = 10.4 \mu\text{m}.$$

El máximo solar se encuentra en el intervalo visible, mientras que el máximo terrestre se encuentra en el infrarrojo.

A-6

En el máximo, $\lambda_{\max} = b/T$ y el argumento de la exponencial es igual a x_m . Por tanto,

$$u_{\max}(T) = \frac{2\pi hc^2}{b^5(e^{x_m} - 1)} T^5.$$

Así, el máximo de la potencia espectral por unidad de longitud de onda es proporcional a T^5 .

La igualdad de las alturas de los dos máximos representados requiere

$$\gamma \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u_{\max}(T_S) = u_{\max}(T_E),$$

lo que da

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5.$$

De A-2,

$$\left(\frac{T_E}{T_S} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Por consiguiente,

$$\gamma = \frac{T_E}{4T_S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = \boxed{1.20 \times 10^{-2}}.$$

B-1

En la parte B, la aproximación espectral indicada considera la radiación solar como visible-ultravioleta y la emisión térmica de la Tierra y de la atmósfera como infrarroja. La atmósfera no absorbe radiación solar. Según la ley de Kirchhoff, su emisividad infrarroja es igual a ε , por lo que cada cara emite un flujo $\varepsilon \sigma T_A^4$. La emisividad infrarroja de la Tierra es igual a la unidad.

Aquí, $\varepsilon = 1$ y $r_E = 0$. El flujo solar absorbido en la superficie, promediado sobre todo el planeta, es

$$Q_1 = \frac{(1 - r_A)S_0}{4}.$$

El equilibrio atmosférico requiere

$$\sigma T_E^4 = 2\sigma T_A^4,$$

porque la atmósfera absorbe la emisión ascendente de la Tierra y emite en ambas direcciones.

El balance en la superficie es

$$Q_1 + \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4.$$

Combinando las ecuaciones,

$$\sigma T_A^4 = Q_1, \quad \sigma T_E^4 = 2Q_1.$$

Por tanto,

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{258 \text{ K}},$$
$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{307 \text{ K}}.$$

B-2

Normalizamos la potencia solar entrante a la unidad. La atmósfera refleja inmediatamente una fracción r_A . La fracción que escapa al espacio tras una reflexión en la superficie es

$$(1 - r_A)r_E(1 - r_A).$$

Cada recorrido adicional de ida y vuelta entre la superficie y la atmósfera multiplica la potencia reflejada restante por $r_A r_E$.

Sumando todas las contribuciones,

$$\begin{aligned}\alpha &= r_A + r_E(1 - r_A)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_A r_E)^n \\ &= r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E}.\end{aligned}$$

De forma equivalente,

$$1 - \alpha = \frac{(1 - r_A)(1 - r_E)}{1 - r_A r_E}.$$

Con las reflectividades dadas,

$$\alpha = 0.313124\dots, \quad \boxed{\alpha = 0.313}.$$

Toda la potencia solar que no se refleja es absorbida por la superficie.

B-3

(a) Definimos

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Sin transporte de calor no radiativo, los balances de la superficie y de la atmósfera son

$$\begin{aligned}Q + \varepsilon \sigma T_A^4 &= \sigma T_E^4, \\ \varepsilon \sigma T_E^4 &= 2\varepsilon \sigma T_A^4.\end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$, la segunda ecuación da

$$T_A^4 = \frac{T_E^4}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$Q = \sigma T_E^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}}.$$

Esta expresión también se extiende de forma continua a $\varepsilon = 0$.

(b) Despejando la absortividad,

$$\varepsilon = 2 \left(1 - \frac{Q}{\sigma T_E^4}\right) = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4}.$$

Los flujos sin redondear son

$$Q = 232.348778\dots \text{ W m}^{-2}, \quad \sigma(288 \text{ K})^4 = 390.079395\dots \text{ W m}^{-2}.$$

Así,

$$\varepsilon = 0.808710 \dots, \quad \boxed{\varepsilon = 0.809}.$$

B-4

Mantenemos fijos S_0 y α . La derivación logarítmica del resultado de B-3 da

$$\frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{8(1 - \varepsilon/2)} = \frac{1}{4(2 - \varepsilon)}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)}}.$$

En el equilibrio de B-3,

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = 60.4387 \dots \text{ K} = \boxed{60.4 \text{ K}}.$$

Para un aumento relativo del uno por ciento,

$$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon.$$

A primer orden,

$$\Delta T_E \simeq \frac{dT_E}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{0.01\varepsilon T_E}{4(2 - \varepsilon)} = \boxed{0.489 \text{ K}}.$$

A modo de comparación, la evaluación directa del cambio finito da

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = T_E \left[\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 - 1.01\varepsilon} \right)^{1/4} - 1 \right] = \boxed{0.491 \text{ K}}.$$

B-5

Incluimos el flujo no radiativo ascendente

$$J_{\text{NR}} = k(T_E - T_A).$$

La superficie pierde esta energía, mientras que la atmósfera la gana. Sus ecuaciones de equilibrio pasan a ser

$$Q + \varepsilon \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A), \quad (2)$$

$$\varepsilon \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A) = 2\varepsilon \sigma T_A^4. \quad (3)$$

Por brevedad, escribimos

$$E = \sigma T_E^4, \quad A = \sigma T_A^4.$$

Al sumar los dos balances energéticos, se elimina la transferencia interna de calor:

$$Q = (1 - \varepsilon)E + \varepsilon A.$$

El miembro derecho es la radiación que escapa al espacio: la radiación de la superficie transmitida más la emisión atmosférica ascendente. Despejando,

$$\boxed{\varepsilon = \frac{E - Q}{E - A} = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)}}.$$

La ecuación (3) da

$$k(T_E - T_A) = \varepsilon(2A - E).$$

Por tanto,

$$k = \frac{\varepsilon\sigma(2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A} = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)}.$$

Para $T_E = 288 \text{ K}$ y $T_A = 245 \text{ K}$,

$$E = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad A = 204.290135 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

Por consiguiente,

$$\varepsilon = 0.849, \quad k = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

El flujo de calor resultante es

$$J_{NR} = 15.7 \text{ W m}^{-2},$$

que es positivo en el sentido ascendente estipulado.

B-6

(a) Cuando varía ε , mantenemos fijos S_0 , α y k , y permitimos que cambien ambas temperaturas. Definimos

$$X = \frac{dT_E}{d\varepsilon}, \quad Y = \frac{dT_A}{d\varepsilon}.$$

Derivando la ecuación (2), se obtiene

$$\sigma T_A^4 + 4\varepsilon\sigma T_A^3 Y = 4\sigma T_E^3 X + k(X - Y).$$

Por lo tanto,

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4.$$

Derivando la ecuación (3), se obtiene

$$\sigma T_E^4 + 4\varepsilon\sigma T_E^3 X + k(X - Y) = 2\sigma T_A^4 + 8\varepsilon\sigma T_A^3 Y.$$

Así,

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

(b) Para dar una expresión paramétrica explícita, definimos

$$p = 4\sigma T_E^3, \quad q = 4\sigma T_A^3,$$

y conservamos $E = \sigma T_E^4$, $A = \sigma T_A^4$. El determinante del sistema es

$$D = (p + k)(2\varepsilon q + k) - (\varepsilon q + k)(\varepsilon p + k) = \varepsilon(2 - \varepsilon)pq + k[(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q].$$

Al eliminar Y , se obtiene

$$X = \frac{\varepsilon q E + k(E - A)}{D}.$$

De forma análoga,

$$Y = \frac{(p + k)(E - 2A) + (\varepsilon p + k)A}{D}.$$

Utilizando los valores de equilibrio de B-5,

$$X = 61.7352 \dots \text{ K}, \quad Y = 47.7734 \dots \text{ K}.$$

Para $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$,

$$\Delta T_E \simeq X\Delta\varepsilon = (61.7352 \dots)(0.01)(0.84897597 \dots) \text{ K}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}}.$$

Al resolver los balances no lineales originales para $\varepsilon_{\text{new}} = 1.01\varepsilon$, con el mismo k , se obtiene el cambio finito

$$\boxed{\Delta T_E^{\text{finite}} = 0.527 \text{ K}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Atrapamiento de iones y enfriamiento de átomos

En las últimas décadas, el atrapamiento y el enfriamiento de átomos e iones han sido un tema fascinante para los físicos, y se han concedido varios premios Nobel por trabajos en este campo. En la primera parte de este problema, exploraremos una técnica para atrapar iones conocida como «trampa de Paul». Wolfgang Paul y Hans Dehmelt recibieron la mitad del Premio Nobel de Física de 1989 por este trabajo. A continuación, investigaremos la técnica de enfriamiento Doppler, uno de los trabajos citados en el comunicado de prensa del Premio Nobel de Física de 1997, concedido a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William Daniel Phillips «por el desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos con luz láser».

A. La trampa de Paul

Se sabe que no es posible crear un equilibrio estable para una partícula cargada mediante campos electrostáticos. Por tanto, crear un punto de equilibrio estable para iones requiere técnicas más sofisticadas. La trampa de Paul es una de estas técnicas.

Consideremos un anillo de carga de radio R con una densidad lineal de carga positiva y uniforme λ . En el centro del anillo se coloca una carga puntual positiva Q de masa m .

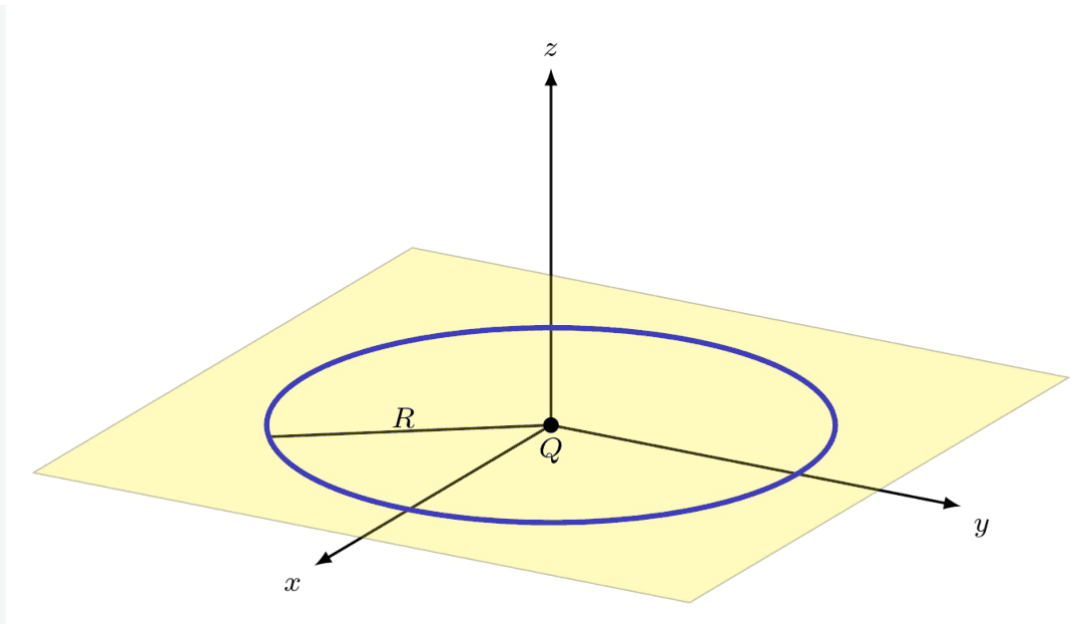


Figura 1 - Un anillo cargado positivamente con una densidad lineal de carga uniforme λ y radio R : el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el centro del anillo.

A-1	a) En coordenadas cartesianas (x, y, z), obtenga el campo eléctrico debido al anillo cargado en las proximidades de su centro, hasta primer orden en x/R, y/R y z/R. b) Halle la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de la partícula cargada alrededor del centro del anillo en las direcciones en las que existe un equilibrio estable.	1.5 pt
-----	--	--------

Para atrapar completamente la carga Q , queremos aplicar campos alternos que produzcan un equilibrio dinámico. Suponga que la densidad de carga es $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$, donde λ_0 , u y Ω son ajustables. Despreciaremos los efectos radiativos. Entonces, la ecuación de movimiento para pequeños desplazamientos respecto al centro del anillo, en la dirección perpendicular al plano del anillo, será:

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z \quad (1)$$

A-2	Exprese a y k en función de los parámetros conocidos.	0.4 pt
-----	---	--------

Queremos obtener una solución aproximada de la ecuación (1) utilizando las siguientes hipótesis simplificadoras: $a \ll 1$, $\Omega \gg k$ y $a\Omega^2 \gg k^2$. Con estas hipótesis, se puede demostrar que la solución de esta ecuación puede separarse en dos partes: $z(t) = p(t) + q(t)$, donde $p(t)$ es una componente que varía lentamente y $q(t)$ es una componente de pequeña amplitud que varía rápidamente y tiene un valor medio nulo. En otras palabras, se puede suponer que $p(t)$ permanece constante durante unas pocas oscilaciones de $q(t)$ (véase la figura 2).

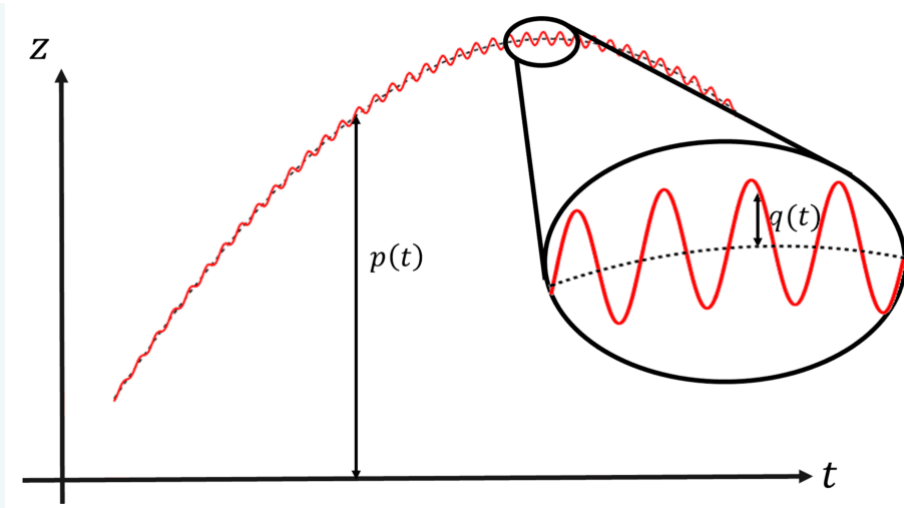


Figura 2 - Una solución típica de la ecuación de movimiento de la partícula cargada: $p(t)$ describe el movimiento global y $q(t)$ representa pequeñas oscilaciones alrededor de esta trayectoria. La elipse de la derecha muestra una ampliación de una parte de esta trayectoria.

A-3	a) Utilizando las aproximaciones indicadas anteriormente, halle la ecuación de movimiento para $q(t)$ en función de a , Ω y p .	1.8 pt
	b) Halle la solución de esta ecuación considerando condiciones iniciales apropiadas que correspondan a las propiedades requeridas de esta función.	
A-4	a) Utilice el efecto medio de la componente que varía rápidamente y obtenga una ecuación de movimiento efectiva para $p(t)$.	1.5 pt
	b) Investigue la estabilidad del punto de equilibrio y halle la condición para que el equilibrio sea estable.	

Suponga que $\lambda_0 = 8 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ y $R = 10 \text{ cm}$. Queremos utilizar este dispositivo para atrapar un átomo ionizado una sola vez, cuya masa es 100 veces la de un átomo de hidrógeno.

A-5	Calcule k . Suponga que $a = 0.04$ y estime la frecuencia mínima necesaria para estabilizar el movimiento de este ion. Utilice los datos proporcionados al final del problema.	0.4 pt
-----	--	--------

B. Enfriamiento Doppler

Puede ser necesario enfriar un átomo o ion atrapado. Suponga que un átomo atrapado de masa m tiene dos niveles de energía con una diferencia de energía $E_0 = \hbar\omega_A$. Los electrones del nivel inferior pueden absorber un fotón y pasar al nivel superior, pero, después de un tiempo τ , volverán al nivel inferior y emitirán un fotón cuya frecuencia estará predominantemente dentro del intervalo $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$.

B-1	Utilice el principio de incertidumbre de Heisenberg para hallar Γ .	0.5 pt
-----	--	--------

Mediante un razonamiento similar, cuando iluminamos el átomo atrapado con luz láser, si la frecuencia angular del láser, ω_L , se encuentra en el intervalo $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$, el átomo puede absorber el fotón. Suponga que la frecuencia ω_L de la luz láser es ligeramente inferior a ω_A . Para un dispositivo concreto, la tasa de absorción de fotones por un átomo en el sistema de referencia del átomo se muestra en la figura 3. El fotón absorbido se reemite después en una dirección aleatoria. Para simplificar, consideramos el problema en una dimensión, es decir, suponemos que

los átomos solo pueden moverse en la dirección x y que la luz láser incide sobre ellos tanto desde la izquierda como desde la derecha. En el sistema de referencia del átomo, la luz tiene una frecuencia mayor o menor debido al movimiento de los átomos. Como la velocidad v de los átomos es muy pequeña, solo incluimos términos de orden v/c y despreciamos todos los términos de orden superior. Además, se cumple $m \gg \hbar\omega_A/c^2$, de modo que la velocidad del átomo apenas cambia tras absorber el fotón. Asimismo, el cambio de frecuencia debido al efecto Doppler es tan pequeño en comparación con $\omega_A - \omega_L$ que la función de s en el diagrama de la figura 3 puede aproximarse mediante la siguiente función lineal:

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L)$$

donde s es el número de fotones absorbidos por unidad de tiempo, s_L es el valor de s para $\omega = \omega_L$ y α es la pendiente de la recta tangente a la curva en ω_L . La frecuencia del fotón reemitido es casi igual a la del fotón incidente, pero se emite con igual probabilidad en el sentido positivo o negativo de la dirección x . De hecho, hasta el orden considerado aquí, las dos frecuencias son idénticas. Observe que estamos considerando todo el proceso en el sistema de referencia del átomo.

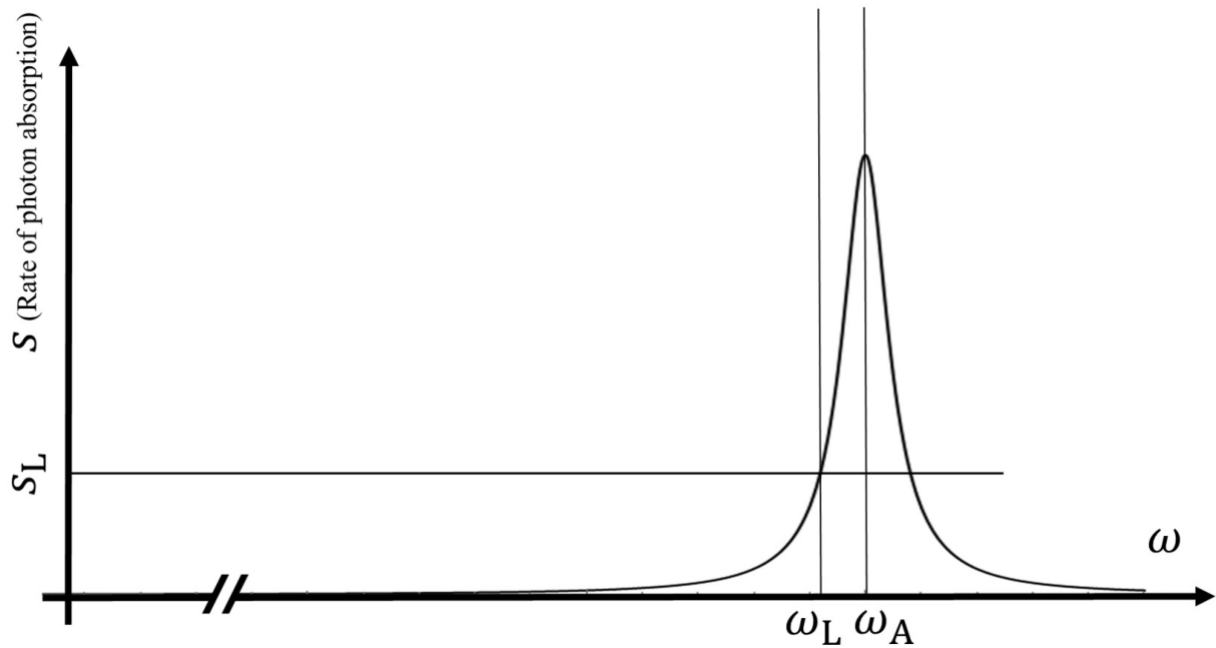


Figura 3 - La tasa de absorción de fotones en función de la frecuencia para una trampa concreta: la frecuencia correspondiente a la diferencia de energía entre los dos niveles atómicos se indica mediante ω_A , y la frecuencia ligeramente menor del láser se indica mediante ω_L .

B-2	a) Suponga que el átomo atrapado se mueve con una velocidad $v = v_x$ en el sistema del laboratorio. En el sistema de referencia del átomo, calcule la tasa de colisión de los fotones incidentes desde cada uno de los dos sentidos con los átomos (denotadas por s_+ y s_-) y la tasa de absorción de cantidad de movimiento en cada sentido (denotadas por π_+ y π_-). b) Determine la fuerza efectiva sobre el átomo en función de v, $k_L = \omega_L/c$, $\hbar$ y α, en el sistema de referencia del laboratorio. Suponga que $s_L \ll \alpha\omega_L$,	1.7 pt
-----	--	--------

Queremos hallar la temperatura más baja que puede alcanzarse mediante esta técnica. Suponga que la velocidad de un átomo concreto se ha reducido exactamente a cero y que, en ese mismo instante, absorbe un fotón (incidente desde cualquiera de los dos sentidos) y lo reemite aleatoriamente en cualquiera de los dos sentidos, con casi la misma frecuencia. Suponga que este proceso ocurre una vez cada τ unidades de tiempo.

B-3	Considerando la cantidad de movimiento del átomo después de dicho proceso para los dos resultados posibles, calcule la potencia media absorbida por el átomo.	1.0 pt
B-4	Considere la fuerza calculada en la tarea B-2 y calcule la potencia de salida. A continuación, calcule el valor medio de v^2 en el equilibrio. Utilizando sus conocimientos de la teoría cinética de los gases, estime la temperatura de los átomos.	0.8 pt
B-5	Estime esta temperatura para un átomo cuya masa es 100 veces la de un átomo de hidrógeno. Suponga que $\omega_L = 2 \times 10^{16} \text{ rad/s}$, $\tau = 5 \times 10^{-9} \text{ s}$ y $\alpha = 4$.	0.4 pt

masa del átomo de hidrógeno:	$m_H = 1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}$
carga de un electrón:	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
permitividad del vacío:	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
constante de Boltzmann:	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
constante de Planck:	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A-1(a):**

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

- **A-1(b):** Todas las direcciones del plano del anillo son estables, con

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

La dirección z es inestable.

- **A-2:**

$$a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}}.$$

- **A-3(a):** $\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t$.

- **A-3(b):** $q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t$. Si se considera p constante durante un ciclo rápido, las condiciones iniciales apropiadas son $q(0) = -ap$, $\dot{q}(0) = 0$.

- **A-4(a):**

$$\ddot{p} + \left(\frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2 \right) p = 0.$$

- **A-4(b):** El atrapamiento estable requiere, dentro de la aproximación indicada,

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

La frecuencia angular axial lenta es $\sqrt{a^2 \Omega^2 / 2 - k^2}$.

- **A-5:**

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

El umbral estimado es

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

Elija una frecuencia superior a este umbral.

- **B-1:** La escala de la anchura de línea es $\Gamma \sim 1/\tau$; utilizando la semianchura convencional debida al tiempo de vida,

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

- **B-2(a):** Sea $+$ la etiqueta de los fotones que se propagan en el sentido $+x$, y sean $\pi_{\pm}$ las tasas de transferencia de cantidad de movimiento en x , con signo. Entonces

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_{\pm} = \pm \hbar k_L \left[s_L \mp (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

- **B-2(b):**

$$F_x = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

- **B-3:**

$$P_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

- **B-4:** La tasa positiva de extracción de energía es

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

En el equilibrio,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}, \quad T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

- **B-5:**

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK}.$$

Solución

A-1(a)

El anillo se encuentra en el plano xy y tiene una carga total $2\pi R\lambda$. Por la ley de Coulomb, su campo eléctrico sobre el eje de simetría es

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Para $|z| \ll R$,

$$E_z(0, 0, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

Las simetrías de reflexión y de rotación exigen que el campo lineal general cerca del centro tenga la forma

$$E_x = Cx, \quad E_y = Cy, \quad E_z = Dz.$$

El resultado axial da $D = \lambda/(2\epsilon_0 R^2)$. No hay carga en las proximidades del centro, por lo que la ley de Gauss da

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2C + D = 0.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

A-1(b)

La segunda ley de Newton en el plano da

$$m\ddot{x} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} x, \quad m\ddot{y} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} y.$$

Estas son ecuaciones de un oscilador armónico. Por tanto, todas las direcciones del plano tienen la misma frecuencia angular,

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

A lo largo del eje,

$$m\ddot{z} = \frac{Q\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

Para $Q, \lambda > 0$, esta fuerza apunta alejándose del centro, de modo que el equilibrio axial es inestable.

A-2

Al sustituir la densidad de carga dependiente del tiempo en la ecuación axial, se obtiene

$$\ddot{z} = \frac{Q}{2\epsilon_0 m R^2} (\lambda_0 + u \cos \Omega t) z.$$

La comparación con la ecuación (1) da

$$k^2 = \frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}, \quad a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}.$$

Aquí a es adimensional y k tiene unidades de inverso de tiempo.

A-3(a)

Sustituimos $z = p + q$ en la ecuación de movimiento:

$$\ddot{p} + \ddot{q} = k^2 p + k^2 q + a\Omega^2 p \cos \Omega t + a\Omega^2 q \cos \Omega t.$$

Durante una oscilación rápida, p es aproximadamente constante. Como q tiene una amplitud pequeña, $a \ll 1$ y $a\Omega^2 \gg k^2$, la ecuación dominante de la variación rápida es

$$\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t.$$

A-3(b)

Manteniendo p constante durante la integración, se obtiene

$$q(t) = -ap \cos \Omega t + C_1 t + C_2.$$

Una componente que oscila rápidamente no puede contener una deriva secular, de modo que $C_1 = 0$. Su valor medio debe ser nulo, lo que exige $C_2 = 0$. Por tanto,

$$q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t.$$

Para p fija, las condiciones iniciales correspondientes son

$$q(0) = -ap, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

La amplitud de q es a veces la del desplazamiento lento local, en consonancia con $a \ll 1$. En este orden se desprecian las correcciones que implican la variación lenta de p .

A-4(a)

Promediamos la ecuación completa a lo largo de un período de excitación, considerando p constante durante ese período. Puesto que

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle \cos \Omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

obtenemos

$$\ddot{p} = k^2 p + a\Omega^2 \langle q \cos \Omega t \rangle.$$

Utilizando $q = -ap \cos \Omega t$,

$$\langle q \cos \Omega t \rangle = -\frac{ap}{2}.$$

Por tanto,

$$\ddot{p} = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p.$$

Aunque k^2 es pequeño en comparación con $a\Omega^2$, debe conservarse aquí: el campo alterno solo contribuye al movimiento medio en el orden $a^2 \Omega^2$.

A-4(b)

Definimos

$$\omega_s^2 = \frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2.$$

Si $\omega_s^2 > 0$, el desplazamiento lento oscila:

$$p(t) = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t,$$

y el movimiento aproximado completo,

$$z(t) \simeq p(t) (1 - a \cos \Omega t),$$

permanece acotado. Por tanto, la condición de estabilidad axial es

$$\boxed{a^2 \Omega^2 > 2k^2.}$$

Para $a > 0$, esto equivale a

$$\boxed{\Omega > \frac{\sqrt{2} k}{a}.}$$

Por debajo de este umbral, la ecuación lenta tiene una solución que crece exponencialmente. En el caso de igualdad, $\ddot{p} = 0$, de modo que una velocidad lenta no nula produce una deriva no acotada; la igualdad no proporciona confinamiento.

Para completar el análisis, la ecuación transversal es

$$\ddot{x} = - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a\Omega^2}{2} \cos \Omega t \right) x.$$

El mismo procedimiento de promediado da, para su componente lenta X ,

$$\ddot{X} + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{8} \right) X = 0,$$

y de manera idéntica para y . Estas direcciones son estables dentro de la aproximación, de modo que la condición axial proporciona el requisito para el atrapamiento en las tres direcciones.

A-5

El ion tiene

$$Q = e, \quad m = 100m_H = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad R = 0.10 \text{ m}.$$

Así,

$$k = \sqrt{\frac{(1.602 \times 10^{-19})(8 \times 10^{-9})}{2(8.854 \times 10^{-12})(1.674 \times 10^{-25})(0.10)^2}} = 2.079 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.}$$

Para el valor especificado $a = 0.04$, la frecuencia angular umbral estimada es

$$\Omega_{\text{th}} = \frac{\sqrt{2} k}{a} = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s}.$$

La frecuencia ordinaria correspondiente es

$$f_{\text{th}} = \frac{\Omega_{\text{th}}}{2\pi} = 1.170 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.}$$

Se requiere una frecuencia superior a este umbral estimado. En el umbral,

$$\frac{\Omega_{\text{th}}}{k} \simeq 35, \quad \frac{a\Omega_{\text{th}}^2}{k^2} = 50,$$

en consonancia con la separación de escalas supuesta.

B-1

El estado excitado tiene un tiempo de vida característico τ . La estimación basada en la incertidumbre energía-tiempo es

$$\Delta E \tau \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

Al identificar la semianchura energética característica como $\Delta E \simeq \hbar\Gamma$, se obtiene

$$\Gamma \tau \gtrsim \frac{1}{2}.$$

Para una anchura determinada por el tiempo de vida finito, la estimación habitual es, por tanto,

$$\boxed{\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}}.$$

La conclusión robusta del principio de incertidumbre es la escala $\Gamma \sim 1/\tau$; el factor numérico depende de cómo se defina la anchura de línea.

B-2(a)

Sea $+$ la etiqueta de los fotones que se propagan en el sentido $+x$, y $-$ la de los fotones que se propagan en el sentido $-x$. Para un átomo que se mueve con velocidad v , los desplazamientos Doppler de primer orden dan

$$\omega'_+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \omega'_- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Un fotón que viaja en el mismo sentido que el átomo experimenta un desplazamiento al rojo; uno que viaja en sentido contrario experimenta un desplazamiento al azul.

La función proporcionada $s(\omega)$ ya especifica la tasa de absorción en el sistema del átomo. Al evaluarla en estas frecuencias, se obtiene

$$s_+ = s_L + \alpha(\omega'_+ - \omega_L) = s_L - \alpha\omega_L \frac{v}{c},$$

$$s_- = s_L + \alpha(\omega'_- - \omega_L) = s_L + \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

Así,

$$\boxed{s_{\pm} = s_L \mp \alpha\omega_L \frac{v}{c}}.$$

Cada fotón absorbido tiene una cantidad de movimiento con signo $\pm \hbar\omega'_{\pm}/c$. Definiendo $\pi_{\pm}$ como las tasas de transferencia de cantidad de movimiento en x , con signo,

$$\pi_+ = \frac{\hbar\omega'_+}{c} s_+, \quad \pi_- = -\frac{\hbar\omega'_-}{c} s_-.$$

Al desarrollar y conservar únicamente los términos de primer orden en v/c ,

$$\pi_+ = \hbar k_L \left[s_L - (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right],$$

$$\pi_- = -\hbar k_L \left[s_L + (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

B-2(b)

En el sistema del átomo, la reemisión tiene una cantidad de movimiento media nula porque los dos sentidos de emisión son igualmente probables. Por tanto, la fuerza media es

$$F'_x = \pi_+ + \pi_- = -\frac{2\hbar\omega_L}{c^2}(s_L + \alpha\omega_L)v.$$

Dentro de la aproximación utilizada aquí, las energías absorbida y emitida son iguales en el sistema del átomo. Por tanto, el ciclo completo tiene una transferencia neta de energía nula en ese sistema cuando se desprecia el retroceso al calcular la fuerza media. La transformación al sistema del laboratorio deja la fuerza longitudinal inalterada hasta el orden conservado.

Utilizando $s_L \ll \alpha\omega_L$, obtenemos

$$F_x \simeq -\frac{2\alpha\hbar\omega_L^2}{c^2}v = -2\alpha\hbar k_L^2 v.$$

La frecuencia del láser se encuentra en el flanco ascendente de la curva de absorción, de modo que $\alpha > 0$. Por tanto, la fuerza se opone a la velocidad y extrae energía cinética.

B-3

Supongamos que el fotón incidente se propaga en el sentido $+x$ y que el módulo de su cantidad de movimiento es

$$p_\gamma = \hbar k_L.$$

El átomo tiene inicialmente una cantidad de movimiento nula. La conservación de la cantidad de movimiento da los dos resultados igualmente probables:

Sentido de emisión	Cantidad de movimiento final del átomo	Energía cinética final	Probabilidad
En el sentido $+x$, el sentido de incidencia	0	0	1/2
En el sentido $-x$, opuesto al sentido de incidencia	$2p_\gamma$	$2p_\gamma^2/m$	1/2

Así, la ganancia media de energía cinética por ciclo de absorción-emisión es

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2} \frac{(2p_\gamma)^2}{2m} = \frac{p_\gamma^2}{m}.$$

Un fotón incidente que viaja en el sentido $-x$ produce la misma ganancia media de energía. Como hay un ciclo completo cada τ ,

$$P_{\text{in}} = \frac{\langle \Delta K \rangle}{\tau} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

B-4

La tasa a la que la fuerza de amortiguamiento modifica la energía mecánica del átomo es

$$F_x v = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Por tanto, la potencia de salida positiva, entendida como la tasa de extracción de energía, es

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

En el equilibrio térmico, la potencia media de enfriamiento compensa el calentamiento por retroceso:

$$2\alpha \hbar k_L^2 \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

Al cancelar los factores comunes, se obtiene

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}.$$

El problema restringe el movimiento a una dimensión, de modo que la equipartición da

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

Por consiguiente,

$$T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

La masa atómica y el número de onda del láser se cancelan en la temperatura de equilibrio de este modelo.

B-5

Utilizando los valores dados,

$$T = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2(4)(1.381 \times 10^{-23})(5 \times 10^{-9})} = 1.9098 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Por tanto,

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK} \simeq 190 \mu\text{K}.$$

Para la masa especificada $m = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}$, la varianza de la velocidad correspondiente es

$$\langle v^2 \rangle = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v_{\text{rms}} \simeq 0.126 \text{ m/s}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Púlsar viuda negra

Un número considerable de las estrellas observadas forman sistemas binarios. Una de las estrellas, o ambas, pueden ser estrellas de neutrones que giran con una elevada velocidad angular y emiten ondas electromagnéticas; estas estrellas se denominan púlsares. En ocasiones, una estrella compañera es una extensa masa de gas que cae gradualmente sobre la estrella de neutrones y provoca un aumento de su masa (Figura 1-a). De este modo, una estrella de

neutrones engulle poco a poco una parte de la masa de su estrella compañera. Por esta razón, se ha comparado la estrella de neutrones con una viuda negra (o araña de espalda roja), una araña hembra que se come a su pareja después del apareamiento. El calentamiento del gas que cae sobre la viuda negra genera radiación que puede observarse. Las estrellas de neutrones más masivas suelen ser viudas negras y sirven como laboratorios naturales para poner a prueba la física fundamental. La Figura 1-b muestra una imagen de la compañera de la estrella de neutrones PSR J2215+5135, tomada con el telescopio óptico de 3.4 metros del Observatorio Nacional de Irán. En esta imagen no se puede ver ninguna estrella de neutrones, y la luz observada procede de su compañera.

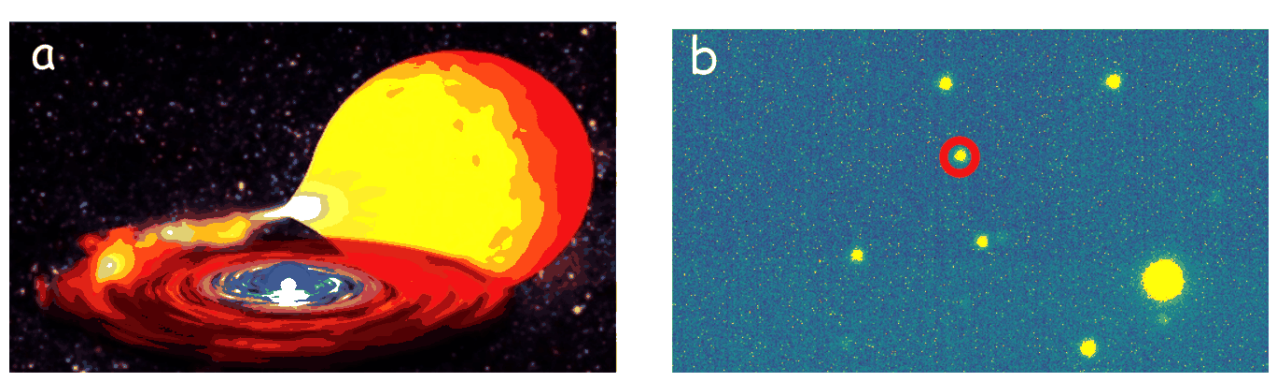


Figura 1 - (a) Los gases de la estrella compañera que caen sobre la estrella de neutrones - (b) La compañera de la estrella de neutrones PSR J2215+5135

A. Un sistema binario

Considere un modelo sencillo en el que la viuda negra y su estrella compañera se representan mediante dos masas puntuales M_1 y M_2 que describen órbitas circulares alrededor de su centro de masas. Para estudiar la dinámica de este sistema, considere un sistema de coordenadas en rotación en el que los dos cuerpos estén en reposo. Tome el centro de masas como origen del sistema de coordenadas. Suponga que las dos masas puntuales se encuentran sobre el eje x , a ambos lados del origen, separadas por una distancia a , y que M_1 se encuentra en el semieje x negativo. En un punto arbitrario (x, y) del plano del movimiento, el potencial efectivo $\varphi(x, y)$ para una masa de prueba unitaria es la suma de los potenciales gravitatorios de las dos masas puntuales más el potencial centrífugo.

A-1	Escriba $\varphi(x, y)$ en función de M_1 , M_2 , G y a .	1.0 pt
A-2	Suponiendo que $M_1 > M_2$, represente cualitativamente la función $\varphi(x, 0)$.	0.7 pt

Suponga (solo para el apartado A-3) que $M_2 = M_1/3$ y que M_2 está rodeada por un gas enrarecido de muy baja densidad. La masa de este gas es insignificante y despreciamos sus efectos gravitatorios. Si el tamaño de esta envoltura gaseosa supera cierto límite, el gas se desbordará hacia M_1 . Suponga que el desbordamiento se produce a través de $x = x_0$ sobre el eje x .

A-3	Halle el valor numérico de $\frac{x_0}{a}$, con dos cifras significativas. Puede utilizar la calculadora.	0.5 pt
-----	--	--------

Sea P el período de revolución de las estrellas alrededor de su centro de masas. Suponga que la masa fluye de M_2 a M_1 a una tasa muy pequeña de $dM_1/dt = \beta$. Esta tasa es tan pequeña que, durante cada período de revolución, puede suponerse que la distancia entre las dos estrellas es constante. Sin embargo, al cabo de un tiempo prolongado, la distancia entre las dos estrellas cambia, mientras que el movimiento sigue siendo circular.

A-4	Calcule las tasas de variación de a y P en función de β , M_1 , M_2 , G y a .	0.6 pt
-----	---	--------

El gas que se separa de M_2 forma un disco que gira alrededor de M_1 y se calienta debido al rozamiento (Figura 1-a). A medida que el gas pierde energía, se desplaza en espiral hacia M_1 y finalmente cae sobre ella. En régimen estacionario, la masa fluye a una tasa constante β , de M_2 al disco y del disco a M_1 . Al mismo tiempo, el disco caliente emite radiación térmica como un cuerpo negro. Este disco se forma muy cerca de la estrella de neutrones, por lo que puede despreciarse la atracción gravitatoria de la estrella M_2 al analizar el movimiento del disco. Desprecie también la capacidad calorífica del gas.

A-5	Determine la temperatura del disco a una distancia r del centro de la estrella M_1 en función de β , M_1 , G y σ (constante de Stefan-Boltzmann).	1.0 pt
-----	--	--------

En el sistema binario PSR J2215+5135, la masa de la estrella de neutrones es $M_{\text{NS}} = 2.27 M_{\odot}$ y la masa de su estrella compañera es $M_S = 0.33 M_{\odot}$, donde $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ es la masa del Sol. El período de revolución es $P = 4.14 \text{ hr}$, la constante de Stefan-Boltzmann es $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ y la constante de gravitación es $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$.

Suponga que la tasa de flujo de masa hacia la estrella de neutrones es $\beta = \dot{M}_{\text{NS}} = 9 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

A-6	Calcule la temperatura del disco al radio $r = \frac{a}{10}$ en kelvin.	0.5 pt
-----	---	--------

Suponga que, tras una explosión repentina, la estrella M_1 expulsa parte de su masa fuera del sistema binario a una velocidad muy elevada, y su masa pasa a ser M'_1 . Sea v' el módulo de la velocidad de M'_1 con respecto a M_2 después de la explosión.

A-7	Determine el valor máximo de v' , en función de M'_1 , M_2 , G y a , que permite que el nuevo sistema binario permanezca ligado. Suponiendo que la explosión es isotrópica, ¿cuál es el valor mínimo de M'_1 para que el sistema binario permanezca ligado?	0.7 pt
-----	---	--------

B. Análisis de la estabilidad de una estrella

En esta parte estudiamos la estabilidad de una estrella aislada. Considere una estrella que contiene un tipo específico de materia con la ecuación de estado $p = K\rho^\gamma$, donde K y γ son constantes. Sean $p(r)$ y $\rho(r)$ la presión y la densidad a una distancia r del centro de la estrella, respectivamente. La presión y la densidad en el centro de la estrella son p_c y ρ_c , respectivamente. En todos los apartados de la parte B, tome como positivos todos los vectores dirigidos hacia fuera.

B-1	Determine la aceleración gravitatoria $g(r)$ cerca del centro de la estrella en función de r y de las constantes G y ρ_c .	0.2 pt
B-2	Deduzca una ecuación (diferencial) para determinar $\rho(r)$ en el equilibrio y escríbala de la siguiente forma: $\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0$. Halle las funciones h_1 y h_2 .	0.6 pt

B-3	Construya una magnitud r_0 de la forma $r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$ que tenga dimensiones de longitud.	0.4 pt
B-4	Reescriba la ecuación (diferencial) del apartado B-2 de la siguiente forma: $\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x) u(x) = 0$, donde $x = \frac{r}{r_0}$ y $u = \frac{\rho}{\rho_c}$. Halle las funciones $A_1(u, x)$ y $A_2(x)$.	0.3 pt
B-5	Para $\gamma = 2$ se obtiene $u(x) = \frac{f(x)}{x}$. Determine $f(x)$.	0.6 pt

Suponga que, para una estrella determinada, $\frac{du}{dx}$, como función de x , viene dada por la curva de la Figura 2.

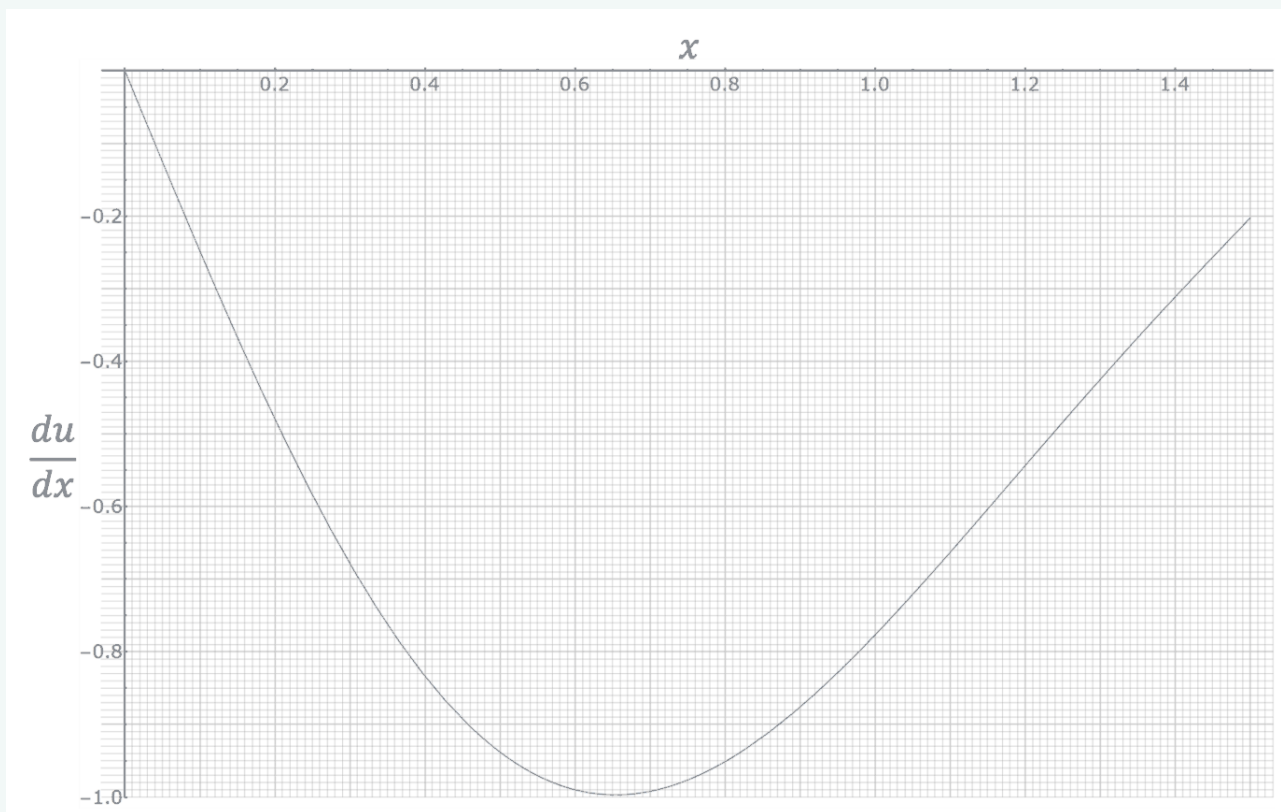


Figura 2 - Gráfica de $\frac{du}{dx}$

B-6	Utilice el comportamiento de la curva de la Figura 2 en las proximidades del punto $x = 0$ para hallar γ con 3 cifras significativas. Utilice la regla proporcionada si es necesario.	0.8 pt
-----	--	--------

Para analizar la estabilidad del sistema, suponemos que la estrella se desvía ligeramente de su estado de equilibrio: suponemos que la capa esférica que estaba en equilibrio al radio r tiene ahora un radio $\tilde{r}$; de manera análoga, los parámetros g , p y ρ han cambiado a $\tilde{g}$, $\tilde{p}$ y $\tilde{\rho}$, respectivamente. Por comodidad, solo consideraremos valores pequeños de r , cerca del centro de la estrella, para los que podemos suponer que $\tilde{r} = r(1 + \varepsilon(t))$, donde $\varepsilon(t) \ll 1$.

B-7	Halle $\tilde{\rho}$ y $\tilde{g}$ en función de ρ y g a primer orden en ε .	0.9 pt
-----	---	--------

B-8	Utilizando la ecuación de movimiento de Newton para la capa esférica cuyo radio de equilibrio es r , halle $\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2}$ en función de $\tilde{g}$, $\tilde{\rho}$, K , γ y $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ (Por $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ entendemos la derivada de $\tilde{\rho}$ con respecto a $\tilde{r}$ a t constante.)	0.6 pt
B-9	Obtenga $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ en función de ε y de las constantes dadas en el problema. Halle el valor mínimo de γ para que el equilibrio sea estable y la frecuencia angular de oscilación de la estrella.	0.6 pt

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Escribamos $M = M_1 + M_2$, y sean las posiciones estelares $x_1 = -aM_2/M$ y $x_2 = aM_1/M$.

- **A-1**

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2)$$

salvo una constante aditiva.

- **A-2** Hay tres ramas estrictamente cóncavas, cada una con un máximo. El potencial tiende a $-\infty$ a ambos lados de x_1, x_2 , y cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Con las denominaciones habituales, los máximos aparecen en el orden

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2},$$

y sus alturas satisfacen

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3) < 0.$$

- **A-3**

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

- **A-4**

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

- **A-5** Utilizando la liberación local de energía orbital y la radiación de ambas caras,

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

- **A-6**

$$T(a/10) \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

- **A-7** El umbral de velocidad de escape es

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}},$$

y una órbita ligada requiere $v' < v'_{\text{crit}}$. Para una eyección isótropa,

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

La igualdad en cualquiera de las dos condiciones corresponde al caso límite de escape parabólico.

- **B-1**

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

- **B-2** Una normalización conveniente es

$$h_1(\rho, r) = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = 4\pi G r^2.$$

- **B-3**

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad r_0 = \sqrt{\frac{p_c}{G\rho_c^2}}.$$

- **B-4**

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

- **B-5**

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

- **B-6**

$$\gamma \simeq 1.67.$$

- **B-7**

$$\tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

- **B-8**

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K\gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

• B-9

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4) \varepsilon = 0.$$

El valor crítico es $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$, con oscilaciones restauradoras para $\gamma > 4/3$ y comportamiento marginal en el caso de igualdad. Su frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

Solución

A-1

Sea $M = M_1 + M_2$. La condición del centro de masas y la separación dan

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = a,$$

de modo que

$$x_1 = -\frac{M_2}{M} a, \quad x_2 = \frac{M_1}{M} a.$$

Si la velocidad angular del sistema binario es Ω , la ecuación de Newton para cualquiera de las dos estrellas da

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

El potencial gravitatorio por unidad de masa de prueba es la suma de los potenciales de las dos masas puntuales. En el sistema de referencia que gira uniformemente, la aceleración centrífuga dirigida hacia fuera se obtiene del potencial

$$\varphi_{\text{cf}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2).$$

Por consiguiente,

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3} (x^2 + y^2).$$

A-2

Sobre el eje x ,

$$\varphi(x, 0) = -\frac{GM_1}{|x - x_1|} - \frac{GM_2}{|x - x_2|} - \frac{1}{2} \Omega^2 x^2.$$

Una descripción precisa del esbozo es la siguiente:

- Hay singularidades verticales hacia abajo en $x = x_1$ y $x = x_2$: el potencial tiende a $-\infty$ desde ambos lados de cada estrella.
- Para valores grandes de x , positivos o negativos,

$$\varphi(x, 0) \sim -\frac{1}{2} \Omega^2 x^2,$$

por lo que ambos extremos exteriores descienden hacia $-\infty$.

- Cada uno de los tres intervalos separados por las estrellas contiene exactamente un máximo.

Para demostrar el último punto, fuera de las masas,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2GM_1}{|x-x_1|^3} - \frac{2GM_2}{|x-x_2|^3} - \Omega^2 < 0.$$

Por tanto, cada rama es estrictamente cóncava. Su derivada cambia de positiva a negativa entre sus dos extremos, lo que da lugar a un máximo.

Denotemos los máximos izquierdo, interior y derecho por L_3, L_1, L_2 , respectivamente. Como $M_1 > M_2$, la estrella más masiva está más cerca del origen, y

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{GM_1}{|x_1|^2} - \frac{GM_2}{x_2^2} > 0.$$

Por tanto, el máximo interior se encuentra a la derecha del origen:

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2}.$$

El máximo exterior izquierdo es el más alto, le sigue el máximo exterior derecho, y el máximo interior es el más bajo:

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3).$$

Con la constante aditiva elegida en A-1, toda la curva es negativa y no corta el eje horizontal. Su intersección con el eje vertical es

$$\varphi(0,0) = -\frac{GM}{a} \left(\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_1} \right).$$

A-3

El gas pasa primero hacia M_1 a través del punto de equilibrio interior L_1 , donde la fuerza efectiva se anula. Este punto es un máximo de $\varphi(x, 0)$ a lo largo de la recta que une las estrellas y un punto de silla del potencial efectivo bidimensional.

En este caso,

$$M_1 = \frac{3}{4}M, \quad M_2 = \frac{1}{4}M,$$

de modo que

$$x_1 = -\frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3a}{4}.$$

Escribiendo $z = x_0/a$, la condición $\partial\varphi/\partial x = 0$ entre las estrellas se convierte en

$$\frac{3/4}{(z+1/4)^2} - \frac{1/4}{(3/4-z)^2} - z = 0.$$

La raíz en $-1/4 < z < 3/4$ es

$$z = 0.360743 \dots$$

Así pues, con dos cifras significativas,

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

A-4

Consideremos que la transferencia es conservativa: toda la masa que pierde M_2 llega a M_1 , y no hay momento de fuerzas externo. En el modelo de masas puntuales, se desprecian la rotación propia y el momento angular almacenado temporalmente en la corriente de materia. Por tanto,

$$\dot{M}_1 = \beta, \quad \dot{M}_2 = -\beta, \quad \dot{M} = 0,$$

y el momento angular orbital se conserva.

Para un sistema binario circular,

$$L = \frac{M_1 M_2}{M} a^2 \Omega = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}.$$

Tomando su derivada logarítmica,

$$0 = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

Por tanto,

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

La relación de Kepler da

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Como M es constante,

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3\beta \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

Así pues,

$$\dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

Tanto la separación como el período aumentan cuando la masa fluye de la estrella menos masiva a la más masiva.

A-5

Utilicemos un disco delgado con órbitas keplerianas casi circulares, energía cinética radial despreciable y radiación local de la energía mecánica orbital perdida mientras la materia atraviesa una corona circular.

La condición de órbita circular es

$$v^2 = \frac{GM_1}{r}.$$

La energía mecánica del gas por unidad de masa es, por consiguiente,

$$e(r) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_1}{r} = -\frac{GM_1}{2r}.$$

Consideremos una corona circular entre r y $r + dr$, donde $dr > 0$. La materia entra por su borde exterior y sale por su borde interior. Con una tasa de flujo de masa β , la potencia liberada es

$$dL = \beta [e(r + dr) - e(r)] = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

Ambas caras del disco emiten radiación. Su área anular conjunta es

$$dA = 2(2\pi r dr) = 4\pi r dr.$$

Despreciando el almacenamiento de calor e igualando la liberación local de energía a la radiación de cuerpo negro,

$$4\pi r dr \sigma T^4 = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

De aquí,

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

En particular, $T \propto r^{-3/4}$.

A-6

La masa total y el período son

$$M = (2.27 + 0.33)(1.98 \times 10^{30}) = 5.148 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$P = 4.14(3600) = 14904 \text{ s}.$$

La relación de Kepler da

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1.24548 \times 10^9 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$r = \frac{a}{10} = 1.24548 \times 10^8 \text{ m}.$$

Utilizando $1 \text{ yr} \simeq 3.156 \times 10^7 \text{ s}$,

$$\beta = \frac{9 \times 10^{-10}(1.98 \times 10^{30})}{3.156 \times 10^7} \simeq 5.65 \times 10^{13} \text{ kg s}^{-1}.$$

Con $M_1 = 2.27(1.98 \times 10^{30}) \text{ kg}$,

$$T = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(2.27 \times 1.98 \times 10^{30})(5.65 \times 10^{13})}{8\pi(5.67 \times 10^{-8})(1.24548 \times 10^8)^3} \right]^{1/4}.$$

Esto da

$$T \simeq 8.86 \times 10^3 \text{ K},$$

o bien

$$T \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

A-7

La explosión es repentina, por lo que la separación inmediatamente después sigue siendo a . Una vez que el material expulsado a gran velocidad se ha alejado, la energía orbital relativa de las estrellas restantes es

$$E' = \frac{1}{2}\mu'v'^2 - \frac{GM'_1M_2}{a}, \quad \mu' = \frac{M'_1M_2}{M'_1 + M_2}.$$

Una órbita ligada de dos cuerpos requiere $E' < 0$. Así pues,

$$v'^2 < \frac{2G(M'_1 + M_2)}{a},$$

y la velocidad límite es

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}}.$$

En el caso de igualdad, la órbita es parabólica y no está ligada.

Si la eyección es isótropa en el sistema de referencia en reposo de la estrella que explota, no hay retroceso. Las velocidades instantáneas de ambas estrellas restantes no cambian. Por tanto, su velocidad relativa sigue siendo la velocidad de la órbita circular original:

$$v'^2 = \Omega^2 a^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}.$$

Al sustituir en la condición de ligadura se obtiene

$$M_1 + M_2 < 2(M'_1 + M_2),$$

o bien

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

De forma equivalente, puede expulsarse menos de la mitad de la masa total original del sistema binario:

$$M_1 - M'_1 < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

El mínimo indicado es un umbral crítico; la igualdad corresponde al escape marginal.

B-1

Por simetría esférica, solo la masa encerrada dentro del radio r contribuye al campo gravitatorio en ese punto. Cerca del centro, $\rho \simeq \rho_c$, de modo que

$$m(r) \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_c r^3.$$

Tomando como positiva la aceleración dirigida hacia fuera,

$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

Por tanto,

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

B-2

El equilibrio hidrostático requiere

$$\frac{dp}{dr} = \rho g.$$

La masa encerrada satisface

$$g = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d}{dr}(r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho.$$

Utilizando $g = (1/\rho) dp/dr$,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

A partir de $p = K\rho^\gamma$,

$$\frac{dp}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

La ecuación requerida para la densidad es, por tanto,

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left(K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0}.$$

Así pues, una elección válida es

$$\boxed{h_1 = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}}, \quad \boxed{h_2 = 4\pi G r^2}.$$

Multiplicar ambas funciones por la misma constante no nula da una ecuación equivalente.

B-3

Las dimensiones pertinentes son

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}, \quad [p_c] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\rho_c] = M L^{-3}.$$

Exigir que $G^l p_c^m \rho_c^n$ tenga dimensión L da

$$-l + m + n = 0, \quad 3l - m - 3n = 1, \quad -2l - 2m = 0.$$

Al resolver,

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1.$$

De aquí,

$$\boxed{r_0 = \frac{\sqrt{p_c}}{\sqrt{G} \rho_c} = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}}.$$

Como $p_c = K\rho_c^\gamma$, también resulta útil escribir

$$r_0^2 = \frac{K\rho_c^{\gamma-2}}{G}.$$

B-4

Sustituimos

$$r = r_0 x, \quad \rho = \rho_c u, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho_c}{r_0} \frac{du}{dx}$$

en la ecuación de B-2:

$$K\gamma\rho_c^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi Gr_0^2 \rho_c x^2 u = 0.$$

Como $Gr_0^2 \rho_c = K\rho_c^{\gamma-1}$, al dividir por $K\rho_c^{\gamma-1}$ se obtiene

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\gamma x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi x^2 u = 0}.$$

Así pues,

$$\boxed{A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}}, \quad \boxed{A_2(x) = 4\pi x^2}.$$

Las condiciones en el centro son

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

la segunda de las cuales se deduce de la regularidad y la simetría esférica.

B-5

Para $\gamma = 2$, la ecuación se reduce a

$$\frac{d}{dx} (x^2 u') + 2\pi x^2 u = 0.$$

Sea $u = f/x$. Entonces

$$x^2 u' = x f' - f, \quad \frac{d}{dx} (x^2 u') = x f''.$$

Para $x > 0$,

$$f'' + 2\pi f = 0.$$

Escribiendo $k = \sqrt{2\pi}$, la solución general es

$$f = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Que $u = f/x$ sea finita en el centro exige $B = 0$. La normalización $u(0) = 1$ da entonces $Ak = 1$. Por tanto,

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}},$$

y

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi} x}.$$

El perfil físico de densidad termina en su primer cero, $x = \sqrt{\pi/2}$.

B-6

Para este apartado, volvamos al caso de γ general. Cerca del centro, la regularidad permite el desarrollo

$$u(x) = 1 + cx^2 + O(x^4), \quad u'(x) = 2cx + O(x^3).$$

Al sustituir en la ecuación adimensional de equilibrio se obtiene, a orden x^2 ,

$$6\gamma c + 4\pi = 0.$$

De aquí,

$$u'(x) = -\frac{4\pi}{3\gamma}x + O(x^3).$$

Si s es la pendiente en el origen de la curva representada de u' en función de x , entonces

$$s = u''(0) = -\frac{4\pi}{3\gamma}, \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3s}.$$

La tangente en el origen de la Figura 2 tiene una pendiente aproximada de

$$s \simeq -2.51.$$

Así pues,

$$\boxed{\gamma \simeq \frac{4\pi}{3(2.51)} \simeq 1.67}.$$

Esto es compatible con $\gamma = 5/3$.

B-7

Sigamos una capa material concreta. Su masa se conserva al desplazarse desde r hasta

$$\tilde{r} = r(1 + \varepsilon).$$

Como el mismo factor de escala se aplica a las capas centrales vecinas,

$$d\tilde{r} = (1 + \varepsilon) dr.$$

La conservación de la masa de una capa delgada da

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r},$$

de modo que

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon)^3} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Por tanto,

$$\boxed{\tilde{\rho} \simeq \rho(1 - 3\varepsilon)}.$$

La masa encerrada por la capa en movimiento también se conserva. Por consiguiente,

$$\tilde{g} = -\frac{Gm(r)}{\tilde{r}^2} = \frac{g}{(1 + \varepsilon)^2},$$

lo que da

$$\boxed{\tilde{g} \simeq g(1 - 2\varepsilon)}.$$

Aquí g es negativa, de acuerdo con la convención prescrita de tomar como positivo el sentido hacia fuera.

B-8

La aceleración debida a la presión y dirigida hacia fuera es

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

Al añadir la gravedad, la ecuación de Newton es

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

Utilizando la misma ecuación de estado para la materia perturbada,

$$\tilde{p} = K \tilde{\rho}^\gamma,$$

obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

De aquí,

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}}.$$

B-9

A tiempo fijo, ε es independiente de la coordenada r que identifica cada capa central. Por tanto,

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, t) = (1 + \varepsilon)^{-3} \rho \left(\frac{\tilde{r}}{1 + \varepsilon} \right),$$

y

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = (1 + \varepsilon)^{-4} \frac{d\rho}{dr}.$$

Por consiguiente, el término de presión de B-8 varía según

$$K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}.$$

En el equilibrio no perturbado,

$$K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = g.$$

Junto con $\tilde{g} = g(1 + \varepsilon)^{-2}$, esto da

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g [(1 + \varepsilon)^{-2} - (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}].$$

A primer orden,

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^{-2} &= 1 - 2\varepsilon, \\ (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma} &= 1 + (2 - 3\gamma)\varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Como r identifica la capa original y es constante,

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = r\ddot{\varepsilon}.$$

Utilizando el resultado cerca del centro $g/r = -4\pi G\rho_c/3$,

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Para que la aceleración sea restauradora, el coeficiente que multiplica a $-\varepsilon$ debe ser positivo. Por tanto,

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

El valor crítico es, por consiguiente,

$$\gamma_{\text{crit}} = \frac{4}{3}.$$

En el caso de igualdad no hay fuerza restauradora a este orden; para $\gamma < 4/3$, existe una perturbación creciente. Para $\gamma > 4/3$, el movimiento es armónico con

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)} = \sqrt{4\pi G\rho_c \left(\gamma - \frac{4}{3} \right)}.$$

El valor deducido de la gráfica, $\gamma \simeq 1.67$, se encuentra en el intervalo estable.

La solución se comprobó con la solución oficial.