

المسألة 1: تأثير الدفيئة

في عام 2021، مُنح سيوكورو مانابي وكلاوس هاسلمان نصف جائزة نوبل في الفيزياء عن عملهما في نمذجة مناخ الأرض والتنبؤ الدقيق بالاحترار العالمي الناجم عن الأنشطة الصناعية البشرية. في هذه المسألة، سندرس نموذجًا بسيطًا للاحتار العالمي الناتج عن تأثير الدفيئة. تتغير غازات الدفيئة الخصائص البصرية للغلاف الجوي للأرض فيما يتعلق بنفاذ الأشعة تحت الحمراء الصادرة عن الأرض أو امتصاصها، مما يؤدي إلى ارتفاع متوسط درجة حرارة الكوكب.

تبعث جميع الأجسام، عند درجات حرارة مختلفة، إشعاعًا حراريًا. تشير الكمية $u(\lambda, T)d\lambda$ إلى القدرة الإشعاعية الحرارية لكل وحدة مساحة من جسم درجة حرارته T ، بين الطولين الموجيين λ و $\lambda + d\lambda$. وفقًا لنظرية بلانك لإشعاع الجسم الأسود، لدينا

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}, \quad (1)$$

حيث $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ و $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$. يُستخرج الطول الموجي الموافق للقيمة العظمى للدالة $u(\lambda, T)$ من العلاقة $\lambda_{\max} T = b$ (قانون فين للإزاحة). وبالفعل، يمكن باستخدام المعادلة (1) إثبات أن $b = \frac{hc}{x_m k_B}$ ، حيث الكمية اللابعدية x_m هي الجذر غير البديهي لمعادلة من الشكل $f(x) = 0$ ؛ وسيُطلب منك إيجاد الدالة $f(x)$ في إحدى المهام التالية. تُعطى القدرة الإشعاعية الكلية لكل وحدة مساحة من جسم أسود، على جميع الأطوال الموجية، بقانون ستيفان-بولتزمان على الصورة $U(T) = \sigma T^4$ ، حيث $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$. وعلاوة على ذلك، وفقًا لقانون كيرشوف للإشعاع، فإن الجسم الذي يمتص، عند الاتزان الحراري، كسرًا معينًا من الإشعاع الساقط عند طول موجي محدد، يبعث الكسر نفسه من إشعاع الجسم الأسود عند الطول الموجي ذاته.

افترض في جميع أجزاء هذه المسألة أن الشمس جسم أسود عند متوسط درجة حرارة سطحها البالغ $T_S = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$. نصف قطر الشمس هو $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ ، ومتوسط المسافة بين الأرض والشمس هو $d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$. نرسم بالرمز $\tilde{u}_S(\lambda)$ إلى القدرة الشمسية الطيفية الساقطة على وحدة مساحة من الأرض عمودية على اتجاه الإشعاع. ويُسمى تكامل هذه الكمية على جميع الأطوال الموجية، أي $S_0 = \int \tilde{u}_S(\lambda) d\lambda$ ، الثابت الشمسي.

افترض في هذه المسألة أن الأرض في حالة اتزان حراري، وأن درجة الحرارة متساوية في جميع النقاط على سطحها. في جميع أجزاء المسألة، عبّر عن الكمية المطلوبة بصيغة رمزية بدلالة المعطيات الواردة في المسألة، ثم أوجد قيمتها العددية بدقة ثلاثة أرقام معنوية. الوحدات المطلوبة مبينة في ورقة الإجابة.

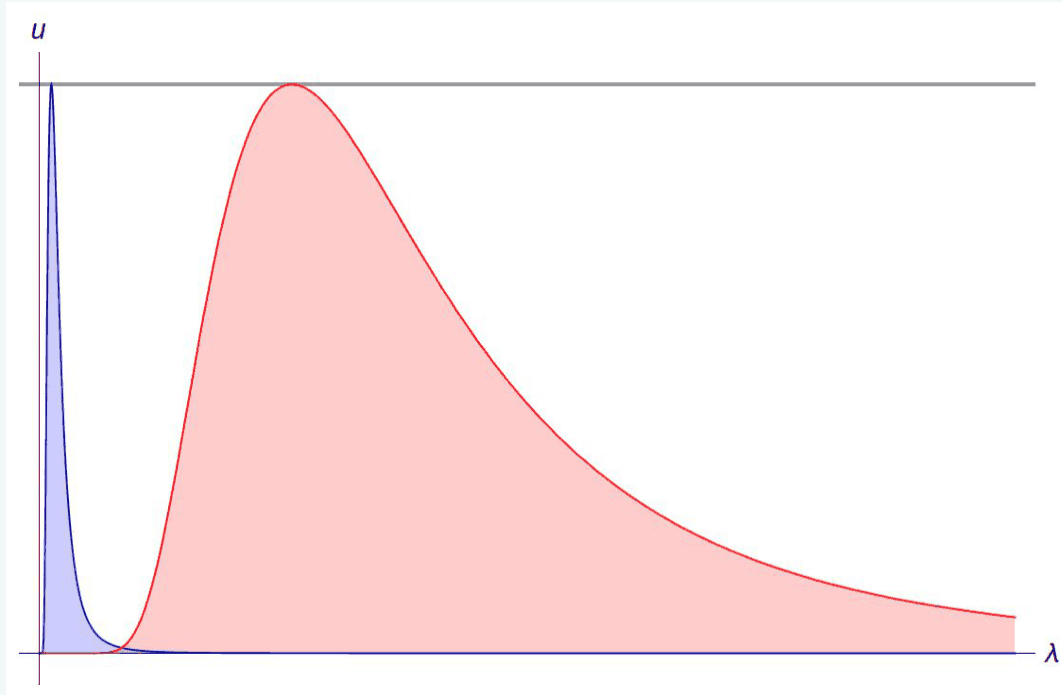
A. الأرض بوصفها جسمًا أسود

في هذا الجزء، اعتبر سطح الأرض جسمًا أسود وأهمّل الغلاف الجوي للأرض.

الجزء	المهمة	الدرجات
A-1	أوجد الثابت الشمسي، S_0 .	0.6 درجة
A-2	أوجد درجة حرارة الأرض، T_E .	0.6 درجة
A-3	أوجد الدالة $f(x)$.	0.4 درجة
A-4	احسب القيمة العددية لـ x_m ، ومن هذه القيمة لـ x_m ، أوجد قيمة b .	0.4 درجة
A-5	أوجد $\lambda_{\max}$ للشمس ولأرض.	0.2 درجة

في الشكل 1، رُسمت الدالتان $u(\lambda, T_E)$ و $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ بدلالة λ ، حيث γ معامل لُبُعدي لتغيير مقياس $\tilde{u}_S(\lambda)$ بحيث تتساوى قيمتا القمتين.

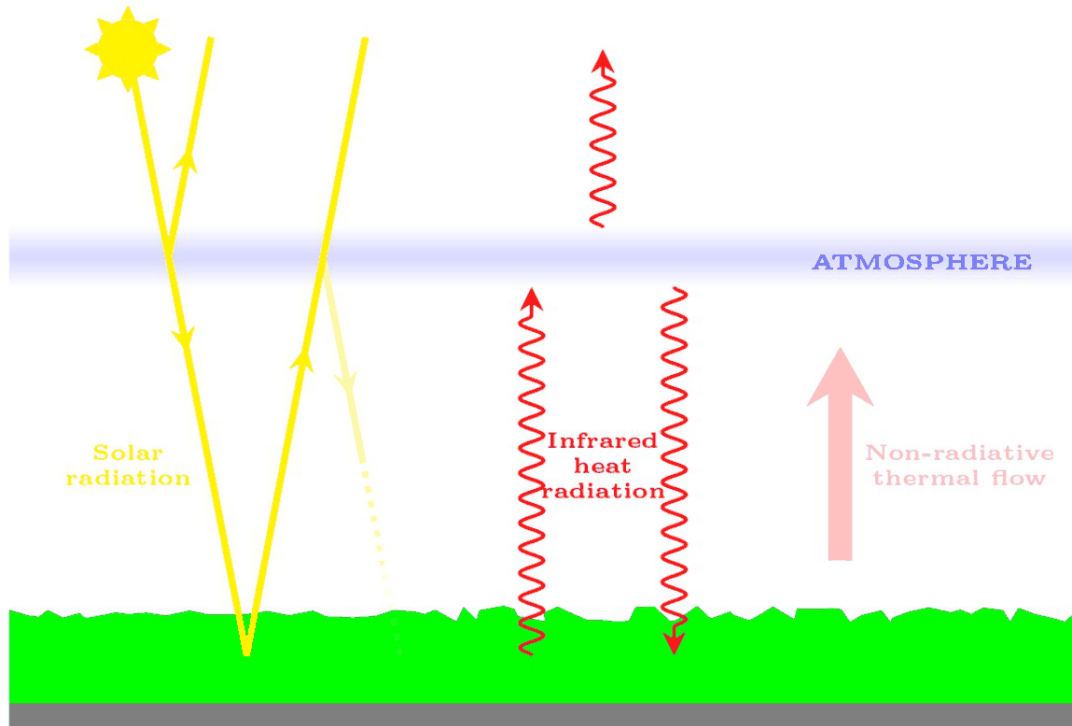
الجزء	المهمة	الدرجات
A-6	حدّد γ .	0.8 درجة



الشكل 1 - منحنيا $u(\lambda, T_E)$ (بالأحمر) و $\gamma \tilde{u}_S(\lambda)$ (بالأزرق) بدلالة λ

B. تأثير الدفيئة

في هذا الجزء، نقدّم نموذجًا بسيطًا يُمثّل فيه الغلاف الجوي للأرض بطبقة رقيقة على ارتفاع صغير فوق سطح الأرض، بحيث يمكن إهمال الفرق بين مساحة طبقة الغلاف الجوي ومساحة سطح الأرض (انظر الشكل 2). فيما يلي، افترض أن معظم الإشعاع الحراري الصادر عن الأرض والشمس ينبعث عند أطوال موجية قريبة من $\lambda_{\max}$ لكل منهما. وافترض أيضًا أن «طبقة الغلاف الجوي» تعكس كسرًا $r_A = 0.255$ من الإشعاع المرئي وفوق البنفسجي الساقط من أعلى أو من أسفل، وتسمح بنفاذ الباقي بالكامل. افترض أن الغلاف الجوي لا يعكس أي جزء من الأشعة تحت الحمراء، لكنه يمتص كسرًا ε من الأشعة تحت الحمراء ويسمح بنفاذ الباقي. يغيّر هذا السلوك، المعروف بتأثير الدفيئة، متوسط درجة حرارة الأرض. أما سطح الأرض، فيعكس كسرًا r_E من الإشعاع المرئي وفوق البنفسجي، ويمتص بقية هذا الإشعاع وجميع الأشعة تحت الحمراء.



الشكل 2 - التدفقات الحرارية بين الأرض والغلاف الجوي

الجزء	المهمة	الدرجات
B-1	افترض أن $\varepsilon = 1$ و $r_E = 0$ ، واحسب درجة حرارة الأرض T_E ودرجة حرارة الغلاف الجوي T_A . 1.0 درجة	1.0 درجة

افترض الآن أن $r_E \neq 0$ في هذه الحالة، يعكس النظام المركب «الأرض + الغلاف الجوي» كسراً مختلفاً من الإشعاع الشمسي، يُسمى «البياض» ويُمزج إليه ب α .

الجزء	المهمة	الدرجات
B-2	حدّد البياض، α ، بدلالة r_E و r_A . ثم احسب قيمته العددية بافتراض أن $r_E = 0.102$ و $(r_A = 0.255)$. 1.6 درجة	1.6 درجة
B-3	(a) عبّر عن درجة حرارة الأرض بدلالة σ ، و α ، و S_0 ، و ε . (b) باستخدام المعطيات والبياض المحسوب، أوجد القيمة العددية لـ ε التي تؤدي إلى متوسط درجة حرارة الأرض الحالي البالغ $T_E = 288 \text{ K}$. 1.0 درجة	1.0 درجة
B-4	أوجد $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ ، وحدّد مقدار ارتفاع درجة حرارة الأرض إذا ازدادت ε بنسبة واحد في المئة. 0.8 درجة	0.8 درجة

افترض أن $T_A = 245 \text{ K}$ و $T_E = 288 \text{ K}$. تستند هاتان القيمتان إلى بيانات واقعية، وقد تختلفان عن النتائج التي حصلت عليها في المهام السابقة. افترض الآن وجود تدفق حراري غير إشعاعي مستمر (بالحمل الحراري مثلاً) من الأرض إلى الغلاف الجوي، مقداره $J_{NR} = k(T_E - T_A)$ ، حيث k ثابت. الكمية J_{NR} هي القدرة المنتقلة لكل وحدة مساحة.

الجزء	المهمة	الدرجات
B-5	احسب ε و k بدلالة T_E ، و T_A ، و σ ، و α ، و S_0 . 1.6 درجة	1.6 درجة
B-6	(a) باشتقاق المعادلات التي حصلت عليها في الجزء B-5 بالنسبة إلى ε ، أوجد المعادلتين الجبريتين اللتين تحققهما $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ و $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$. 1.0 درجة	1.0 درجة

الدرجات	المهمة	الجزء
	(b) استخدم هاتين المعادلتين لإيجاد القيمة العددية لتغيّر درجة حرارة الأرض نتيجة زيادة قيمة ε بنسبة واحد في المئة.	

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

نعرف متوسط الفيض الشمسي الممتص على مستوى الكرة الأرضية بالعلاقة

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

تفسّر الزيادة بنسبة واحد في المئة على أنها $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$. تُستخدم قيم وسيطة غير مقربة في حساب النتائج العددية.

A-1 •

$$S_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 = 1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

A-2 •

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 278 \text{ K}.$$

A-3 •

$$f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x.$$

A-4 •

$$x_m = 4.97, \quad b = \frac{hc}{x_m k_B} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

A-5 •

$$\lambda_{\max,S} = \frac{b}{T_S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max,E} = \frac{b}{T_E} = 10.4 \text{ }\mu\text{m}.$$

A-6 •

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 1.20 \times 10^{-2}.$$

B-1 •

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = 307 \text{ K},$$

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = 258 \text{ K}.$$

B-2 •

$$\alpha = r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E} = 0.313.$$

B-3(a) •

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

B-3(b) •

$$\varepsilon = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4} = 0.809.$$

B-4 •

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)} = 60.4 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.489 \text{ K}.$$

تغيّر درجة الحرارة هو نتيجة التقريب من الرتبة الأولى؛ أما التغيّر المنتهي الدقيق فهو 0.491 K.

B-5 •

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.849,$$

$$k = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)} = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

B-6(a) • بوضع $Y = dT_A/d\varepsilon$ و $X = dT_E/d\varepsilon$,

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4,$$

$$-(4\varepsilon\sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon\sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

B-6(b) •

$$X = 61.7 \text{ K}, \quad Y = 47.8 \text{ K}, \quad \Delta T_E \simeq 0.524 \text{ K}.$$

تغيّر درجة الحرارة هو نتيجة التقريب من الرتبة الأولى؛ أما التغيّر المنتهي الدقيق فهو 0.527 K.

الحل

A-1

تُستخرج القدرة الكلية التي تشعّها الشمس من قانون ستيفان-بولتزمان:

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4.$$

يقتضي انحفاظ القدرة الإشعاعية توزّع هذا اللمعان على كرة نصف قطرها d . ومن ثم،

$$S_0 = \frac{L_S}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

بالتعويض نحصل على

$$S_0 = 1353.076 \dots \text{ W m}^{-2} = \boxed{1.35 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}}.$$

ينطبق التناقص الهندسي نفسه عند كل طول موجي:

$$\tilde{u}_S(\lambda) = \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u(\lambda, T_S).$$

A-2

ليكن R_E نصف قطر الأرض. تعترض الأرض ضوء الشمس على مساحة إسقاطها πR_E^2 ، بينما يبعث سطحها بأكمله، ومساحته $4\pi R_E^2$ ، إشعاعاً حرارياً.

عند اعتبار الأرض جسمًا أسود في حالة اتزان،

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4.$$

إذن

$$T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = 277.920 \dots \text{ K}.$$

وعليه،

$$\boxed{T_E = 278 \text{ K}}.$$

A-3

عند ثبوت T ، نعرّف

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

يعطي الاشتقاق اللوغاريتمي لقانون بلانك

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-5 + \frac{x e^x}{e^x - 1} \right].$$

عند قيمة عظمى تقع عند طول موجي منتَه، تنعدم هذه المشتقة، ولذلك

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

ومن ثم فإن دالة مناسبة هي

$$\boxed{f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x}.$$

يقابل الجذر الجبري $x = 0$ الحالة $\lambda \rightarrow \infty$ ، ولا يقابل قيمة عظمى عند طول موجي منتَه. الجذر المطلوب موجب وغير صفري.

A-4

يمكن الحصول على الجذر غير الصفري باستخدام طريقة نيوتن مثلاً:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5(1 - e^{-x_n}) - x_n}{5e^{-x_n} - 1}.$$

بالبدء من $x_0 = 5$ نحصل على

$$x_m = 4.965114 \dots$$

وبما أن $x_m = hc/(\lambda_{\max} k_B T)$ ، فإن

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{x_m k_B} = b.$$

باستخدام الثوابت المعطاة،

$$b = \frac{1.24 \times 10^3}{(4.965114 \dots)(8.62 \times 10^{-5})} \text{ nm K} = 2.897244 \dots \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

وعليه،

$$\boxed{x_m = 4.97, \quad b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}}.$$

تؤول دالة بلانك إلى الصفر عند طرفي مجال الأطوال الموجية، وهذه هي نقطة سكونها الوحيدة عند طول موجي موجب ومنتهٍ، لذا فهي نقطة القيمة العظمى.

A-5

بتطبيق قانون فين للإزاحة على كل جسم،

$$\lambda_{\max,S} = \frac{b}{T_S} = 502.122 \dots \text{ nm},$$

$$\lambda_{\max,E} = \frac{b}{T_E} = 10.4247 \dots \mu\text{m}.$$

إذن

$$\boxed{\lambda_{\max,S} = 502 \text{ nm}, \quad \lambda_{\max,E} = 10.4 \mu\text{m}}.$$

تقع قمة الإشعاع الشمسي في النطاق المرئي، بينما تقع قمة إشعاع الأرض في نطاق الأشعة تحت الحمراء.

A-6

عند القيمة العظمى، يكون $\lambda_{\max} = b/T$ ، ويساوي أس الدالة الأسية x_m . لذلك،

$$u_{\max}(T) = \frac{2\pi hc^2}{b^5(e^{x_m} - 1)} T^5.$$

إذن تتناسب قيمة الذروة للقدرة الطيفية لكل وحدة طول موجي مع T^5 .

يتطلب تساوي ارتفاعي القمتين المرسوميتين أن يكون

$$\gamma \left(\frac{R_S}{d} \right)^2 u_{\max}(T_S) = u_{\max}(T_E),$$

مما يعطي

$$\gamma = \left(\frac{d}{R_S} \right)^2 \left(\frac{T_E}{T_S} \right)^5.$$

من A-2،

$$\left(\frac{T_E}{T_S} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_S}{d} \right)^2.$$

ومن ثم،

$$\gamma = \frac{T_E}{4T_S} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} = \boxed{1.20 \times 10^{-2}}.$$

B-1

في الجزء B، يعامل التقريب الطيفي المذكور الإشعاع الشمسي بوصفه إشعاعاً مرئياً وفوق بنفسجي، والانبعاث الحراري من الأرض والغلاف الجوي بوصفه إشعاعاً تحت أحمر. لا يمتص الغلاف الجوي أي إشعاع شمسي. ووفقاً لقانون كيرشوف، تساوي انبعاثيته في نطاق الأشعة تحت الحمراء ε ، لذا يبعث كل وجه فيضاً $\varepsilon \sigma T_A^4$. انبعاثية الأرض في نطاق الأشعة تحت الحمراء تساوي الواحد.

هنا $\varepsilon = 1$ و $r_E = 0$. متوسط الفيض الشمسي الممتص عند السطح على مستوى الكرة الأرضية هو

$$Q_1 = \frac{(1 - r_A) S_0}{4}.$$

يتطلب اتزان الغلاف الجوي أن يكون

$$\sigma T_E^4 = 2\sigma T_A^4,$$

لأن الغلاف الجوي يمتص انبعاث الأرض المتجه إلى أعلى، ويبعث إشعاعاً في كلا الاتجاهين.

معادلة توازن الطاقة عند السطح هي

$$Q_1 + \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4.$$

بدمج المعادلتين،

$$\sigma T_A^4 = Q_1, \quad \sigma T_E^4 = 2Q_1.$$

وعليه،

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{4\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{258 \text{ K}},$$

$$T_E = \left[\frac{(1 - r_A)S_0}{2\sigma} \right]^{1/4} = \boxed{307 \text{ K}}.$$

B-2

نطبع القدرة الشمسية الواردة إلى الواحد. يعكس الغلاف الجوي فوراً كسراً r_A . والكسر الذي يفلت إلى الفضاء بعد انعكاس واحد عن السطح هو

$$(1 - r_A)r_E(1 - r_A).$$

تضرب كل رحلة إضافية ذهاباً وإياباً بين السطح والغلاف الجوي القدرة المنعكسة المتبقية في $r_A r_E$.

بجمع جميع المساهمات،

$$\alpha = r_A + r_E(1 - r_A)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_A r_E)^n$$

$$= r_A + \frac{r_E(1 - r_A)^2}{1 - r_A r_E}.$$

وبصورة مكافئة،

$$1 - \alpha = \frac{(1 - r_A)(1 - r_E)}{1 - r_A r_E}.$$

باستخدام الانعكاسيتين المعطاتين،

$$\alpha = 0.313124\dots, \quad \boxed{\alpha = 0.313}.$$

يمتص السطح كل القدرة الشمسية التي لا تنعكس.

B-3

(a) نعرّف

$$Q = \frac{(1 - \alpha)S_0}{4}.$$

في غياب انتقال الحرارة غير الإشعاعي، تكون معادلتا توازن الطاقة للسطح والغلاف الجوي

$$Q + \varepsilon \sigma T_A^4 = \sigma T_E^4,$$

$$\varepsilon \sigma T_E^4 = 2\varepsilon \sigma T_A^4.$$

عندما تكون $\varepsilon > 0$ ، تعطي المعادلة الثانية

$$T_A^4 = \frac{T_E^4}{2}.$$

بالتعويض في المعادلة الأولى،

$$Q = \sigma T_E^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

ومن ثم

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma(1 - \varepsilon/2)} \right]^{1/4}.$$

يمتد هذا التعبير أيضًا بصورة متصلة إلى $\varepsilon = 0$.

(b) بإعادة الترتيب لإيجاد الامتصاصية،

$$\varepsilon = 2 \left(1 - \frac{Q}{\sigma T_E^4} \right) = 2 - \frac{(1 - \alpha)S_0}{2\sigma T_E^4}.$$

قيم الفيض غير المقرّبة هي

$$Q = 232.348778 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad \sigma(288 \text{ K})^4 = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

إذن

$$\varepsilon = 0.808710 \dots, \quad \boxed{\varepsilon = 0.809}.$$

B-4

نُبقى S_0 و α ثابتين. يعطي الاشتقاق اللوغاريتمي لنتيجة B-3

$$\frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{1}{8(1 - \varepsilon/2)} = \frac{1}{4(2 - \varepsilon)}.$$

وعليه،

$$\boxed{\frac{dT_E}{d\varepsilon} = \frac{T_E}{4(2 - \varepsilon)}}.$$

عند حالة الاتزان في B-3،

$$\frac{dT_E}{d\varepsilon} = 60.4387 \dots \text{ K} = \boxed{60.4 \text{ K}}.$$

لزيادة نسبية مقدارها واحد في المئة،

$$\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon.$$

بتقريب الرتبة الأولى،

$$\Delta T_E \simeq \frac{dT_E}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{0.01\varepsilon T_E}{4(2 - \varepsilon)} = \boxed{0.489 \text{ K}}.$$

للمقارنة، يعطي حساب التغيّر المنتهي مباشرةً

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = T_E \left[\left(\frac{2 - \varepsilon}{2 - 1.01\varepsilon} \right)^{1/4} - 1 \right] = \boxed{0.491 \text{ K}}.$$

B-5

نُدّرج الفيض غير الإشعاعي المتجه إلى أعلى

$$J_{\text{NR}} = k(T_E - T_A).$$

يفقد السطح هذه الطاقة، بينما يكتسبها الغلاف الجوي. وتصبح معادلتا اتزانهما

$$Q + \varepsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_E^4 + k(T_E - T_A), \quad (2)$$

$$\varepsilon\sigma T_E^4 + k(T_E - T_A) = 2\varepsilon\sigma T_A^4. \quad (3)$$

للاختصار، نكتب

$$E = \sigma T_E^4, \quad A = \sigma T_A^4.$$

يؤدي جمع معادلتَي توازن الطاقة إلى حذف انتقال الحرارة الداخلي:

$$Q = (1 - \varepsilon)E + \varepsilon A.$$

يمثل الطرف الأيمن الإشعاع الذي يفلت إلى الفضاء: إشعاع السطح النافذ مضافاً إليه انبعاث الغلاف الجوي المتجه إلى أعلى. وبالحل،

$$\varepsilon = \frac{E - Q}{E - A} = \frac{\sigma T_E^4 - Q}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)}.$$

تعطي المعادلة (3)

$$k(T_E - T_A) = \varepsilon(2A - E).$$

وعليه،

$$k = \frac{\varepsilon \sigma (2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A} = \frac{(\sigma T_E^4 - Q)(2T_A^4 - T_E^4)}{(T_E^4 - T_A^4)(T_E - T_A)}.$$

عند $T_A = 245 \text{ K}$ و $T_E = 288 \text{ K}$

$$E = 390.079395 \dots \text{ W m}^{-2}, \quad A = 204.290135 \dots \text{ W m}^{-2}.$$

ومن ثم،

$$\varepsilon = 0.849, \quad k = 0.365 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

الفيض الحراري الناتج هو

$$J_{\text{NR}} = 15.7 \text{ W m}^{-2},$$

وهو موجب في الاتجاه المفترض نحو الأعلى.

B-6

(a) عندما تتغير ε ، نُبقِ S_0 ، α ، و k ثابتة، ونسمح بتغيّر درجتَي الحرارة. نضع

$$X = \frac{dT_E}{d\varepsilon}, \quad Y = \frac{dT_A}{d\varepsilon}.$$

باشتقاق المعادلة (2) نحصل على

$$\sigma T_A^4 + 4\varepsilon \sigma T_A^3 Y = 4\sigma T_E^3 X + k(X - Y).$$

ومن ثم

$$(4\sigma T_E^3 + k)X - (4\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma T_A^4.$$

باشتقاق المعادلة (3) نحصل على

$$\sigma T_E^4 + 4\varepsilon \sigma T_E^3 X + k(X - Y) = 2\sigma T_A^4 + 8\varepsilon \sigma T_A^3 Y.$$

إذن

$$-(4\varepsilon \sigma T_E^3 + k)X + (8\varepsilon \sigma T_A^3 + k)Y = \sigma(T_E^4 - 2T_A^4).$$

(b) لإعطاء تعبير رمزي صريح، نعرّف

$$p = 4\sigma T_E^3, \quad q = 4\sigma T_A^3,$$

ونحتفظ بالتعريفين $E = \sigma T_E^4$ و $A = \sigma T_A^4$. محدّد النظام هو

$$D = (p + k)(2\varepsilon q + k) - (\varepsilon q + k)(\varepsilon p + k) = \varepsilon(2 - \varepsilon)pq + k[(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q].$$

بحذف Y نحصل على

$$X = \frac{\varepsilon q E + k(E - A)}{D}.$$

وبالمثل،

$$Y = \frac{(p + k)(E - 2A) + (\varepsilon p + k)A}{D}.$$

باستخدام قيم الاتزان من B-5،

$$X = 61.7352 \dots K, \quad Y = 47.7734 \dots K.$$

عند $\Delta\varepsilon = 0.01\varepsilon$

$$\Delta T_E \simeq X \Delta\varepsilon = (61.7352 \dots)(0.01)(0.84897597 \dots) K.$$

وعليه،

$$\Delta T_E \simeq 0.524 K.$$

يعطي حل معادلتَي التوازن الأصليتين غير الخطيتين عند $\varepsilon_{\text{new}} = 1.01\varepsilon$ ، مع الإبقاء على k نفسها، التغير المنتهي

$$\Delta T_E^{\text{finite}} = 0.527 K.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

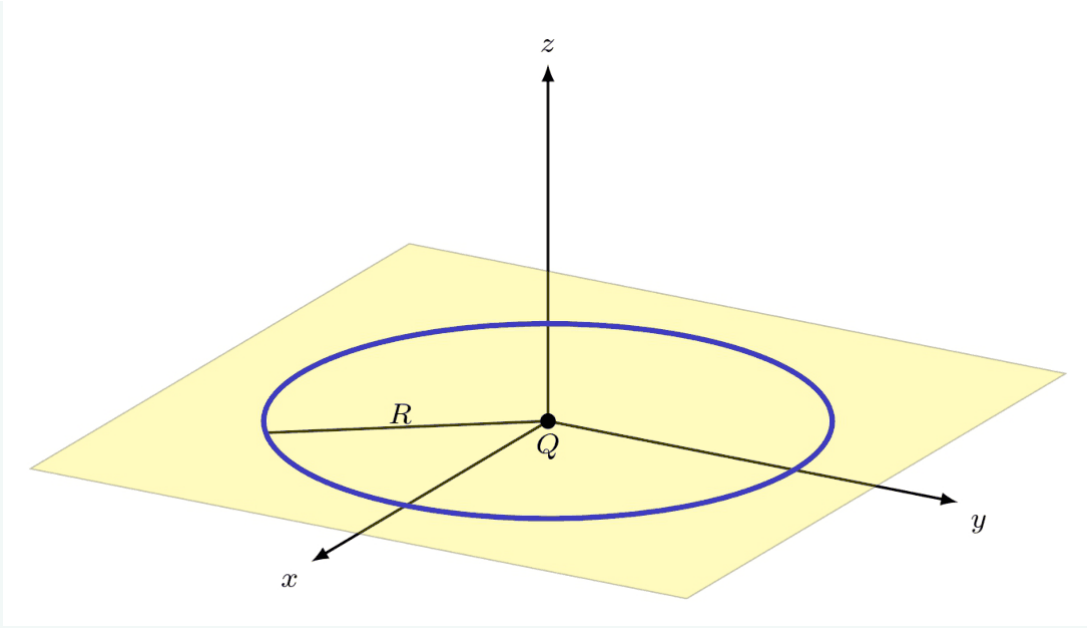
المسألة 2: احتجاز الأيونات وتبريد الذرات

كان احتجاز الذرات والأيونات وتبريدها في العقود الأخيرة موضوعاً مثيراً لاهتمام الفيزيائيين، وقد مُنحت عدة جوائز نوبل لأعمال في هذا المجال. في الجزء الأول من هذه المسألة، سنستكشف تقنية لاحتجاز الأيونات تُعرف باسم «مصيدة باول». وقد حصل فولفغانغ باول وهانس ديملت على نصف جائزة نوبل في الفيزياء لعام 1989 عن هذا العمل. ثم ندرس تقنية التبريد بدويلر، وهي أحد الأعمال المذكورة في البيان الصحفي لجائزة نوبل في الفيزياء لعام 1997، التي مُنحت لستيفن تشو وكلود كوهين تانوجي وويليام دانيال فيليبس «لتطوير طرائق لتبريد الذرات واحتجازها باستخدام ضوء الليزر».

A. مصيدة باول

من المعروف أنه لا يمكن إنشاء اتزان مستقر لجسيم مشحون باستخدام مجالات كهروستاتيكية. ولذلك، يتطلب إنشاء نقطة اتزان مستقر للأيونات تقنيات أكثر تعقيداً. ومصيدة باول إحدى هذه التقنيات.

لنعتبر حلقة مشحونة نصف قطرها R وكثافة شحنتها الخطية موجبة ومنتظمة وتساوي λ . توضع شحنة نقطية موجبة Q ، كتلتها m ، في مركز الحلقة.



الشكل 1 - حلقة مشحونة بشحنة موجبة، ذات كثافة شحنة خطية منتظمة λ ونصف قطر R : يقع مبدأ الإحداثيات في مركز الحلقة.

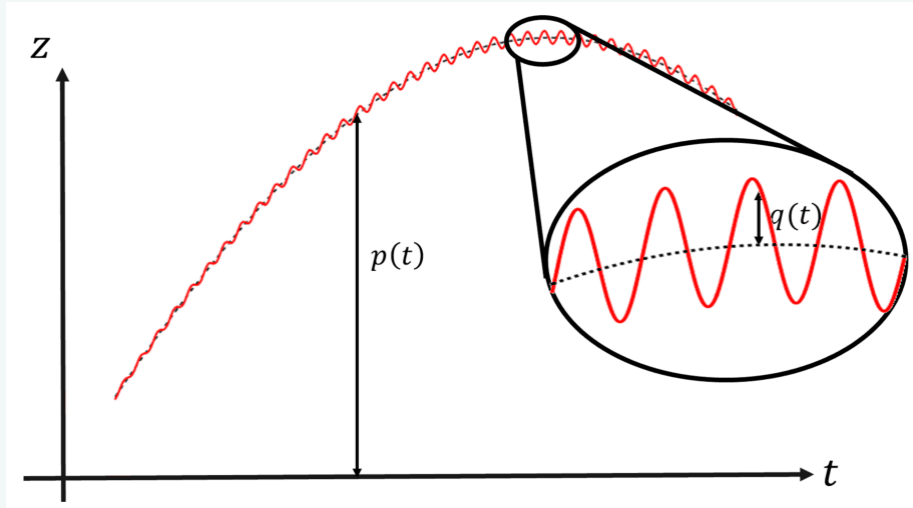
1.5 درجة	(a) أوجد، بالإحداثيات الديكارتية (x, y, z) ، المجال الكهربائي الناتج عن الحلقة المشحونة بالقرب من مركزها، حتى الرتبة الأولى في x/R و y/R و z/R . (b) أوجد التردد الزاوي للاهتزازات الصغيرة للجسيم المشحون حول مركز الحلقة في الاتجاهات التي يوجد فيها اتزان مستقر.	A-1
-------------	---	-----

لاحتجاز الشحنة Q احتجازاً تاماً، نريد تطبيق مجالات متناوبة لإحداث اتزان ديناميكي. افترض أن كثافة الشحنة هي $\lambda = \lambda_0 + u \cos \Omega t$ ، حيث يمكن ضبط λ_0 و u و Ω . سنهمل التأثيرات الإشعاعية. عندئذ تكون معادلة الحركة للإزاحات الصغيرة عن مركز الحلقة، في الاتجاه العمودي على مستواها، كما يلي:

$$\ddot{z} = (+k^2 + a\Omega^2 \cos \Omega t)z \quad (1)$$

A-2 اكتب a و k بدلالة المعلمات المعروفة. 0.4 درجة

نريد الحصول على حل تقريبي للمعادلة (1) بوضع الافتراضات التبسيطية التالية: $a \ll 1$ و $\Omega \gg k$ و $a\Omega^2 \gg k^2$. في ظل هذه الافتراضات، يمكن إظهار أن حل هذه المعادلة ينقسم إلى جزأين: $z(t) = p(t) + q(t)$ ، حيث $p(t)$ مركبة بطيئة التغير، و $q(t)$ مركبة سريعة التغير ذات سعة صغيرة ومتوسط يساوي صفراً. بعبارة أخرى، يمكن افتراض ثبات $p(t)$ خلال بضع اهتزازات من $q(t)$ (انظر الشكل 2).



الشكل 2 - حل نموذجي لمعادلة حركة الجسيم المشحون: تعطي $p(t)$ الحركة الإجمالية، وتمثل $q(t)$ اهتزازات صغيرة حول هذا المسار. ويعرض الشكل البيضي على اليمين تكبيراً لجزء من هذا المسار.

1.8 درجة	(a) باستخدام التقريبات المذكورة أعلاه، أوجد معادلة الحركة للمركبة $q(t)$ بدلالة a و Ω و p . (b) أوجد حل هذه المعادلة باختيار شروط ابتدائية مناسبة تتوافق مع الخصائص المطلوبة لهذه الدالة.	A-3
1.5 درجة	(a) استخدم التأثير المتوسط للمركبة سريعة التغير للحصول على معادلة حركة فعالة للمركبة $p(t)$. (b) ادرس استقرار نقطة الاتزان وأوجد شرط الاتزان المستقر.	A-4

افترض أن $\lambda_0 = 8 \times 10^{-9}$ C/m وأن $R = 10$ cm. نريد استخدام هذا الجهاز لاحتجاز ذرة أحادية التآين كتلتها تساوي 100 ضعف كتلة ذرة الهيدروجين.

0.4 درجة	احسب k . افترض أن $a = 0.04$ ، وقدر أصغر تردد لازم لجعل حركة هذا الأيون مستقرة. استخدم المعطيات الواردة في نهاية المسألة.	A-5
----------	---	-----

B. التبريد بدوبلر

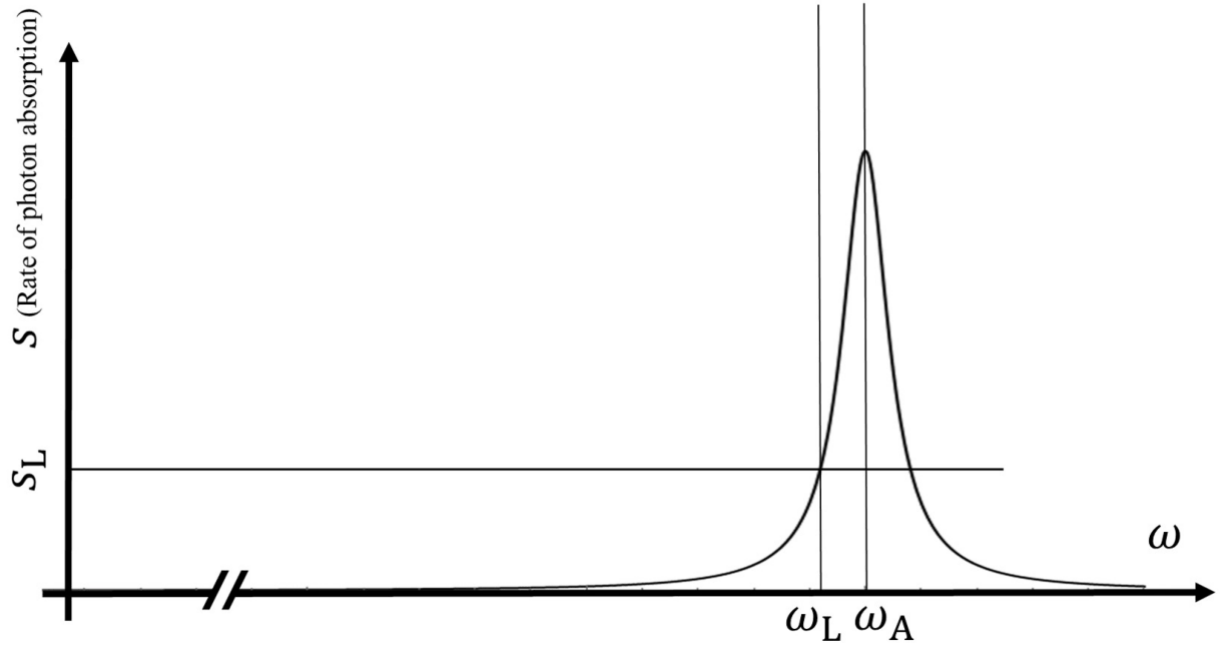
قد يكون من الضروري تبريد ذرة أو أيون محتجز. افترض أن ذرة محتجزة كتلتها m لها مستويان للطاقة، والفرق بين طاقتيهما هو $E_0 = \hbar\omega_A$. يمكن للإلكترونات في المستوى الأدنى أن تمتص فوتوناً وتنتقل إلى المستوى الأعلى، لكنها تعود بعد مدة τ إلى المستوى الأدنى وتصدر فوتوناً يقع تردده في الغالب ضمن المجال $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$.

0.5 درجة	استخدم مبدأ عدم اليقين لهايزنبرغ لإيجاد Γ .	B-1
----------	--	-----

باستدلال مماثل، عندما نسلط ضوء ليزر على الذرة المحتجزة، يمكن للذرة أن تمتص الفوتون إذا وقع التردد الزاوي لليزر ω_L ضمن المجال $[\omega_A - \Gamma, \omega_A + \Gamma]$. افترض أن تردد ضوء الليزر ω_L أقل قليلاً من ω_A . يبين الشكل 3، لجهاز معين، معدل امتصاص الذرة للفوتونات في إطارها المرجعي. ثم يُعاد إصدار الفوتون الممتص في اتجاه عشوائي. وللتبسيط، ندرس المسألة في بُعد واحد، أي نفترض أن الذرات لا تتحرك إلا في اتجاه x ، وأن ضوء الليزر يسقط عليها من اليسار ومن اليمين. في الإطار المرجعي للذرة، يكون تردد الضوء أعلى أو أدنى بسبب حركة الذرات. ولأن سرعة الذرات v صغيرة جداً، نحفظ فقط بالحدود من رتبة v/c ونهمل جميع الحدود ذات الرتب الأعلى. ولدينا أيضاً $m \gg \hbar\omega_A/c^2$ ، بحيث لا تكاد سرعة الذرة تتغير بعد امتصاص الفوتون. كذلك، فإن تغير التردد الناتج عن تأثير دوبلر صغير جداً مقارنةً بـ $\omega_A - \omega_L$ ، ولذلك يمكن تقريب الدالة s في مخطط الشكل 3 بالدالة الخطية التالية:

$$s(\omega) = s_L + \alpha(\omega - \omega_L)$$

حيث s عدد الفوتونات الممتصة في وحدة الزمن، و s_L قيمة s عند $\omega = \omega_L$ ، و α ميل المستقيم المماس للمنحنى عند ω_L . يكاد تردد الفوتون المعاد إصداره يساوي تردد الفوتون الساقط، لكنه يُصدر باحتمالين متساويين في اتجاه x الموجب أو السالب. وفي الواقع، يتطابق الترددان حتى الرتبة التي نأخذها في الحساب هنا. لاحظ أننا ندرس العملية بأكملها في الإطار المرجعي للذرة.



الشكل 3 - معدل امتصاص الفوتونات بدلالة التردد لمصيدة معينة: يُرمز إلى التردد الموافق لفرق الطاقة بين المستويين الذريين بـ ω_A ، وإلى تردد الليزر الأقل منه قليلاً بـ ω_L .

1.7 درجة	(a) افترض أن الذرة المحتجزة تتحرك بسرعة $v = v_x$ في إطار المختبر. احسب، في الإطار المرجعي للذرة، معدل تصادم الفوتونات الساقطة من كل من الاتجاهين مع الذرات (ويُرمز إليهما بـ s_+ و s_-)، ومعدل امتصاص الزخم في كل اتجاه (ويُرمز إليهما بـ π_+ و π_-). (b) حدّد القوة الفعالة المؤثرة في الذرة بدلالة v و ω_L/c و k_L و $\hbar$ و α، في الإطار المرجعي للمختبر. افترض أن $s_L \ll \alpha \omega_L$.	B- 2
-------------	--	---------

نريد إيجاد أدنى درجة حرارة يمكن بلوغها باستخدام هذه التقنية. افترض أن سرعة ذرة معينة قد انخفضت إلى الصفر تماماً، وأنها تمتص في هذه اللحظة بالذات فوتوناً (ساقطاً من أيّ من الاتجاهين)، ثم تعيد إصداره عشوائياً في أيّ من الاتجاهين، بالتردد نفسه تقريباً. افترض أن هذه العملية تحدث مرة واحدة كل مدة زمنية τ .

1.0 درجة	بالنظر إلى زخم الذرة بعد هذه العملية في كل من النتيجتين الممكنتين، احسب متوسط القدرة التي تمتصها الذرة.	B- 3
0.8 درجة	انظر إلى القوة المحسوبة في المهمة B-2 واحسب القدرة الخارجة. ثم احسب متوسط قيمة v^2 عند الاتزان. استخدم معرفتك بالنظرية الحركية للغازات لتقدير درجة حرارة الذرات.	B- 4
0.4 درجة	قدّر درجة الحرارة هذه لذرة كتلتها تساوي 100 ضعف كتلة ذرة الهيدروجين. افترض أن $\omega_L = 2 \times 10^{16}$ rad/s و $\alpha = 4$ و $\tau = 5 \times 10^{-9}$ s.	B- 5

$m_H = 1.674 \times 10^{-27}$ kg	كتلة ذرة الهيدروجين:
$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C	شحنة الإلكترون:
$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m	سماحية الفراغ:
$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K	ثابت بولتزمان:
$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J · s	ثابت بلانك:

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• A-1(a):

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

• A-1(b): جميع الاتجاهات في مستوى الحلقة مستقرة، حيث

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

أما اتجاه z فغير مستقر.

• A-2:

$$a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}}.$$

• A-3(a): $\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t$.

• A-3(b): $q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t$. عند اعتبار p ثابتة خلال دورة سريعة، تكون الشروط الابتدائية المناسبة هي $\dot{q}(0) = 0$ و $q(0) = -ap$.

• A-4(a):

$$\ddot{p} + \left(\frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2 \right) p = 0.$$

• A-4(b): يتطلب الاحتجاز المستقر، ضمن التقريب المذكور،

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

والتردد الزاوي المحوري البطيء هو $\sqrt{a^2 \Omega^2 / 2 - k^2}$.

• A-5:

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

العتبة المقدرة هي

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

اختر تردداً أعلى من هذه العتبة.

• B-1: رتبة مقدار عرض الخط الطيفي هي $1/\tau \sim \Gamma$ ؛ وباستخدام نصف العرض المرتبط بالعمر وفق الاصطلاح المعتاد،

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

- **B-2(a)**: ليكن الرمز $+$ دالاً على الفوتونات المنتشرة في اتجاه $+x$ ، ولتكن معدلات انتقال مركبة الزخم على محور x مع مراعاة الإشارة. عندئذ

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c},$$

$$\pi_{\pm} = \pm \hbar k_L \left[s_L \mp (s_L + \alpha \omega_L) \frac{v}{c} \right].$$

- **B-2(b)**

$$F_x = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

- **B-3**

$$P_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

- **B-4**: المعدل الموجب لسحب الطاقة هو

$$P_{\text{out}} = 2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

وعند الاتزان،

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}, \quad T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

- **B-5**

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK}.$$

الحل

A-1(a)

تقع الحلقة في المستوى xy ، وتحمل شحنة كلية $2\pi R\lambda$. وفق قانون كولوم، يكون مجالها الكهربائي على محور التناظر

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

عندما يكون $|z| \ll R$ ،

$$E_z(0, 0, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R^2} z.$$

يفرض تناظر الانعكاس والتناظر الدوراني أن يكون المجال الخطي العام بالقرب من المركز على الصورة

$$E_x = Cx, \quad E_y = Cy, \quad E_z = Dz.$$

تعطي النتيجة المحورية $D = \lambda/(2\epsilon_0 R^2)$. ولا توجد شحنة في جوار المركز، لذلك يعطي قانون غاوس

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2C + D = 0.$$

ومن ثم،

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} (-x \hat{\mathbf{x}} - y \hat{\mathbf{y}} + 2z \hat{\mathbf{z}}).$$

A-1(b)

يعطي قانون نيوتن الثاني في المستوى

$$m\ddot{x} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2}x, \quad m\ddot{y} = -\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 R^2}y.$$

هاتان معادلتان لمهتز توافقي. ومن ثم يكون التردد الزاوي نفسه في كل اتجاه في المستوى،

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$

وعلى امتداد المحور،

$$m\ddot{z} = \frac{Q\lambda}{2\epsilon_0 R^2}z.$$

عندما يكون $Q, \lambda > 0$ ، تتجه هذه القوة بعيداً عن المركز، ولذلك يكون الاتزان المحوري غير مستقر.

A-2

بالتعويض بكثافة الشحنة المعتمدة على الزمن في المعادلة المحورية نحصل على

$$\ddot{z} = \frac{Q}{2\epsilon_0 m R^2}(\lambda_0 + u \cos \Omega t)z.$$

وبالمقارنة مع المعادلة (1) نجد

$$k^2 = \frac{Q\lambda_0}{2\epsilon_0 m R^2}, \quad a = \frac{Qu}{2\epsilon_0 m R^2 \Omega^2}.$$

هنا a كمية لا بُعدية، ووحدات k هي مقلوب الزمن.

A-3(a)

نعوض بـ $z = p + q$ في معادلة الحركة:

$$\ddot{p} + \ddot{q} = k^2 p + k^2 q + a\Omega^2 p \cos \Omega t + a\Omega^2 q \cos \Omega t.$$

خلال اهتزازة سريعة، تكون p ثابتة تقريباً. ولأن سعة q صغيرة، و $a \ll 1$ ، و $a\Omega^2 \gg k^2$ ، فإن معادلة التغير السريع في الرتبة السائدة هي

$$\ddot{q} \simeq a\Omega^2 p \cos \Omega t.$$

A-3(b)

بإبقاء p ثابتة أثناء التكامل نحصل على

$$q(t) = -ap \cos \Omega t + C_1 t + C_2.$$

لا يمكن أن تحتوي مركبة سريعة الاهتزاز على انجراف تراكمي، ولذلك $C_1 = 0$. ويجب أن ينعدم متوسطها، مما يتطلب $C_2 = 0$. ومن ثم

$$q(t) \simeq -ap(t) \cos \Omega t.$$

عند تثبيت p ، تكون الشروط الابتدائية الموافقة هي

$$q(0) = -ap, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

تساوي سعة q مقدار a مضروباً في سعة الإزاحة البطيئة المحلية، بما يتفق مع $a \ll 1$. ونُهمل عند هذه الرتبة التصحيحات التي تتضمن التغير البطيء للمركبة p .

A-4(a)

نأخذ متوسط المعادلة الكاملة على مدى دورة للقوة الدافعة، مع اعتبار p ثابتة خلال هذه الدورة. وبما أن

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle \cos \Omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

فإننا نحصل على

$$\ddot{p} = k^2 p + a\Omega^2 \langle q \cos \Omega t \rangle.$$

وباستخدام $q = -ap \cos \Omega t$

$$\langle q \cos \Omega t \rangle = -\frac{ap}{2}.$$

إذن،

$$\ddot{p} = \left(k^2 - \frac{a^2 \Omega^2}{2} \right) p.$$

على الرغم من أن k^2 صغيرة مقارنة بـ $a\Omega^2$ ، يجب الاحتفاظ بها هنا: إذ لا يسهم المجال المتناوب في الحركة المتوسطة إلا عند رتبة $a^2 \Omega^2$.

A-4(b)

نعرف

$$\omega_s^2 = \frac{a^2 \Omega^2}{2} - k^2.$$

إذا كان $\omega_s^2 > 0$ ، فإن الإزاحة البطيئة تهتز:

$$p(t) = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t,$$

وتظل الحركة التقريبية الكاملة،

$$z(t) \simeq p(t) (1 - a \cos \Omega t),$$

محدودة. ومن ثم يكون شرط الاستقرار المحوري

$$a^2 \Omega^2 > 2k^2.$$

وعندما يكون $a > 0$ ، يصبح هذا الشرط

$$\Omega > \frac{\sqrt{2} k}{a}.$$

تحت هذه العتبة، يكون للمعادلة البطيئة حل ينمو أُسيًا. وعند المساواة، تكون $\ddot{p} = 0$ ، ولذلك تؤدي سرعة بطيئة غير صفرية إلى انجراف غير محدود؛ فلا تحقق المساواة احتجازًا.

وللاستكمال، فإن المعادلة المستعرضة هي

$$\ddot{x} = - \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a\Omega^2}{2} \cos \Omega t \right) x.$$

وتعطي عملية أخذ المتوسط نفسها، للمركبة البطيئة X ،

$$\ddot{X} + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{8} \right) X = 0,$$

وكذلك تمامًا بالنسبة إلى y . هذه الاتجاهات مستقرة ضمن التقريب، ولذلك يحدد الشرط المحوري متطلب الاحتجاز في الاتجاهات الثلاثة جميعًا.

A-5

للأيون المعطيات التالية:

$$Q = e, \quad m = 100m_H = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad R = 0.10 \text{ m}.$$

ومن ثم

$$k = \sqrt{\frac{(1.602 \times 10^{-19})(8 \times 10^{-9})}{2(8.854 \times 10^{-12})(1.674 \times 10^{-25})(0.10)^2}} = 2.079 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

إذن،

$$k \simeq 2.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

عند القيمة المحددة $a = 0.04$ ، يكون التردد الزاوي المقدّر للعتبة

$$\Omega_{\text{th}} = \frac{\sqrt{2}k}{a} = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s}.$$

والتردد العادي الموافق هو

$$f_{\text{th}} = \frac{\Omega_{\text{th}}}{2\pi} = 1.170 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

ومن ثم،

$$\Omega_{\text{th}} \simeq 7.4 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_{\text{th}} \simeq 1.2 \text{ MHz}.$$

يلزم تردد أعلى من هذه العتبة المقدّرة. وعند العتبة،

$$\frac{\Omega_{\text{th}}}{k} \simeq 35, \quad \frac{a\Omega_{\text{th}}^2}{k^2} = 50,$$

وهو ما يتفق مع الفصل المفترض بين المقاييس.

B-1

للحالة المثارة عمر مميز τ . ويكون تقدير عدم اليقين بين الطاقة والزمن

$$\Delta E \tau \gtrsim \frac{\hbar}{2}.$$

باعتبار نصف العرض المميز للطاقة هو $\Delta E \simeq \hbar\Gamma$ ، نحصل على

$$\Gamma\tau \gtrsim \frac{1}{2}.$$

ولعرض يحدده العمر المحدود، يكون التقدير المعتاد إذن

$$\Gamma \simeq \frac{1}{2\tau}.$$

الاستنتاج الراسخ من مبدأ عدم اليقين هو رتبة المقدار $\Gamma \sim 1/\tau$ ؛ أما العامل العددي فيعتمد على كيفية تعريف عرض الخط الطيفي.

B-2(a)

ليكن الرمز $+$ دالاً على الفوتونات المنتشرة في اتجاه $+x$ ، والرمز $-$ دالاً على الفوتونات المنتشرة في اتجاه $-x$. لذرة تتحرك بسرعة v ، تعطي إزاحتاً دوبلر من الرتبة الأولى

$$\omega'_+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \omega'_- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

ينزاح الفوتون الذي ينتشر في اتجاه حركة الذرة نفسه نحو الأحمر، أما الفوتون الذي ينتشر عكس حركتها فينزاح نحو الأزرق.

تحدد الدالة المعطاة $s(\omega)$ أصلاً معدل الامتصاص في إطار الذرة. وبتقييمها عند هذين الترددين نحصل على

$$s_+ = s_L + \alpha(\omega'_+ - \omega_L) = s_L - \alpha\omega_L \frac{v}{c},$$

$$s_- = s_L + \alpha(\omega'_- - \omega_L) = s_L + \alpha\omega_L \frac{v}{c}.$$

إذن،

$$s_{\pm} = s_L \mp \alpha \omega_L \frac{v}{c}.$$

لكل فوتون ممتص زخم ذو إشارة $\pm \hbar \omega'_{\pm}/c$. وبتعريف $\pi_{\pm}$ على أنهما معدلا انتقال مركبة الزخم على محور x مع مراعاة الإشارة،

$$\pi_+ = \frac{\hbar \omega'_+}{c} s_+, \quad \pi_- = -\frac{\hbar \omega'_-}{c} s_-.$$

بالتوسيع والاحتفاظ فقط بحدود الرتبة الأولى في v/c ،

$$\pi_+ = \hbar k_L \left[s_L - \left(s_L + \alpha \omega_L \right) \frac{v}{c} \right],$$

$$\pi_- = -\hbar k_L \left[s_L + \left(s_L + \alpha \omega_L \right) \frac{v}{c} \right].$$

B-2(b)

في إطار الذرة، يكون متوسط زخم إعادة الإصدار صفرًا لأن اتجاهي الإصدار متساويًا الاحتمال. ولذلك تكون القوة المتوسطة

$$F'_x = \pi_+ + \pi_- = -\frac{2\hbar \omega_L}{c^2} (s_L + \alpha \omega_L) v.$$

ضمن التقريب المستخدم هنا، تتساوى الطاقتان الممتصة والصادرة في إطار الذرة. ولذلك يكون صافي انتقال الطاقة في الدورة الكاملة صفرًا في هذا الإطار عند إهمال الارتداد في حساب القوة المتوسطة. ويُبقي التحويل إلى إطار المختبر القوة الطولية دون تغيير حتى الرتبة المحتفظ بها.

وباستخدام $s_L \ll \alpha \omega_L$ ، نحصل على

$$F_x \simeq -\frac{2\alpha \hbar \omega_L^2}{c^2} v = -2\alpha \hbar k_L^2 v.$$

يقع تردد الليزر على الجانب الصاعد من منحنى الامتصاص، ولذلك $\alpha > 0$. ومن ثم تعاكس القوة السرعة وتسحب طاقة حركية.

B-3

لنفترض أن الفوتون الساقط ينتشر في اتجاه $+x$ ، وأن مقدار زخمه هو

$$p_{\gamma} = \hbar k_L.$$

يكون زخم الذرة في البداية صفرًا. ويعطي حفظ الزخم النتيجتين المتساويتين في الاحتمال التاليتين:

الاتجاه الإصدار	زخم الذرة النهائي	الطاقة الحركية النهائية	الاحتمال
في اتجاه $+x$ ، وهو اتجاه السقوط	0	0	1/2
في اتجاه $-x$ ، المعاكس لاتجاه السقوط	$2p_{\gamma}$	$2p_{\gamma}^2/m$	1/2

ومن ثم يكون متوسط الزيادة في الطاقة الحركية لكل دورة امتصاص وإصدار

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2} \frac{(2p_{\gamma})^2}{2m} = \frac{p_{\gamma}^2}{m}.$$

ويعطي فوتون ساقط ينتشر في اتجاه $-x$ متوسط الزيادة نفسه في الطاقة. وبما أن دورة كاملة واحدة تحدث كل مدة τ ،

$$P_{in} = \frac{\langle \Delta K \rangle}{\tau} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

B-4

المعدل الذي تغيّر به قوة التخميد الطاقة الميكانيكية للذرة هو

$$F_x v = -2\alpha \hbar k_L^2 v^2.$$

ومن ثم فإن القدرة الخارجة الموجبة، أي معدل سحب الطاقة، هي

$$P_{\text{out}} = 2\alpha\hbar k_L^2 v^2.$$

عند الاتزان الحراري، توازن قدرة التبريد المتوسطة التسخين الناتج عن الارتداد:

$$2\alpha\hbar k_L^2 \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 k_L^2}{m\tau}.$$

وباختزال العوامل المشتركة نحصل على

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\alpha m\tau}.$$

تقتصر المسألة الحركة على بُعد واحد، ولذلك يعطي مبدأ تساوي توزيع الطاقة

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

ومن ثم،

$$T = \frac{\hbar}{2\alpha k_B \tau}.$$

تُختزل كتلة الذرة والعدد الموجي لليزر من تعبير درجة حرارة الاتزان في هذا النموذج.

B-5

باستخدام القيم المعطاة،

$$T = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{2(4)(1.381 \times 10^{-23})(5 \times 10^{-9})} = 1.9098 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

إن،

$$T \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} = 0.19 \text{ mK} \simeq 190 \mu\text{K}.$$

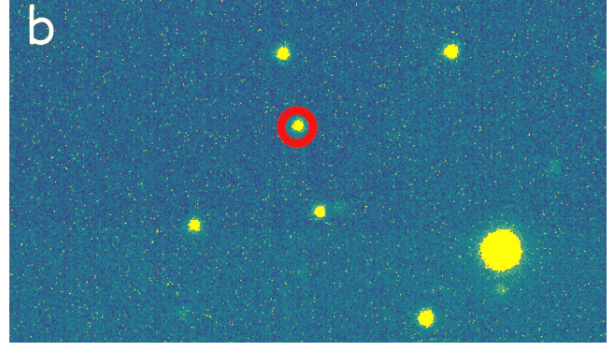
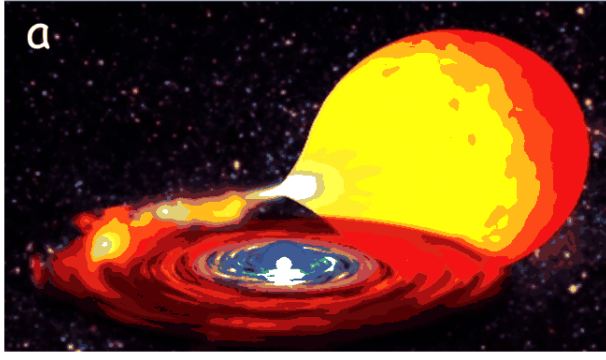
للكتلة المحددة $m = 1.674 \times 10^{-25} \text{ kg}$ ، يكون تباين السرعة الموافق

$$\langle v^2 \rangle = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad v_{\text{rms}} \simeq 0.126 \text{ m/s}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: النجم النابض الأرملة السوداء

نسبة كبيرة من النجوم المرصودة هي نجوم ثنائية. وقد يكون أحد النجمين أو كلاهما نجمًا نيوترونيًا يدور بسرعة زاوية عالية ويصدر موجات كهرومغناطيسية؛ وتُسمى هذه النجوم نجومًا نابضة. أحيانًا يكون النجم المرافق كتلة ممتدة من الغاز تسقط تدريجيًا على النجم النيوتروني فتؤدي إلى زيادة كتلته (الشكل a-1). وبهذه الطريقة، يبتلع النجم النيوتروني تدريجيًا جزءًا من كتلة نجمه المرافق. ولهذا السبب، شُبّه النجم النيوتروني بالأرملة السوداء (أو العنكبوت ذي الظهر الأحمر)، وهي أنثى عنكبوت تأكل شريكها بعد التزاوج. ويولد تسخين الغاز الساقط على الأرملة السوداء إشعاعًا يمكن رصده. وغالبًا ما تكون أثقل النجوم النيوترونية من الأرامل السوداء، وهي تُعدّ مختبرات طبيعية لاختبار الفيزياء الأساسية. يُظهر الشكل b-1 صورة مرافق النجم النيوتروني PSR J2215+5135، التقطها التلسكوب البصري ذو القطر 3.4 متر في المرصد الوطني الإيراني. ولا يمكن رؤية أي نجم نيوتروني في هذه الصورة، إذ يعود الضوء المرصود إلى نجمه المرافق.



الشكل 1 - (a) غازات النجم المرافق الساقطة على النجم النيوتروني - (b) مرافق النجم النيوتروني PSR J2215+5135

A. نظام ثنائي

اعتبر نموذجًا بسيطًا تُمثل فيه الأرملة السوداء ونجمها المرافق بكتلتين نقطيتين M_1 و M_2 تتحركان في مدار دائري حول مركز كتلتهما. ولدراسة ديناميكا هذا النظام، اعتبر نظام إحداثيات دوّارًا يكون فيه الجسمان ساكنين. اتخذ مركز الكتلة أصلًا لنظام الإحداثيات. افترض أن الكتلتين النقطيتين تقعان على المحور x على جانبي الأصل، وتُفصل بينهما مسافة a ، وأن M_1 تقع على الجزء السالب من المحور x . عند نقطة ارتباطية (x, y) في مستوى الحركة، يكون الجهد الفعّال $\varphi(x, y)$ لوحدة كتلة اختبار مساويًا لمجموع جهدي الجاذبية للكتلتين النقطيتين مضافًا إليه جهد الطرد المركزي.

A-1	اكتب $\varphi(x, y)$ بدلالة M_1 و M_2 و G و a .	1.0 نقطة
A-2	بافتراض أن $M_1 > M_2$ ، ارسم الدالة $\varphi(x, 0)$ رسمًا نوعيًا.	0.7 نقطة

افترض (في المهمة A-3 فقط) أن $M_2 = M_1/3$ ، وأن M_2 محاطة بغاز مخلخل ذي كثافة منخفضة جدًا. كتلة هذا الغاز ضئيلة، ونهمل تأثيراته الثقالية. إذا تجاوز حجم هذا الغلاف الغازي حدًا معينًا، فسيفيخ الغاز نحو M_1 . افترض أن الفيضان يحدث عبر $x = x_0$ على المحور x .

A-3	أوجد القيمة العددية للنسبة $\frac{x_0}{a}$ ، برقمين معنويين. يمكنك استخدام الآلة الحاسبة.	0.5 نقطة
-----	---	----------

لتكن دورة دوران النجمين حول مركز كتلتهما P . افترض أن الكتلة تتدفق من M_2 إلى M_1 بمعدل صغير جدًا قدره $\beta = dM_1/dt$. هذا المعدل صغير إلى حد يسمح بافتراض ثبات المسافة بين النجمين خلال كل دورة دوران. لكن المسافة بين النجمين تتغير بعد مرور زمن طويل، بينما تظل الحركة دائرية.

A-4	احسب معدل تغير كل من a و P بدلالة β و M_1 و M_2 و G و a .	0.6 نقطة
-----	---	----------

يشكّل الغاز المنفصل عن M_2 قرصًا يدور حول M_1 ويسخن بفعل الاحتكاك (الشكل a-1). ومع فقدان الغاز للطاقة، يتحرك لولبيًا إلى الداخل نحو M_1 ويسقط عليها في النهاية. في الحالة المستقرة، تتدفق الكتلة بمعدل ثابت β ، من M_2 إلى القرص ومن القرص إلى M_1 . وفي الوقت نفسه، يصدر القرص الساخن إشعاعًا حراريًا بوصفه جسمًا أسود. يتشكل هذا القرص قريبًا جدًا من النجم النيوتروني، لذا يمكن إهمال جذب النجم M_2 عند تحليل حركة القرص. أهمل أيضًا السعة الحرارية للغاز.

A-5	حدّد درجة حرارة القرص على بعد r من مركز النجم M_1 بدلالة β و M_1 و G و σ (ثابت ستيفان-بولتزمان).	1.0 نقطة
-----	---	----------

في النظام الثنائي PSR J2215+5135، تبلغ كتلة النجم النيوتروني $M_{NS} = 2.27 M_{\odot}$ ، وتبلغ كتلة نجمه المرافق $M_S = 0.33 M_{\odot}$ ، حيث $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ هي كتلة الشمس. زمن الدورة هو $P = 4.14 \text{ hr}$ ، وثابت ستيفان-بولتزمان هو $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ ، وثابت الجاذبية هو $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$.

افترض أن معدل تدفق الكتلة إلى النجم النيوتروني هو $\beta = \dot{M}_{NS} = 9 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

A-6	احسب درجة حرارة القرص عند نصف القطر $r = \frac{a}{10}$ بالكلفن.	0.5 نقطة
-----	---	----------

افترض أن النجم M_1 ، إثر انفجار مفاجئ، يقذف جزءًا من كتلته خارج النظام الثنائي بسرعة عالية جدًا، فتصبح كتلته M_1' . ليكن مقدار سرعة M_1' بالنسبة إلى M_2 بعد الانفجار هو v' .

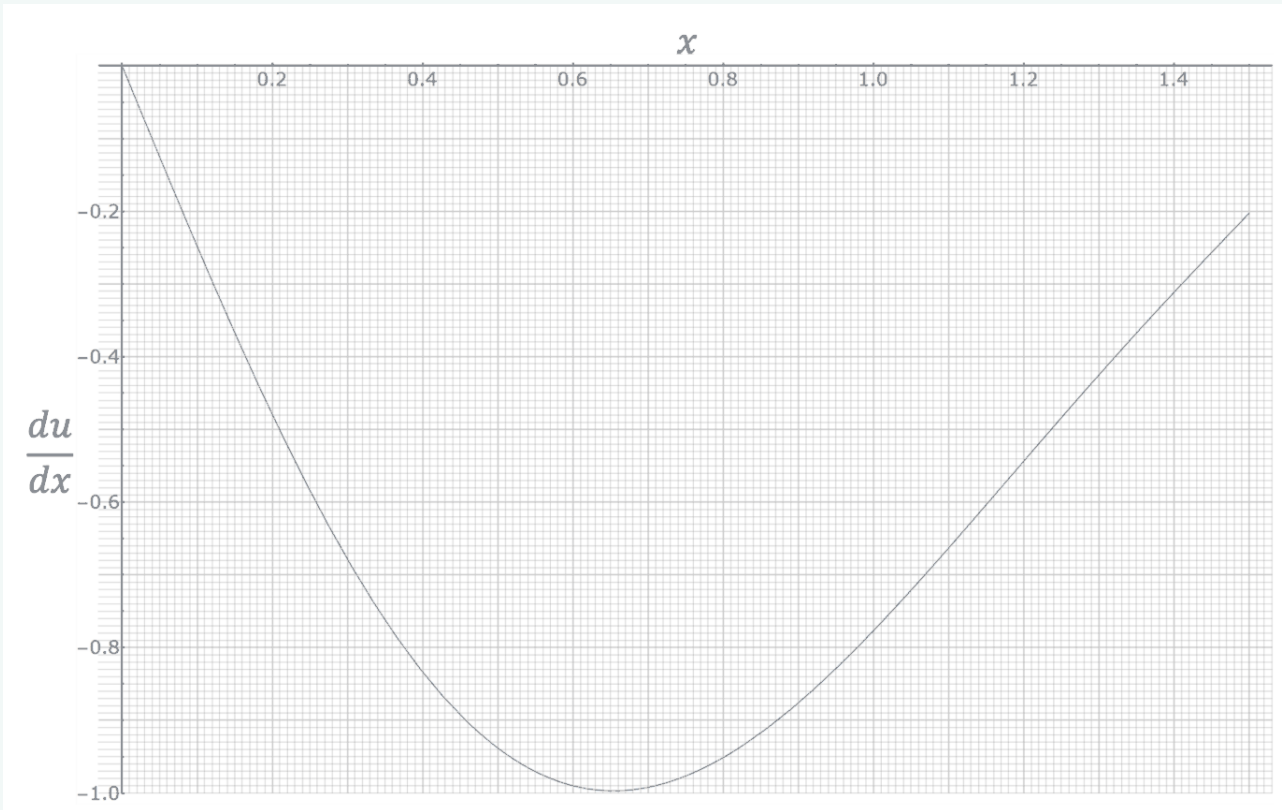
0.7 نقطة	A- حدّد القيمة العظمى لـ v' ، بدلالة M_1' و M_2 و G و a ، التي تسمح للنظام الثنائي الجديد بأن يظل مرتبطًا. وبافتراض أن الانفجار متساوي الخواص، ما القيمة الدنيا لـ M_1' اللازمة لبقاء النظام الثنائي مرتبطًا؟	7
-------------	--	---

B. تحليل استقرار نجم

ندرس في هذا الجزء استقرار نجم منفرد. اعتبر نجمًا يحتوي على نوع محدد من المادة معادلة حالته $p = K\rho^\gamma$ ، حيث K و γ ثابتان. لتكن $p(r)$ و $\rho(r)$ الضغط والكثافة، على الترتيب، على بعد r من مركز النجم. الضغط والكثافة عند مركز النجم هما p_c و ρ_c ، على الترتيب. في جميع مهام الجزء B، اعتبر جميع المتجهات المتجهة إلى الخارج موجبة.

0.2 نقطة	B-1 حدّد تسارع الجاذبية $g(r)$ قرب مركز النجم بدلالة r والثابتين G و ρ_c .	
0.6 نقطة	B-2 اشتق معادلة (تفاضلية) لتحديد $\rho(r)$ عند الاتزان، واكتبها بالشكل الآتي: $0 = \rho(r)h_2(r) + \frac{d}{dr}\left[h_1(\rho, r)\frac{d\rho}{dr}\right]$. أوجد الدالتين h_1 و h_2 .	
0.4 نقطة	B-3 كوّن كمية r_0 على الصورة $r_0 = G^l p_c^m \rho_c^n$ لها بُعد الطول.	
0.3 نقطة	B-4 أعد كتابة المعادلة (التفاضلية) في المهمة B-2 بالشكل الآتي: $0 = A_2(x)u(x) + \frac{d}{dx}\left[A_1(u, x)\frac{du}{dx}\right]$ حيث $u = \frac{\rho}{\rho_c}$ و $x = \frac{r}{r_0}$. أوجد الدالتين $A_1(u, x)$ و $A_2(x)$.	
0.6 نقطة	B-5 عند $\gamma = 2$ ، نجد أن $u(x) = \frac{f(x)}{x}$. حدّد $f(x)$.	

افترض أنه، لنجم معين، يُعطى $\frac{du}{dx}$ بوصفه دالة في x بالمنحنى المبين في الشكل 2.



B-6	استخدم سلوك المنحنى في الشكل 2، في جوار النقطة $x = 0$ ، لإيجاد γ بثلاثة أرقام معنوية. استخدم المسطرة المعطاة عند الحاجة.	0.8 نقطة
B-7	أوجد $\tilde{\rho}$ و $\tilde{g}$ بدلالة ρ و g إلى الرتبة الأولى في ε .	0.9 نقطة
B-8	باستخدام معادلة نيوتن للحركة للطبقة الكروية التي نصف قطر اتزانها r ، أوجد $\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2}$ بدلالة $\tilde{\rho}$ و $\tilde{g}$ و K و γ و $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}$ (نعني بـ $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}$ مشتقة $\tilde{\rho}$ بالنسبة إلى $\tilde{r}$ عند ثبات t).	0.6 نقطة
B-9	استنتج $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$ بدلالة ε والثوابت المعطاة في المسألة. أوجد القيمة الدنيا لـ γ اللازمة لاتزان مستقر، وأوجد التردد الزاوي لاهتزاز النجم.	0.6 نقطة

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اكتب $M = M_1 + M_2$ ، ولتكن مواضع النجمين $x_1 = -aM_2/M$ و $x_2 = aM_1/M$.

A-1 •

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3}(x^2 + y^2)$$

مع إمكان إضافة ثابت.

A-2 • توجد ثلاثة فروع مقعرة تماماً نحو الأسفل، لكل منها قيمة عظمى واحدة. يؤول الجهد إلى $-\infty$ على جانبي x_1, x_2 ، وكذلك عندما $x \rightarrow \pm\infty$. وباستخدام التسميات المعتادة، تقع نقاط القيم العظمى بالترتيب

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2},$$

وتحقق ارتفاعاتها

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3) < 0.$$

A-3 •

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

A-4 •

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

A-5 • باستخدام التحرر المحلي للطاقة المدارية والإشعاع من كلا الوجهين،

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

A-6 •

$$T(a/10) \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

A-7 • عتبة سرعة الإفلات هي

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}},$$

ويتطلب المدار المرتبط أن تكون $v' < v'_{\text{crit}}$ وللقذف المتساوي الخواص،

$$M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}.$$

تمثل المساواة في أي من الشرطين حالة الإفلات الحدية ذات المدار المكافئ.

B-1 •

$$g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3} G \rho_c r.$$

B-2 • أحد اختيارات التطبيق الملائمة هو

$$h_1(\rho, r) = K \gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2(r) = 4\pi G r^2.$$

B-3 •

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1, \quad r_0 = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}.$$

B-4 •

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

B-5 •

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

B-6 •

$$\gamma \simeq 1.67.$$

B-7 •

$$\tilde{\rho} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{g} = g(1 - 2\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

B-8 •

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4) \varepsilon = 0.$$

القيمة الحرجة هي $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$ ، وتوجد اهتزازات بفعل قوة إرجاع عندما $\gamma > 4/3$ ، وسلوك حدّي عند المساواة. وترددها الزاوي هو

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_c}{3} (3\gamma - 4)}.$$

الحل

A-1

لتكن $M = M_1 + M_2$. يعطي شرط مركز الكتلة والمسافة الفاصلة

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = a,$$

ومن ثم

$$x_1 = -\frac{M_2}{M} a, \quad x_2 = \frac{M_1}{M} a.$$

إذا كانت السرعة الزاوية للنظام الثنائي Ω ، فإن معادلة نيوتن لأي من النجمين تعطي

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

جهد الجاذبية لكل وحدة كتلة اختبار هو مجموع جهدي الكتلتين النقطيتين. وفي الإطار الذي يدور بانتظام، ينشأ تسارع الطرد المركزي المتجه إلى الخارج عن الجهد

$$\varphi_{\text{cf}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2).$$

وبالتالي،

$$\varphi(x, y) = -\frac{GM_1}{\sqrt{(x + aM_2/M)^2 + y^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - aM_1/M)^2 + y^2}} - \frac{GM}{2a^3} (x^2 + y^2).$$

A-2

على المحور x ،

$$\varphi(x, 0) = -\frac{GM_1}{|x - x_1|} - \frac{GM_2}{|x - x_2|} - \frac{1}{2} \Omega^2 x^2.$$

فيما يأتي وصف دقيق للرسم:

- توجد تفردات رأسية متجهة إلى الأسفل عند $x = x_1$ و $x = x_2$: إذ يقترب الجهد من $-\infty$ من كلا جانبي كل نجم.
- عند القيم الكبيرة الموجبة أو السالبة لـ x ،

$$\varphi(x, 0) \sim -\frac{1}{2} \Omega^2 x^2,$$

لذا ينخفض الطرفان الخارجيان إلى $-\infty$.

- تحتوي كل فترة من الفترات الثلاث التي يفصل بينها النجمان على قيمة عظمى واحدة بالضبط.

لإثبات النقطة الأخيرة، بعيداً عن الكتلتين،

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2GM_1}{|x-x_1|^3} - \frac{2GM_2}{|x-x_2|^3} - \Omega^2 < 0.$$

إذن كل فرع مقعر تماماً نحو الأسفل. وتتغير إشارة مشتقته من الموجب إلى السالب بين طرفيه، مما يعطي قيمة عظمى واحدة.

لنرمز إلى نقاط القيم العظمى اليسرى والداخلية واليمنى بـ L_3, L_1, L_2 ، على الترتيب. بما أن $M_1 > M_2$ ، فإن النجم الأثقل أقرب إلى الأصل، ولدينا

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{GM_1}{|x_1|^2} - \frac{GM_2}{x_2^2} > 0.$$

لذلك تقع نقطة القيمة العظمى الداخلية إلى يمين الأصل:

$$x_{L_3} < x_1 < 0 < x_{L_1} < x_2 < x_{L_2}.$$

القيمة العظمى الخارجية اليسرى هي الأعلى، تليها القيمة العظمى الخارجية اليمنى، أما القيمة العظمى الداخلية فهي الأدنى:

$$\varphi(L_1) < \varphi(L_2) < \varphi(L_3).$$

عند اختيار الثابت الجمعي كما في A-1، يكون المنحنى بأكمله سالباً ولا يتقاطع مع المحور الأفقي. وقيمة تقاطعه مع المحور الرأسي هي

$$\varphi(0,0) = -\frac{GM}{a} \left(\frac{M_1}{M_2} + \frac{M_2}{M_1} \right).$$

A-3

يمر الغاز أولاً باتجاه M_1 عبر نقطة الاتزان الداخلية L_1 ، حيث تنعدم القوة الفعالة. تمثل هذه النقطة قيمة عظمى لـ $\varphi(x,0)$ على طول الخط الواصل بين النجمين، ونقطة سرج للجهد الفعال ثنائي الأبعاد.

لدينا هنا

$$M_1 = \frac{3}{4}M, \quad M_2 = \frac{1}{4}M,$$

ومن ثم

$$x_1 = -\frac{a}{4}, \quad x_2 = \frac{3a}{4}.$$

بوضع $z = x_0/a$ ، يصبح الشرط $\partial\varphi/\partial x = 0$ بين النجمين

$$\frac{3/4}{(z+1/4)^2} - \frac{1/4}{(3/4-z)^2} - z = 0.$$

الجذر الواقع في $-1/4 < z < 3/4$ هو

$$z = 0.360743 \dots$$

إذن، برقمين معنويين،

$$\frac{x_0}{a} = 0.36.$$

A-4

اعتبر انتقال الكتلة محافظاً: فكل الكتلة التي تفقدها M_2 تصل إلى M_1 ، ولا يوجد عزم قوة خارجي. وفي نموذج الكتل النقطية، يُهمل الدوران الذاتي والزخم الزاوي المخزن مؤقتاً في تيار المادة. ومن ثم

$$\dot{M}_1 = \beta, \quad \dot{M}_2 = -\beta, \quad \dot{M} = 0,$$

ويكون الزخم الزاوي المداري محفوظاً.

لنظام ثنائي ذي مدار دائري،

$$L = \frac{M_1 M_2}{M} a^2 \Omega = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}.$$

بأخذ مشتقته اللوغاريتمية،

$$0 = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\beta}{M_1} - \frac{\beta}{M_2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}.$$

لذلك

$$\dot{a} = 2\beta a \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

تعطي علاقة كبلر

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

بما أن M ثابتة،

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 3\beta \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

إذن

$$\dot{P} = 6\pi\beta \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right).$$

تزداد كل من المسافة الفاصلة وزمن الدورة عندما تتدفق الكتلة من النجم الأخف إلى النجم الأثقل.

A-5

استخدم قرصاً رقيقاً ذا مدارات كبلرية شبه دائرية، مع إهمال الطاقة الحركية الشعاعية، وافترض أن الطاقة الميكانيكية المدارية المفقودة أثناء عبور المادة حلقة من القرص تُشعّ محلياً.

شرط المدار الدائري هو

$$v^2 = \frac{GM_1}{r}.$$

وعليه تكون الطاقة الميكانيكية للغاز لكل وحدة كتلة

$$e(r) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_1}{r} = -\frac{GM_1}{2r}.$$

اعتبر حلقة بين r و $r + dr$ ، حيث $dr > 0$. تدخل المادة عبر حافتها الخارجية وتخرج عبر حافتها الداخلية. وعند معدل تدفق كتلة β ، تكون القدرة المتحررة

$$dL = \beta [e(r + dr) - e(r)] = \frac{GM_1 \beta}{2r^2} dr.$$

يشعّ وجهها القرص كلاهما. وتبلغ المساحة الحلقية الكلية لهما

$$dA = 2(2\pi r dr) = 4\pi r dr.$$

بإهمال تخزين الحرارة ومساواة التحرر المحلي للطاقة بإشعاع الجسم الأسود،

$$4\pi r dr \sigma T^4 = \frac{GM_1 \beta}{2r^2} dr.$$

ومن ثم

$$T(r) = \left(\frac{GM_1\beta}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4}.$$

وعلى وجه الخصوص، $T \propto r^{-3/4}$.

A-6

الكتلة الكلية وزمن الدورة هما

$$M = (2.27 + 0.33)(1.98 \times 10^{30}) = 5.148 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$P = 4.14(3600) = 14904 \text{ s}.$$

تعطي علاقة كبلر

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1.24548 \times 10^9 \text{ m}.$$

لذلك

$$r = \frac{a}{10} = 1.24548 \times 10^8 \text{ m}.$$

باستخدام $1 \text{ yr} \simeq 3.156 \times 10^7 \text{ s}$

$$\beta = \frac{9 \times 10^{-10}(1.98 \times 10^{30})}{3.156 \times 10^7} \simeq 5.65 \times 10^{13} \text{ kg s}^{-1}.$$

مع $M_1 = 2.27(1.98 \times 10^{30}) \text{ kg}$

$$T = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(2.27 \times 1.98 \times 10^{30})(5.65 \times 10^{13})}{8\pi(5.67 \times 10^{-8})(1.24548 \times 10^8)^3} \right]^{1/4}.$$

ينتج عن ذلك

$$T \simeq 8.86 \times 10^3 \text{ K},$$

أو

$$T \simeq 8.9 \times 10^3 \text{ K}.$$

A-7

الانفجار مفاجئ، لذا تظل المسافة الفاصلة بعده مباشرة a . وبعد مغادرة المادة المقذوفة بسرعة، تكون الطاقة المدارية النسبية للنجمين المتبقين

$$E' = \frac{1}{2}\mu'v'^2 - \frac{GM'_1M_2}{a}, \quad \mu' = \frac{M'_1M_2}{M'_1 + M_2}.$$

يتطلب المدار المرتبط لجسمين أن تكون $E' < 0$. إذن

$$v'^2 < \frac{2G(M'_1 + M_2)}{a},$$

وتكون السرعة الحدية

$$v'_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G(M'_1 + M_2)}{a}}.$$

عند المساواة يكون المدار قطعاً مكافئاً ولا يكون مرتبطاً.

إذا كان القذف متساوي الخواص في إطار سكون النجم المنفجر، فلا يحدث ارتداد. وتظل السرعتان اللحظيتان للنجمين المتبقين دون تغيير. لذلك تبقى سرعتهما النسبية مساوية لسرعة المدار الدائري الأصلية:

$$v'^2 = \Omega^2 a^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}.$$

بالتعويض في شرط الارتباط نحصل على

$$M_1 + M_2 < 2(M'_1 + M_2),$$

أو

$$\boxed{M'_1 > \frac{M_1 - M_2}{2}}.$$

وبصورة مكافئة، يجب أن تكون الكتلة المقذوفة أقل من نصف الكتلة الكلية الأصلية للنظام الثنائي:

$$M_1 - M'_1 < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

القيمة الدنيا المذكورة هي عتبة حرجية؛ وتعطي المساواة إفلاتاً حدياً.

B-1

بفعل التناظر الكروي، لا تسهم في مجال الجاذبية عند نصف القطر r إلا الكتلة المحصورة داخله. قرب المركز، $\rho \simeq \rho_c$ ، ومن ثم

$$m(r) \simeq \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3.$$

باعتبار التسارع المتجه إلى الخارج موجباً،

$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \simeq -\frac{4\pi}{3} G\rho_c r.$$

لذلك

$$\boxed{g(r) \simeq -\frac{4\pi}{3} G\rho_c r}.$$

B-2

يتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي

$$\frac{dp}{dr} = \rho g.$$

تحقق الكتلة المحصورة

$$g = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

وبالتالي،

$$\frac{d}{dr}(r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho.$$

باستخدام $g = (1/\rho) dp/dr$ ،

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

من $p = K\rho^\gamma$

$$\frac{dp}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}.$$

إذن معادلة الكثافة المطلوبة هي

$$\frac{d}{dr} \left(K \gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\pi G r^2 \rho = 0.$$

وعليه فإن أحد الاختيارات الصحيحة هو

$$h_1 = K \gamma r^2 \rho^{\gamma-2}, \quad h_2 = 4\pi G r^2.$$

يؤدي ضرب الدالتين في الثابت غير الصفري نفسه إلى معادلة مكافئة.

B-3

الأبعاد ذات الصلة هي

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}, \quad [p_c] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\rho_c] = M L^{-3}.$$

بافتراض أن يكون بُعد $G^l p_c^m \rho_c^n$ هو L ، نحصل على

$$-l + m + n = 0, \quad 3l - m - 3n = 1, \quad -2l - 2m = 0.$$

بالحل،

$$l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -1.$$

ومن ثم

$$r_0 = \frac{\sqrt{p_c}}{\sqrt{G} \rho_c} = \sqrt{\frac{p_c}{G \rho_c^2}}.$$

بما أن $p_c = K \rho_c^\gamma$ ، فمن المفيد أيضًا أن نكتب

$$r_0^2 = \frac{K \rho_c^{\gamma-2}}{G}.$$

B-4

عوض

$$r = r_0 x, \quad \rho = \rho_c u, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho_c}{r_0} \frac{du}{dx}$$

في معادلة B-2:

$$K \gamma \rho_c^{\gamma-1} \frac{d}{dx} \left(x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi G r_0^2 \rho_c x^2 u = 0.$$

لأن $G r_0^2 \rho_c = K \rho_c^{\gamma-1}$ ، تعطي القسمة على $K \rho_c^{\gamma-1}$

$$\frac{d}{dx} \left(\gamma x^2 u^{\gamma-2} \frac{du}{dx} \right) + 4\pi x^2 u = 0.$$

إذن

$$A_1(u, x) = \gamma x^2 u^{\gamma-2}, \quad A_2(x) = 4\pi x^2.$$

الشروطان عند المركز هما

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

وينتج الشرط الأخير من الانتظام والتناظر الكروي.

B-5

عند $\gamma = 2$ ، تختزل المعادلة إلى

$$\frac{d}{dx}(x^2 u') + 2\pi x^2 u = 0.$$

لتكن $u = f/x$ عندئذ

$$x^2 u' = x f' - f, \quad \frac{d}{dx}(x^2 u') = x f''.$$

عندما $x > 0$,

$$f'' + 2\pi f = 0.$$

بوضع $k = \sqrt{2\pi}$ يكون الحل العام

$$f = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

يتطلب بقاء $u = f/x$ منتهية عند المركز أن يكون $B = 0$. ثم يعطي شرط التطبيع $u(0) = 1$ العلاقة $Ak = 1$. لذلك

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi}},$$

و

$$u(x) = \frac{\sin(\sqrt{2\pi} x)}{\sqrt{2\pi} x}.$$

ينتهي توزيع الكثافة الفيزيائي عند أول صفر له، $x = \sqrt{\pi/2}$.

B-6

في هذه المهمة، نعود إلى γ العامة. قرب المركز، يسمح الانتظام بالتوسع

$$u(x) = 1 + cx^2 + O(x^4), \quad u'(x) = 2cx + O(x^3).$$

يعطي التعويض في معادلة الاتزان اللابعدية، عند الرتبة x^2 ،

$$6\gamma c + 4\pi = 0.$$

ومن ثم

$$u'(x) = -\frac{4\pi}{3\gamma}x + O(x^3).$$

إذا كان s ميل منحنى u' المرسوم بدلالة x عند الأصل، فإن

$$s = u''(0) = -\frac{4\pi}{3\gamma}, \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3s}.$$

ميل المماس عند الأصل في الشكل 2 يساوي تقريباً

$$s \simeq -2.51.$$

إذن

$$\gamma \simeq \frac{4\pi}{3(2.51)} \simeq 1.67.$$

وهذا يتفق مع $5/3$.

B-7

نتتبع قشرة مادية معينة. نُحَفِّظ كتلتها أثناء انتقالها من r إلى

$$\tilde{r} = r(1 + \varepsilon).$$

بما أن عامل التحجيم نفسه ينطبق على القشور المركزية المجاورة،

$$d\tilde{r} = (1 + \varepsilon) dr.$$

يعطي انحفاظ الكتلة في قشرة رقيقة

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r},$$

ومن ثم

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon)^3} = \rho(1 - 3\varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

لذلك

$$\boxed{\tilde{\rho} \simeq \rho(1 - 3\varepsilon)}.$$

الكتلة المحصورة داخل القشرة المتحركة محفوظة أيضًا. وبالتالي،

$$\tilde{g} = -\frac{Gm(r)}{\tilde{r}^2} = \frac{g}{(1 + \varepsilon)^2},$$

مما يعطي

$$\boxed{\tilde{g} \simeq g(1 - 2\varepsilon)}.$$

هنا تكون g سالبة، اتساقًا مع الاصطلاح المحدد باعتبار الاتجاه إلى الخارج موجبًا.

B-8

التسارع المتجه إلى الخارج الناتج عن الضغط هو

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

بإضافة الجاذبية، تصبح معادلة نيوتن

$$\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}.$$

باستخدام معادلة الحالة نفسها للمادة المضطربة،

$$\tilde{p} = K \tilde{\rho}^\gamma,$$

نحصل على

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}.$$

ومن ثم

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{r}}{dt^2} = \tilde{g} - K \gamma \tilde{\rho}^{\gamma-2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}}}.$$

B-9

عند ثبات الزمن، تكون ε مستقلة عن r الذي يميز القشرة المركزية. لذلك

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}, t) = (1 + \varepsilon)^{-3} \rho\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \varepsilon}\right),$$

و

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{r}} = (1 + \varepsilon)^{-4} \frac{d\rho}{dr}.$$

وعليه يتغير حد الضغط في B-8 وفق العلاقة

$$K\gamma\tilde{\rho}^{\gamma-2}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{r}} = K\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}(1+\varepsilon)^{2-3\gamma}.$$

في حالة الاتزان غير المضطربة،

$$K\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr} = g.$$

وبالجمع مع $\tilde{g} = g(1+\varepsilon)^{-2}$ ينتج

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = g[(1+\varepsilon)^{-2} - (1+\varepsilon)^{2-3\gamma}].$$

إلى الرتبة الأولى،

$$(1+\varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon,$$

$$(1+\varepsilon)^{2-3\gamma} = 1 + (2-3\gamma)\varepsilon.$$

إذن

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = g(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

بما أن r يميز القشرة الأصلية وهو ثابت،

$$\frac{d^2\tilde{r}}{dt^2} = r\ddot{\varepsilon}.$$

باستخدام النتيجة قرب المركز $-4\pi G\rho_c/3$ ،

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)\varepsilon.$$

لكي يكون التسارع إرجاعياً، يجب أن يكون المعامل الذي يضرب ε موجباً. ومن ثم

$$\gamma > \frac{4}{3}.$$

وعليه تكون القيمة الحرجة

$$\gamma_{\text{crit}} = \frac{4}{3}.$$

عند المساواة لا توجد قوة إرجاع إلى هذه الرتبة؛ وعندما $\gamma < 4/3$ ، يوجد اضطراب متنامٍ. أما عندما $\gamma > 4/3$ ، فتكون الحركة توافقية بتردد زاوي

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{3}(3\gamma - 4)} = \sqrt{4\pi G\rho_c\left(\gamma - \frac{4}{3}\right)}.$$

تقع القيمة المستنتجة من الرسم $\gamma \simeq 1.67$ ضمن مجال الاستقرار.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.