

IPhO 2024

Theorieaufgaben und Lösungen · Isfahan, Iran · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2024/

Aufgabe 1: Der Treibhauseffekt

Im Jahr 2021 wurde Syukuro Manabe und Klaus Hasselmann die Hälfte des Nobelpreises für Physik für ihre Arbeiten zur Modellierung des Erdklimas und zur zuverlässigen Vorhersage der durch menschliche Industrieaktivitäten verursachten globalen Erwärmung verliehen. In dieser Aufgabe untersuchen wir ein einfaches Modell der globalen Erwärmung durch den Treibhauseffekt. Die Treibhausgase verändern die optischen Eigenschaften der Erdatmosphäre hinsichtlich der Transmission und Absorption der Infrarotstrahlung der Erde, wodurch die mittlere Temperatur des Planeten ansteigt.

Alle Körper emittieren bei unterschiedlichen Temperaturen Wärmestrahlung. Die Größe $u(\lambda, T)d\lambda$ gibt die thermische Strahlungsleistung pro Flächeneinheit eines Körpers bei der Temperatur T im Wellenlängenintervall zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ an. Nach der Planckschen Theorie der Schwarzkörperstrahlung gilt

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

wobei $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ und $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ sind. Die Wellenlänge, bei der $u(\lambda, T)$ maximal ist, ergibt sich aus der Beziehung $\lambda_{\max} T = b$ (Wiensches Verschiebungsgesetz). Mithilfe von Gleichung (1) lässt sich zeigen, dass $b = \frac{hc}{x_m k_B}$ gilt, wobei die dimensionslose Größe x_m die nichttriviale Lösung einer Gleichung der Form $f(x) = 0$ ist; in einer der folgenden Teilaufgaben sollen Sie die Funktion $f(x)$ bestimmen. Die gesamte Strahlungsleistung pro Flächeneinheit eines schwarzen Körpers über alle Wellenlängen ist nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz durch $U(T) = \sigma T^4$ gegeben, wobei $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ist. Darüber hinaus gilt nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz: Ein Körper, der im thermischen Gleichgewicht bei einer bestimmten Wellenlänge einen bestimmten Anteil der einfallenden Strahlung absorbiert, emittiert bei derselben Wellenlänge denselben Anteil der Schwarzkörperstrahlung.

Nehmen Sie in dieser gesamten Aufgabe an, dass die Sonne ein schwarzer Körper mit ihrer mittleren Oberflächentemperatur von $T_S = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$ ist. Der Sonnenradius beträgt $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, und der mittlere Abstand zwischen Erde und Sonne beträgt $d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$. Mit $\tilde{u}_S(\lambda)$ bezeichnen wir die spektrale Sonnenstrahlungsleistung, die auf eine zur Strahlungsrichtung senkrechte Einheitsfläche an der Erde fällt. Das Integral dieser Größe über alle Wellenlängen, also $S_0 = \int \tilde{u}_S(\lambda) d\lambda$, wird Solarkonstante genannt.

Nehmen Sie in dieser Aufgabe an, dass sich die Erde im thermischen Gleichgewicht befindet und an allen Punkten ihrer Oberfläche dieselbe Temperatur hat. Geben Sie in allen Teilaufgaben die gesuchte Größe zunächst als Formel in Abhängigkeit von den in der Aufgabe gegebenen Größen an und bestimmen Sie anschließend ihren Zahlenwert auf drei signifikante Stellen genau. Die erforderlichen Einheiten sind auf dem Antwortblatt angegeben.

A. Die Erde als schwarzer Körper

Betrachten Sie in diesem Teil die Erdoberfläche als schwarzen Körper und vernachlässigen Sie die Erdatmosphäre.

Teil	Aufgabe	Punkte
A-1	Bestimmen Sie die Solarkonstante S_0 .	0.6 Pkt.
A-2	Bestimmen Sie die Temperatur der Erde T_E .	0.6 Pkt.
A-3	Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$.	0.4 Pkt.
A-4	Berechnen Sie den Zahlenwert von x_m und bestimmen Sie aus diesem Wert x_m den Wert von b .	0.4 Pkt.
A-5	Bestimmen Sie $\lambda_{\max}$ für die Sonne und die Erde.	0.2 Pkt.

In Abbildung 1 sind die Funktionen $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ und $u(\lambda, T_E)$ gegen λ aufgetragen. Dabei ist γ ein dimensionsloser Koeffizient, mit dem $\tilde{u}_S(\lambda)$ so skaliert wird, dass die Werte der beiden Maxima übereinstimmen.

Teil	Aufgabe	Punkte
A-6	Bestimmen Sie γ .	0.8 Pkt.

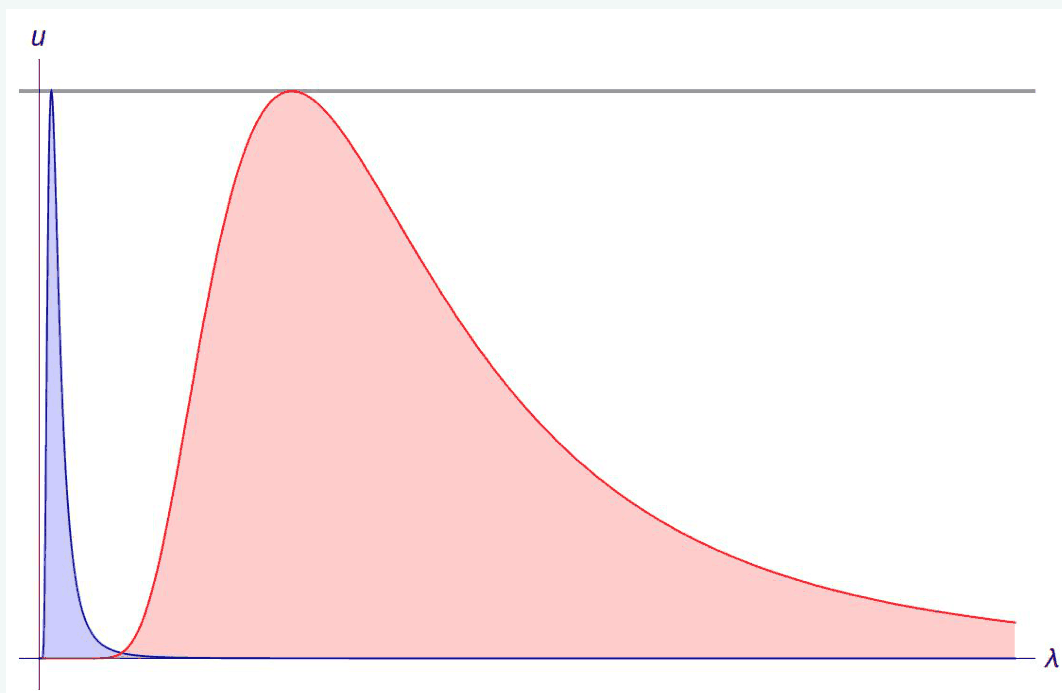


Abbildung 1 - Darstellung von $u(\lambda, T_E)$ (rot) und $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ (blau) in Abhängigkeit von λ

B. Der Treibhauseffekt

In diesem Teil führen wir ein einfaches Modell ein, in dem die Erdatmosphäre als dünne Schicht in geringer Höhe über der Erdoberfläche modelliert wird, sodass der Unterschied zwischen der Fläche der Atmosphärenschicht und der Fläche der Erdoberfläche vernachlässigt werden kann (siehe Abbildung 2). Nehmen Sie im Folgenden an, dass der überwiegende Teil der Wärmestrahlung von Erde und Sonne bei Wellenlängen in der Nähe des jeweiligen $\lambda_{\max}$ emittiert wird. Nehmen Sie außerdem an, dass die „Atmosphärenschicht“ einen Anteil $r_A = 0.255$ der von oben oder unten einfallenden **sichtbaren und ultravioletten** Strahlung reflektiert und den Rest vollständig durchlässt. Nehmen Sie an, dass die Atmosphäre keinen Anteil der **Infrarotstrahlung** reflektiert, jedoch einen Anteil ε der **Infrarotstrahlung** absorbiert und den Rest durchlässt. Dieses als Treibhauseffekt bekannte Verhalten verändert die mittlere Temperatur der Erde. Die Erdoberfläche hingegen reflektiert einen Anteil r_E der **sichtbaren und ultravioletten** Strahlung und absorbiert den Rest dieser Strahlung sowie die gesamte **Infrarotstrahlung**.

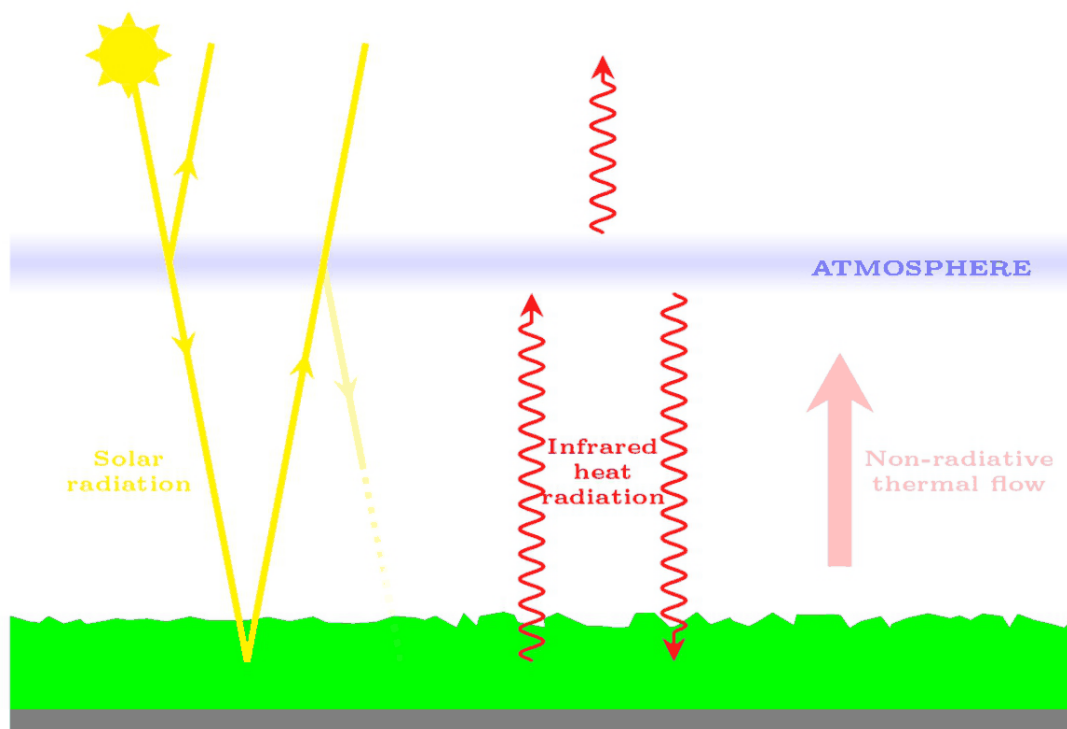


Abbildung 2 - Wärmeströme zwischen Erde und Atmosphäre

Teil	Aufgabe	Punkte
B-1	Nehmen Sie $\varepsilon = 1$ und $r_E = 0$ an und berechnen Sie die Temperatur der Erde T_E und die Temperatur der Atmosphäre T_A .	1.0 Pkt.

Nehmen Sie nun $r_E \neq 0$ an. In diesem Fall reflektiert das Gesamtsystem „Erde + Atmosphäre“ einen anderen Anteil der Sonnenstrahlung, der „Albedo“ genannt und mit α bezeichnet wird.

Teil	Aufgabe	Punkte
B-2	Bestimmen Sie die Albedo α in Abhängigkeit von r_E und r_A . Berechnen Sie anschließend ihren Zahlenwert unter der Annahme $r_E = 0.102$ (und $r_A = 0.255$).	1.6 Pkt.

Teil	Aufgabe	Punkte
	a) Drücken Sie die Temperatur der Erde durch σ , α , S_0 und ε aus.	
B-3	b) Bestimmen Sie mithilfe der gegebenen Daten und der berechneten Albedo den Zahlenwert von ε , der zur gegenwärtigen mittleren Temperatur der Erde von $T_E = 288 \text{ K}$ führt.	1.0 Pkt.
B-4	Bestimmen Sie $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ und ermitteln Sie, um wie viel die Temperatur der Erde steigt, wenn ε um ein Prozent zunimmt.	0.8 Pkt.

Nehmen Sie $T_A = 245 \text{ K}$ und $T_E = 288 \text{ K}$ an. Diese Werte stammen aus realen Daten und können von den Ergebnissen abweichen, die Sie in den vorherigen Teilaufgaben erhalten haben. Nehmen Sie nun an, dass ein nichtstrahlungsbedingter (z. B. konvektiver) Wärmestrom $J_{NR} = k(T_E - T_A)$ von der Erde zur Atmosphäre aufrechterhalten wird, wobei k eine Konstante ist. Die Größe J_{NR} ist die übertragene Leistung pro Flächeneinheit.

Teil	Aufgabe	Punkte
B-5	Berechnen Sie ε und k in Abhängigkeit von T_E , T_A , σ , α und S_0 .	1.6 Pkt.
B-6	a) Leiten Sie die in Teil B-5 erhaltenen Gleichungen nach ε ab und bestimmen Sie die beiden algebraischen Gleichungen, die $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ und $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ erfüllen. b) Bestimmen Sie mithilfe dieser Gleichungen den Zahlenwert der Änderung der Erdtemperatur infolge einer Zunahme von ε um ein Prozent.	1.0 Pkt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die global gemittelte absorbierte solare Strahlungsflussdichte sei definiert durch

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Eine Zunahme um ein Prozent wird als $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$ verstanden. Für die numerischen Ergebnisse werden ungerundete Zwischenwerte verwendet.

• A-1

$$S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 = 1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

• A-2

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 278 \text{ K}.$$

• A-3

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

• A-4

$$x_m = 4.97, \quad b = \frac{hc}{x_m k_B} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

• A-5

$$\lambda_{\max, S} = \frac{b}{T_S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max, E} = \frac{b}{T_E} = 10.4 \text{ } \mu\text{m}.$$

• A-6

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 1.20 \times 10^{-2}.$$

• B-1

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A) S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = 307 \text{ K},$$

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A) S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = 258 \text{ K}.$$

• B-2

$$\alpha = r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E} = 0.313.$$

• B-3(a)

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha) S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

• B-3(b)

$$\varepsilon = 2 - \frac{(1 - \alpha) S_0}{2\sigma T_E^4} = 0.809.$$

• B-4

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)} = 60.4 \text{ K},$$

$$\Delta T_E \simeq 0.489 \text{ K}.$$

Die Temperaturänderung ist das Ergebnis erster Ordnung; die exakte endliche Änderung beträgt 0.491 K.

• B-5

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.849,$$

$$k = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)} = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

- **B-6(a)** Mit $X = dT_E/d\varepsilon$ und $Y = dT_A/d\varepsilon$,

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4,$$

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

- **B-6(b)**

$$X = 61.7 \text{ K}, \quad Y = 47.8 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

Die Temperaturänderung ist das Ergebnis erster Ordnung; die exakte endliche Änderung beträgt 0.527 K.

Lösung

A-1

Die gesamte Strahlungsleistung der Sonne ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

Aufgrund der Erhaltung der Strahlungsleistung verteilt sich diese Leuchtkraft auf eine Kugeloberfläche mit dem Radius d . Folglich gilt

$$S_0 = \frac{L_S}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Einsetzen ergibt

$$S_0 = 1353.076 \dots \text{ W m}^{-2} = \boxed{1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}}.$$

Dieselbe geometrische Abschwächung gilt bei jeder Wellenlänge:

$$\tilde{u}_S(\lambda) = \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u(\lambda, T_S).$$

A-2

Mit R_E sei der Erdradius bezeichnet. Die Erde fängt Sonnenlicht über ihre projizierte Fläche πR_E^2 auf, während ihre gesamte Oberfläche $4\pi R_E^2$ Wärmestrahlung emittiert.

Für eine als schwarzer Körper betrachtete Erde im Gleichgewicht gilt

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4.$$

Somit ist

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 277.920 \dots \text{ K}.$$

Daher gilt

$$\boxed{T_E = 278 \text{ K}}.$$

A-3

Bei festem T definieren wir

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Logarithmisches Differenzieren des Planckschen Strahlungsgesetzes ergibt

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right].$$

Bei einem Maximum mit endlicher Wellenlänge verschwindet diese Ableitung, sodass

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

Eine geeignete Funktion ist daher

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

Die algebraische Nullstelle $x = 0$ entspricht $\lambda \rightarrow \infty$ und keinem Maximum bei endlicher Wellenlänge. Die gesuchte Nullstelle ist positiv und von null verschieden.

A-4

Die von null verschiedene Nullstelle lässt sich beispielsweise mit dem Newton-Verfahren bestimmen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5(1 - e^{-x_n}) - x_n}{5e^{-x_n} - 1}.$$

Mit dem Startwert $x_0 = 5$ erhält man

$$x_m = 4.965114 \dots$$

Da $x_m = hc/(\lambda_{\max} k_B T)$ gilt, folgt

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_m k_B} = b.$$

Mit den angegebenen Konstanten ergibt sich

$$b = \frac{1.24 \times 10^3}{(4.965114 \dots)(8.62 \times 10^{-5})} \text{ nm K} = 2.897244 \dots \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Daher gilt

$$x_m = 4.97, \quad b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Die Plancksche Funktion strebt an beiden Grenzen des Wellenlängenbereichs gegen null, und dies ist ihre einzige stationäre Stelle bei einer endlichen positiven Wellenlänge; folglich handelt es sich um das Maximum.

A-5

Die Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes auf die beiden Körper ergibt

$$\lambda_{\max, S} = \frac{b}{T_S} = 502.122 \dots \text{ nm},$$

$$\lambda_{\max, E} = \frac{b}{T_E} = 10.4247 \dots \mu\text{m}.$$

Somit gilt

$$\lambda_{\max, S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max, E} = 10.4 \mu\text{m}.$$

Das Maximum der Sonnenstrahlung liegt im sichtbaren Bereich, das der Erdstrahlung dagegen im Infrarotbereich.

A-6

Am Maximum gilt $\lambda_{\max} = b/T$, und das Argument der Exponentialfunktion ist gleich x_m . Daher ist

$$u_{\max}(T) = \frac{2\pi hc^2}{b^5(e^{x_m} - 1)} T^5.$$

Der Maximalwert der spektralen Strahlungsleistung pro Wellenlängeneinheit ist somit proportional zu T^5 .

Die Gleichheit der beiden dargestellten Maximalwerte erfordert

$$\gamma \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u_{\max}(T_S) = u_{\max}(T_E),$$

Daraus folgt

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5.$$

Aus A-2 ergibt sich

$$\left(\frac{T_E}{T_S} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

Folglich gilt

$$\gamma = \frac{T_E}{4T_S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = \boxed{1.20 \times 10^{-2}}.$$

B-1

In Teil B wird in der angegebenen spektralen Näherung die Sonnenstrahlung als sichtbare und ultraviolette Strahlung und die thermische Emission von Erde und Atmosphäre als Infrarotstrahlung behandelt. Die Atmosphäre absorbiert keine Sonnenstrahlung. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz ist ihr Emissionsgrad im Infrarotbereich gleich ε , sodass jede Seite eine Strahlungsflussdichte von $\varepsilon \sigma T_A^4$ emittiert. Der Emissionsgrad der Erde im Infrarotbereich ist eins.

Hier sind $\varepsilon = 1$ und $r_E = 0$. Die global gemittelte, an der Oberfläche absorbierte solare Strahlungsflussdichte beträgt

$$Q_1 = \frac{(1 - r_A) S_0}{4}.$$

Das Gleichgewicht der Atmosphäre erfordert

$$\sigma T_E^4 = 2\sigma T_A^4,$$

da die Atmosphäre die nach oben gerichtete Emission der Erde absorbiert und in beide Richtungen emittiert.

Die Bilanz an der Oberfläche lautet

$$Q_1 + \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4.$$

Kombinieren der Gleichungen ergibt

$$\sigma T_A^4 = Q_1, \quad \sigma T_E^4 = 2Q_1.$$

Daher gilt

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{258 \text{ K}},$$

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{307 \text{ K}}.$$

B-2

Wir normieren die einfallende Sonnenstrahlungsleistung auf eins. Die Atmosphäre reflektiert unmittelbar einen Anteil r_A . Der Anteil, der nach einer Reflexion an der Oberfläche in den Weltraum entweicht, beträgt

$$(1 - r_A)r_E(1 - r_A).$$

Bei jedem weiteren Hin- und Rückweg zwischen Oberfläche und Atmosphäre wird die verbleibende reflektierte Leistung mit $r_A r_E$ multipliziert.

Die Summe aller Beiträge ergibt

$$\begin{aligned} \alpha &= r_A + r_E(1 - r_A)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_A r_E)^n \\ &= r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E}. \end{aligned}$$

Äquivalent dazu gilt

$$1 - \alpha = \frac{(1 - r_A)(1 - r_E)}{1 - r_A r_E}.$$

Mit den gegebenen Reflexionsgraden ergibt sich

$$\alpha = 0.313124\dots, \quad \boxed{\alpha = 0.313}.$$

Die gesamte nicht reflektierte Sonnenstrahlungsleistung wird von der Oberfläche absorbiert.

B-3

(a) Wir definieren

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

Ohne nichtstrahlungsbedingten Wärmetransport lauten die Bilanzen für die Oberfläche und die Atmosphäre

$$\begin{aligned} Q + \varepsilon \sigma T_A^4 &= \sigma T_E^4, \\ \varepsilon \sigma T_E^4 &= 2\varepsilon \sigma T_A^4. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ liefert die zweite Gleichung

$$T_A^4 = \frac{T_E^4}{2}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$Q = \sigma T_E^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Daraus folgt

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich auch stetig auf $\varepsilon = 0$ fortsetzen.

(b) Umstellen nach dem Absorptionsgrad ergibt

$$\varepsilon = 2 \left(1 - \frac{Q}{\sigma T_E^4} \right) = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4}.$$

Die ungerundeten Strahlungsflussdichten sind

$$Q = 232.348778 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad \sigma(288 \text{ K})^4 = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

Somit gilt

$$\varepsilon = 0.808710 \dots, \quad \boxed{\varepsilon = 0.809}.$$

B-4

Wir halten S_0 und α konstant. Logarithmisches Differenzieren des Ergebnisses aus B-3 liefert

$$\frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{8(1 - \varepsilon/2)} = \frac{1}{4(2 - \varepsilon)}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)}}.$$

Im Gleichgewichtszustand aus B-3 ist

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = 60.4387 \dots \text{ K} = \boxed{60.4 \text{ K}}.$$

Für eine relative Zunahme um ein Prozent gilt

$$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon.$$

In erster Ordnung ist

$$\Delta T_E \simeq \frac{dT_E}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{0.01\varepsilon T_E}{4(2 - \varepsilon)} = \boxed{0.489 \text{ K}}.$$

Zum Vergleich ergibt die direkte Berechnung der endlichen Änderung

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = T_E \left[\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 - 1.01\varepsilon} \right)^{1/4} - 1 \right] = \boxed{0.491 \text{ K}}.$$

B-5

Wir berücksichtigen die nach oben gerichtete nichtstrahlungsbedingte Wärmestromdichte

$$J_{\text{NR}} = k(T_E - T_A).$$

Die Oberfläche gibt diese Energie ab, während die Atmosphäre sie aufnimmt. Ihre Gleichgewichtsbedingungen lauten nun

$$Q + \varepsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A), \quad (2)$$

$$\varepsilon \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A) = 2\varepsilon \sigma T_A^4. \quad (3)$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$E = \sigma T_E^4, \quad A = \sigma T_A^4.$$

Durch Addition der beiden Energiebilanzen entfällt der interne Wärmetransport:

$$Q = (1 - \varepsilon)E + \varepsilon A.$$

Die rechte Seite beschreibt die in den Weltraum entweichende Strahlung: die durchgelassene Oberflächenstrahlung zuzüglich der nach oben gerichteten Emission der Atmosphäre. Auflösen ergibt

$$\varepsilon = \frac{E - Q}{E - A} = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)}.$$

Gleichung (3) liefert

$$k(T_E - T_A) = \varepsilon(2A - E).$$

Daher gilt

$$k = \frac{\varepsilon \sigma (2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A} = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)}.$$

Bei $T_E = 288 \text{ K}$ und $T_A = 245 \text{ K}$ gilt

$$E = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad A = 204.290135 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

Folglich ergibt sich

$$\varepsilon = 0.849, \quad k = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

Die resultierende Wärmestromdichte beträgt

$$J_{\text{NR}} = 15.7 \text{ W m}^{-2},$$

und ist in der vorgegebenen Richtung nach oben positiv.

B-6

(a) Wenn ε variiert, halten wir S_0 , α und k konstant und lassen Änderungen beider Temperaturen zu. Wir setzen

$$X = \frac{dT_E}{d\varepsilon}, \quad Y = \frac{dT_A}{d\varepsilon}.$$

Differenzieren von Gleichung (2) ergibt

$$\sigma T_A^4 + 4\varepsilon \sigma T_A^3 Y = 4\sigma T_E^3 X + k(X - Y).$$

Daraus folgt

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4.$$

Differenzieren von Gleichung (3) ergibt

$$\sigma T_E^4 + 4\varepsilon \sigma T_E^3 X + k(X - Y) = 2\sigma T_A^4 + 8\varepsilon \sigma T_A^3 Y.$$

Somit gilt

$$-(4\varepsilon \sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

(b) Um einen expliziten Ausdruck in Abhängigkeit von den Parametern anzugeben, definieren wir

$$p = 4\sigma T_E^3, \quad q = 4\sigma T_A^3,$$

und behalten $E = \sigma T_E^4$, $A = \sigma T_A^4$ bei. Die Determinante des Gleichungssystems ist

$$D = (p + k)(2\varepsilon q + k) - (\varepsilon q + k)(\varepsilon p + k) = \varepsilon(2 - \varepsilon)pq + k[(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q].$$

Eliminieren von Y ergibt

$$X = \frac{\varepsilon q E + k(E - A)}{D}.$$

Analog gilt

$$Y = \frac{(p + k)(E - 2A) + (\varepsilon p + k)A}{D}.$$

Mit den Gleichgewichtswerten aus B-5 ergibt sich

$$X = 61.7352 \dots \text{ K}, \quad Y = 47.7734 \dots \text{ K}.$$

Für $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$ gilt

$$\Delta T_E \simeq X \Delta\varepsilon = (61.7352 \dots)(0.01)(0.84897597 \dots) \text{ K}.$$

Daher ist

$$\Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

Das Lösen der ursprünglichen nichtlinearen Bilanzgleichungen bei $\varepsilon_{\text{new}} = 1.01\varepsilon$ mit demselben k ergibt die endliche Änderung

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = 0.527 \text{ K}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Ionen einfangen und Atome kühlen

Das Einfangen und Kühlen von Atomen und Ionen war in den letzten Jahrzehnten ein faszinierendes Thema für Physiker; für Arbeiten auf diesem Gebiet wurden mehrere Nobelpreise verliehen. Im ersten Teil dieser Aufgabe untersuchen wir eine Technik zum Einfangen von Ionen, die als „Paul-Falle“ bekannt ist. Wolfgang Paul und Hans Dehmelt erhielten für diese Arbeit die Hälfte des Nobelpreises für Physik des Jahres 1989. Anschließend untersuchen wir die Dopplerkühlung, eine der Arbeiten, die in der Pressemitteilung zum Nobelpreis für Physik des Jahres 1997 genannt wurden. Dieser wurde Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji und William Daniel Phillips „für die Entwicklung von Methoden zum Kühlen und Einfangen von Atomen mit Laserlicht“ verliehen.

A. Die Paul-Falle

Bekanntlich lässt sich mit elektrostatischen Feldern kein stabiles Gleichgewicht für ein geladenes Teilchen erzeugen. Um einen stabilen Gleichgewichtspunkt für Ionen zu schaffen, sind daher ausgefeiltere Techniken erforderlich. Die Paul-Falle ist eine dieser Techniken.

Betrachten Sie einen geladenen Ring mit dem Radius R und einer gleichmäßigen positiven linearen Ladungsdichte λ . Eine positive Punktladung Q mit der Masse m befindet sich im Mittelpunkt des Rings.

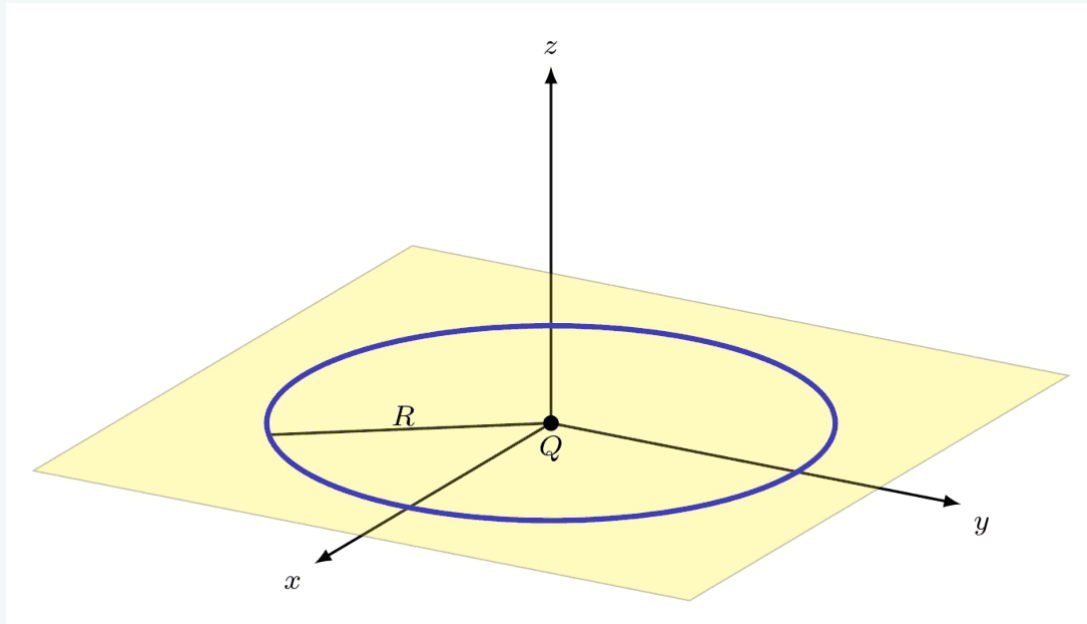


Abbildung 1 - Ein positiv geladener Ring mit einer gleichmäßigen linearen Ladungsdichte λ und dem Radius R : Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Mittelpunkt des Rings.

A-1	a) Bestimmen Sie in kartesischen Koordinaten (x, y, z) das elektrische Feld des geladenen Rings in der Nähe seines Mittelpunkts bis zur ersten Ordnung in x/R, y/R und z/R. b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz kleiner Schwingungen des geladenen Teilchens um den Mittelpunkt des Rings in den Richtungen, in denen ein stabiles Gleichgewicht besteht.	1.5 Pkt.
-----	--	----------

Um die Ladung Q vollständig einzufangen, wollen wir Wechselfelder anlegen, die ein dynamisches Gleichgewicht erzeugen. Nehmen Sie an, dass die Ladungsdichte $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$ beträgt, wobei λ_0 , u und Ω einstellbar sind. Strahlungseffekte werden vernachlässigt. Dann ergibt sich für kleine Auslenkungen aus dem Mittelpunkt des Rings senkrecht zur Ringebene die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z \quad (1)$$

A-2	Drücken Sie a und k durch die bekannten Parameter aus.	0.4 Pkt.
-----	--	----------

Wir wollen eine Näherungslösung von Gleichung (1) erhalten, indem wir die folgenden vereinfachenden Annahmen treffen: $a \ll 1$, $\Omega \gg k$ und $a\Omega^2 \gg k^2$. Unter diesen Annahmen lässt sich zeigen, dass die Lösung dieser Gleichung in zwei Anteile zerlegt werden kann: $z(t) = p(t) + q(t)$, wobei $p(t)$ ein langsam veränderlicher Anteil und $q(t)$ ein schnell veränderlicher Anteil mit kleiner Amplitude und dem Mittelwert null ist. Mit anderen Worten kann $p(t)$ über einige Schwingungen von $q(t)$ hinweg als konstant angenommen werden (siehe Abbildung 2).

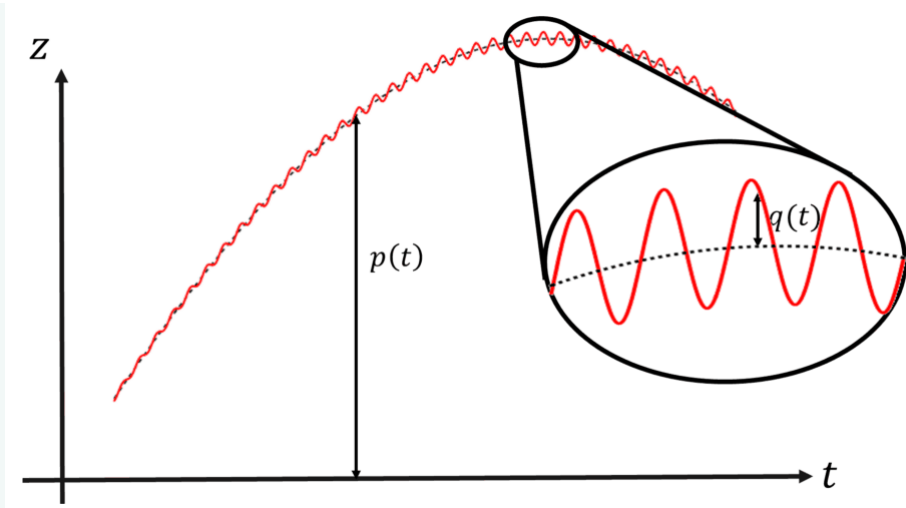


Abbildung 2 - Eine typische Lösung der Bewegungsgleichung des geladenen Teilchens: $p(t)$ beschreibt die übergeordnete Bewegung, und $q(t)$ stellt kleine Schwingungen um diese Bahn dar. Die Ellipse rechts zeigt eine Vergrößerung eines Teils dieser Bahn.

A-3	a) Bestimmen Sie mithilfe der oben angegebenen Näherungen die Bewegungsgleichung für $q(t)$ in Abhängigkeit von a, Ω und p. b) Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichung unter Berücksichtigung geeigneter Anfangsbedingungen, die den geforderten Eigenschaften dieser Funktion entsprechen.	1.8 Pkt.
A-4	a) Nutzen Sie die gemittelte Wirkung des schnell veränderlichen Anteils, um eine effektive Bewegungsgleichung für $p(t)$ zu erhalten. b) Untersuchen Sie die Stabilität des Gleichgewichtspunkts und bestimmen Sie die Bedingung für ein stabiles Gleichgewicht.	1.5 Pkt.

Nehmen Sie an, dass $\lambda_0 = 8 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ und $R = 10 \text{ cm}$ sind. Wir wollen mit dieser Vorrichtung ein einfach ionisiertes Atom einfangen, das 100-mal so schwer wie ein Wasserstoffatom ist.

A-5	Berechnen Sie k . Nehmen Sie $a = 0.04$ an und schätzen Sie die kleinste Frequenz ab, die erforderlich ist, um die Bewegung dieses Ions zu stabilisieren. Verwenden Sie die am Ende der Aufgabe angegebenen Daten.	0.4 Pkt.
-----	--	----------

B. Dopplerkühlung

Es kann erforderlich sein, ein eingefangenes Atom oder Ion zu kühlen. Nehmen Sie an, dass ein eingefangenes Atom der Masse m zwei Energieniveaus mit einer Energiedifferenz von $E_0 = \hbar\omega_A$ besitzt. Elektronen im unteren Niveau können ein Photon absorbieren und in das höhere Niveau übergehen; nach einer Zeit τ kehren sie jedoch in das untere Niveau zurück und emittieren ein Photon, dessen Frequenz überwiegend innerhalb von $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$ liegt.

B-1	Bestimmen Sie Γ mithilfe der Heisenbergschen Unschärferelation.	0.5 Pkt.
-----	--	----------

Mit einer ähnlichen Überlegung folgt: Wenn wir das eingefangene Atom mit Laserlicht bestrahlen und die Kreisfrequenz des Lasers, ω_L , im Intervall $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$ liegt, kann das Atom das Photon absorbieren. Nehmen Sie an, dass die Frequenz ω_L des Laserlichts etwas kleiner als ω_A ist. Für eine bestimmte Vorrichtung ist die Rate der Photonenabsorption durch ein Atom im

Bezugssystem des Atoms in Abbildung 3 dargestellt. Das absorbierte Photon wird anschließend in einer zufälligen Richtung wieder emittiert. Zur Vereinfachung betrachten wir das Problem eindimensional, d. h., wir nehmen an, dass sich die Atome nur in x -Richtung bewegen können und das Laserlicht sowohl von links als auch von rechts auf sie trifft. Im Bezugssystem des Atoms hat das Licht aufgrund der Bewegung der Atome eine höhere oder niedrigere Frequenz. Da die Geschwindigkeit v der Atome sehr klein ist, berücksichtigen wir nur Terme der Ordnung v/c und vernachlässigen alle Terme höherer Ordnung. Außerdem gilt $m \gg \hbar\omega_A/c^2$, sodass sich die Geschwindigkeit des Atoms nach der Absorption des Photons nahezu nicht ändert. Die Frequenzänderung durch den Dopplereffekt ist zudem im Vergleich zu $\omega_A - \omega_L$ so klein, dass die Funktion für s im Diagramm von Abbildung 3 durch die folgende lineare Funktion angenähert werden kann:

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L)$$

Dabei ist s die Anzahl der pro Zeiteinheit absorbierten Photonen, s_L der Wert von s für $\omega = \omega_L$ und α die Steigung der Tangente an die Kurve bei ω_L . Die Frequenz des wieder emittierten Photons ist nahezu gleich der Frequenz des einfallenden Photons, es wird jedoch mit gleicher Wahrscheinlichkeit in positiver oder negativer x -Richtung emittiert. Tatsächlich sind die beiden Frequenzen bis zu der hier betrachteten Ordnung identisch. Beachten Sie, dass wir den gesamten Vorgang im Bezugssystem des Atoms betrachten.

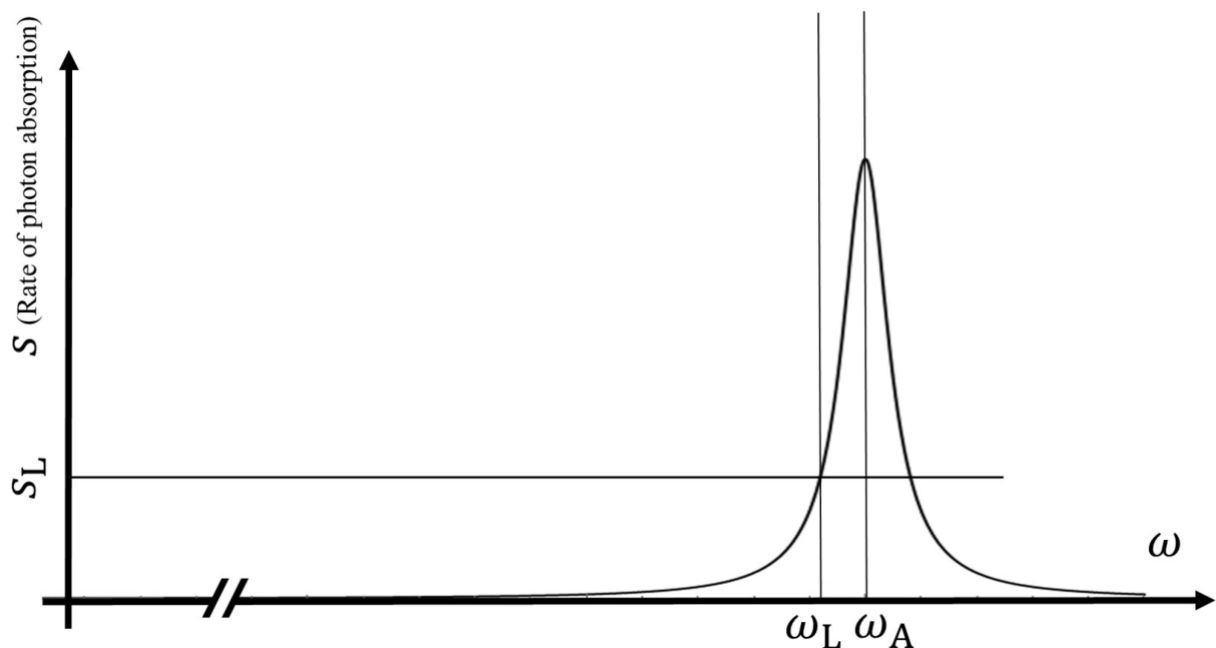


Abbildung 3 - Die Rate der Photonenabsorption als Funktion der Frequenz für eine bestimmte Falle: Die Frequenz, die der Energiedifferenz zwischen den beiden atomaren Niveaus entspricht, ist mit ω_A bezeichnet, die etwas kleinere Frequenz des Lasers mit ω_L .

B-2	a) Nehmen Sie an, dass sich das eingefangene Atom im Laborsystem mit der Geschwindigkeit $v = v_x$ bewegt. Berechnen Sie im Bezugssystem des Atoms die Kollisionsrate der aus den beiden Richtungen einfallenden Photonen mit den Atomen (bezeichnet mit s_+ und s_-) sowie die Rate der Impulsaufnahme aus jeder Richtung (bezeichnet mit π_+ und π_-).	1.7 Pkt.
-----	--	----------

b) Bestimmen Sie im Bezugssystem des Labors die effektive Kraft auf das Atom als Funktion von v , $k_L = \omega_L/c$, $\hbar$ und α . Nehmen Sie $s_L \ll \alpha\omega_L$ an.

Wir wollen die niedrigste Temperatur bestimmen, die mit dieser Technik erreicht werden kann. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit eines bestimmten Atoms genau auf null reduziert wurde und dass es genau in diesem Moment ein Photon absorbiert (das aus einer der beiden Richtungen einfällt) und das Photon mit nahezu derselben Frequenz zufällig in eine der beiden Richtungen wieder emittiert. Nehmen Sie an, dass dieser Vorgang einmal pro Zeitintervall τ stattfindet.

B-3	Betrachten Sie den Impuls des Atoms nach einem solchen Vorgang für die beiden möglichen Ergebnisse und berechnen Sie die mittlere vom Atom aufgenommene Leistung.	1.0 Pkt.
B-4	Betrachten Sie die in Teilaufgabe B-2 berechnete Kraft und berechnen Sie die abgegebene Leistung. Berechnen Sie anschließend den Mittelwert von v^2 im Gleichgewicht. Schätzen Sie mithilfe Ihrer Kenntnisse der kinetischen Gastheorie die Temperatur der Atome ab.	0.8 Pkt.
B-5	Schätzen Sie diese Temperatur für ein Atom ab, das 100-mal so schwer wie ein Wasserstoffatom ist. Nehmen Sie $\omega_L = 2 \times 10^{16}$ rad/s, $\tau = 5 \times 10^{-9}$ s und $\alpha = 4$ an.	0.4 Pkt.

Masse des Wasserstoffatoms:	$m_H = 1.674 \times 10^{-27}$ kg
Ladung eines Elektrons:	$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m
Boltzmann-Konstante:	$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K
Planck-Konstante:	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J · s

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A-1(a):**

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

- **A-1(b):** Alle Richtungen in der Ringebene sind stabil, mit

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

Die z -Richtung ist instabil.

- **A-2:**

$$a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}}.$$

- **A-3(a):** $\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t$.

- **A-3(b):** $q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t$. Wenn p während einer schnellen Schwingungsperiode als konstant behandelt wird, lauten die geeigneten Anfangsbedingungen $q(0) = -ap$, $\dot{q}(0) = 0$.

- **A-4(a):**

$$\ddot{p} + \left(\frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2 \right) p = 0.$$

- **A-4(b):** Ein stabiler Einschluss erfordert innerhalb der angegebenen Näherung

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

Die langsame axiale Kreisfrequenz beträgt $\sqrt{a^2 \Omega^2 / 2 - k^2}$.

- **A-5:**

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Der geschätzte Schwellenwert beträgt

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

Es ist eine Frequenz oberhalb dieses Schwellenwerts zu wählen.

- **B-1:** Die Größenordnung der Linienbreite ist $\Gamma \sim 1/\tau$; mit der üblichen lebensdauerbedingten Halbbreite gilt

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

- **B-2(a):** Es bezeichne $+$ Photonen, die sich entlang $+x$ ausbreiten, und $\pi_{\pm}$ seien die vorzeichenbehafteten Übertragungsraten des x -Impulses. Dann gilt

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_{\pm} = \pm \hbar k_L \left[s_L \mp (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

- **B-2(b):**

$$F_x = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

- **B-3:**

$$P_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

- **B-4:** Die positive Rate des Energieentzugs beträgt

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Im Gleichgewicht gilt

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}, \quad T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

• B-5:

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK.}$$

Lösung

A-1(a)

Der Ring liegt in der xy -Ebene und trägt die Gesamtladung $2\pi R\lambda$. Nach dem Coulombschen Gesetz beträgt sein elektrisches Feld auf der Symmetrieachse

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Für $|z| \ll R$ gilt

$$E_z(0, 0, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

Spiegelungs- und Rotationssymmetrie erfordern, dass das allgemeine lineare Feld nahe dem Mittelpunkt die Form

$$E_x = Cx, \quad E_y = Cy, \quad E_z = Dz.$$

hat. Aus dem Ergebnis auf der Achse folgt $D = \lambda/(2\epsilon_0 R^2)$. In der Umgebung des Mittelpunkts befindet sich keine Ladung, sodass das Gaußsche Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2C + D = 0.$$

liefert. Folglich gilt

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

A-1(b)

Das zweite Newtonsche Gesetz liefert in der Ebene

$$m\ddot{x} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} x, \quad m\ddot{y} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} y.$$

Dies sind die Gleichungen harmonischer Oszillatoren. Somit ergibt sich für jede Richtung in der Ebene dieselbe Kreisfrequenz,

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

Entlang der Achse gilt

$$m\ddot{z} = \frac{Q\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

Für $Q, \lambda > 0$ ist diese Kraft vom Mittelpunkt weg gerichtet, sodass das axiale Gleichgewicht instabil ist.

A-2

Einsetzen der zeitabhängigen Ladungsdichte in die axiale Gleichung ergibt

$$\ddot{z} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 m R^2} (\lambda_0 + u \cos \Omega t) z.$$

Der Vergleich mit Gleichung (1) liefert

$$k^2 = \frac{Q\lambda_0}{2\varepsilon_0 m R^2}, \quad a = \frac{Qu}{2\varepsilon_0 m R^2 \Omega^2}.$$

Dabei ist a dimensionslos, und k hat die Einheit einer inversen Zeit.

A-3(a)

Wir setzen $z = p + q$ in die Bewegungsgleichung ein:

$$\ddot{p} + \ddot{q} = k^2 p + k^2 q + a\Omega^2 p \cos \Omega t + a\Omega^2 q \cos \Omega t.$$

Über eine schnelle Schwingung hinweg ist p näherungsweise konstant. Da q eine kleine Amplitude hat und $a \ll 1$ sowie $a\Omega^2 \gg k^2$ gelten, lautet die Gleichung für den schnell veränderlichen Anteil in führender Ordnung

$$\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t.$$

A-3(b)

Wenn p während der Integration konstant gehalten wird, ergibt sich

$$q(t) = -ap \cos \Omega t + C_1 t + C_2.$$

Ein schnell schwingender Anteil kann keine säkulare Drift enthalten, daher ist $C_1 = 0$. Sein Mittelwert muss verschwinden, was $C_2 = 0$ erfordert. Somit gilt

$$q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t.$$

Für festgehaltenes p lauten die entsprechenden Anfangsbedingungen

$$q(0) = -ap, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Die Amplitude von q beträgt das a -Fache der lokalen langsamen Auslenkung, im Einklang mit $a \ll 1$. Korrekturen, die mit der langsamen Änderung von p zusammenhängen, werden in dieser Ordnung vernachlässigt.

A-4(a)

Wir mitteln die vollständige Gleichung über eine Periode des Wechselfeldes und behandeln p während dieser Periode als konstant. Wegen

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle \cos \Omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

erhalten wir

$$\ddot{p} = k^2 p + a\Omega^2 \langle q \cos \Omega t \rangle.$$

Mit $q = -ap \cos \Omega t$ gilt

$$\langle q \cos \Omega t \rangle = -\frac{ap}{2}.$$

Daher folgt

$$\ddot{p} = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p.$$

Obwohl k^2 im Vergleich zu $a\Omega^2$ klein ist, muss es hier beibehalten werden: Das Wechselfeld trägt erst in der Ordnung $a^2\Omega^2$ zur gemittelten Bewegung bei.

A-4(b)

Wir definieren

$$\omega_s^2 = \frac{a^2\Omega^2}{2} - k^2.$$

Wenn $\omega_s^2 > 0$ ist, schwingt die langsame Auslenkung:

$$p(t) = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t,$$

und die vollständige näherungsweise Bewegung,

$$z(t) \simeq p(t) (1 - a \cos \Omega t),$$

bleibt beschränkt. Somit lautet die axiale Stabilitätsbedingung

$$\boxed{a^2\Omega^2 > 2k^2.}$$

Für $a > 0$ ergibt sich daraus

$$\boxed{\Omega > \frac{\sqrt{2}k}{a}.}$$

Unterhalb dieses Schwellenwerts hat die Gleichung für die langsame Bewegung eine exponentiell anwachsende Lösung. Bei Gleichheit gilt $\ddot{p} = 0$, sodass eine von null verschiedene langsame Geschwindigkeit eine unbeschränkte Drift erzeugt; Gleichheit gewährleistet keinen Einschluss.

Der Vollständigkeit halber lautet die transversale Gleichung

$$\ddot{x} = - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a\Omega^2}{2} \cos \Omega t \right) x.$$

Dasselbe Mittelungsverfahren ergibt für ihren langsamen Anteil X

$$\ddot{X} + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a^2\Omega^2}{8} \right) X = 0,$$

und entsprechend für y . Diese Richtungen sind innerhalb der Näherung stabil, sodass die axiale Bedingung die Voraussetzung für den Einschluss in allen drei Richtungen liefert.

A-5

Für das Ion gilt

$$Q = e, \quad m = 100m_{\text{H}} = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad R = 0.10 \text{ m}.$$

Damit ist

$$k = \sqrt{\frac{(1.602 \times 10^{-19})(8 \times 10^{-9})}{2(8.854 \times 10^{-12})(1.674 \times 10^{-25})(0.10)^2}} = 2.079 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

Also gilt

$$\boxed{k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.}$$

Für den angegebenen Wert $a = 0.04$ beträgt die geschätzte Schwellenkreisfrequenz

$$\Omega_{\text{th}} = \frac{\sqrt{2}k}{a} = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s.}$$

Die entsprechende gewöhnliche Frequenz beträgt

$$f_{\text{th}} = \frac{\Omega_{\text{th}}}{2\pi} = 1.170 \times 10^6 \text{ Hz.}$$

Somit ergibt sich

$$\boxed{\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s,} \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz.}}$$

Eine Frequenz oberhalb dieses geschätzten Schwellenwerts ist erforderlich. Am Schwellenwert gilt

$$\frac{\Omega_{\text{th}}}{k} \simeq 35, \quad \frac{a\Omega_{\text{th}}^2}{k^2} = 50,$$

im Einklang mit der angenommenen Trennung der Skalen.

B-1

Der angeregte Zustand hat eine charakteristische Lebensdauer τ . Die Abschätzung anhand der Energie-Zeit-Unschärferelation lautet

$$\Delta E \tau \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

Setzt man die charakteristische energetische Halbbreite als $\Delta E \simeq \hbar\Gamma$ an, ergibt sich

$$\Gamma \tau \gtrsim \frac{1}{2}.$$

Für eine durch die endliche Lebensdauer bestimmte Breite lautet die übliche Abschätzung daher

$$\boxed{\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

Die belastbare Schlussfolgerung aus der Unschärferelation ist die Größenordnung $\Gamma \sim 1/\tau$; der Zahlenfaktor hängt davon ab, wie die Linienbreite definiert wird.

B-2(a)

Es kennzeichne $+$ Photonen, die sich entlang $+x$ ausbreiten, und $-$ Photonen, die sich entlang $-x$ ausbreiten. Für ein Atom, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, ergeben die Dopplerverschiebungen in erster Ordnung

$$\omega'_+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \omega'_- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Ein Photon, das sich in derselben Richtung wie das Atom bewegt, ist rotverschoben; eines, das ihm entgegentläuft, ist blauverschoben.

Die angegebene Funktion $s(\omega)$ beschreibt bereits die Absorptionsrate im Bezugssystem des Atoms. Ihre Auswertung bei diesen Frequenzen ergibt

$$s_+ = s_L + \alpha(\omega'_+ - \omega_L) = s_L - \alpha\omega_L \frac{v}{c},$$

$$s_- = s_L + \alpha(\omega'_- - \omega_L) = s_L + \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

Somit gilt

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c}.$$

Jedes absorbierte Photon hat den vorzeichenbehafteten Impuls $\pm \hbar \omega'_{\pm}/c$. Definieren wir $\pi_{\pm}$ als die vorzeichenbehafteten Übertragungsraten des x -Impulses, so gilt

$$\pi_+ = \frac{\hbar \omega'_+}{c} s_+, \quad \pi_- = -\frac{\hbar \omega'_-}{c} s_-.$$

Durch Ausmultiplizieren und Beibehalten nur der Terme erster Ordnung in v/c folgt

$$\pi_+ = \hbar k_L \left[s_L - (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right],$$

$$\pi_- = -\hbar k_L \left[s_L + (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

B-2(b)

Im Bezugssystem des Atoms ist der mittlere Impuls bei der Wiederemission null, da die beiden Emissionsrichtungen gleich wahrscheinlich sind. Daher beträgt die mittlere Kraft

$$F'_x = \pi_+ + \pi_- = -\frac{2\hbar \omega_L}{c^2} (s_L + \alpha \omega_L) v.$$

Innerhalb der hier verwendeten Näherung sind die absorbierte und die emittierte Energie im Bezugssystem des Atoms gleich. Über einen vollständigen Zyklus hinweg ist daher die Nettoenergieübertragung in diesem Bezugssystem null, wenn der Rückstoß bei der Berechnung der mittleren Kraft vernachlässigt wird. Bei der Transformation ins Laborsystem bleibt die longitudinale Kraft bis zur berücksichtigten Ordnung unverändert.

Mit $s_L \ll \alpha \omega_L$ erhalten wir

$$F_x \simeq -\frac{2\alpha \hbar \omega_L^2}{c^2} v = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

Die Laserfrequenz liegt auf der ansteigenden Flanke der Absorptionskurve, sodass $\alpha > 0$ ist. Die Kraft wirkt daher der Geschwindigkeit entgegen und entzieht kinetische Energie.

B-3

Das einfallende Photon breite sich entlang $+x$ aus und habe den Impulsbetrag

$$p_{\gamma} = \hbar k_L.$$

Das Atom hat anfangs den Impuls null. Aus der Impulserhaltung ergeben sich die beiden gleich wahrscheinlichen Ergebnisse:

Emissionsrichtung	Endimpuls des Atoms	Kinetische Endenergie	Wahrscheinlichkeit
Entlang $+x$, in Einfallrichtung	0	0	1/2
Entlang $-x$, entgegen der Einfallrichtung	$2p_{\gamma}$	$2p_{\gamma}^2/m$	1/2

Damit beträgt der mittlere Zuwachs an kinetischer Energie pro Absorptions-Emissions-Zyklus

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2} \frac{(2p_{\gamma})^2}{2m} = \frac{p_{\gamma}^2}{m}.$$

Ein einfallendes Photon, das sich entlang $-x$ bewegt, führt zum selben mittleren Energiezuwachs. Da alle τ ein vollständiger Zyklus stattfindet, gilt

$$P_{\text{in}} = \frac{\langle \Delta K \rangle}{\tau} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

B-4

Die Rate, mit der die Dämpfungskraft die mechanische Energie des Atoms ändert, beträgt

$$F_x v = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Daher ist die positive abgegebene Leistung, also die Rate des Energieentzugs,

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

Im thermischen Gleichgewicht gleicht die mittlere Kühlleistung die Rückstoßheizung aus:

$$2\alpha \hbar k_L^2 \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

Kürzen der gemeinsamen Faktoren ergibt

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}.$$

Die Aufgabe beschränkt die Bewegung auf eine Dimension, sodass der Gleichverteilungssatz

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

liefert. Folglich gilt

$$T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

Die Atommasse und die Wellenzahl des Lasers kürzen sich in diesem Modell aus der Gleichgewichtstemperatur heraus.

B-5

Mit den angegebenen Werten ergibt sich

$$T = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2(4)(1.381 \times 10^{-23})(5 \times 10^{-9})} = 1.9098 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Damit gilt

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK} \simeq 190 \text{ } \mu\text{K}.$$

Für die angegebene Masse $m = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}$ beträgt die entsprechende Geschwindigkeitsvarianz

$$\langle v^2 \rangle = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v_{\text{rms}} \simeq 0.126 \text{ m/s}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Schwarze-Witwen-Pulsar

Ein erheblicher Anteil der beobachteten Sterne sind Doppelsterne. Einer oder beide Sterne können Neutronensterne sein, die mit hoher Winkelgeschwindigkeit rotieren und elektromagnetische Wellen aussenden; solche Sterne werden Pulsare genannt. Manchmal ist ein Begleitstern eine ausgedehnte Gasmasse, die allmählich auf den Neutronenstern fällt und dadurch dessen Masse vergrößert (Abbildung 1-a). Auf diese Weise verschlingt ein Neutronenstern nach und nach einen Teil der Masse seines Begleitsterns. Deshalb wurde der Neutronenstern mit einer Schwarzen Witwe (oder Rotrückenspinne) verglichen, einer weiblichen Spinne, die ihren Partner nach der Paarung frisst. Die Erwärmung des auf die Schwarze Witwe fallenden Gases erzeugt beobachtbare Strahlung. Die schwersten Neutronensterne sind häufig Schwarze Witwen und dienen als natürliche Laboratorien zur Überprüfung grundlegender Physik. Abbildung 1-b zeigt eine Aufnahme des Begleiters des Neutronensterns PSR J2215+5135, die mit dem optischen 3,4-Meter-Teleskop des Iranischen Nationalobservatoriums aufgenommen wurde. Auf diesem Bild ist kein Neutronenstern zu sehen; das beobachtete Licht stammt von seinem Begleiter.

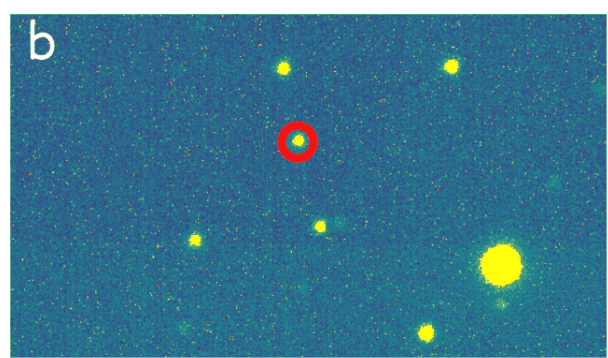
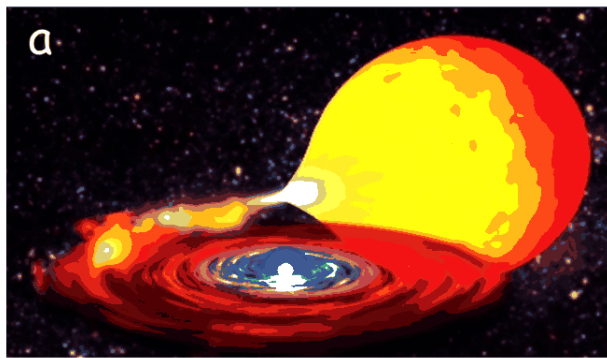


Abbildung 1 - (a) Das vom Begleitstern auf den Neutronenstern fallende Gas - (b) Der Begleiter des Neutronensterns PSR J2215+5135

A. Ein Doppelsternsystem

Betrachten Sie ein einfaches Modell, in dem die Schwarze Witwe und ihr Begleitstern durch zwei Punktmassen M_1 und M_2 dargestellt werden, die sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Um die Dynamik dieses Systems zu untersuchen, betrachten Sie ein rotierendes Koordinatensystem, in dem die beiden Körper ruhen. Wählen Sie den Schwerpunkt als Ursprung des Koordinatensystems. Nehmen Sie an, dass die beiden Punktmassen auf der x -Achse auf entgegengesetzten Seiten des Ursprungs im Abstand a voneinander liegen und dass M_1 auf der negativen x -Achse liegt. An einem beliebigen Punkt (x, y) in der Bewegungsebene ist das effektive Potential $\varphi(x, y)$ für eine Testmasse der Größe eins die Summe der Gravitationspotentiale der beiden Punktmassen und des Zentrifugalpotentials.

A-1	Geben Sie $\varphi(x, y)$ in Abhängigkeit von M_1 , M_2 , G und a an.	1.0 Pkt.
A-2	Skizzieren Sie unter der Annahme $M_1 > M_2$ den qualitativen Verlauf der Funktion $\varphi(x, 0)$.	0.7 Pkt.

Nehmen Sie (nur für Aufgabe A-3) an, dass $M_2 = M_1/3$ gilt und M_2 von einem verdünnten Gas sehr geringer Dichte umgeben ist. Die Masse dieses Gases ist unbedeutend, und wir vernachlässigen seine Gravitationswirkung. Überschreitet die Größe dieser Gashölle einen bestimmten Grenzwert, strömt Gas auf M_1 über. Nehmen Sie an, dass das Überströmen durch $x = x_0$ auf der x -Achse erfolgt.

A-3	Bestimmen Sie den Zahlenwert von $\frac{x_0}{a}$ auf zwei signifikante Stellen. Sie dürfen den Taschenrechner verwenden.	0.5 Pkt.
-----	--	----------

Die Umlaufdauer der Sterne um ihren gemeinsamen Schwerpunkt sei P . Nehmen Sie an, dass Masse mit einer sehr geringen Rate von $dM_1/dt = \beta$ von M_2 zu M_1 strömt. Diese Rate ist so gering, dass der Abstand zwischen den beiden Sternen während jeder Umlaufperiode als konstant angenommen werden kann. Über einen langen Zeitraum ändert sich jedoch der Abstand zwischen den beiden Sternen, während ihre Bahnen kreisförmig bleiben.

A-4	Berechnen Sie die Änderungsraten von a und P in Abhängigkeit von β , M_1 , M_2 , G und a .	0.6 Pkt.
-----	--	----------

Das von M_2 abgelöste Gas bildet eine um M_1 rotierende Scheibe und erwärmt sich durch Reibung (Abbildung 1-a). Während das Gas Energie verliert, bewegt es sich spiralförmig nach innen auf M_1 zu und fällt schließlich auf den Stern. Im stationären Zustand strömt die Masse mit der konstanten Rate β von M_2 zur Scheibe und von der Scheibe auf M_1 . Gleichzeitig emittiert die erhitzte Scheibe Wärmestrahlung wie ein schwarzer Körper. Diese Scheibe bildet sich sehr nahe am Neutronenstern, sodass die Gravitationskraft des Sterns M_2 bei der Untersuchung der Scheibenbewegung vernachlässigt werden kann. Vernachlässigen Sie außerdem die Wärmekapazität des Gases.

A-5	Bestimmen Sie die Temperatur der Scheibe im Abstand r vom Zentrum des Sterns M_1 in Abhängigkeit von β , M_1 , G und σ (Stefan-Boltzmann-Konstante).	1.0 Pkt.
-----	---	----------

Im Doppelsternsystem PSR J2215+5135 beträgt die Masse des Neutronensterns $M_{\text{NS}} = 2.27 M_{\odot}$ und die Masse seines Begleitsterns $M_S = 0.33 M_{\odot}$, wobei $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ die Sonnenmasse ist. Die Umlaufdauer beträgt $P = 4.14 \text{ hr}$, die Stefan-Boltzmann-Konstante ist $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, und die Gravitationskonstante ist $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$.

Nehmen Sie an, dass die Massenstromrate zum Neutronenstern $\beta = \dot{M}_{\text{NS}} = 9 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ beträgt.

A-6	Berechnen Sie die Temperatur der Scheibe beim Radius $r = \frac{a}{10}$ in Kelvin.	0.5 Pkt.
-----	--	----------

Nehmen Sie an, dass der Stern M_1 bei einer plötzlichen Explosion einen Teil seiner Masse mit sehr hoher Geschwindigkeit aus dem Doppelsternsystem ausstößt und seine Masse danach M'_1 beträgt. Der Betrag der Geschwindigkeit von M'_1 relativ zu M_2 nach der Explosion sei v' .

A-7	Bestimmen Sie den maximalen Wert von v' in Abhängigkeit von M'_1 , M_2 , G und a , bei dem das neue Doppelsternsystem gebunden bleiben kann. Welchen minimalen Wert muss M'_1 unter der Annahme einer isotropen Explosion haben, damit das Doppelsternsystem gebunden bleibt?	0.7 Pkt.
-----	---	----------

B. Untersuchung der Stabilität eines Sterns

In diesem Teil untersuchen wir die Stabilität eines einzelnen Sterns. Betrachten Sie einen Stern, der eine bestimmte Art von Materie mit der Zustandsgleichung $p = K\rho^\gamma$ enthält, wobei K und γ Konstanten sind. Es seien $p(r)$ und $\rho(r)$ der Druck bzw. die Dichte im Abstand r vom Zentrum des Sterns. Der Druck und die Dichte im Zentrum des Sterns seien p_c bzw. ρ_c . Wählen Sie in allen Aufgaben von Teil B für alle Vektoren die nach außen gerichtete Richtung als positiv.

B-1	Bestimmen Sie die Gravitationsbeschleunigung $g(r)$ nahe dem Zentrum des Sterns in Abhängigkeit von r und den Konstanten G und ρ_c .	0.2 Pkt.
B-2	Leiten Sie eine (Differential-)Gleichung zur Bestimmung von $\rho(r)$ im Gleichgewicht her und schreiben Sie sie in der folgenden Form: $\frac{d}{dr} \left[h_1(\rho, r) \frac{d\rho}{dr} \right] + h_2(r)\rho = 0$. Bestimmen Sie die Funktionen h_1 und h_2 .	0.6 Pkt.
B-3	Konstruieren Sie eine Größe r_0 der Form $r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$ mit der Dimension einer Länge.	0.4 Pkt.
B-4	Schreiben Sie die (Differential-)Gleichung aus Aufgabe B-2 in der folgenden Form um: $\frac{d}{dx} \left[A_1(u, x) \frac{du}{dx} \right] + A_2(x)u(x) = 0$, wobei $x = \frac{r}{r_0}$ und $u = \frac{\rho}{\rho_c}$ gelten. Bestimmen Sie die Funktionen $A_1(u, x)$ und $A_2(x)$.	0.3 Pkt.
B-5	Für $\gamma = 2$ erhält man $u(x) = \frac{f(x)}{x}$. Bestimmen Sie $f(x)$.	0.6 Pkt.

Nehmen Sie an, dass für einen bestimmten Stern $\frac{du}{dx}$ als Funktion von x durch die Kurve in Abbildung 2 gegeben ist.

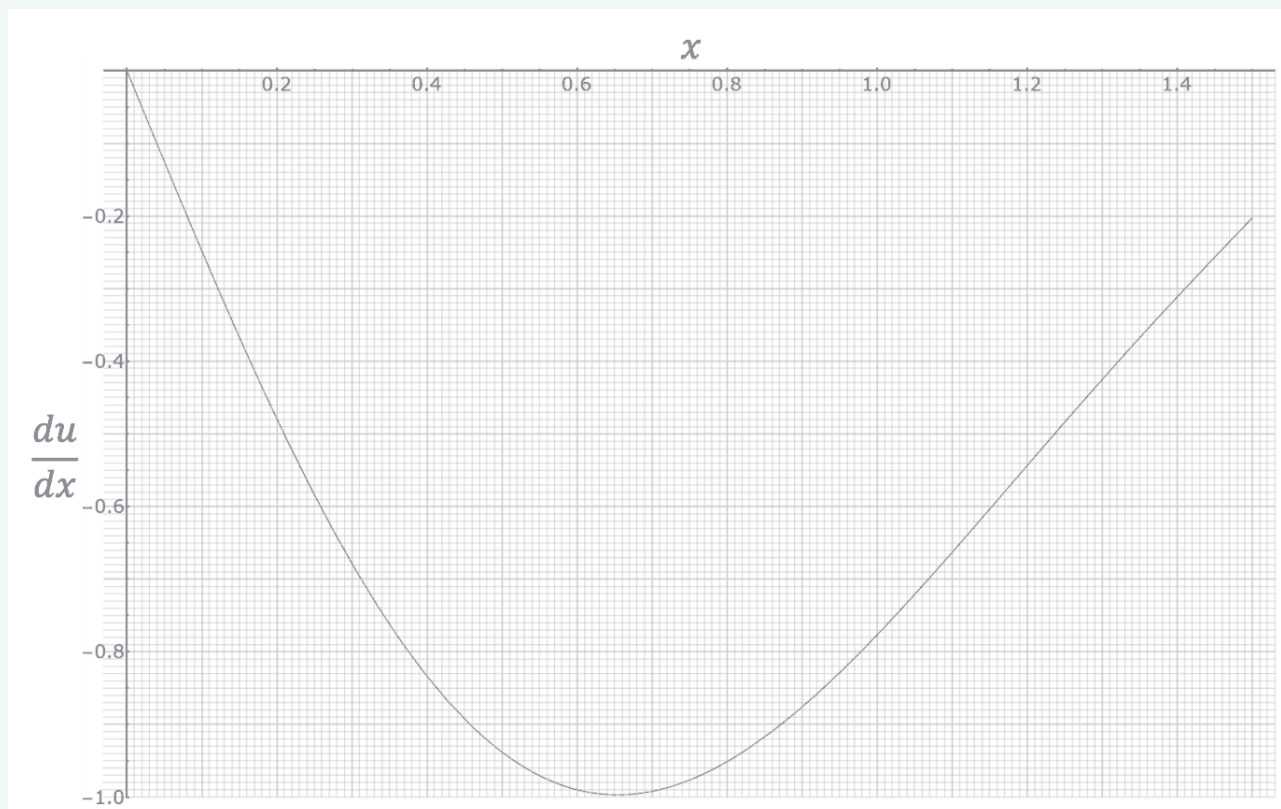


Abbildung 2 - Der Graph von $\frac{du}{dx}$

B-6	Nutzen Sie das Verhalten der Kurve in Abbildung 2 in der Nähe des Punktes $x = 0$, um γ auf 3 signifikante Stellen zu bestimmen. Verwenden Sie bei Bedarf das bereitgestellte Lineal.	0.8 Pkt.
-----	---	----------

Zur Untersuchung der Stabilität des Systems nehmen wir an, dass der Stern geringfügig von seinem Gleichgewichtszustand abweicht: Wir nehmen an, dass die Kugelschale, die sich beim Radius r im Gleichgewicht befand, nun den Radius $\tilde{r}$ hat; entsprechend haben sich die Größen g , p und ρ zu $\tilde{g}$, $\tilde{p}$ bzw. $\tilde{\rho}$ geändert. Der Einfachheit halber betrachten wir nur kleine r nahe dem Zentrum des Sterns, für die wir $\tilde{r} = r(1 + \varepsilon(t))$ mit $\varepsilon(t) \ll 1$ annehmen können.

B-7	Bestimmen Sie $\tilde{\rho}$ und $\tilde{g}$ in Abhängigkeit von ρ und g bis zur ersten Ordnung in ε .	0.9 Pkt.
B-8	Bestimmen Sie mithilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung für die Kugelschale mit dem Gleichgewichtsradius r den Ausdruck $\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2}$ in Abhängigkeit von $\tilde{g}$, $\tilde{\rho}$, K , γ und $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$. (Mit $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}}$ ist die Ableitung von $\tilde{\rho}$ nach $\tilde{r}$ bei konstantem t gemeint.)	0.6 Pkt.
B-9	Bestimmen Sie $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ in Abhängigkeit von ε und den in der Aufgabe angegebenen Konstanten. Bestimmen Sie den minimalen Wert von γ für ein stabiles Gleichgewicht sowie die Kreisfrequenz der Schwingung des Sterns.	0.6 Pkt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Setzen wir $M = M_1 + M_2$; die Positionen der Sterne seien $x_1 = -aM_2/M$ und $x_2 = aM_1/M$.

• A-1

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2)$$

bis auf eine additive Konstante.

- **A-2** Es gibt drei streng konkave Äste mit jeweils einem Maximum. Das Potential geht gegen $-\infty$, sowohl auf beiden Seiten von x_1, x_2 als auch für $x \rightarrow \pm\infty$. Mit den üblichen Bezeichnungen liegen die Maxima in der Reihenfolge

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2},$$

und für ihre Höhen gilt

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3) < 0.$$

• A-3

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

- **A-4**

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

- **A-5** Unter Verwendung der lokalen Freisetzung von Bahnenergie und der Abstrahlung von beiden Seiten ergibt sich

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

- **A-6**

$$T(a/10) \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

- **A-7** Der Grenzwert der Fluchtgeschwindigkeit ist

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}},$$

wobei eine gebundene Bahn $v' < v'_{\text{crit}}$ erfordert. Bei isotropem Massenausstoß gilt

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

Gleichheit in einer der beiden Bedingungen entspricht dem Grenzfall des Entweichens auf einer Parabelbahn.

- **B-1**

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3} G \rho_c r.$$

- **B-2** Eine zweckmäßige Normierung ist

$$h_1(\rho, r) = K \gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = 4\pi G r^2.$$

- **B-3**

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad r_0 = \sqrt{\frac{p_c}{G\rho_c^2}}.$$

- **B-4**

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

- **B-5**

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

- **B-6**

$$\gamma \simeq 1.67.$$

• B-7

$$\tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

• B-8

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K\gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

• B-9

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4) \varepsilon = 0.$$

Der kritische Wert ist $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$; für $\gamma > 4/3$ treten Schwingungen mit rücktreibender Kraft auf, während bei Gleichheit ein Grenzfall vorliegt. Ihre Kreisfrequenz ist

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

Lösung

A-1

Es sei $M = M_1 + M_2$. Aus der Schwerpunktbedingung und dem Abstand folgt

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = a,$$

also

$$x_1 = -\frac{M_2}{M} a, \quad x_2 = \frac{M_1}{M} a.$$

Ist Ω die Winkelgeschwindigkeit des Doppelsternsystems, so ergibt die Newtonsche Bewegungsgleichung für jeden der beiden Sterne

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

Das Gravitationspotential pro Einheit der Testmasse ist die Summe der Potentiale der beiden Punktmassen. Im gleichförmig rotierenden Bezugssystem wird die nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung durch das Potential

$$\varphi_{\text{cf}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)$$

erzeugt. Folglich gilt

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3} (x^2 + y^2).$$

A-2

Auf der x -Achse gilt

$$\varphi(x, 0) = -\frac{GM_1}{|x - x_1|} - \frac{GM_2}{|x - x_2|} - \frac{1}{2} \Omega^2 x^2.$$

Die Skizze lässt sich wie folgt genau beschreiben:

- Bei $x = x_1$ und $x = x_2$ gibt es nach unten gerichtete vertikale Singularitäten: Das Potential nähert sich auf beiden Seiten jedes Sterns $-\infty$.
- Für große positive oder negative x gilt

$$\varphi(x, 0) \sim -\frac{1}{2}\Omega^2 x^2,$$

sodass beide äußeren Enden gegen $-\infty$ abfallen.

- Jedes der drei durch die Sterne getrennten Intervalle enthält genau ein Maximum.

Zum Nachweis des letzten Punktes gilt außerhalb der Massen

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2GM_1}{|x - x_1|^3} - \frac{2GM_2}{|x - x_2|^3} - \Omega^2 < 0.$$

Damit ist jeder Ast streng konkav. Seine Ableitung wechselt zwischen seinen beiden Enden von positiv zu negativ, sodass sich jeweils ein Maximum ergibt.

Bezeichnen wir das linke, das innere und das rechte Maximum mit L_3, L_1, L_2 . Da $M_1 > M_2$ gilt, liegt der schwerere Stern näher am Ursprung, und es gilt

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{GM_1}{|x_1|^2} - \frac{GM_2}{x_2^2} > 0.$$

Das innere Maximum liegt daher rechts vom Ursprung:

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2}.$$

Das linke äußere Maximum liegt am höchsten, das rechte äußere folgt danach, und das innere Maximum liegt am niedrigsten:

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3).$$

Mit der in A-1 gewählten additiven Konstante ist die gesamte Kurve negativ und schneidet die horizontale Achse nicht. Ihr Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse ist

$$\boxed{\varphi(0, 0) = -\frac{GM}{a} \left(\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_1} \right)}.$$

A-3

Das Gas strömt zunächst durch den inneren Gleichgewichtspunkt L_1 , an dem die effektive Kraft verschwindet, in Richtung M_1 . Dieser Punkt ist entlang der Verbindungslinie der Sterne ein Maximum von $\varphi(x, 0)$ und ein Sattelpunkt des zweidimensionalen effektiven Potentials.

Hier gilt

$$M_1 = \frac{3}{4}M, \quad M_2 = \frac{1}{4}M,$$

also

$$x_1 = -\frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3a}{4}.$$

Mit $z = x_0/a$ wird die Bedingung $\partial\varphi/\partial x = 0$ zwischen den Sternen zu

$$\frac{3/4}{(z + 1/4)^2} - \frac{1/4}{(3/4 - z)^2} - z = 0.$$

Die Nullstelle im Intervall $-1/4 < z < 3/4$ ist

$$z = 0.360743 \dots$$

Damit ergibt sich auf zwei signifikante Stellen

$$\boxed{\frac{x_0}{a} = 0.36}.$$

A-4

Wir behandeln den Massentransfer als konservativ: Die gesamte von M_2 verlorene Masse erreicht M_1 , und es wirkt kein äußeres Drehmoment. Im Punktmassenmodell werden die Eigendrehimpulse und der vorübergehend im Gasstrom gespeicherte Drehimpuls vernachlässigt. Somit gilt

$$\dot{M}_1 = \beta, \quad \dot{M}_2 = -\beta, \quad \dot{M} = 0,$$

und der Bahndrehimpuls bleibt erhalten.

Für ein Doppelsternsystem auf Kreisbahnen gilt

$$L = \frac{M_1 M_2}{M} a^2 \Omega = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}.$$

Die logarithmische Ableitung ergibt

$$0 = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

Daher ist

$$\boxed{\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right)}.$$

Das Keplersche Gesetz liefert

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Da M konstant ist, gilt

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3\beta \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

Somit ergibt sich

$$\boxed{\dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right)}.$$

Sowohl der Abstand als auch die Umlaufdauer nehmen zu, wenn Masse vom leichteren zum schwereren Stern strömt.

A-5

Wir betrachten eine dünne Scheibe mit nahezu kreisförmigen Keplerbahnen, vernachlässigbarer radialer kinetischer Energie und lokaler Abstrahlung der mechanischen Bahnenergie, die beim Durchströmen eines Kreisrings durch die Materie verloren geht.

Die Bedingung für eine Kreisbahn lautet

$$v^2 = \frac{GM_1}{r}.$$

Die mechanische Energie des Gases pro Masseneinheit ist folglich

$$e(r) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_1}{r} = -\frac{GM_1}{2r}.$$

Betrachten wir einen Kreisring zwischen r und $r + dr$, wobei $dr > 0$ gilt. Materie tritt durch seinen äußeren Rand ein und durch seinen inneren Rand aus. Bei der Massenstromrate β beträgt die freigesetzte Leistung

$$dL = \beta[e(r + dr) - e(r)] = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

Beide Seiten der Scheibe strahlen. Ihre gesamte Kreisringfläche beträgt

$$dA = 2(2\pi r dr) = 4\pi r dr.$$

Vernachlässigt man die Wärmespeicherung und setzt die lokale Energiefreisetzung gleich der Schwarzkörperstrahlung, so folgt

$$4\pi r dr \sigma T^4 = \frac{GM_1\beta}{2r^2} dr.$$

Daraus ergibt sich

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

Insbesondere gilt $T \propto r^{-3/4}$.

A-6

Die Gesamtmasse und die Umlaufdauer betragen

$$M = (2.27 + 0.33)(1.98 \times 10^{30}) = 5.148 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$P = 4.14(3600) = 14904 \text{ s}.$$

Das Keplersche Gesetz liefert

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1.24548 \times 10^9 \text{ m}.$$

Daher gilt

$$r = \frac{a}{10} = 1.24548 \times 10^8 \text{ m}.$$

Mit $1 \text{ yr} \simeq 3.156 \times 10^7 \text{ s}$ ergibt sich

$$\beta = \frac{9 \times 10^{-10}(1.98 \times 10^{30})}{3.156 \times 10^7} \simeq 5.65 \times 10^{13} \text{ kg s}^{-1}.$$

Mit $M_1 = 2.27(1.98 \times 10^{30}) \text{ kg}$ folgt

$$T = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(2.27 \times 1.98 \times 10^{30})(5.65 \times 10^{13})}{8\pi(5.67 \times 10^{-8})(1.24548 \times 10^8)^3} \right]^{1/4}.$$

Dies ergibt

$$T \simeq 8.86 \times 10^3 \text{ K},$$

oder

$$\boxed{T \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}}.$$

A-7

Die Explosion erfolgt plötzlich, sodass der Abstand unmittelbar danach weiterhin a beträgt. Sobald das schnell ausgestoßene Material das System verlassen hat, ist die Energie der relativen Bahnbewegung der verbleibenden Sterne

$$E' = \frac{1}{2} \mu' v'^2 - \frac{GM'_1 M_2}{a}, \quad \mu' = \frac{M'_1 M_2}{M'_1 + M_2}.$$

Eine gebundene Zweikörperbahn erfordert $E' < 0$. Somit gilt

$$v'^2 < \frac{2G(M'_1 + M_2)}{a},$$

und die Grenzggeschwindigkeit ist

$$\boxed{v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}}}.$$

Bei Gleichheit ist die Bahn parabelförmig und nicht gebunden.

Ist der Massenausstoß im Ruhesystem des explodierenden Sterns isotrop, gibt es keinen Rückstoß. Die momentanen Geschwindigkeiten beider verbleibenden Sterne bleiben unverändert. Ihre Relativgeschwindigkeit bleibt daher gleich der ursprünglichen Kreisbahngeschwindigkeit:

$$v'^2 = \Omega^2 a^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}.$$

Einsetzen in die Bindungsbedingung ergibt

$$M_1 + M_2 < 2(M'_1 + M_2),$$

also

$$\boxed{M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}}.$$

Gleichbedeutend damit darf weniger als die Hälfte der ursprünglichen Gesamtmasse des Doppelsternsystems ausgestoßen werden:

$$M_1 - M'_1 < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Der angegebene Minimalwert ist ein kritischer Grenzwert; Gleichheit entspricht dem Grenzfall des Entweichens.

B-1

Aufgrund der Kugelsymmetrie trägt nur die innerhalb des Radius r eingeschlossene Masse zum dortigen Gravitationsfeld bei. Nahe dem Zentrum gilt $\rho \simeq \rho_c$, also

$$m(r) \simeq \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3.$$

Wird die nach außen gerichtete Beschleunigung als positiv gewählt, gilt

$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

Daher ist

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3}G\rho_c r.$$

B-2

Das hydrostatische Gleichgewicht erfordert

$$\frac{dp}{dr} = \rho g.$$

Für die eingeschlossene Masse gilt

$$g = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Folglich ist

$$\frac{d}{dr}(r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho.$$

Mit $g = (1/\rho) dp/dr$ folgt

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

Aus $p = K\rho^\gamma$ ergibt sich

$$\frac{dp}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

Die gesuchte Gleichung für die Dichte lautet daher

$$\frac{d}{dr} \left(K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

Eine mögliche Wahl ist somit

$$h_1 = K\gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2 = 4\pi G r^2.$$

Die Multiplikation beider Funktionen mit derselben von null verschiedenen Konstante ergibt eine äquivalente Gleichung.

B-3

Die relevanten Dimensionen sind

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}, \quad [p_c] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\rho_c] = M L^{-3}.$$

Die Forderung, dass $G^l p_c^m \rho_c^n$ die Dimension L hat, ergibt

$$-l + m + n = 0, \quad 3l - m - 3n = 1, \quad -2l - 2m = 0.$$

Die Lösung lautet

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1.$$

Daher ist

$$r_0 = \frac{\sqrt{p_c}}{\sqrt{G} \rho_c} = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}.$$

Da $p_c = K \rho_c^\gamma$ gilt, ist auch die folgende Schreibweise nützlich:

$$r_0^2 = \frac{K \rho_c^{\gamma-2}}{G}.$$

B-4

Wir setzen

$$r = r_0 x, \quad \rho = \rho_c u, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho_c}{r_0} \frac{du}{dx}$$

in die Gleichung aus B-2 ein:

$$K \gamma \rho_c^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi G r_0^2 \rho_c x^2 u = 0.$$

Wegen $G r_0^2 \rho_c = K \rho_c^{\gamma-1}$ ergibt die Division durch $K \rho_c^{\gamma-1}$

$$\frac{d}{dx} \left(\gamma x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi x^2 u = 0.$$

Somit gilt

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

Die Bedingungen im Zentrum lauten

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

wobei die zweite aus der Regularität und der Kugelsymmetrie folgt.

B-5

Für $\gamma = 2$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{d}{dx} (x^2 u') + 2\pi x^2 u = 0.$$

Es sei $u = f/x$. Dann gilt

$$x^2 u' = x f' - f, \quad \frac{d}{dx} (x^2 u') = x f''.$$

Für $x > 0$ folgt

$$f'' + 2\pi f = 0.$$

Mit $k = \sqrt{2\pi}$ lautet die allgemeine Lösung

$$f = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Die Endlichkeit von $u = f/x$ im Zentrum erfordert $B = 0$. Die Normierung $u(0) = 1$ ergibt dann $Ak = 1$. Daher gilt

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}},$$

und

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi} x}.$$

Das physikalische Dichteprofil endet an seiner ersten Nullstelle, $x = \sqrt{\pi/2}$.

B-6

Für diese Aufgabe kehren wir zu einem allgemeinen γ zurück. Nahe dem Zentrum erlaubt die Regularität die Entwicklung

$$u(x) = 1 + cx^2 + O(x^4), \quad u'(x) = 2cx + O(x^3).$$

Einsetzen in die dimensionslose Gleichgewichtsgleichung ergibt in der Ordnung x^2

$$6\gamma c + 4\pi = 0.$$

Daraus folgt

$$u'(x) = -\frac{4\pi}{3\gamma}x + O(x^3).$$

Ist s die Steigung der dargestellten Kurve von u' als Funktion von x im Ursprung, so gilt

$$s = u''(0) = -\frac{4\pi}{3\gamma}, \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3s}.$$

Die Tangente im Ursprung in Abbildung 2 hat ungefähr die Steigung

$$s \simeq -2.51.$$

Somit ergibt sich

$$\boxed{\gamma \simeq \frac{4\pi}{3(2.51)} \simeq 1.67}.$$

Dies ist mit $\gamma = 5/3$ vereinbar.

B-7

Wir verfolgen eine bestimmte materielle Schale. Ihre Masse bleibt erhalten, während sie sich von r nach

$$\tilde{r} = r(1 + \varepsilon)$$

bewegt. Da derselbe Skalenfaktor für benachbarte Schalen nahe dem Zentrum gilt, ist

$$d\tilde{r} = (1 + \varepsilon) dr.$$

Die Massenerhaltung in einer dünnen Schale ergibt

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r},$$

also

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon)^3} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Daher gilt

$$\boxed{\tilde{\rho} \simeq \rho(1 - 3\varepsilon)}.$$

Auch die von der bewegten Schale eingeschlossene Masse bleibt erhalten. Folglich gilt

$$\tilde{g} = -\frac{Gm(r)}{\tilde{r}^2} = \frac{g}{(1 + \varepsilon)^2},$$

woraus sich

$$\boxed{\tilde{g} \simeq g(1 - 2\varepsilon)}$$

ergibt. Hier ist g negativ, entsprechend der vorgegebenen Konvention, die Richtung nach außen als positiv zu wählen.

B-8

Die nach außen gerichtete Beschleunigung durch den Druck beträgt

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

Unter Einbeziehung der Gravitation lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

Mit derselben Zustandsgleichung für die gestörte Materie,

$$\tilde{p} = K \tilde{\rho}^\gamma,$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}}.$$

B-9

Zu einem festen Zeitpunkt ist ε unabhängig von r , das die Schalen nahe dem Zentrum kennzeichnet. Daher gilt

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, t) = (1 + \varepsilon)^{-3} \rho\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \varepsilon}\right),$$

und

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = (1 + \varepsilon)^{-4} \frac{d\rho}{dr}.$$

Der Druckterm in B-8 skaliert folglich gemäß

$$K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma}.$$

Im ungestörten Gleichgewicht gilt

$$K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = g.$$

Zusammen mit $\tilde{g} = g(1 + \varepsilon)^{-2}$ ergibt dies

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g \left[(1 + \varepsilon)^{-2} - (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma} \right].$$

Bis zur ersten Ordnung gilt

$$(1 + \varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon, \\ (1 + \varepsilon)^{2-3\gamma} = 1 + (2 - 3\gamma)\varepsilon.$$

Somit folgt

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = g(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Da r die ursprüngliche Schale kennzeichnet und konstant ist, gilt

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = r\ddot{\varepsilon}.$$

Mit dem Ergebnis $g/r = -4\pi G\rho_c/3$ für die Nähe des Zentrums folgt

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

Für eine rücktreibende Beschleunigung muss der Koeffizient von $-\varepsilon$ positiv sein. Daher gilt

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

Der kritische Wert ist somit

$$\gamma_{\text{crit}} = \frac{4}{3}.$$

Bei Gleichheit gibt es in dieser Ordnung keine rücktreibende Kraft; für $\gamma < 4/3$ existiert eine anwachsende Störung. Für $\gamma > 4/3$ ist die Bewegung harmonisch mit

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)} = \sqrt{4\pi G\rho_c \left(\gamma - \frac{4}{3} \right)}.$$

Der aus dem Graphen bestimmte Wert $\gamma \simeq 1.67$ liegt im stabilen Bereich.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.