

IPhO 2023

理论题与解答 · 日本东京 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2023/

题目 1: 土壤胶体的表征

胶体科学可用于表征土壤颗粒，因为其中许多颗粒可视为微米尺度的胶体颗粒。例如，可以利用布朗运动（胶体颗粒的无规则运动）测量颗粒的大小。

部分 A. 胶体颗粒的运动（1.6 分）

我们分析质量为 M 的胶体颗粒的一维布朗运动。其速度 $v(t)$ 的运动方程为：

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

其中， γ 为摩擦系数， $F(t)$ 为水分子随机碰撞产生的力， $F_{\text{ext}}(t)$ 为外力。在部分 A 中，我们假设 $F_{\text{ext}}(t) = 0$ 。

A.1 — 0.8分

设一个水分子在 $t = t_0$ 时与颗粒碰撞，给予颗粒冲量 I_0 ，此后 $F(t) = 0$ 。若碰撞前 $v(t) = 0$ ，则在 $t > t_0$ 时， $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ 。用 I_0 及式(1)中必要的参数求出 v_0 和 τ 。

在后续各题中，你可以在答案中使用 τ 。

A.2 — 0.8分

实际上，水分子接连不断地与颗粒碰撞。设第 i 次碰撞在时刻 t_i 给予颗粒冲量 I_i ，在 $t > 0$ 且 $v(0) = 0$ 的条件下求出 $v(t)$ 。同时，给出对于指定的 t ，所需考虑的 t_i 的范围所满足的不等式。在答题纸上，无须在 $v(t)$ 的表达式中注明这一范围。

部分 B. 有效运动方程（1.8 分）

以上结果表明，若 $|t - t'| \gg \tau$ ，则可将颗粒速度 $v(t)$ 和 $v(t')$ 视为不相关的随机量。在此基础上，我们引入一个理论模型，近似描述一维布朗运动。在该模型中，速度每隔时间 δ ($\gg \tau$) 随机改变一次，即

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

其中 $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)， v_n 为随机量。它满足

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

其中参数 C 依赖于 δ 。这里 $\langle X \rangle$ 表示 X 的期望值。也就是说，若无限次抽取随机数 X ，其平均值将为 $\langle X \rangle$ 。

现在考虑 $t = N\delta$ 时颗粒的位移 $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ ，其中 N 为整数。

B.1 — 1.0分

用 C 、 δ 和 t 求出 $\langle \Delta x(t) \rangle$ 和 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 。

B.2 — 0.8分

量 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 称为均方位移 (MSD)。它是布朗运动的一个特征可观测量，而布朗运动对应于 $\delta \rightarrow 0$ 的极限情形。由此可以证明 $C \propto \delta^\alpha$ 且 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$ 。求出 α 和 β 的值。

部分 C. 电泳 (2.7 分)

这里讨论电泳，即带电颗粒在电场作用下的输运。将质量为 M 、电荷量为 $Q (> 0)$ 的胶体颗粒悬浮液置于横截面积为 A 的狭窄通道中 (图1(a))。忽略颗粒间的相互作用，以及壁面、流体、其中的离子和重力的影响。

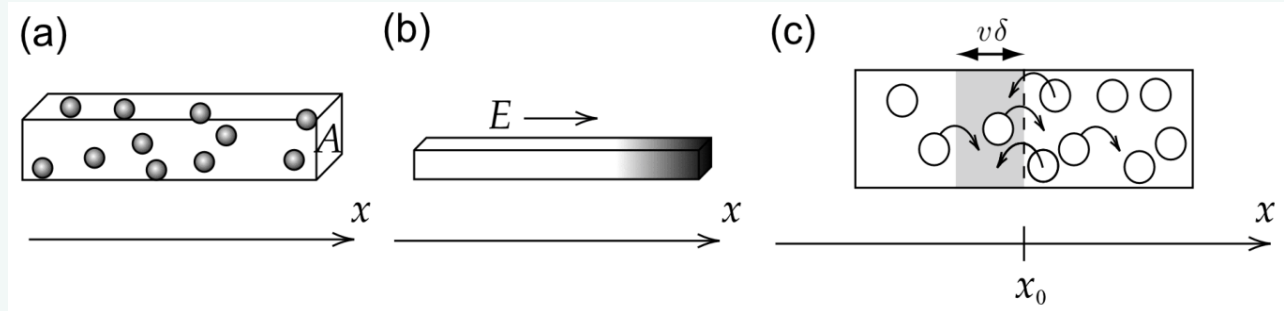


图1: 部分 C 的装置。

施加沿 x 方向的匀强电场 E 后，颗粒发生输运，其浓度 $n(x)$ (单位体积内的颗粒数) 变得不均匀 (图1(b))。撤去 E 后，这种不均匀性逐渐消失。这是颗粒布朗运动的结果。若 $n(x)$ 不均匀，向右运动和向左运动的颗粒数可能不同 (图1(c))。这会产生颗粒通量 $J_D(x)$ ，即在 x 处沿 x 轴方向、单位时间内通过单位横截面积的平均颗粒数。已知该通量满足

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

其中 D 称为扩散系数。

现在为简化讨论，假设一半颗粒的速度为 $+v$ ，另一半为 $-v$ 。令 $N_+(x_0)$ 表示速度为 $+v$ 的颗粒在单位时间内从左向右穿过 x_0 处单位横截面积的数量。速度为 $+v$ 的颗粒若要在时间间隔 δ 内穿过 x_0 ，就必须位于图1(c)的阴影区域内。由于 δ 很小，在该区域内有 $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$ 。

C.1 — 0.5分

从 v 、 δ 、 $n(x_0)$ 和 $\frac{dn}{dx}(x_0)$ 中选取必要的量，表示 $N_+(x_0)$ 。

对于速度 $-v$ ，定义与 $N_+(x_0)$ 对应的量 $N_-(x_0)$ 。于是有 $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$ 。根据式(3)，有 $\langle v^2 \rangle = C$ 。

C.2 — 0.7分

从 C 、 δ 、 $n(x_0)$ 和 $\frac{dn}{dx}(x_0)$ 中选取必要的量，求出 $J_D(x_0)$ 。利用该结果和式(4)，用 C 和 δ 表示 D ，并用 D 和 t 表示 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 。

现在讨论渗透压 Π 的作用。渗透压由 $\Pi = \frac{n}{N_A} RT = nkT$ 给出，其中 N_A 为阿伏伽德罗常数， R 为气体常数， T 为温度， $k = \frac{R}{N_A}$ 为玻尔兹曼常数。考虑在电场 E 作用下形成的不均匀浓度分布 (图1(b))。由于 $n(x)$ 随 x 变化， $\Pi(x)$ 也随之变化。于是，由 $\Pi(x)$ 和 $\Pi(x + \Delta x)$ 产生的力必须与电场 E 作用于颗粒上的总力平衡 (图2)。这里考虑很小的 Δx ，使得在此范围内可将 $n(x)$ 视为常量，同时 $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$ 。

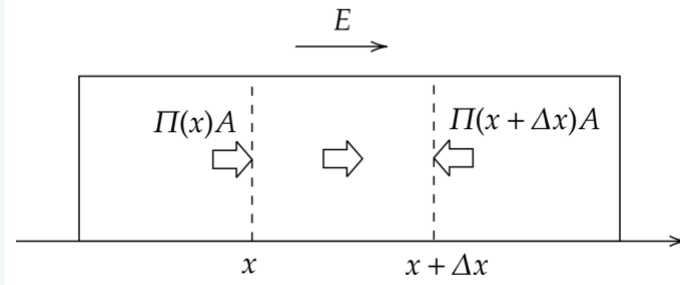


图2：力的平衡。

C.3 — 0.5分

用 $n(x)$ 、 T 、 Q 、 E 和 k 表示 $\frac{dn}{dx}(x)$ 。

现在讨论通量的平衡。除了布朗运动产生的通量 $J_D(x)$ 外，还有电场产生的通量 $J_Q(x)$ 。它由下式给出：

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

其中 u 是颗粒在电场驱动下的终端速度。

C.4 — 0.5分

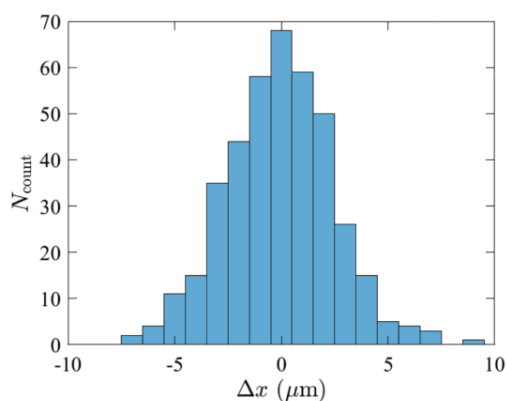
为求出 u ，使用式(1)，并令 $F_{\text{ext}}(t) = QE$ 。由于 $v(t)$ 存在涨落，我们考虑 $\langle v(t) \rangle$ 。假设 $\langle v(0) \rangle = 0$ ，并利用 $\langle F(t) \rangle = 0$ ，求出 $\langle v(t) \rangle$ ，进而得到 $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$ 。

C.5 — 0.5分

通量平衡条件为 $J_D(x) + J_Q(x) = 0$ 。用 k 、 γ 和 T 表示扩散系数 D 。

部分 D. 均方位移 (2.4 分)

假设我们观测了水中一个孤立的球形胶体颗粒的布朗运动，其半径为 $a = 5.0 \mu\text{m}$ 。图3给出了每隔 $\Delta t = 60 \text{ s}$ 测量一次的 x 方向位移 Δx 的直方图。摩擦系数由 $\gamma = 6\pi a\eta$ 给出，其中水的黏度为 $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ，温度为 $T = 25^\circ\text{C}$ 。



$\Delta x (\mu\text{m})$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

$\Delta x (\mu\text{m})$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

$\Delta x (\mu\text{m})$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

图3：位移直方图。

$\Delta x (\mu\text{m})$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

Δx (μm)	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

Δx (μm)	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

D.1 — 1.0分

不利用 N_A 是阿伏伽德罗常数这一事实，根据图3的数据估算 N_A 的值，保留两位有效数字。气体常数为 $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ 。不要使用《总则》中给出的玻尔兹曼常数 k 的数值。对于阿伏伽德罗常数，你得到的数值可能与《总则》中给出的不同。

现在将部分 B 的模型推广到电场 E 作用下电荷量为 Q 的颗粒运动。式(2)中的颗粒速度 $v(t)$ 应替换为 $v(t) = u + v_n$ ($t_{n-1} < t \leq t_n$)，其中 v_n 满足式(3)， u 为式(5)中所考虑的终端速度。

D.2 — 0.8分

用 u 、 D 和 t 表示均方位移 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 。求出 t 很小和很大时的近似幂律，以及发生这一变化的特征时间 t_* 。在双对数坐标中画出均方位移的示意图，标出 t_* 的大致位置。

接下来考虑游动的微生物（图4(a)），为简化起见，仅讨论一维情形（图4(b)）。这些微生物是半径为 a 的球形颗粒。它们以 $+u_0$ 或 $-u_0$ 的速度游动，每隔时间 δ_0 随机选择一次符号，各次选择之间互不相关。观测到的运动是游动引起的位移与球形颗粒布朗运动引起的位移的叠加。

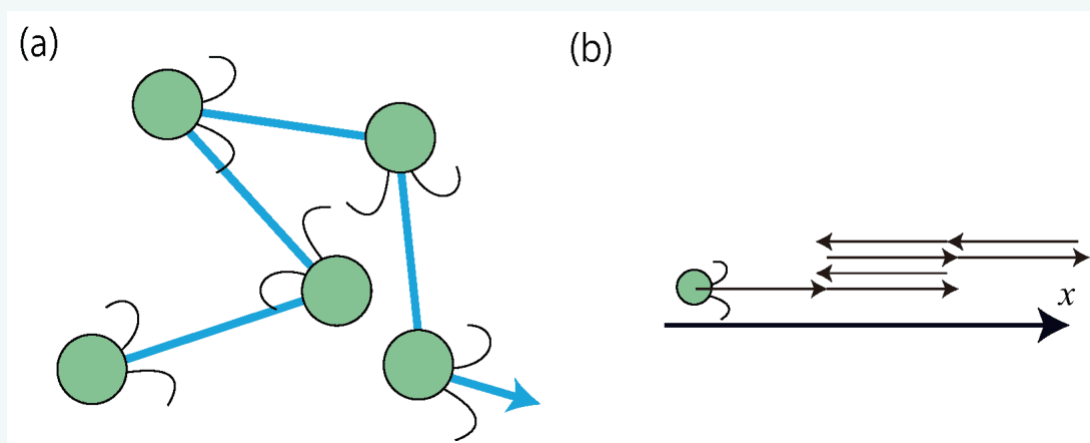


图4：(a) 微生物的运动。(b) 其一维情形。

D.3 — 0.6分

图5给出了这些微生物的均方位移 $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ ，如虚线所示，在 t 较小、较大和处于中间范围时呈现不同的幂律。求出各时间范围内的幂律，并从 D 、 u_0 、 δ_0 和 t 中选取必要的量加以表示。

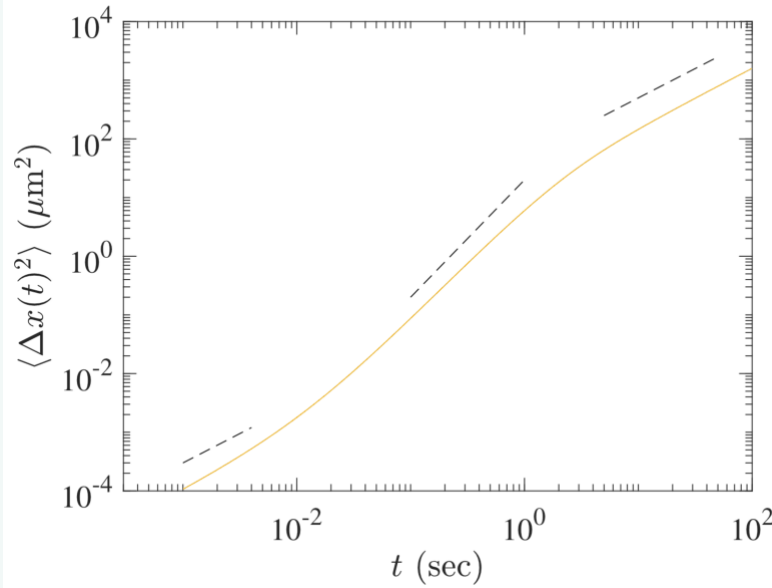


图5：微生物的均方位移。

部分 E. 水的净化 (1.5 分)

这里讨论通过加入电解质使胶体状土壤颗粒凝聚，从而净化含有这些颗粒的水。颗粒通过范德华力和静电力相互作用，后者包含表面电荷及其周围带相反电荷的离子层的影响（这些离子及其形成的层分别称为反离子和双电层；见图6(a)）。因此，当颗粒间距为 d 时（图6(b)），相互作用势能为

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

其中 A 和 B 为正常量， ϵ 为水的介电常数， λ 为双电层的厚度。假设离子的电荷量为 $\pm q$ ，则有

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \quad (7)$$

其中 c 为离子的摩尔浓度。

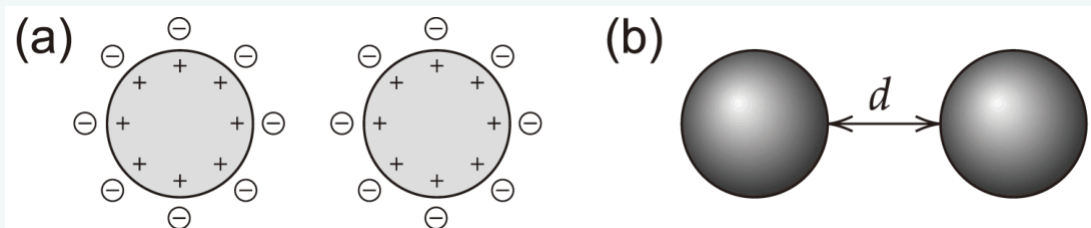


图6：(a) 胶体颗粒的表面电荷和反离子。(b) 间距 d 的定义。

E.1 — 1.5分

向悬浮液中加入氯化钠（NaCl）会使胶体颗粒凝聚。求凝聚所需的 NaCl 最低浓度 c 。只需考虑两个颗粒，忽略热涨落，即令式(1)中的 $F(t) = 0$ ，并假设颗粒在给定势能对应的力作用下瞬间达到终端速度。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

- A.2

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i e^{-(t-t_i)/\tau}, \quad 0 < t_i < t.$$

若观测的是观测时刻发生碰撞后的瞬时速度，则应包含 $t_i = t$ 。

- B.1

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.$$

- B.2

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

- C.1

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2 \delta}{4} \frac{dn}{dx}(x_0).$$

- C.2

$$J_D(x_0) = -\frac{C\delta}{2} \frac{dn}{dx}(x_0), \quad D = \frac{C\delta}{2}, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

- C.3

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

- C.4

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}), \quad u = \frac{QE}{\gamma}.$$

- C.5

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

- D.1

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

- D.2

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2, \quad t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

当 $t \ll t_*$ 时，均方位移近似为 $2Dt$ ，双对数图中的斜率为 1。当 $t \gg t_*$ 时，均方位移近似为 $u^2 t^2$ ，斜率为 2。

- D.3 定义 $t_s = 2D/u_0^2$ 。对于图示的三个明显不同的区间，有 $t_s \ll \delta_0$ ，且

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq \begin{cases} 2Dt, & t \ll t_s, \\ u_0^2 t^2, & t_s \ll t \ll \delta_0, \\ (2D + u_0^2 \delta_0)t \simeq u_0^2 \delta_0 t, & t \gg \delta_0. \end{cases}$$

对应的双对数图斜率分别为 1, 2, 1。

- E.1 临界浓度为

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6},$$

其中，对于 NaCl， q 为元电荷的大小。当 $c > c_{\text{crit}}$ 时，初始间距很大的颗粒会发生凝聚。恰在 $c = c_{\text{crit}}$ 时，题设的无噪声、过阻尼动力学处于临界状态：颗粒间距渐近趋于一个有限值。

解答

A.1

在极短的碰撞时间内对运动方程积分，得到冲量—动量关系。当碰撞持续时间趋于零时，摩擦力的冲量趋于零，因此

$$M[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = I_0.$$

由于颗粒最初静止，

$$v_0 = v(t_0^+) = \frac{I_0}{M}.$$

碰撞后，力 F 和 F_{ext} 均为零。因此

$$M \frac{dv}{dt} = -\gamma v,$$

其解为

$$v(t) = \frac{I_0}{M} \exp \left[-\frac{\gamma}{M} (t - t_0) \right].$$

与给定形式比较可得

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2

运动方程是线性的。每次碰撞都产生瞬时速度增量 I_i/M ，随后该增量以弛豫时间 τ 衰减。因此，由叠加原理可得

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i \exp \left[-\frac{t - t_i}{\tau} \right].$$

只有初始时刻之后、观测时刻之前的碰撞有贡献：

$$0 < t_i < t.$$

在碰撞瞬间，速度发生大小为 I_i/M 的跃变。若 $v(t)$ 表示该次碰撞刚结束时的速度，则应包含上端点。

B.1

在第 n 个时间间隔内, 位移为 $v_n \delta$ 。因此, 在 $t = N\delta$ 时,

$$\Delta x(t) = \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

其期望值为

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0.$$

对于二阶矩,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \delta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle v_n v_m \rangle \\ &= \delta^2 N C \\ &= C \delta t. \end{aligned}$$

由于不同时间间隔内的速度不相关, 交叉项为零。因此

$$\boxed{\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t.}$$

B.2

对于固定的正观测时间, 布朗运动在扩散极限下必须具有有限且非零的均方位移。由于

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t,$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 乘积 $C\delta$ 必须趋于一个有限且非零的常数。因此

$$C \propto \delta^{-1}.$$

剩余的时间依赖关系为线性关系:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t.$$

所以,

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1.}$$

这是有效模型的连续极限, 描述的是远长于微观弛豫时间 τ 的时间尺度上的运动。

C.1

向右运动的颗粒若最初位于 $x_0 - v\delta$ 与 x_0 之间, 就会在接下来的时间间隔 δ 内穿过 x_0 。该区域内一半的颗粒向右运动。将单位面积对应的颗粒数除以 δ , 得

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0 - v\delta}^{x_0} n(x) dx.$$

利用题设的线性近似,

$$n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)n'(x_0),$$

得到

$$N_+(x_0) \simeq \frac{1}{2\delta} \left[v\delta n(x_0) - \frac{(v\delta)^2}{2} n'(x_0) \right].$$

因此,

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2}n(x_0) - \frac{v^2\delta}{4}n'(x_0).$$

这一近似要求浓度在距离 $v\delta$ 内变化缓慢。

C.2

类似地，向左运动的颗粒来自 $x_0 < x < x_0 + v\delta$ 区域，因此

$$\begin{aligned} N_-(x_0) &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0}^{x_0+v\delta} n(x) dx \\ &\simeq \frac{v}{2}n(x_0) + \frac{v^2\delta}{4}n'(x_0). \end{aligned}$$

相减并取平均，得

$$\begin{aligned} J_D(x_0) &= \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle \\ &= -\frac{\delta}{2} \langle v^2 \rangle n'(x_0) \\ &= -\frac{C\delta}{2} n'(x_0). \end{aligned}$$

与菲克定律 $J_D = -Dn'$ 比较，得到

$$D = \frac{C\delta}{2}.$$

代入 B.1 的结果，得

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

C.3

考虑横截面积为 A 、厚度为 Δx 的薄层。它受到沿 x 正方向的电场力为

$$F_E = n(x)A\Delta x QE.$$

渗透压产生的合力为

$$F_\Pi = A\Pi(x) - A\Pi(x + \Delta x) \simeq -A\Delta x \frac{d\Pi}{dx}.$$

由力的平衡可得

$$n(x)QE = \frac{d\Pi}{dx}.$$

温度均匀时， $\Pi = nkT$ ，因此

$$\frac{d\Pi}{dx} = kT \frac{dn}{dx}.$$

于是

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

浓度梯度为正，与带正电颗粒沿电场方向聚集相符。

C.4

对式(1)取期望值，利用恒定的外加力和 $\langle F(t) \rangle = 0$ ，得到

$$M \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\gamma \langle v \rangle + QE.$$

满足 $\langle v(0) \rangle = 0$ 的解为

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/M}) = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}).$$

因此终端速度为

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma}.$$

C.5

平衡时，扩散通量与电场引起的漂移通量相互抵消：

$$-D \frac{dn}{dx} + nu = 0.$$

代入 C.3 和 C.4 的结果，

$$-D \frac{nQE}{kT} + n \frac{QE}{\gamma} = 0.$$

因此

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

这就是联系扩散与摩擦的爱因斯坦关系。

D.1

以表中列出的位移作为直方图各组的代表值，测量总次数为

$$N_{\text{tot}} = \sum_j N_j = 400.$$

位移平方的加权和为

$$\sum_j N_j (\Delta x_j)^2 = 2536 \mu\text{m}^2.$$

因此，在 $\Delta t = 60 \text{ s}$ 内的均方位移估计值为

$$\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle = \frac{2536}{400} \mu\text{m}^2 = 6.34 \times 10^{-12} \text{ m}^2.$$

根据 C.2，

$$D = \frac{\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}{2\Delta t} = \frac{6.34 \times 10^{-12}}{120} = 5.2833 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

摩擦系数为

$$\begin{aligned} \gamma &= 6\pi a \eta \\ &= 6\pi (5.0 \times 10^{-6}) (8.9 \times 10^{-4}) \\ &= 8.3881 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

将 $k = R/N_A$ 代入爱因斯坦关系，得到

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma},$$

因此

$$N_A = \frac{RT}{\gamma D} = \frac{2RT\Delta t}{\gamma \langle \Delta x^2 \rangle}.$$

取 $T = 298.15 \text{ K}$,

$$N_A = \frac{8.31(298.15)}{(8.3881 \times 10^{-8})(5.2833 \times 10^{-14})} = 5.5907 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

保留两位有效数字,

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

这里既未使用 N_A 的公认值,也未使用 k 的数值。

D.2

计入终端漂移后,位移为

$$\Delta x(t) = ut + \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

随机部分的均值为零,二阶矩为 $2Dt$ 。因此,漂移与随机位移之间的交叉项平均为零:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= u^2 t^2 + 2ut \delta \sum_n \langle v_n \rangle + \delta^2 \sum_{n,m} \langle v_n v_m \rangle \\ &= u^2 t^2 + 2Dt. \end{aligned}$$

因此,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2.$$

当两项贡献相等时发生转变:

$$2Dt_* = u^2 t_*^2,$$

由此得到

$$t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

极限情形下的幂律为

$$\begin{aligned} t \ll t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt, \\ t \gg t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq u^2 t^2. \end{aligned}$$

这里“ t 很小”是相对于有效扩散模型而言,此时已忽略微观弛豫过程,并已建立终端漂移。

为精确描述题目要求的双对数示意图,定义

$$s = \frac{t}{t_*}, \quad Y = \frac{\langle \Delta x(t)^2 \rangle}{2Dt_*}.$$

则

$$Y = s + s^2.$$

在 s 较小时, 图线沿着斜率为 1 的直线渐近线 $Y = s$ 延伸, 在 $s = 1$ 附近平滑地向上弯曲, 在 s 较大时趋于斜率为 2 的渐近线 $Y = s^2$ 。两条渐近线交于 $(s, Y) = (1, 1)$, 而实际曲线经过 $(1, 2)$ 。因此, 在弯曲处标出 $t = t_*$ 。在该点,

$$\langle \Delta x(t_*)^2 \rangle = \frac{8D^2}{u^2}.$$

D.3

将位移写为热运动与游动两部分贡献之和:

$$\Delta x(t) = \Delta x_B(t) + \Delta x_S(t).$$

假设热运动与游动方向的选择相互独立, 且两部分贡献的均值均为零。因此

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle.$$

当 $t \ll \delta_0$ 时, 在观测时间间隔内, 游动方向可视为不变。因此

$$\Delta x_S(t) \simeq \pm u_0 t, \quad \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle \simeq u_0^2 t^2.$$

于是

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt + u_0^2 t^2 \quad (t \ll \delta_0).$$

两项在以下时间尺度上相当:

$$t_s = \frac{2D}{u_0^2}.$$

因此, 在 $t \ll t_s$ 时, 热扩散占主导; 在 $t_s \ll t \ll \delta_0$ 时, 游动产生弹道运动区间。

对于长时间情形, 考虑 N 个完整的游动时间间隔, 令 $t = N\delta_0$ 。用 $s_j = \pm 1$ 表示第 j 个时间间隔内独立选择的符号。则

$$\Delta x_S(t) = u_0 \delta_0 \sum_{j=1}^N s_j.$$

由于 $\langle s_j \rangle = 0$, 且当 $j \neq \ell$ 时 $\langle s_j s_\ell \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle &= u_0^2 \delta_0^2 N \\ &= u_0^2 \delta_0 t. \end{aligned}$$

在 $t \gg \delta_0$ 时, 末尾一个不完整的时间间隔不会改变这一主导行为。因此, 长时间下的均方位移为

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq (2D + u_0^2 \delta_0) t.$$

等价地, 长时间下的扩散系数为

$$D_{\text{eff}} = D + \frac{u_0^2 \delta_0}{2}.$$

要出现图中那样充分展开的中间区间, 各时间尺度必须满足

$$\frac{2D}{u_0^2} \ll \delta_0.$$

这也意味着 $u_0^2 \delta_0 \gg 2D$ 。因此, 观测到的三个渐近关系为

时间范围	$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$	双对数图斜率
$t \ll 2D/u_0^2$	$2Dt$	1
$2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0$	$u_0^2 t^2$	2
$t \gg \delta_0$	$u_0^2 \delta_0 t$	1

当热扩散不可忽略时，应保留完整的长时间系数 $2D + u_0^2 \delta_0$ 。

E.1

定义正的能量尺度

$$K = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}.$$

则

$$U(d) = -\frac{A}{d} + Ke^{-d/\lambda},$$

且

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{K}{\lambda} e^{-d/\lambda}.$$

使间距增大的力为 $-U'(d)$ 。在瞬间达到终端速度的假设下，每个颗粒的速度与其所受的力成正比。对于摩擦系数均为 γ 的两个相同颗粒，

$$\dot{d} = -\frac{2}{\gamma} U'(d).$$

因此，只要 $U'(d) > 0$ ，颗粒就会相互靠近。

要使初始间距很大的颗粒在没有热涨落的情况下相互靠近并最终接触，其间就不能存在排斥区域或有限间距处的稳定平衡。因此，临界条件是 $U'(d) < 0$ 的区域消失。

将导数改写为

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} \left[1 - \frac{K\lambda}{A} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 e^{-d/\lambda} \right].$$

令 $z = d/\lambda > 0$ 。决定其符号的函数为

$$f(z) = z^2 e^{-z}.$$

其导数为

$$f'(z) = ze^{-z}(2 - z),$$

因此，它在 $z = 2$ 处取得全局最大值，且

$$f_{\max} = 4e^{-2}.$$

由此，对于所有间距都有 $U'(d) \geq 0$ 的充要条件为

$$\frac{K\lambda}{A} 4e^{-2} \leq 1.$$

临界屏蔽长度为

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{\exp(2)A}{4K} = \frac{\exp(2)Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2}.$$

在这一阈值处，势能的两个驻点合并于

$$d_{\text{crit}} = 2\lambda_{\text{crit}},$$

此处 $U'(d_{\text{crit}})$ 和 $U''(d_{\text{crit}})$ 均为零。

增大盐浓度会减小 λ 。将 λ_{crit} 代入式(7)，

$$\begin{aligned} c_{\text{crit}} &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 \lambda_{\text{crit}}^2} \\ &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2} \left[\frac{4B\epsilon(kT)^2}{\exp(2)Aq^2} \right]^2. \end{aligned}$$

因此，

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2\epsilon^3(kT)^5}{\exp(4)N_A A^2 q^6}.$$

对于 NaCl，离子均为一价，因此 q 为元电荷的大小。每种离子的浓度均等于 NaCl 的摩尔浓度；式(7)中的因子 2 已计入两种离子的贡献。若各参数采用国际单位制，结果的单位为 mol m^{-3} 。

当 $c > c_{\text{crit}}$ 时，对于任意正间距均有 $U'(d) > 0$ ，确定性运动会使一对最初分离的颗粒相互接触。当 $c < c_{\text{crit}}$ 时，从足够大的间距开始相互靠近的一对颗粒会被困在 U 的外侧局部极小值处。

对于等号成立的情形，需要作出一个精确的限定。当 $c = c_{\text{crit}}$ 时，在 d_{crit} 附近有

$$U'(d) \propto (d - d_{\text{crit}})^2$$

因此，颗粒从较大间距一侧以过阻尼方式靠近时，需要无限长的时间才能达到该间距。所以， c_{crit} 是临界阈值，或者说是使初始间距很大的颗粒发生凝聚的浓度集合的下确界；在这一理想化动力学下，要真正越过该间距并达到接触，必须满足 $c > c_{\text{crit}}$ 。

解答已与官方解答核对。

题目 2：中子星

我们将讨论大原子核的稳定性，并从理论和实验两方面估算中子星的质量。

部分 A. 原子核的质量与稳定性 (2.5 分)

由 Z 个质子和 N 个中子组成的原子核，其静止能量 $m(Z, N)c^2$ 小于这些质子和中子（以下统称为核子）的静止能量之和，两者之差为结合能 $B(Z, N)$ ，其中 c 为真空中的光速。忽略微小的修正，可以将结合能近似表示为以下形式，其中包括系数为 a_V 的体积项、系数为 a_S 的表面项、系数为 a_C 的库仑能项和系数为 a_{sym} 的对称能项。

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

其中 $A = Z + N$ 为质量数， m_N 为核子质量。计算时取 $a_V \approx 15.8 \text{ MeV}$ 、 $a_S \approx 17.8 \text{ MeV}$ 、 $a_C \approx 0.711 \text{ MeV}$ 和 $a_{\text{sym}} \approx 23.7 \text{ MeV}$ ($\text{MeV} = 10^6$ 电子伏特)。

A.1 — 0.9 分

在 $Z = N$ 的条件下，求使平均每个核子的结合能 B/A 最大的 A 。

A.2 — 0.9 分

在 A 固定的条件下, 使 $B(Z, A - Z)$ 最大即可确定最稳定原子核的原子序数 Z^* 。对于 $A = 197$, 利用式 (1) 计算 Z^* 。

A.3 — 0.7 分

质量数 A 较大的原子核会通过裂变分裂为较轻的原子核, 以使总静止质量能量最小。为简化起见, 在原子核的多种分裂方式中, 我们考虑将一个 (Z, N) 原子核分裂为两个相同原子核的方式。当满足以下能量关系时, 这一过程便可发生,

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

将这一关系写为

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

求 C_{fission} , 保留两位有效数字。

部分 B. 作为巨型原子核的中子星 (1.5 分)

对于质量数足够大的原子核, 若其质量数 $A > A_c$, 其中 A_c 为阈值, 则引力所产生的结合能足够大, 使这些原子核能够保持稳定而不发生核裂变。

B.1 — 1.5 分

我们假设, 当 A 足够大时, $N = A$ 且 $Z = 0$, 并且在加上引力结合能后, 式 (1) 仍然成立。引力产生的结合能为

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

其中 $M = m_N A$ 和 $R = R_0 A^{1/3}$ 分别为原子核的质量和半径, $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$ 。

对于 $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$, 求以 MeV 为单位的 a_{grav} , 保留一位有效数字。然后忽略表面项, 估算 A_c , 保留一位有效数字。计算时取 $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ 和 $G = \hbar c / M_P^2$, 其中 $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$, $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ 。

部分 C. 双星系统中的中子星 (6.0 分)

有些中子星是脉冲星, 会以固定周期规律地发射电磁波, 为简便起见, 这里将其称为“光”。中子星常与白矮星组成双星系统。考虑图 1 所示的星体位置关系: 从中子星 **N** 发往地球 **E** 的光脉冲经过双星系统中白矮星 **W** 的附近。如下文所述, 通过测量这些受星体引力影响的脉冲, 可以准确估算 **W** 的质量, 进而估算 **N** 的质量。

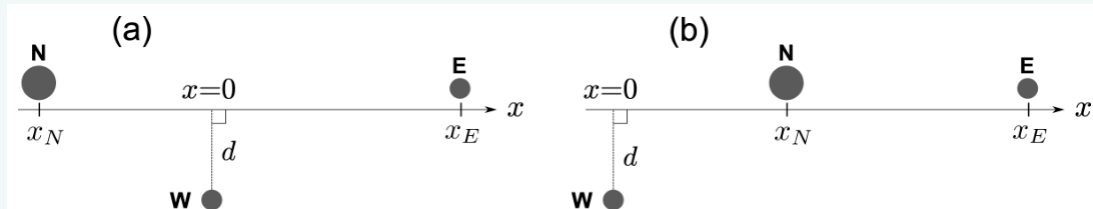
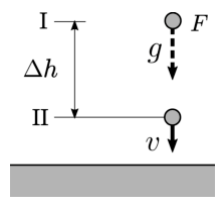


图 1: 以连接 **N** 与 **E** 的直线为 x 轴的星体位置关系。(a) 对应 $x_N < 0$, (b) 对应 $x_N > 0$ 。

C.1 — 1.0 分

如下图所示, 在恒定的重力加速度 g 下, 设置高度差为 $\Delta h (> 0)$ 的两个高度位置 I 和 II。在 I、II 以及自由下落系统 F 中放置相同的钟, 分别记为钟-I、钟-II 和钟- F 。



思想实验的设置。

假设一位观察者与钟- F 一起运动，且初始时 F 与钟-I 位于同一高度，速度为零。由于这些钟完全相同，它们记录的时间间隔相等，即 $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$ 。随后让 F 自由下落，并在 F 的参考系中进行分析，将该参考系视为惯性系。在此参考系中，钟-II 以速度 v 经过钟- F ，因此可以通过洛伦兹变换确定钟-II 的时间膨胀。当钟- F 上经过时间 $\Delta\tau_I$ 时，钟-II 上经过的时间为 $\Delta\tau_{II}$ 。

用 $\Delta\tau_I$ 表示 $\Delta\tau_{II}$ ，保留到 $\Delta\phi/c^2$ 的一阶，其中 $\Delta\phi = g\Delta h$ 为引力势之差，引力势即单位质量的引力势能。

C.2 — 1.8 分

在引力势 ϕ 下，虽然局部光速为 c ，但时间延缓会改变在无穷远处观测到的有效光速 c_{eff} 。当 $\phi(r = \infty) = 0$ 时，保留到 ϕ/c^2 的一阶， c_{eff} 可表示为

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

其中包含了 C.1 中未涉及的空间畸变效应。注意，光的传播路径可以近似为直线。

如图 1 (a) 所示，我们沿中子星 **N** 到地球 **E** 的光传播路径选取 x 轴，并将光路上距离白矮星 **W** 最近的点设为 $x = 0$ 。设 **N** 的 x 坐标为 $x_N (< 0)$ ，**E** 的 x 坐标为 $x_E (> 0)$ ，**W** 与光路之间的距离为 d 。

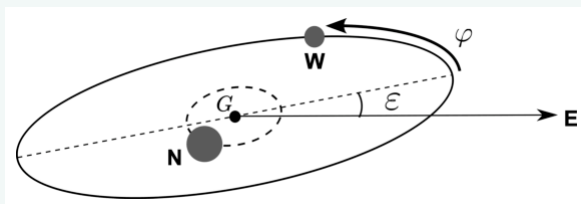
估算质量为 M_{WD} 的白矮星导致的、从 **N** 到 **E** 的光到达时间的变化 Δt ，并忽略以下小量的高阶项，将答案化为简洁形式： $d/|x_N| \ll 1$ 、 $d/x_E \ll 1$ 和 $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$ 。如有需要，可使用以下公式。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

(log 表示自然对数)

C.3 — 1.8 分

如下图所示，假设双星系统中的 **N** 和 **W** 在轨道平面内绕质心 G 沿偏心率为零的圆形轨道运动。设 ε 为从轨道平面量起、到由 G 指向 **E** 的方向的轨道倾角， L 为 **N** 与 **W** 之间的距离， M_{WD} 为白矮星的质量。以下假设 $\varepsilon \ll 1$ 。



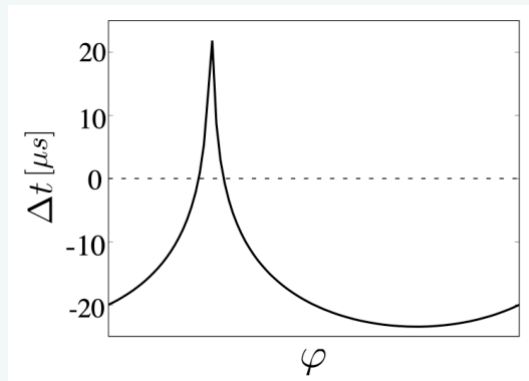
双星系统。

我们在远离 **N** 的 **E** 上观测来自 **N** 的光脉冲。到达 **E** 的光路随 **N** 和 **W** 的位置关系而随时间变化。到达 **E** 的脉冲时间间隔的延迟，在 $x_N \simeq -L$ 时达到最大值 $\Delta t_{\max}$ ，在 $x_N \simeq L$ 时达到最小值 $\Delta t_{\min}$ （相应的位置关系见图 1 (b)）。

与 C.2 中一样，忽略小量的高阶项，计算 $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$ 并将结果化为简洁形式。注意，假设除 **W** 以外的其他天体引力所导致的延迟，在 $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$ 中相互抵消。

C.4 — 0.8 分

下图给出了一个双星系统中观测到的时间延迟随轨道相位 φ 的变化，该系统中 $L \approx 6 \times 10^6 \text{ km}$ ， $\cos \varepsilon \approx 0.99989$ 。以太阳质量 $M_\odot$ 为单位估算 M_{WD} ，并给出 $M_{\text{WD}}/M_\odot$ 的结果，保留一位有效数字。这里可以使用近似关系 $GM_\odot/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$ 。



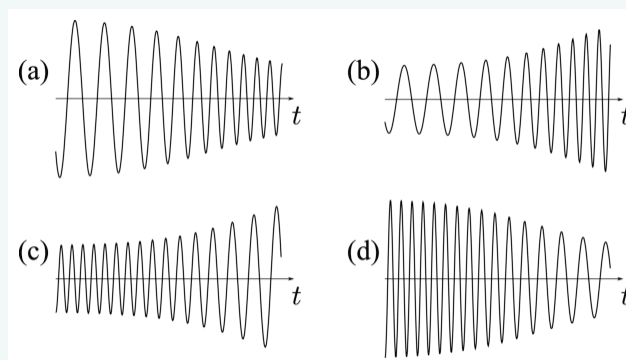
观测到的时间延迟 Δt 随轨道相位 φ 的变化；轨道相位用于确定 **N** 和 **W** 在轨道上的位置（见 C.3 中的图）。

C.5 — 0.4 分

在中子星双星系统中，两颗星通过发射引力波释放能量和角动量，最终碰撞并合。为简化起见，我们只考虑半径为 R 、角速度为 ω 的圆周运动。忽略相对论效应时，有 $\omega = \chi R^p$ ，其中常数 χ 既不依赖于 ω ，也不依赖于 R 。求 p 的值。

C.6 — 0.2 分

C.5 中双星系统发射的引力波，其振幅正比于 $R^2 \omega^2$ 。下图定性地给出了两颗星碰撞前观测到的引力波的四种不同时间波形。从 (a) 到 (d) 中选出最恰当的波形。



引力波的观测数据波形。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1: $A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 50$.
- A.2: $Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}} = 78.55 \dots$, 因此整数原子序数为 $\boxed{79}$.
- A.3: $C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx \boxed{0.70}$.
- B.1: $a_{\text{grav}} \approx \boxed{6 \times 10^{-37} \text{ MeV}}$, $A_c \approx \boxed{4 \times 10^{55}}$, 这里采用下文讨论的总结合能为正的判据。
- C.1: $\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$.
- C.2: $\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)$.
- C.3: $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \approx \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$.
- C.4: $\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5$, 即 $M_{\text{WD}} \approx 0.5M_{\odot}$.
- C.5: $p = -\frac{3}{2}$.
- C.6: $\boxed{\text{(b)}}$: 随着两颗星接近碰撞, 振幅和频率均增大。

解答

A.1

当 $Z = N = A/2$ 时, 对称项为零。平均每个核子的结合能变为

$$\frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - \frac{a_C}{4} A^{2/3}.$$

将 A 视为连续变量,

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{a_S}{3} A^{-4/3} - \frac{a_C}{6} A^{-1/3} = \frac{2a_S - a_C A}{6A^{4/3}}.$$

当 A 小于 $A = 2a_S/a_C$ 所给出的值时, 此导数为正; 大于该值时, 此导数为负, 因此该驻点为极大值点:

$$A = \frac{2a_S}{a_C} = \frac{2(17.8)}{0.711} = 50.07 \dots$$

因此

$$\boxed{A \approx 50}.$$

与 $Z = N$ 为整数这一条件相符的、最接近的允许偶数质量数为 $A = 50$ 。

A.2

固定 A 时, $N = A - Z$, 因此 $N - Z = A - 2Z$ 。只有库仑项和对称项依赖于 Z :

$$B(Z, A - Z) = \text{常数} - a_C Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z)^2.$$

取最大值的条件为

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-1/3} + \frac{4a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z) = 0.$$

整理得

$$4a_{\text{sym}} A = Z (8a_{\text{sym}} + 2a_C A^{2/3}),$$

所以

$$Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}}.$$

这是极大值，因为

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_C A^{-1/3} - \frac{8a_{\text{sym}}}{A} < 0.$$

对于 $A = 197$,

$$Z^* = \frac{197}{2 + \frac{0.711}{2(23.7)} 197^{2/3}} = 78.553 \dots$$

由于它关于 Z 的函数为开口向下的二次函数，最优整数就是最接近的整数：

$$Z^* = 79.$$

A.3

核子总数守恒，因此自由核子的静止能量项相互抵消。裂变在能量上有利的条件为

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) > 0.$$

体积项和对称项的总量保持不变。两个子核的表面项之和为

$$-2a_S (A/2)^{2/3} = -a_S 2^{1/3} A^{2/3},$$

它们的库仑项之和为

$$-2a_C \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} = -a_C 2^{-2/3} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

因此，

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) = -a_S (2^{1/3} - 1) A^{2/3} + a_C (1 - 2^{-2/3}) \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

释放的能量为正的变为

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{a_S}{a_C}.$$

由此得到

$$C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0.702414 \dots \approx 0.70.$$

从物理上说，当库仑斥力能的减少超过新增表面积所需的能量时，裂变便成为有利过程。

B.1

将给定的质量和半径代入引力结合能，得到

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G(m_N A)^2}{R_0 A^{1/3}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} A^{5/3}.$$

因此

$$a_{\text{grav}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c}{R_0} \left(\frac{m_N c^2}{M_{\text{PC}} c^2} \right)^2.$$

利用所给常数，

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.1 \text{ fm}} \left(\frac{939}{1.22 \times 10^{22}} \right)^2 = 6.3656 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

保留一位有效数字，

$$\boxed{a_{\text{grav}} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV}}.$$

对于 $Z = 0$ 和 $N = A$ ，库仑项为零，对称项为 $-a_{\text{sym}} A$ 。按题意忽略表面项，

$$B_{\text{tot}}(A) = (a_V - a_{\text{sym}})A + a_{\text{grav}} A^{5/3},$$

即

$$\frac{B_{\text{tot}}}{A} = -7.9 \text{ MeV} + a_{\text{grav}} A^{2/3}.$$

将这一有限阈值理解为相对于 A 个自由中子开始形成束缚态的临界值，则条件为

$$B_{\text{tot}} > 0.$$

因此，

$$A > A_c, \quad A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_V}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2}.$$

计算过程中保留 a_{grav} 未经舍入的数值，

$$A_c = \left(\frac{7.9}{6.3656 \times 10^{-37}} \right)^{3/2} = 4.3721 \times 10^{55}.$$

因此

$$\boxed{A_c \approx 4 \times 10^{55}}.$$

这一结合阈值与严格的分裂为两个液滴的裂变比较之间的区别，在这里至关重要：当 $Z = 0$ 且忽略表面项时， $B_{\text{tot}}(A) - 2B_{\text{tot}}(A/2)$ 等于 $(1 - 2^{-2/3}) a_{\text{grav}} A^{5/3}$ ，对任意 A 均为正，因此按分裂为两个液滴进行比较得不到有限的阈值。

C.1

在自由下落高度 Δh 的过程中，在所要求的精度下，由牛顿力学中的能量守恒可得

$$\frac{1}{2} v^2 = g \Delta h = \Delta \phi,$$

所以

$$v^2 = 2\Delta\phi.$$

在自由下落观察者的瞬时惯性系中，钟-II 以速率 v 运动。由狭义相对论的时间膨胀关系，

$$\Delta\tau_{\text{II}} = \Delta\tau_F \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

利用题目规定的时钟比较关系 $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\text{I}}$ ，并展开到一阶，

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\text{II}} &= \Delta\tau_{\text{I}} \sqrt{1 - \frac{2\Delta\phi}{c^2}} \\ &\approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\boxed{\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)}.$$

位置较低的钟走得较慢。

C.2

在位置 x 处，到白矮星的距离为

$$r(x) = \sqrt{x^2 + d^2},$$

白矮星在该处产生的引力势为

$$\phi(x) = -\frac{GM_{\text{WD}}}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

由给定的弱场表达式可得

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right).$$

没有白矮星时的传播时间为 $(x_E - x_N)/c$ 。从沿同一直线路径的实际传播时间中减去这一时间，得到

$$\begin{aligned}\Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}}} - \frac{1}{c} \right) dx \\ &\approx -\frac{2}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \phi(x) dx \\ &= \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}.\end{aligned}$$

所给原函数的一种等价形式为 $\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$ 。因此，保留到引力势的一阶，

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2}}{x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2}} \right).$$

对于 $x_E \gg d$,

$$x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2} \approx 2x_E.$$

对于 $x_N < 0$ 且 $|x_N| \gg d$ ，通过有理化可避免相消：

$$x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2} = \frac{d^2}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + |x_N|} \approx \frac{d^2}{2|x_N|}.$$

因此,

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E|x_N|}{d^2} \right).$$

这是一个正的引力传播延迟。对数项无量纲, GM_{WD}/c^3 具有时间量纲。

C.3

在两次合的位置, 将间距 L 投影到视线上可得

$$x_N = -L \cos \varepsilon \quad \text{在延迟最大时,}$$

以及

$$x_N = +L \cos \varepsilon \quad \text{在延迟最小时.}$$

在任一次合的位置, 均有

$$d = L \sin \varepsilon, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} = L.$$

由于地球距离双星很远, 在所保留的精度下, 两种位置关系中可以采用相同的 x_E 。C.2 中尚未假设 x_N 为负时的积分结果给出

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L + x_N} \right).$$

因此

$$\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 - \cos \varepsilon)} \right),$$

而

$$\Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 + \cos \varepsilon)} \right).$$

两式相减, x_E 和 L 均被消去:

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right).$$

对于 $\varepsilon \ll 1$,

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + \cos \varepsilon \approx 2.$$

因此, 所求的小角度形式为

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) = \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right).$$

这里 ε 以弧度为单位。在所述近似范围内, 小倾角下的对数增长对应于光从越来越靠近白矮星的位置经过。

C.4

从图中读出近似值

$$\Delta t_{\max} \approx +22 \mu\text{s}, \quad \Delta t_{\min} \approx -23 \mu\text{s}.$$

因此，可测得的变化范围约为

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} \approx 45 \mu\text{s}.$$

图示延迟中的任意常数偏移都不会影响这一差值。

利用给定的倾角，

$$\ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{1.99989}{0.00011} \right) \approx 9.808.$$

于是由 C.3 得到

$$45 \mu\text{s} \approx 2 (5 \mu\text{s}) \frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} (9.808).$$

因此，

$$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx \frac{45}{98.08} \approx 0.46.$$

保留一位有效数字，

$$\boxed{\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5}, \quad \boxed{M_{\text{WD}} \approx 0.5 M_{\odot}}.$$

给定的间距 L 在最大延迟与最小延迟之差中被消去了。

C.5

设两颗星的质量为 M_1, M_2 ，间距为 r 。牛顿力学中的两体圆周运动满足

$$\omega^2 r^3 = G(M_1 + M_2).$$

质量固定时，任一颗星的轨道半径 R 都是 r 的恒定倍数。因此，

$$\omega \propto r^{-3/2} \propto R^{-3/2}.$$

与 $\omega = \chi R^p$ 比较，

$$\boxed{p = -\frac{3}{2}}.$$

C.6

随着双星损失轨道能量，其轨道半径减小。由 C.5，

$$\omega \propto R^{-3/2},$$

所以轨道频率增大，引力波的频率也随之增大。

由给定的振幅依赖关系可得

$$\text{振幅} \propto R^2 \omega^2 \propto R^2 R^{-3} = R^{-1}.$$

因此，随着 R 减小，振幅也增大。所需波形的包络不断扩大，振荡越来越密集：

$$\boxed{\text{波形 (b)}}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：水与物体

本题研究水与物体相互作用所引起的、与表面张力有关的现象。部分 A 讨论运动，而部分 B 和 C 讨论静态情形。

如有需要，可以使用以下结论：若函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''(x) = ay(x)$ (a 为正常数)，则其通解为 $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ ，其中 A 和 B 为任意常数。

部分 A. 水滴的合并 (2.0 分)

如图 1 所示，考虑超疏水材料表面上两个静止的球形水滴，即材料与水之间存在很强的排斥力。

最初，将两个相同的球形水滴相邻放置在该表面上；随后，这两个水滴相互接触后合并，形成一个较大的球形水滴，并突然向上跳起。

A.1 2.0 分

合并前两个水滴的半径 a 均为 $100\ \mu\text{m}$ 。水的密度 ρ 为 $1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$ 。表面张力 γ 为 $7.27 \times 10^{-2}\ \text{J/m}^2$ 。

合并前后的表面能之差 ΔE 中有比例为 k 的部分转化为跳起水滴的动能。在下列假设下，求合并后水滴向上跳起的初速度 v ，结果保留两位有效数字：

- $k = 0.06$
- 合并前后，水的总体积守恒。

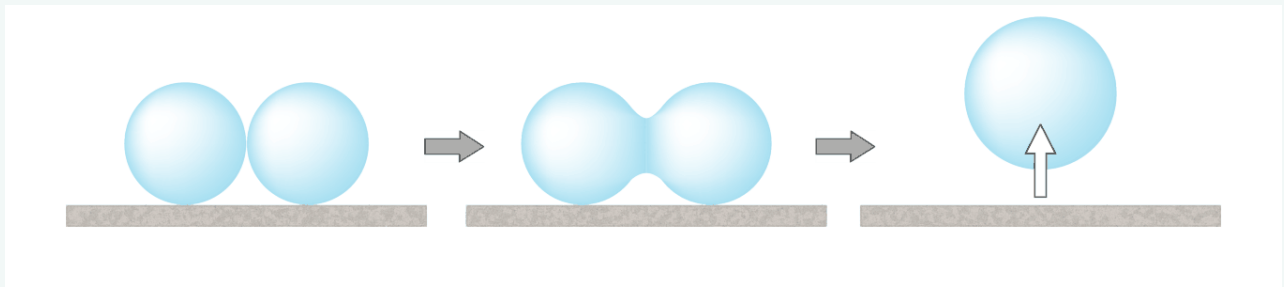


图 1：两个水滴的合并及合并后水滴的跳起。

部分 B. 竖直放置的平板 (4.5 分)

将一块平板竖直浸入水中。图 2(a) 和图 2(b) 分别展示了平板材料为亲水性（具有吸引作用）和疏水性时的水面形状。忽略平板的厚度。

平板表面位于 yz 平面内，远离平板处的水平水面位于 $z = 0$ 的 xy 平面内。水面形状与 y 坐标无关。设 $\theta(x)$ 为 xz 平面内水面上某点 (x, z) 处水面与水平面之间的夹角。这里， $\theta(x)$ 从 x 轴正向量起，并以逆时针方向为正。设平板与水面的接触点 $(x = 0)$ 处的 $\theta(x)$ 为 θ_0 。下文中， θ_0 由平板材料的性质确定。

水的密度 ρ 为常数，水的表面张力 γ 处处相同。重力加速度常量为 g 。假设大气压强 P_0 始终均匀。下面分步求出水面的形状。注意，表面张力的单位既可以是 J/m^2 ，也可以是 N/m 。

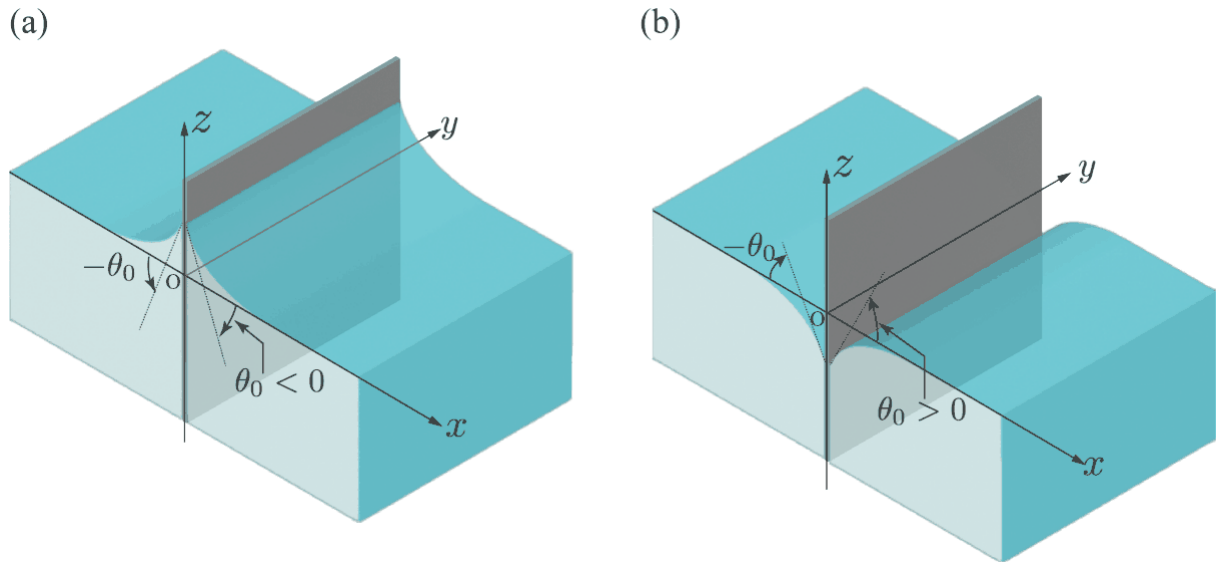


图 2：竖直浸入水中的平板。(a) 亲水性平板的情形；(b) 疏水性平板的情形。

B.1 0.6 分

考虑图 2(a) 所示的亲水性平板情形。注意，水中的压强 P 满足：当 $z > 0$ 时， $P < P_0$ ；当 $z = 0$ 时， $P = P_0$ 。用 ρ 、 g 、 z 和 P_0 表示高度 z 处的压强 P 。

B.2 0.8 分

考虑从水中截取的一块水体，其形状如图 3(a) 中的阴影部分所示。它在 xz 平面内的截面如图 3(b) 中的斜线阴影区域所示。设 z_1 和 z_2 分别为该水体与空气之间的分界面（水面）左、右边缘的坐标。

求压强作用于该水体所产生的合力沿水平方向的分量（ x 分量），按沿 y 轴的单位长度计，记为 f_x ，用 ρ 、 g 、 z_1 和 z_2 表示。注意， P_0 对该水体产生的水平合力为零。

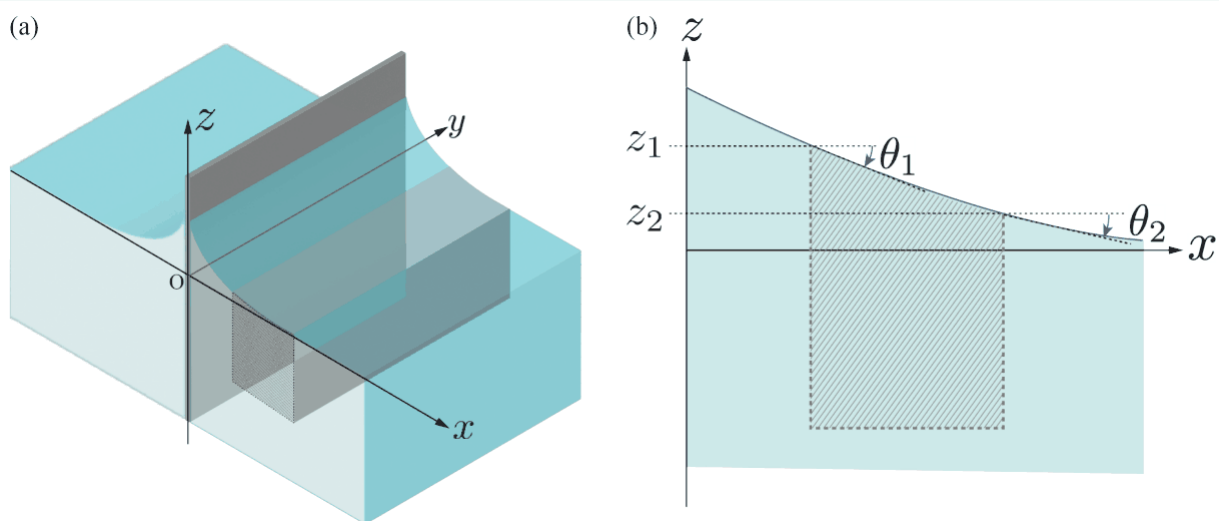


图 3：在水面处截取的水体形状。(a) 鸟瞰图及 (b) 截面图。

B.3 0.8 分

作用在该水体上的表面张力与 B.2 中讨论的力 f_x 平衡。分别将左、右边缘处水面与水平面之间的夹角定义为 θ_1 和 θ_2 。用 γ 、 θ_1 和 θ_2 表示 f_x 。

B.4 0.8 分

水面上任意一点 (x, z) 均满足下式：

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{常数}. \quad (1)$$

确定指数 a ，并用 γ 和 ρ 表示常量 ℓ 。注意，无论平板材料是亲水性还是疏水性，该方程都成立。

B.5 1.5 分

对于 B.4 中的式 (1)，假设水面的变化缓慢，即 $|z'(x)| \ll 1$ ，因而可以将 $\cos \theta(x)$ 按 $z'(x)$ 展开至二阶。然后，将所得方程对 x 求导，得到 $z(x)$ 满足的微分方程。求解此微分方程，并用 $\tan \theta_0$ 和 ℓ 表示 $x \geq 0$ 时的 $z(x)$ 。注意，为了便于观察，图 2 和图 3 在竖直方向上作了夸张处理，并不满足条件 $|z'(x)| \ll 1$ 。

部分 C. 两根杆之间的相互作用 (3.5 分)

由同一种材料制成的两根相同的杆 A 和 B 平行漂浮在水面上，它们到 y 轴的距离相同（图 4）。

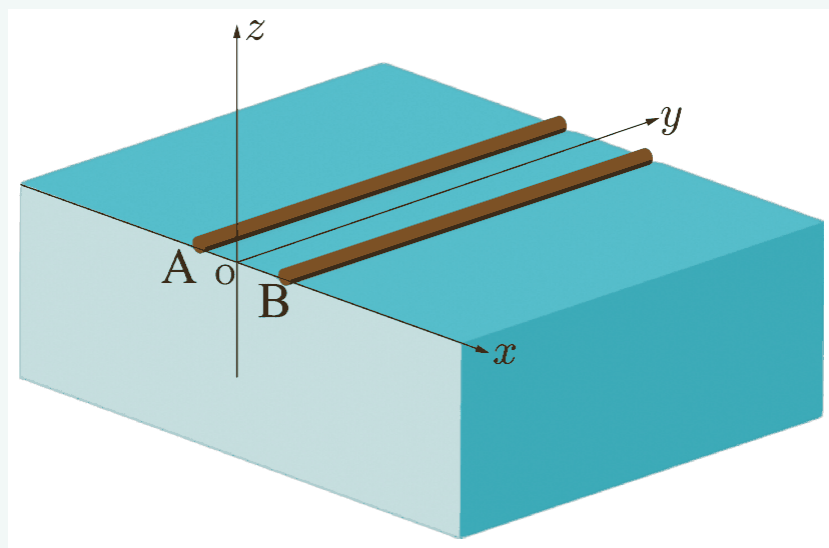


图 4：漂浮在水面上的两根杆 A 和 B。

C.1 1.0 分

在杆 B 与水面的接触点处，定义 z 坐标 z_a 和 z_b ，以及角度 θ_a 和 θ_b ，如图 5 所示。求杆 B 沿 y 轴单位长度所受力的水平分量 F_x ，用 θ_a 、 θ_b 、 z_a 、 z_b 、 ρ 、 g 和 γ 表示。

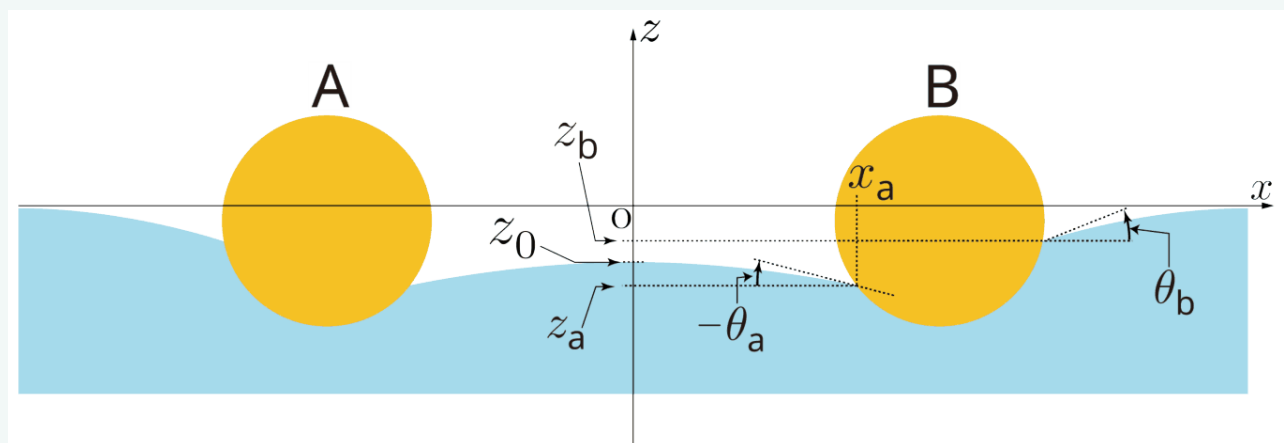


图 5：漂浮在水面上的两根杆的竖直截面图。

C.2 1.5 分

定义 xz 平面内两杆中点处水面的 z 坐标为 z_0 。在不使用 θ_a 、 θ_b 、 z_a 和 z_b 的情况下，表示 C.1 中求得的力 F_x 。

C.3 1.0 分

设 x_a 为水面与杆 B 左侧接触点的 x 坐标。利用 B.5 中得到的微分方程，用 x_a 和 z_a 表示两根杆 A 和 B 的中点处的水面高度坐标 z_0 。可以使用 B.4 中引入的常量 ℓ 。

题目译自官方英文原文。

答案

水平力的正方向为 $+x$ 方向。 f_x 和 F_x 均为沿 y 方向单位长度上的力，单位为 N/m。

- A.1

$$v = \sqrt{\frac{3k\gamma}{\rho a}(2 - 2^{2/3})} = 0.23 \text{ m/s} \quad \text{向上.}$$

- B.1

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

- B.2

$$f_x = \frac{\rho g}{2}(z_2^2 - z_1^2).$$

- B.3

$$f_x = \gamma(\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

- B.4

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

对于平板处的弯月面，式 (1) 右侧的常数为 1。

- B.5，在小斜率近似下：

$$z''(x) = \frac{z(x)}{\ell^2}, \quad z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

- C.1

$$F_x = \gamma(\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2}(z_b^2 - z_a^2).$$

- C.2

$$F_x = -\frac{\rho g}{2}z_0^2.$$

当 $z_0 \neq 0$ 时，B 所受的力指向 A。

- C.3, 在小斜率近似下:

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

解答

A.1

设合并后水滴的半径为 R 。由体积守恒可得

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad R = 2^{1/3}a.$$

因此, 合并后水滴的质量为

$$m = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \rho a^3.$$

表面能等于表面张力乘以表面积。因此, 表面能的减少量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \gamma (2 \cdot 4\pi a^2 - 4\pi R^2) \\ &= 4\pi \gamma a^2 (2 - 2^{2/3}). \end{aligned}$$

根据题设, 其中比例为 k 的部分转化为平动动能, 故

$$\frac{1}{2}mv^2 = k\Delta E.$$

于是,

$$v^2 = \frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3}).$$

代入 $a = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}$, 得到

$$m = 8.3776 \times 10^{-9} \text{ kg}, \quad \Delta E = 3.7694 \times 10^{-9} \text{ J},$$

以及

$$v = 0.23236 \dots \text{ m/s}.$$

保留两位有效数字, 初速度为

$$v = 0.23 \text{ m/s 向上}.$$

B.1

在流体静力平衡状态下, 向上的压力与重力平衡, 因此

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

由于 ρ 为常数, 且 $P(0) = P_0$, 积分得到

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

特别地, $z = 0$ 上方水中的压强低于大气压强, 与题述一致。

B.2

在整个封闭边界上施加均匀压强 P_0 , 产生的合力为零。因此, 可以用表压进行计算:

$$p(z) = P(z) - P_0 = -\rho g z.$$

与空气接触的表面的表压为零。设 z_* 为该水体底部的共同高度。左侧竖直面上的压力指向 $+x$ 方向，右侧面上的压力指向 $-x$ 方向。底面不产生水平力。

按沿 y 方向的单位长度计，

$$\begin{aligned} f_x &= \int_{z_*}^{z_1} p(z) dz - \int_{z_*}^{z_2} p(z) dz \\ &= -\rho g \int_{z_2}^{z_1} z dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2). \end{aligned}$$

故

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

对于图示的亲水性弯月面， $z_1 > z_2 > 0$ ，因此该压力指向 $-x$ 方向。

B.3

在每个边缘处，表面张力沿切线方向拉向该水体外侧。其单位长度上的水平分量分别为

$$-\gamma \cos \theta_1 \quad \text{在左边缘处}, \quad +\gamma \cos \theta_2 \quad \text{在右边缘处}.$$

水平方向的平衡要求

$$f_x - \gamma \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta_2 = 0.$$

因此，

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

B.4

令 B.2 和 B.3 中的表达式相等，得

$$\frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2) = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

整理得到

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z_1^2 + \cos \theta_1 = \frac{\rho g}{2\gamma} z_2^2 + \cos \theta_2.$$

由于两个边缘可以沿水面任意选取，故

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z^2 + \cos \theta(x) = C.$$

与式 (1) 比较可得

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

长度 ℓ 称为毛细长度。推导中允许 z 取任一符号，因此它既适用于上升的弯月面，也适用于下降的弯月面。

在远离平板处， $z \rightarrow 0$ 且 $\theta \rightarrow 0$ 。因此 $C = 1$ ，平板处水面满足的精确关系为

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + \cos \theta(x) = 1.$$

B.5

水面的切线满足

$$\tan \theta(x) = z'(x).$$

对于用函数图像表示的水面，

$$\cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}.$$

在题设近似 $|z'(x)| \ll 1$ 下，将其展开至二阶，得到

$$\cos \theta(x) = 1 - \frac{1}{2}[z'(x)]^2 + O([z'(x)]^4).$$

代入式 (1)，保留到这一阶，得

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + 1 - \frac{1}{2}(z')^2 = C.$$

求导得

$$\frac{zz'}{\ell^2} - z'z'' = 0.$$

对于非平坦的水面轮廓，由此得到

$$z'' = \frac{z}{\ell^2},$$

根据连续性，该方程也可延拓至孤立的驻点。平坦水面 $z = 0$ 同样满足此方程。

通解为

$$z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}.$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $z(x) \rightarrow 0$ 的边界条件要求 $A = 0$ 。在平板处，

$$z'(0) = \tan \theta_0 = -\frac{B}{\ell},$$

所以 $B = -\ell \tan \theta_0$ 。因此，

$$z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

对于亲水性平板， $\theta_0 < 0$ ，故 $z > 0$ 。对于疏水性平板， $\theta_0 > 0$ ，故 $z < 0$ 。在这两种情形中，水面都以 ℓ 为特征长度，按指数规律趋近于 $z = 0$ 。近似的自洽性要求 $|\tan \theta_0| \ll 1$ 。

C.1

杆 B 所受的水平力有两个来源：接触线处的表面张力和作用于杆上的压力。

表面张力将杆拉向相邻的自由液面。因此，其水平合力为

$$F_{\gamma,x} = -\gamma \cos \theta_a + \gamma \cos \theta_b.$$

对于压力，减去均匀的大气压强，因为它在杆的封闭表面上产生的合力为零。润湿表面上剩余的压强为 $p(z) = -\rho g z$ 。

曲面所受压力的水平分量，可通过在其竖直投影面上对压强积分求得。设 z_* 为杆底部的高度。左侧润湿面产生沿 $+x$ 方向的分量，右侧润湿面产生沿 $-x$ 方向的分量：

$$\begin{aligned} F_{p,x} &= \int_{z_*}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_*}^{z_b} (-\rho g z) dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2). \end{aligned}$$

重力没有水平分量。将这两项相加，得

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2

B.4 中的水面关系式分别适用于两杆之间的水面和外侧的水面。两者的积分常数不一定相等。

在 B 的外侧，远处的水面在 $z = 0$ 处变为水平。因此

$$\frac{z_b^2}{2\ell^2} + \cos \theta_b = 1.$$

在两根相同的杆之间，由于关于 $x = 0$ 的镜像对称性，中点处的水面水平。该处 $z = z_0$ ，因此内侧水面满足的关系为

$$\frac{z_a^2}{2\ell^2} + \cos \theta_a = 1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2}.$$

由于 $\rho g = \gamma/\ell^2$ ，C.1 中的力可以写成

$$F_x = \gamma \left[\left(\cos \theta_b + \frac{z_b^2}{2\ell^2} \right) - \left(\cos \theta_a + \frac{z_a^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

代入可得

$$F_x = \gamma \left[1 - \left(1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

故

$$F_x = -\frac{\gamma z_0^2}{2\ell^2} = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

杆 B 位于 x 的正半轴一侧，因此负号表示指向杆 A 的吸引力。当 $z_0 = 0$ 时，力为零。这一结果不需要采用小斜率近似。

C.3

现在将 B.5 中的小斜率方程应用于两杆之间的水面：

$$z'' = \frac{z}{\ell^2}.$$

将其解写成双曲函数形式，得

$$z(x) = C_1 \cosh(x/\ell) + C_2 \sinh(x/\ell).$$

由对称性可得 $z'(0) = 0$ ，因而要求 $C_2 = 0$ 。由于 $z(0) = z_0$ ，有 $C_1 = z_0$ ，因此

$$z(x) = z_0 \cosh(x/\ell).$$

在与杆 B 内侧的接触点处， $x = x_a$ 且 $z = z_a$ 。于是，

$$z_a = z_0 \cosh(x_a/\ell),$$

所以

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

这一高度与间距的关系在小斜率近似下成立。

解答已与官方解答核对。