

IPhO 2023

Teorik sorular ve çözümler · Tokyo, Japonya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2023/

Soru 1: Toprak Kolloidlerinin Karakterizasyonu

Kolloid bilimi, toprak parçacıklarını karakterize etmek için yararlıdır; çünkü bunların birçoğu mikrometre boyutunda kolloidal parçacıklar olarak ele alınabilir. Örneğin, parçacık boyutlarını ölçmek için Brown hareketinden (kolloidal parçacıkların rastgele hareketinden) yararlanılabilir.

Bölüm A. Kolloidal parçacıkların hareketleri (1.6 puan)

Kütlesi M olan bir kolloidal parçacığın bir boyutlu Brown hareketini inceliyoruz. Parçacığın $v(t)$ hızı için hareket denklemi şöyledir:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

Burada γ sürtünme katsayısı, $F(t)$ su molekülleriyle rastgele çarpışmalardan kaynaklanan kuvvet ve $F_{\text{ext}}(t)$ bir dış kuvvettir. Bölüm A'da $F_{\text{ext}}(t) = 0$ olduğunu varsayıyoruz.

A.1 — 0.8 puan

Bir su molekülünün $t = t_0$ anında parçacıkla çarpışarak ona I_0 itmesini aktardığını ve sonrasında $F(t) = 0$ olduğunu düşünün. Çarpışmadan önce $v(t) = 0$ ise, $t > t_0$ için $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ olur. I_0 ve Denklem (1)'deki gerekli parametreleri kullanarak v_0 ve τ 'yu belirleyin.

Bundan sonraki cevaplarınızda τ 'yu kullanabilirsiniz.

A.2 — 0.8 puan

Gerçekte su molekülleri parçacıkla art arda çarpışır. i . çarpışmanın t_i anında I_i itmesini aktardığını varsayın ve $t > 0$ ve $v(0) = 0$ koşulları altında $v(t)$ 'yi belirleyin. Ayrıca, verilen bir t için dikkate alınması gereken t_i aralığını belirten eşitsizliği yazın. Cevap kâğıdında, $v(t)$ ifadesinde bu aralığı belirtmeniz gerekli değildir.

Bölüm B. Etkin hareket denklemi (1.8 puan)

Şimdiye kadarki sonuçlar, $|t - t'| \gg \tau$ olduğunda parçacık hızları $v(t)$ ve $v(t')$ 'nin birbiriyle korelasyonsuz rastgele nicelikler olarak ele alınabileceğini gösterir. Buna dayanarak, bir boyutlu Brown hareketini yaklaşık olarak betimlemek için hızın her $\delta (\gg \tau)$ zaman aralığında rastgele değiştiği bir kuramsal model tanımlıyoruz; yani,

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

burada $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ve v_n rastgele bir niceliktir. Bu nicelik,

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

bağıntılarını sağlar; burada C , δ 'ya bağlı bir parametredir. $\langle X \rangle$, X 'in beklenen değerini gösterir. Başka bir deyişle, sonsuz kez rastgele X sayıları seçerseniz, ortalama $\langle X \rangle$ olacaktır.

Şimdi bir N tam sayısı için $t = N\delta$ anındaki parçacık yer değiştirmesini, $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$, ele alıyoruz.

B.1 — 1.0 puan

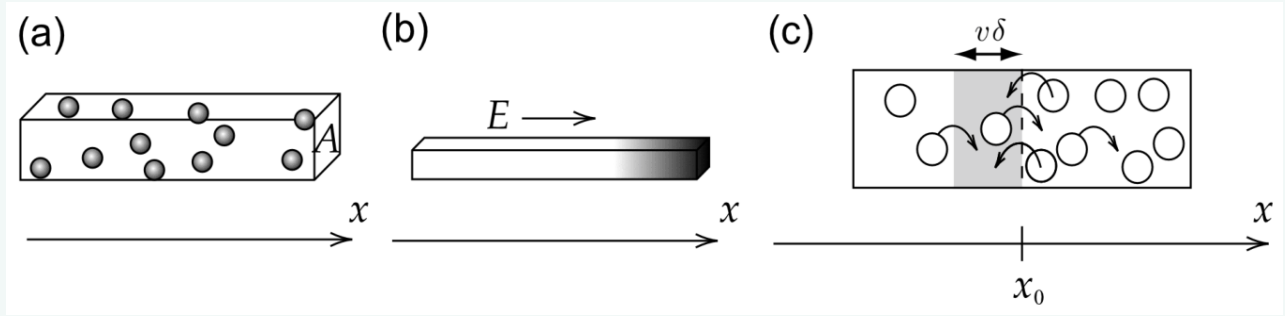
C , δ ve t 'yi kullanarak $\langle \Delta x(t) \rangle$ ve $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 'yi belirleyin.

B.2 — 0.8 puan

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ niceliğine ortalama kare yer değiştirme (MSD) denir. Bu nicelik, $\delta \rightarrow 0$ sınır durumuna karşılık gelen Brown hareketinin karakteristik bir gözlenebiliridir. Buradan, $C \propto \delta^\alpha$ ve $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$ olduğunu gösterebiliriz. α ve β 'nin değerlerini belirleyin.

Bölüm C. Elektroforez (2.7 puan)

Burada elektroforezi, yani yüklü parçacıkların bir elektrik alanla taşınmasını ele alıyoruz. Kütle M ve yükü Q (> 0) olan koloidal parçacıkların süspansiyonu, kesit alanı A olan dar bir kanala konur (Şekil 1(a)). Parçacıklar arasındaki etkileşimi, duvarın, akışkanın ve akışkan içindeki iyonların etkilerini ve yer çekimini ihmal ediyoruz.



Şekil 1: Bölüm C için düzenek.

x yönünde düzgün bir E elektrik alanı uygulandığında parçacıklar taşınır ve $n(x)$ derişimleri (birim hacimdeki parçacık sayısı) düzgün olmaktan çıkar (Şekil 1(b)). E kaldırıldığında bu düzensizlik yavaş yavaş kaybolur. Bunun nedeni parçacıkların Brown hareketidir. $n(x)$ düzgün değilse, sağa ve sola giden parçacıkların sayıları farklı olabilir (Şekil 1(c)). Bu durum, x konumunda x eksen boyu boyunca birim kesit alanından birim zamanda geçen ortalama parçacık sayısı olan $J_D(x)$ parçacık akısını oluşturur. Bu akının

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

bağıntısını sağladığı bilinmektedir; burada D 'ye difüzyon katsayısı denir.

Şimdi basitlik amacıyla parçacıkların yarısının $+v$, diğer yarısının ise $-v$ hızına sahip olduğunu varsayalım. $N_+(x_0)$, x_0 'dan soldan sağa birim kesit alanından birim zamanda geçen, hızı $+v$ olan parçacıkların sayısı olsun. Hızı $+v$ olan parçacıkların δ zaman aralığında x_0 'dan geçebilmesi için Şekil 1(c)'deki taralı bölgede bulunmaları gerekir. δ küçük olduğundan bu bölgede $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$ olur.

C.1 — 0.5 puan

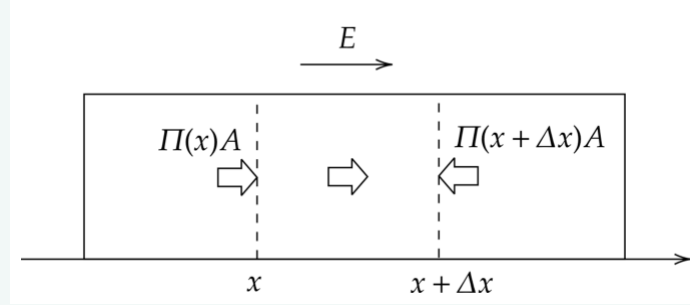
v , δ , $n(x_0)$ ve $\frac{dn}{dx}(x_0)$ niceliklerinden gerekli olanları kullanarak $N_+(x_0)$ 'ı ifade edin.

$N_-(x_0)$ 'ı, $N_+(x_0)$ 'ın $-v$ hızı için karşılığı olarak tanımlıyoruz. Böylece $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$ olur. Denklem (3)'e göre $\langle v^2 \rangle = C$ 'dir.

C.2 — 0.7 puan

C , δ , $n(x_0)$ ve $\frac{dn}{dx}(x_0)$ niceliklerinden gerekli olanları kullanarak $J_D(x_0)$ 'ı belirleyin. Bu sonucu ve Denklem (4)'ü kullanarak D 'yi C ve δ cinsinden, $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ 'yi ise D ve t cinsinden ifade edin.

Şimdi ozmotik basınç Π 'nin etkisini ele alıyoruz. Ozmotik basınç, Avogadro sabiti N_A , gaz sabiti R , sıcaklık T ve Boltzmann sabiti $k = \frac{R}{N_A}$ olmak üzere $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$ ile verilir. E elektrik alanı altında oluşan düzgün olmayan derişimi ele alalım (Şekil 1(b)). $n(x)$, x 'e bağlı olduğundan $\Pi(x)$ de x 'e bağlıdır. Bu durumda $\Pi(x)$ ve $\Pi(x + \Delta x)$ 'ten kaynaklanan kuvvetler, E alanının parçacıklara uyguladığı toplam kuvvetle dengelenmelidir (Şekil 2). Burada küçük bir Δx ele alıyoruz; böylece $n(x)$ bu aralıkta sabit kabul edilebilirken $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$ olur.



Şekil 2: Kuvvet dengesi.

C.3 — 0.5 puan

$n(x)$, T , Q , E ve k 'yi kullanarak $\frac{dn}{dx}(x)$ 'i ifade edin.

Şimdi akı dengesini ele alalım. Brown hareketinden kaynaklanan $J_D(x)$ akısının yanı sıra elektrik alandan kaynaklanan $J_Q(x)$ akısı da vardır. Bu akı,

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

ile verilir; burada u , alanın etkisiyle hareket eden parçacıkların limit hızıdır.

C.4 — 0.5 puan

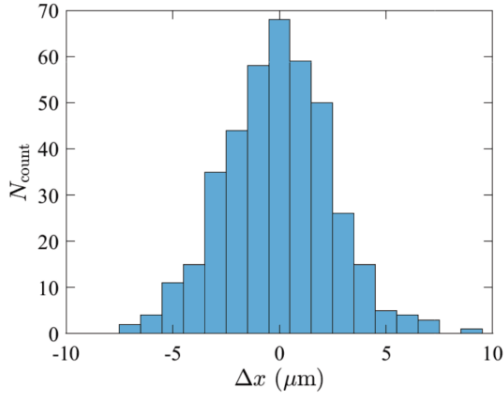
u 'yu belirlemek için Denklem (1)'i $F_{\text{ext}}(t) = QE$ ile kullanıyoruz. $v(t)$ dalgalandığı için $\langle v(t) \rangle$ 'yi ele alıyoruz. $\langle v(0) \rangle = 0$ varsayımı altında ve $\langle F(t) \rangle = 0$ bağıntısını kullanarak $\langle v(t) \rangle$ 'yi hesaplayın ve $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$ 'yi elde edin.

C.5 — 0.5 puan

Akı dengesi $J_D(x) + J_Q(x) = 0$ biçimindedir. Difüzyon katsayısı D 'yi k , γ ve T cinsinden ifade edin.

Bölüm D. Ortalama kare yer değıştirme (2.4 puan)

Suda, yarıçapı $a = 5.0 \mu\text{m}$ olan, diğer parçacıklardan yalıtılmış küresel bir kolloidal parçacığın Brown hareketini gözlemlediğimizi varsayalım. Şekil 3, her $\Delta t = 60 \text{ s}$ aralığında x yönünde ölçülen Δx yer değıştirmelerinin histogramını göstermektedir. Sürtünme katsayısı, suyun viskozitesi $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ olmak üzere $\gamma = 6\pi a\eta$ ile verilir ve sıcaklık $T = 25^\circ \text{C}$ idi.



$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

Şekil 3: Yer değiştirmelerin histogramı.

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

D.1 — 1.0 puan

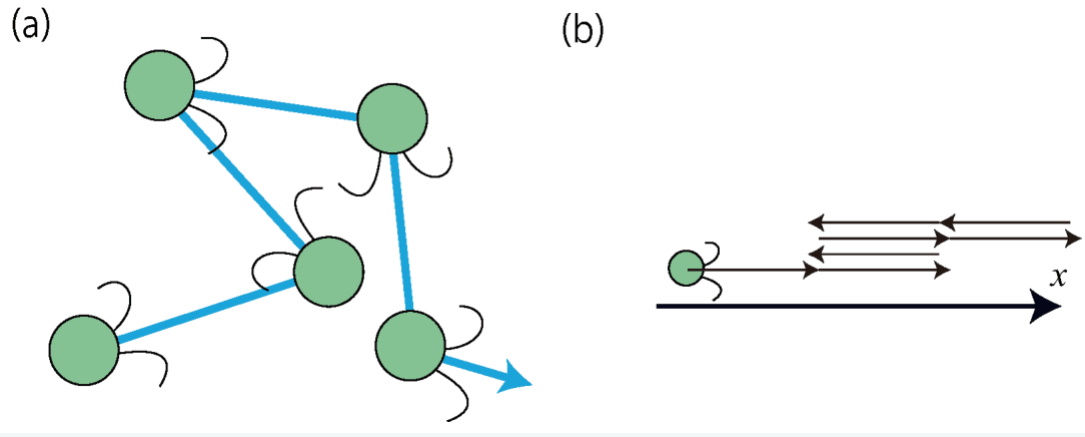
N_A 'nın Avogadro sabiti olduğu bilgisini kullanmadan, Şekil 3'teki verilerden değerini iki anlamlı basamakla tahmin edin. Gaz sabiti $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ 'dür. Genel Yönergeler'de verilen Boltzmann sabiti k 'nin değerini kullanmayın. Avogadro sabiti için Genel Yönergeler'dekinden farklı bir değer elde edebilirsiniz.

Şimdi Bölüm B'deki modeli, E elektrik alanı altında Q yüklü bir parçacığın hareketini betimlemek üzere genişletiyoruz. Denklem (2)'de ele alınan parçacık hızı $v(t)$, $v(t) = u + v_n \text{ (} t_{n-1} < t \leq t_n \text{)}$ ile değiştirilmelidir; burada v_n , Denklem (3)'ü sağlar ve u , Denklem (5)'te ele alınan limit hızdır.

D.2 — 0.8 puan

MSD'yi, $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$, u , D ve t cinsinden ifade edin. Küçük t ve büyük t için yaklaşık kuvvet yasalarını ve bu değişimin gerçekteştiği karakteristik t_* zamanını elde edin. MSD'nin çift logaritmik bir grafiğini kabaca çizin ve t_* 'in yaklaşık konumunu belirtin.

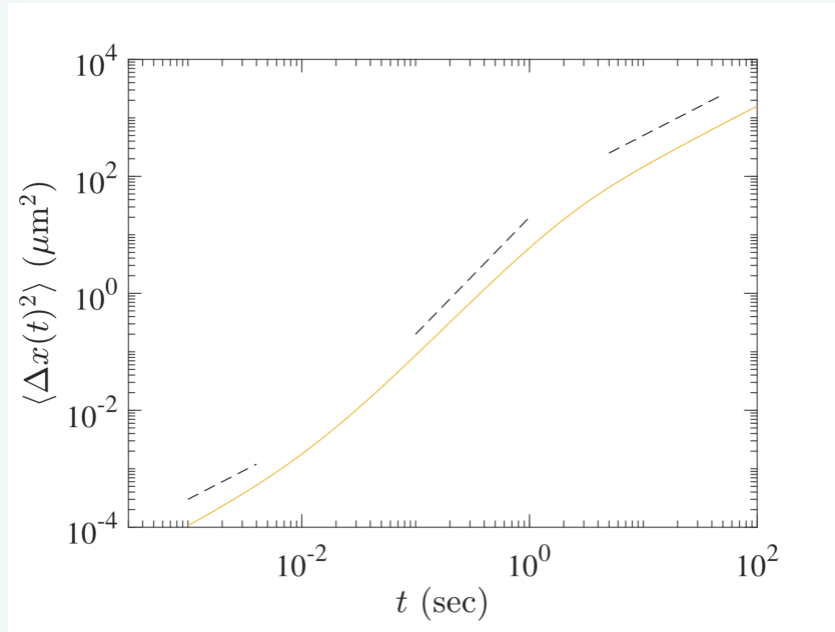
Ardından, basitlik amacıyla bir boyutta (Şekil 4(b)), yüzen mikroorganizmaları (Şekil 4(a)) ele alıyoruz. Bunlar yarıçapı a olan küresel parçacıklardır. Her δ_0 zaman aralığında işaretin korelasyonsuz biçimde rastgele seçildiği $+u_0$ veya $-u_0$ hızıyla yüzerler. Gözlenen hareket, yüzmeden kaynaklanan yer değiştirmeler ile küresel bir parçacığın Brown hareketinden kaynaklanan yer değiştirmelerin birleşimidir.



Şekil 4: (a) Mikroorganizmaların hareketi. (b) Bunun bir boyutlu biçimi.

D.3 — 0.6 puan

Şekil 5, bu mikroorganizmaların MSD'sini, $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$, göstermektedir; kesikli çizgilerle belirtildiği gibi küçük, büyük ve ara t değerlerinde farklı kuvvet yasaları görülür. Her zaman aralığı için kuvvet yasasını elde edin ve D , u_0 , δ_0 ve t niceliklerinden gerekli olanları kullanarak ifade edin.



Şekil 5: Mikroorganizmaların ortalama kare yer değiştirmesi.

Bölüm E. Su arıtımı (1.5 puan)

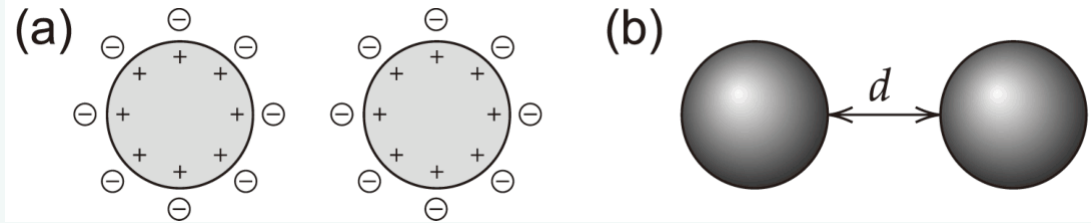
Burada, kolloid benzeri toprak parçacıkları içeren suyun, bu parçacıkların pıhtılaşmasını sağlamak üzere elektrolit eklenerek arıtılmasını ele alıyoruz. Parçacıklar van der Waals kuvveti ve elektrostatik kuvvet aracılığıyla etkileşir; elektrostatik kuvvet hem yüzey yüklerinin hem de çevreleyen zıt yüklü iyon tabakasının etkilerini içerir (bu iyonlara karşı iyonlar, oluşturdukları tabakaya ise elektriksel çift tabaka denir; bkz. Şekil 6(a)). Sonuç olarak, parçacıklar arası uzaklık d (Şekil 6(b)) için etkileşim potansiyeli

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

ile verilir; burada A ve B pozitif sabitler, ϵ suyun dielektrik sabiti ve λ elektriksel çift tabakanın kalınlığıdır. İyonların yüklerinin $\pm q$ olduğunu varsayarsak,

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \quad (7)$$

olur; burada c , iyonun molar derişimidir.



Şekil 6: (a) Kolloidal parçacıkların yüzey yükleri ve karşı iyonlar. (b) d uzaklığının tanımı.

E.1 – 1.5 puan

Süspansiyona sodyum klorür (NaCl) eklenmesi, kolloidal parçacıkların pıhtılaşmasına neden olur. Pıhtılaşma için gerekli en düşük NaCl derişimi c 'yi belirleyin. Isıl dalgalanmalar olmaksızın iki parçacığı ele almak, yani Denklem (1)'de $F(t) = 0$ almak ve verilen potansiyel kuvveti için limit hıza anında ulaşıldığını varsaymak yeterlidir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• A.1

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

• A.2

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i e^{-(t-t_i)/\tau}, \quad 0 < t_i < t.$$

Gözlem anında gerçekleşen bir çarpışmanın hemen sonrasında $t_i = t$ 'yi de dâhil edin.

• B.1

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t.$$

• B.2

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

• C.1

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2 \delta}{4} \frac{dn}{dx}(x_0).$$

- C.2

$$J_D(x_0) = -\frac{C\delta}{2} \frac{dn}{dx}(x_0), \quad D = \frac{C\delta}{2}, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

- C.3

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

- C.4

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}), \quad u = \frac{QE}{\gamma}.$$

- C.5

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

- D.1

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

- D.2

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2, \quad t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

$t \ll t_*$ için MSD yaklaşık olarak $2Dt$ 'dir ve çift logaritmik grafikte eğimi 1'dir. $t \gg t_*$ için yaklaşık olarak $u^2 t^2$ 'dir ve eğimi 2'dir.

- D.3 $t_s = 2D/u_0^2$ olarak tanımlayın. Gösterilen üç ayrı rejim için $t_s \ll \delta_0$ olur ve

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq \begin{cases} 2Dt, & t \ll t_s, \\ u_0^2 t^2, & t_s \ll t \ll \delta_0, \\ (2D + u_0^2 \delta_0)t \simeq u_0^2 \delta_0 t, & t \gg \delta_0. \end{cases}$$

Çift logaritmik grafikteki eğimler sırasıyla 1, 2, 1'dir.

- E.1 Kritik derişim

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6},$$

olup, burada q , NaCl için temel yükün büyüklüğüdür. Birbirinden uzakta bulunan parçacıkların pıhtılaşması $c > c_{\text{crit}}$ için gerçekleşir. Tam $c = c_{\text{crit}}$ durumunda, belirtilen gürültüsüz, aşırı sönümlü dinamik sınır durumdadır: parçacıklar sonlu bir ayrılma uzaklığına asimptotik olarak yaklaşır.

Çözüm

A.1

Hareket denkleminin çok kısa çarpışma süresi boyunca integrali alındığında itme–momentum bağıntısı elde edilir. Çarpışma süresi sıfıra giderken sürtünme kuvvetinin itmesi sıfıra gider; dolayısıyla

$$M[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = I_0.$$

Parçacık başlangıçta durgun olduğundan,

$$v_0 = v(t_0^+) = \frac{I_0}{M}.$$

Çarpışmadan sonra hem F hem de F_{ext} kuvveti sıfır olur. Böylece

$$M \frac{dv}{dt} = -\gamma v,$$

olur ve bunun çözümü

$$v(t) = \frac{I_0}{M} \exp \left[-\frac{\gamma}{M} (t - t_0) \right].$$

Verilen biçimle karşılaştırıldığında

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2

Hareket denklemi doğrusaldır. Her çarpışma, daha sonra τ gevşeme süresiyle azalan ani bir I_i/M hız artışı oluşturur. Dolayısıyla süperpozisyon ilkesiyle

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i \exp \left[-\frac{t - t_i}{\tau} \right].$$

Yalnızca başlangıç anından sonra ve gözlemden önce gerçekleşen çarpışmalar katkıda bulunur:

$$0 < t_i < t.$$

Bir çarpışma anında hızda I_i/M büyüklüğünde bir sıçrama olur. $v(t)$, bu çarpışmanın hemen sonrasındaki hızı gösteriyorsa üst uç nokta da dâhil edilir.

B.1

n . aralık boyunca yer değiştirme $v_n \delta$ 'dir. Dolayısıyla $t = N\delta$ anında,

$$\Delta x(t) = \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Bunun beklenen değeri

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0.$$

İkinci moment için,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \delta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle v_n v_m \rangle \\ &= \delta^2 N C \\ &= C \delta t. \end{aligned}$$

Farklı aralıklardaki hızlar korelasyonsuz olduğu için çapraz terimler sıfır olur. Böylece

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t.$$

B.2

Sabit ve pozitif bir gözlem zamanında, Brown hareketinin difüzyon limitindeki MSD'si sonlu ve sıfırdan farklı olmalıdır.

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t,$$

olduğundan, $\delta \rightarrow 0$ iken $C\delta$ çarpımı sonlu, sıfırdan farklı bir sabite yaklaşmalıdır. Bu nedenle

$$C \propto \delta^{-1}.$$

Geriye kalan zaman bağımlılığı doğrusaldır:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t.$$

Sonuç olarak,

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1.}$$

Bu, mikroskobik gevşeme süresi τ 'dan çok daha uzun zaman ölçeklerindeki hareketi betimleyen etkin modelin sürekli ortam limitidir.

C.1

Sağa hareket eden parçacıklar, başlangıçta $x_0 - v\delta$ ile x_0 arasında bulunuyorlarsa bir sonraki δ aralığında x_0 'dan geçerler. Bu bölgedeki parçacıkların yarısı sağa hareket eder. Birim alan başına sayıları δ 'ya bölündüğünde,

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-v\delta}^{x_0} n(x) dx.$$

Verilen doğrusal yaklaşıklığı,

$$n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)n'(x_0),$$

kullanarak

$$N_+(x_0) \simeq \frac{1}{2\delta} \left[v\delta n(x_0) - \frac{(v\delta)^2}{2} n'(x_0) \right].$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\boxed{N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0).}$$

Bu yaklaşıklık, derişimin $v\delta$ uzaklığı boyunca yavaş değişmesini gerektirir.

C.2

Benzer biçimde, sola hareket eden parçacıklar başlangıçta $x_0 < x < x_0 + v\delta$ aralığında bulunur; buradan

$$\begin{aligned} N_-(x_0) &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0}^{x_0+v\delta} n(x) dx \\ &\simeq \frac{v}{2} n(x_0) + \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0). \end{aligned}$$

Fark alınarak ve ortalama hesaplanarak,

$$\begin{aligned}
J_D(x_0) &= \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle \\
&= -\frac{\delta}{2} \langle v^2 \rangle n'(x_0) \\
&= -\frac{C\delta}{2} n'(x_0).
\end{aligned}$$

Fick yasası $J_D = -Dn'$ ile karşılaştırıldığında

$$D = \frac{C\delta}{2}.$$

B.1'de yerine koyarsak,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

C.3

Kesit alanı A ve kalınlığı Δx olan dilimi ele alalım. Bu dilime pozitif x yönünde etkiyen elektriksel kuvvet

$$F_E = n(x)A\Delta x QE.$$

Ozmotik basınçtan kaynaklanan net kuvvet

$$F_{\Pi} = A\Pi(x) - A\Pi(x + \Delta x) \simeq -A\Delta x \frac{d\Pi}{dx}.$$

Kuvvet dengesiyle

$$n(x)QE = \frac{d\Pi}{dx}.$$

Sıcaklık her yerde aynı olduğunda $\Pi = nkT$ olduğundan,

$$\frac{d\Pi}{dx} = kT \frac{dn}{dx}.$$

Böylece

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

Gradyanın pozitif olması, pozitif yüklü parçacıkların elektrik alan yönünde birikmesiyle tutarlıdır.

C.4

Uygulanan sabit kuvvet ve $\langle F(t) \rangle = 0$ kullanılarak Denklem (1)'in beklenen değeri alındığında

$$M \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\gamma \langle v \rangle + QE.$$

$\langle v(0) \rangle = 0$ koşulunu sağlayan çözüm

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/M}) = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Dolayısıyla limit hız

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma}.$$

C.5

Dengede, difüzyon akısı elektriksel sürüklenme akısını dengeler:

$$-D \frac{dn}{dx} + nu = 0.$$

C.3 ve C.4'ün sonuçları yerine konulduğunda,

$$-D \frac{nQE}{kT} + n \frac{QE}{\gamma} = 0.$$

Böylece

$$\boxed{D = \frac{kT}{\gamma}}.$$

Bu, difüzyon ile sürtünme arasındaki Einstein bağıntısıdır.

D.1

Tabloda verilen yer değiştirmeler histogram sınıflarını temsil eden değerler olarak kullanıldığında, toplam ölçüm sayısı

$$N_{\text{tot}} = \sum_j N_j = 400.$$

Yer değiştirme karelerinin ağırlıklı toplamı

$$\sum_j N_j (\Delta x_j)^2 = 2536 \mu\text{m}^2.$$

Dolayısıyla $\Delta t = 60$ s süresi için tahmin edilen MSD

$$\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle = \frac{2536}{400} \mu\text{m}^2 = 6.34 \times 10^{-12} \text{m}^2.$$

C.2'den,

$$D = \frac{\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}{2\Delta t} = \frac{6.34 \times 10^{-12}}{120} = 5.2833 \times 10^{-14} \text{m}^2 \text{s}^{-1}.$$

Sürtünme katsayısı

$$\begin{aligned} \gamma &= 6\pi a \eta \\ &= 6\pi(5.0 \times 10^{-6})(8.9 \times 10^{-4}) \\ &= 8.3881 \times 10^{-8} \text{kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Einstein bağıntısında $k = R/N_A$ kullanıldığında

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma},$$

olur; dolayısıyla

$$N_A = \frac{RT}{\gamma D} = \frac{2RT\Delta t}{\gamma \langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}.$$

$T = 298.15$ K ile,

$$N_A = \frac{8.31(298.15)}{(8.3881 \times 10^{-8})(5.2833 \times 10^{-14})} = 5.5907 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}.$$

İki anlamlı basamakla,

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Ne N_A 'nın kabul edilen değeri ne de k 'nin sayısal bir değeri kullanılmıştır.

D.2

Limit hızdaki sürüklenme dâhil edildiğinde yer değiştirme

$$\Delta x(t) = ut + \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Rastgele kısmın ortalaması sıfır, ikinci momenti ise $2Dt$ 'dir. Dolayısıyla sürüklenme ile rastgele yer değiştirme arasındaki çapraz terimin ortalaması sıfır olur:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= u^2 t^2 + 2ut \delta \sum_n \langle v_n \rangle + \delta^2 \sum_{n,m} \langle v_n v_m \rangle \\ &= u^2 t^2 + 2Dt. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2.$$

Geçiş, iki katkı eşit olduğunda gerçekleşir:

$$2Dt_* = u^2 t_*^2,$$

buradan

$$t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

Sınır durumlarındaki kuvvet yasaları

$$\begin{aligned} t \ll t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt, \\ t \gg t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq u^2 t^2. \end{aligned}$$

Burada "küçük t ", mikroskobik gevşemenin zaten ihmal edildiği ve limit hızdaki sürüklenmenin yerleştiği etkin difüzyon modeline ilişkindir.

İstenen çift logaritmik grafik taslağını kesin olarak betimlemek için

$$s = \frac{t}{t_*}, \quad Y = \frac{\langle \Delta x(t)^2 \rangle}{2Dt_*}.$$

tanımlarını yapalım. O hâlde

$$Y = s + s^2.$$

Grafik, küçük s değerlerinde eğimi 1 olan $Y = s$ doğrusal asimptotunu izler, $s = 1$ yakınında düzgün biçimde yukarı doğru kıvrılır ve büyük s değerlerinde eğimi 2 olan $Y = s^2$ asimptotuna yaklaşır. İki asimptot $(s, Y) = (1, 1)$ noktasında kesişirken gerçek eğri $(1, 2)$ noktasından geçer. Bu nedenle kıvrılmanın olduğu yerde $t = t_*$ 'i işaretleyin. Bu noktada,

$$\langle \Delta x(t_*)^2 \rangle = \frac{8D^2}{u^2}.$$

D.3

Yer değiştirmeyi ısı hareket ve yüzme katkılarının toplamı olarak yazalım:

$$\Delta x(t) = \Delta x_B(t) + \Delta x_S(t).$$

Isıl hareketin ve yüzme yönü seçimlerinin bağımsız olduğu kabul edilir ve her iki katkının da ortalaması sıfırdır. Dolayısıyla

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle.$$

$t \ll \delta_0$ için yüzme yönü gözlem aralığı boyunca pratik olarak değişmez. Bu nedenle

$$\Delta x_S(t) \simeq \pm u_0 t, \quad \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle \simeq u_0^2 t^2.$$

Böylece

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt + u_0^2 t^2 \quad (t \ll \delta_0).$$

İki terim

$$t_s = \frac{2D}{u_0^2}.$$

anında karşılaştırılabilir büyüklüğe ulaşır. Sonuç olarak, $t \ll t_s$ için ısı difüzyon baskındır ve $t_s \ll t \ll \delta_0$ için yüzme balistik bir rejim oluşturur.

Uzun zamanlar için, $t = N\delta_0$ olmak üzere N tam yüzme aralığını ele alalım. $s_j = \pm 1$, j . aralıkta bağımsız olarak seçilen işareti gösterebilir. O hâlde

$$\Delta x_S(t) = u_0 \delta_0 \sum_{j=1}^N s_j.$$

$\langle s_j \rangle = 0$ ve $j \neq \ell$ için $\langle s_j s_\ell \rangle = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle &= u_0^2 \delta_0^2 N \\ &= u_0^2 \delta_0 t. \end{aligned}$$

Tamamlanmamış bir son aralık, $t \gg \delta_0$ için bu başat davranışı değiştirmez. Dolayısıyla uzun zamanlardaki MSD

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq (2D + u_0^2 \delta_0) t.$$

Eşdeğer biçimde, uzun zamanlardaki difüzyon katsayısı

$$D_{\text{eff}} = D + \frac{u_0^2 \delta_0}{2}.$$

şekildeki gibi belirgin bir ara rejim için zaman ölçekleri

$$\frac{2D}{u_0^2} \ll \delta_0.$$

koşulunu sağlamalıdır. Bu, aynı zamanda $u_0^2 \delta_0 \gg 2D$ anlamına gelir. Dolayısıyla gözlenen üç asimptot

Zaman aralığı	$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$	Çift logaritmik eğim
$t \ll 2D/u_0^2$	$2Dt$	1
$2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0$	$u_0^2 t^2$	2
$t \gg \delta_0$	$u_0^2 \delta_0 t$	1

biçimindedir; ısı difüzyonunun kayda değer olduğu durumda uzun zaman katsayısının tam ifadesi $2D + u_0^2 \delta_0$ korunur.

E.1

Pozitif enerji ölçeğini

$$K = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}.$$

olarak tanımlayalım. O hâlde

$$U(d) = -\frac{A}{d} + Ke^{-d/\lambda},$$

ve

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{K}{\lambda}e^{-d/\lambda}.$$

Ayrılma uzaklığını artırma yönündeki kuvvet $-U'(d)$ 'dir. Limit hıza anında ulaşıldığı varsayımı altında her parçacığın hızı, üzerine etkiyen kuvvetle orantılıdır. Sürtünme katsayısı γ olan iki özdeş parçacık için,

$$\dot{d} = -\frac{2}{\gamma}U'(d).$$

Dolayısıyla $U'(d) > 0$ olan her yerde parçacıklar birbirine yaklaşır.

Birbirinden uzakta başlayıp yaklaşan parçacıkların ısı dalgalanmalar olmaksızın temas edebilmesi için arada itici bir bölge veya sonlu bir ayrılma uzaklığında kararlı denge bulunmamalıdır. Dolayısıyla kritik koşul, $U'(d) < 0$ olan bölgenin ortadan kalkmasıdır.

Türevi şu şekilde yeniden yazalım:

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} \left[1 - \frac{K\lambda}{A} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 e^{-d/\lambda} \right].$$

$z = d/\lambda > 0$ alalım. İşareti belirleyen fonksiyon

$$f(z) = z^2 e^{-z}.$$

Bunun türevi

$$f'(z) = ze^{-z}(2 - z),$$

olduğundan, global maksimumu $z = 2$ 'de gerçekleşir ve

$$f_{\max} = 4e^{-2}.$$

Buna göre, her ayrılma uzaklığında $U'(d) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{K\lambda}{A} 4e^{-2} \leq 1.$$

Kritik perdeleme uzunluğu

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{\exp(2)A}{4K} = \frac{\exp(2)Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2}.$$

Bu eşikte, potansiyelin iki durağan noktası

$$d_{\text{crit}} = 2\lambda_{\text{crit}},$$

konumunda birleşir; burada hem $U'(d_{\text{crit}})$ hem de $U''(d_{\text{crit}})$ sıfır olur.

Tuz derişiminin artırılması λ 'yı azaltır. Denklem (7)'de λ_{crit} yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} c_{\text{crit}} &= \frac{\epsilon k T}{2 N_A q^2 \lambda_{\text{crit}}^2} \\ &= \frac{\epsilon k T}{2 N_A q^2} \left[\frac{4 B \epsilon (k T)^2}{\exp(2) A q^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$c_{\text{crit}} = \frac{8 B^2 \epsilon^3 (k T)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6}.$$

NaCl için iyonlar tek değerlidir; dolayısıyla q , temel yükün büyüklüğüdür. Her bir iyon türünün derişimi, NaCl'nin molar derişimine eşittir; Denklem (7)'deki 2 çarpanı zaten her iki türü de hesaba katar. SI birimlerindeki parametrelerle sonucun birimi mol m^{-3} olur.

$c > c_{\text{crit}}$ için her pozitif ayrılma uzaklığında $U'(d) > 0$ olur ve deterministik hareket, başlangıçta birbirinden ayrı olan bir parçacık çiftini temasa getirir. $c < c_{\text{crit}}$ için, yeterince büyük bir ayrılma uzaklığından yaklaşan bir çift, U 'nun dıştaki yerel minimumunda hapsolür.

Eşitlik durumunda yapılması gereken kesin bir ayırım vardır. $c = c_{\text{crit}}$ iken, d_{crit} yakınında

$$U'(d) \propto (d - d_{\text{crit}})^2$$

olur. Bu nedenle daha büyük uzaklıklardan aşırı sönümlü yaklaşımda bu ayrılma uzaklığına ulaşmak sonsuz zaman alır. Dolayısıyla c_{crit} , kritik eşik ya da birbirinden uzakta bulunan parçacıkların pıhtılaşmasını sağlayan derişimlerin infimumudur; idealleştirilmiş dinamikte gerçekten temasa geçilebilmesi için $c > c_{\text{crit}}$ gerekir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Nötron Yıldızları

Büyük çekirdeklerin kararlılığını ele alıyor ve nötron yıldızlarının kütlesini kuramsal ve deneysel olarak tahmin ediyoruz.

Bölüm A. Çekirdeklerin kütlesi ve kararlılığı (2.5 puan)

Z proton ve N nötrondan oluşan bir çekirdeğin durgunluk enerjisi $m(Z, N)c^2$, bundan böyle nükleon olarak adlandırılacak olan proton ve nötronların durgunluk enerjileri toplamından bağlanma enerjisi $B(Z, N)$ kadar küçüktür; burada c , ışığın boşluktaki hızıdır. Küçük düzeltmeleri ihmal ederek, a_V katsayılı hacim terimi, a_S katsayılı yüzey terimi, a_C katsayılı Coulomb enerjisi terimi ve a_{sym} katsayılı simetri enerjisi teriminden oluşan bağlanma enerjisini aşağıdaki şekilde yaklaşık olarak ifade edebiliriz.

$$m(Z, N)c^2 = A m_N c^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

Burada $A = Z + N$ kütle sayısı, m_N ise nükleon kütlesidir. Hesaplamalarda $a_V \approx 15.8$ MeV, $a_S \approx 17.8$ MeV, $a_C \approx 0.711$ MeV ve $a_{\text{sym}} \approx 23.7$ MeV değerlerini kullanın (MeV = 10^6 elektron volt).

A.1 — 0.9 puan

$Z = N$ koşulu altında, nükleon başına bağlanma enerjisi B/A 'yı maksimum yapan A değerini belirleyin.

A.2 — 0.9 puan

A sabit tutulduğunda, en kararlı çekirdeğin atom numarası Z^* , $B(Z, A - Z)$ 'nin maksimum yapılmasıyla belirlenir. $A = 197$ için Denklem (1)'i kullanarak Z^* 'ı hesaplayın.

A.3 — 0.7 puan

A değeri büyük olan bir çekirdek, toplam durgunluk kütle enerjisini minimum yapmak için fisyon yoluyla daha hafif çekirdeklere ayrılır. Basitlik amacıyla, (Z, N) ile belirtilen bir çekirdeğin iki eşit çekirdeğe ayrılmasının çeşitli yollarından birini ele alıyoruz; bu ayrılma, aşağıdaki enerji bağıntısı sağlandığında gerçekleşir:

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Bu bağıntı

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

şeklinde yazıldığında, C_{fission} değerini iki anlamlı basamakla bulun.

Bölüm B. Devasa bir çekirdek olarak nötron yıldızı (1.5 puan)

A_c eşik değeri olmak üzere, kütle sayısı yeterince büyük olan $A > A_c$ büyük çekirdekler, kütleçekimden kaynaklanan bağlanma enerjisinin yeterince büyük olması nedeniyle nükleer fisyonla karşı kararlı kalır.

B.1 — 1.5 puan

Yeterince büyük A için $N = A$ ve $Z = 0$ koşullarının gerçekleştiğini ve kütleçekimsel bağlanma enerjisi eklendiğinde Denklem (1)'in geçerliliğini koruduğunu varsayıyoruz. Kütleçekimden kaynaklanan bağlanma enerjisi

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

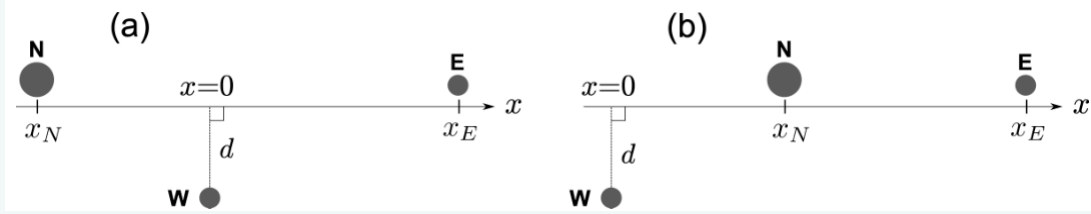
şeklindedir; burada $M = m_N A$ ve $R = R_0 A^{1/3}$ sırasıyla çekirdeğin kütlesi ve yarıçapıdır ve $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m = 1.1 fm'dir.

$B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ için a_{grav} değerini MeV biriminde bir anlamlı basamakla bulun. Ardından yüzey terimini ihmal ederek A_c 'yi bir anlamlı basamakla tahmin edin. Hesaplamalarda $m_N c^2 \simeq 939$ MeV ve $G = \hbar c / M_P^2$ bağıntısını kullanın; burada $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}$ MeV ve $\hbar c \simeq 197$ MeV · fm'dir.

Bölüm C. İkili sistemde nötron yıldızı (6.0 puan)

Bazı nötron yıldızları, burada basitlik amacıyla "ışık" olarak adlandıracağımız elektromanyetik dalgaları sabit bir periyotla düzenli olarak yayan pulsarlardır. Nötron yıldızları sıklıkla bir beyaz cüceyle ikili sistem oluşturur. Şekil 1'de gösterilen yıldız düzenini ele alalım; bu düzende nötron

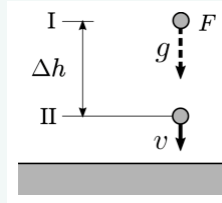
yıldızı **N**'den Dünya **E**'ye giden bir ışık atımı, ikili sistemin beyaz cücesi **W**'nin yakınından geçer. Yıldızın kütleçekiminden etkilenen bu atımların ölçülmesi, aşağıda açıklandığı gibi **W**'nin kütlelerinin hassas biçimde tahmin edilmesini ve bunun sonucunda **N**'nin kütlelerinin tahmin edilmesini sağlar.



Şekil 1: x ekseninin **N** ile **E**'yi birleştiren doğru boyunca uzandığı düzenler. (a) $x_N < 0$ ve (b) $x_N > 0$ için.

C.1 — 1.0 puan

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, sabit kütleçekimi ivmesi g altında, aralarında $\Delta h(> 0)$ yükseklik farkı bulunan I ve II düzeylerini belirliyoruz. I, II ve serbest düşen sistem F' 'ye, sırasıyla saat-I, saat-II ve saat- F olarak adlandırılan özdeş saatler yerleştirin.



Düşünce deneyinin düzeneği.

Bir gözlemcinin saat- F' 'nin yanında bulunduğunu ve başlangıçta F' 'nin saat-I ile aynı yükseklikte ve hızının sıfır olduğunu varsayıyoruz. Saatler özdeş olduğundan eşit zaman aralıkları kaydederler: $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. Ardından F' 'yi serbest düşmeye bırakıyor ve eylemsiz kabul edilen F referans sisteminde çalışıyoruz. Bu sistemde saat-II, saat- F' 'nin yanından v hızıyla geçer; böylece saat-II'deki zaman genişlemesi Lorentz dönüşümüyle belirlenebilir. Saat- F' 'de $\Delta\tau_I$ süresi geçtiğinde saat-II'de $\Delta\tau_{II}$ süresi geçer.

$\Delta\tau_{II}$ 'yi $\Delta\tau_I$ cinsinden, $\Delta\phi/c^2$ 'ye göre birinci mertebeye kadar belirleyin; burada $\Delta\phi = g\Delta h$, kütleçekim potansiyeli, yani birim kütle başına kütleçekim potansiyel enerjisi farkıdır.

C.2 — 1.8 puan

ϕ kütleçekim potansiyeli altında zaman gecikmeleri, ışığın yerel hızı c olmasına karşın, sonsuzda gözlenen etkin ışık hızı c_{eff} 'i değiştirir. $\phi(r = \infty) = 0$ olduğunda, c_{eff} , ϕ/c^2 'ye göre birinci mertebeye kadar

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

şeklinde verilebilir; bu ifade, **C.1**'de yer almayan uzayın bükülmesi etkisini de içerir. Işığın izlediği yolun yaklaşık olarak bir doğru kabul edilebileceğini belirtelim.

Şekil 1 (a)'da gösterildiği gibi, x eksenini nötron yıldızı **N**'den Dünya **E**'ye giden ışığın yolu boyunca alıyor ve $x = 0$ noktasını, ışık yolu üzerinde beyaz cüce **W**'ye en yakın noktaya yerleştiriyoruz. **N**'nin x koordinatı $x_N(< 0)$, **E**'nin koordinatı $x_E(> 0)$ ve **W** ile ışık yolu arasındaki uzaklık d olsun.

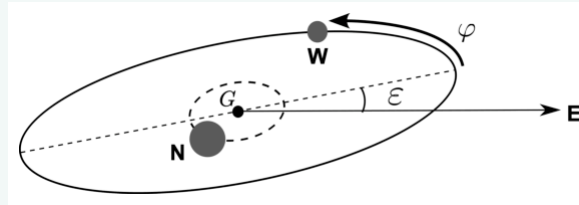
M_{WD} kütleli beyaz cücenin, **N**'den **E**'ye giden ışığın varış zamanında neden olduğu Δt değişimini tahmin edin ve aşağıdaki küçük niceliklerin yüksek mertebeli terimlerini ihmal ederek sonucu basit bir biçimde ifade edin: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ ve $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Gerekirse aşağıdaki formülü kullanın.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

(log doğal logaritmadır)

C.3 – 1.8 puan

Aşağıda gösterildiği gibi, bir ikili yıldız sisteminde **N** ve **W**'nin, yörünge düzlemindeki kütle merkezi G çevresinde dışmerkezliği sıfır olan dairesel yörüngelerde hareket ettiği varsayılıyor. Yörünge düzleminde, G 'den **E**'ye yönelen doğruya doğru ölçülen yörünge eğim açısı ε , **N** ile **W** arasındaki uzaklık L ve beyaz cücenin kütlesi M_{WD} olsun. Aşağıda $\varepsilon \ll 1$ olduğunu varsayıyoruz.



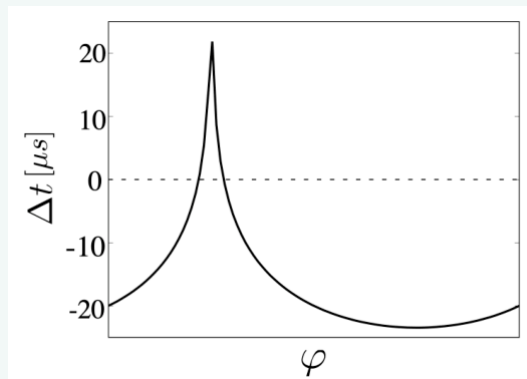
İkili yıldız sistemi.

N'den gelen ışık atımlarını, **N**'den çok uzaktaki **E** üzerinde gözliyoruz. **E**'ye giden ışığın yolu, **N** ve **W**'nin konumlarına bağlı olarak zamanla değişir. **E**'ye ulaşan atımların zaman aralığındaki gecikme, $x_N \simeq -L$ için maksimum Δt_{max} değerini ve $x_N \simeq L$ için minimum Δt_{min} değerini alır (düzen için Şekil 1 (b)'ye bakın).

C.2'de yapıldığı gibi küçük niceliklerin yüksek mertebeli terimlerini ihmal ederek $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ farkını basit bir biçimde hesaplayın. **W** dışındaki yıldızsal cisimlerin kütleçekiminden kaynaklanan gecikmelerin $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ farkında birbirini götürdüğünün varsayıldığını belirtelim.

C.4 – 0.8 puan

Aşağıdaki şekil, $L \approx 6 \times 10^6$ km ve $\cos \varepsilon \approx 0.99989$ olan ikili yıldız sistemi için gözlenen zaman gecikmelerini yörünge fazı φ 'nin fonksiyonu olarak göstermektedir. M_{WD} 'yi Güneş kütlesi $M_{\odot}$ cinsinden tahmin edin ve $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$ için sonucu bir anlamlı basamakla gösterin. Burada $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$ yaklaşık bağıntısı kullanılabilir.



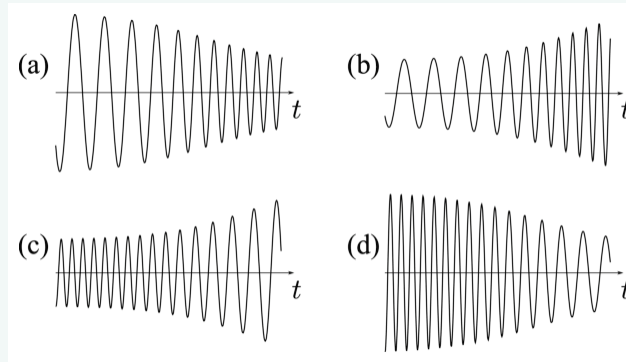
N ve **W**'nin yörüngelerdeki konumlarını belirleyen yörünge fazı φ 'nin fonksiyonu olarak gözlenen zaman gecikmeleri Δt (C.3'teki şekle bakın).

C.5 — 0.4 puan

İkili nötron yıldızı sisteminde iki yıldız, kütleçekim dalgaları yayarak enerji ve açısal momentum kaybeder ve sonunda çarpışarak birleşir. Basitlik amacıyla yalnızca R yarıçaplı ve ω açısal hızlı dairesel hareketi ele alalım; görelilik etkileri ihmal edilirse, ne ω 'ya ne de R 'ye bağlı olan χ sabiti ile $\omega = \chi R^p$ bağıntısı geçerlidir. p 'nin değerini belirleyin.

C.6 — 0.2 puan

C.5'teki ikili sistemden yayılan kütleçekim dalgasının genliği $R^2\omega^2$ ile orantılıdır. Aşağıdaki şekil, iki yıldızın çarpışmasından önce gözlenen kütleçekim dalgalarının zamana göre dört farklı profilini nitel olarak göstermektedir. (a) ile (d) arasından en uygun profili seçin.



Kütleçekim dalgalarının gözlenen veri profilleri.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A.1:** $A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 50$.
- **A.2:** $Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}} = 78.55 \dots$; bu, tam sayı atom numarası olarak **79** verir.
- **A.3:** $C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx \mathbf{0.70}$.
- **B.1:** $a_{\text{grav}} \approx \mathbf{6 \times 10^{-37} \text{ MeV}}$, $A_c \approx \mathbf{4 \times 10^{55}}$; aşağıda ele alınan toplam bağlanma enerjisinin pozitif olması ölçütü kullanılmıştır.
- **C.1:** $\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)$.
- **C.2:** $\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)$.
- **C.3:** $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \approx \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$.

- C.4: $\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5$ veya $M_{\text{WD}} \approx 0.5M_{\odot}$.
- C.5: $p = -\frac{3}{2}$.
- C.6: (b): yıldızlar çarpışmaya yaklaştıkça hem genlik hem de frekans artar.

Çözüm

A.1

$Z = N = A/2$ için simetri terimi sıfır olur. Nükleon başına bağlanma enerjisi

$$\frac{B}{A} = a_V - a_SA^{-1/3} - \frac{a_C}{4}A^{2/3}.$$

olur. A 'yı sürekli bir değişken olarak ele alırsak,

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{a_S}{3}A^{-4/3} - \frac{a_C}{6}A^{-1/3} = \frac{2a_S - a_CA}{6A^{4/3}}.$$

Bu türev, $A = 2a_S/a_C$ değerinin altında pozitif, üstünde ise negatiftir; dolayısıyla bu durağan nokta bir maksimumdur:

$$A = \frac{2a_S}{a_C} = \frac{2(17.8)}{0.711} = 50.07 \dots$$

Böylece

$$A \approx 50.$$

$Z = N$ 'nin tam sayı olmasıyla uyumlu, izin verilen en yakın çift kütle sayısı $A = 50$ 'dir.

A.2

Sabit A için $N = A - Z$, dolayısıyla $N - Z = A - 2Z$ 'dir. Yalnızca Coulomb ve simetri terimleri Z 'ye bağlıdır:

$$B(Z, A - Z) = \text{sabit} - a_C Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z)^2.$$

Maksimum koşulu

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-1/3} + \frac{4a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z) = 0.$$

şeklindedir. Yeniden düzenlersek,

$$4a_{\text{sym}}A = Z \left(8a_{\text{sym}} + 2a_C A^{2/3} \right),$$

dolayısıyla

$$Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}}.$$

Bu nokta bir maksimumdur, çünkü

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_C A^{-1/3} - \frac{8a_{\text{sym}}}{A} < 0.$$

$A = 197$ için,

$$Z^* = \frac{197}{2 + \frac{0.711}{2(23.7)} 197^{2/3}} = 78.553 \dots$$

Z 'ye bağımlılık aşağı doğru içbükey ikinci dereceden bir fonksiyon olduğundan, en uygun tam sayı en yakın tam sayıdır:

$$\boxed{Z^* = 79}.$$

A.3

Toplam nükleon sayısı korunduğundan, serbest nükleonların durgunluk enerjisi terimleri birbirini götürür. Fisyon,

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) > 0.$$

olduğunda enerji açısından elverişlidir. Hacim ve simetri terimlerinin toplamı değişmez. Oluşan çekirdeklerin toplam yüzey terimi

$$-2a_S(A/2)^{2/3} = -a_S 2^{1/3} A^{2/3},$$

ve toplam Coulomb terimi

$$-2a_C \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} = -a_C 2^{-2/3} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

olur. Dolayısıyla,

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) = -a_S(2^{1/3} - 1)A^{2/3} + a_C(1 - 2^{-2/3})\frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Pozitif enerji açığa çıkması koşulu

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{a_S}{a_C}.$$

haline gelir. Böylece

$$\boxed{C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0.702414 \dots \approx 0.70}.$$

Fiziksel olarak, Coulomb itmesindeki azalma, ek yüzey alanının enerji maliyetini aştığında fisyon elverişli hale gelir.

B.1

Verilen kütle ve yarıçapı kütleçekimsel bağlanma enerjisinde yerine koyarsak

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G(m_N A)^2}{R_0 A^{1/3}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} A^{5/3}.$$

elde edilir. Böylece

$$a_{\text{grav}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c}{R_0} \left(\frac{m_N c^2}{M_{\text{PC}} c^2} \right)^2.$$

Verilen sabitleri kullanarak,

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.1 \text{ fm}} \left(\frac{939}{1.22 \times 10^{22}} \right)^2 = 6.3656 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

Bir anlamlı basamakla,

$$a_{\text{grav}} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

$Z = 0$ ve $N = A$ için Coulomb terimi sıfır olur ve simetri terimi $-a_{\text{sym}}A$ 'dır. İstendiği gibi yüzey terimini ihmal edersek,

$$B_{\text{tot}}(A) = (a_V - a_{\text{sym}})A + a_{\text{grav}}A^{5/3},$$

veya

$$\frac{B_{\text{tot}}}{A} = -7.9 \text{ MeV} + a_{\text{grav}}A^{2/3}.$$

Sonlu eşiği, A serbest nötrona göre bağlanmanın başladığı nokta olarak yorumlarsak, koşul

$$B_{\text{tot}} > 0.$$

olur. Sonuç olarak,

$$A > A_c, \quad A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_V}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2}.$$

Bu hesaplamada a_{grav} 'ın yuvarlanmamış değerini koruyarak,

$$A_c = \left(\frac{7.9}{6.3656 \times 10^{-37}} \right)^{3/2} = 4.3721 \times 10^{55}.$$

Böylece

$$A_c \approx 4 \times 10^{55}.$$

Bu bağlanma eşiği ile tam anlamıyla iki damlaya ayrılmaya dayalı bir fisyon karşılaştırması arasındaki ayrım burada önemlidir: $Z = 0$ için ve yüzey terimi ihmal edildiğinde $B_{\text{tot}}(A) - 2B_{\text{tot}}(A/2)$ farkı, her A için pozitif olan $(1 - 2^{-2/3}) a_{\text{grav}}A^{5/3}$ ifadesine eşittir; bu nedenle iki damla karşılaştırması sonlu bir eşik vermez.

C.1

Δh yüksekliği boyunca serbest düşüş sırasında, Newton mekaniğindeki enerji korunumu, gereken hassasiyetle,

$$\frac{1}{2}v^2 = g\Delta h = \Delta\phi,$$

verir; dolayısıyla

$$v^2 = 2\Delta\phi.$$

Serbest düşen gözlemcinin anlık eylemsiz referans sisteminde saat-II, v hızıyla hareket eder. Özel görelilikte zaman genişlemesi

$$\Delta\tau_{\text{II}} = \Delta\tau_F \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

bağıntısını verir. Soruda belirtilen saat karşılaştırmasını, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$, kullanıp birinci mertebeye kadar açarsak,

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{II} &= \Delta\tau_I \sqrt{1 - \frac{2\Delta\phi}{c^2}} \\ &\approx \Delta\tau_I \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\Delta\tau_{II} \approx \Delta\tau_I \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)}.$$

Daha aşağıdaki saat daha yavaş işler.

C.2

x konumunda beyaz cüceye olan uzaklık

$$r(x) = \sqrt{x^2 + d^2},$$

ve beyaz cücenin kütleçekim potansiyeli

$$\phi(x) = -\frac{GM_{WD}}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

şeklinde. Verilen zayıf alan ifadesinden

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right).$$

elde edilir. Beyaz cüce olmadığında yolculuk süresi $(x_E - x_N)/c$ 'dir. Bunu aynı doğrusal yol boyunca gerçek yolculuk süresinden çıkardığımızda

$$\begin{aligned}\Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}}} - \frac{1}{c} \right) dx \\ &\approx -\frac{2}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \phi(x) dx \\ &= \frac{2GM_{WD}}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}.\end{aligned}$$

elde edilir. Verilen ilkel fonksiyonun eşdeğer bir biçimi $\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$ 'dir. Böylece, kütleçekim potansiyeline göre birinci mertebede,

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{WD}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2}}{x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2}} \right).$$

$x_E \gg d$ için,

$$x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2} \approx 2x_E.$$

$x_N < 0$ ve $|x_N| \gg d$ için eşlenikle çarpmak, terimlerin birbirini götürmesini önler:

$$x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2} = \frac{d^2}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + |x_N|} \approx \frac{d^2}{2|x_N|}.$$

Dolayısıyla,

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right).$$

Bu, kütleçekimden kaynaklanan pozitif bir yayılma gecikmesidir. Logaritma boyutsuzdur ve GM_{WD}/c^3 zaman birimine sahiptir.

C.3

İki kavuşum konumunda, L uzaklığının görüş doğrultusundaki izdüşümü

$$x_N = -L \cos \varepsilon \quad \text{maksimum gecikmede,}$$

ve

$$x_N = +L \cos \varepsilon \quad \text{minimum gecikmede.}$$

değerlerini verir. Her iki kavuşumda da,

$$d = L \sin \varepsilon, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} = L.$$

Dünya ikili sistemden uzakta olduğundan, korunan hassasiyet düzeyinde her iki düzen için aynı x_E değerini kullanabiliriz. C.2'deki integral sonucu, x_N 'nin negatif olduğu varsayılmadan önce,

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L + x_N} \right).$$

ifadesini verir. Böylece

$$\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 - \cos \varepsilon)} \right),$$

buna karşılık

$$\Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 + \cos \varepsilon)} \right).$$

Çıkarma işlemi hem x_E 'yi hem de L 'yi ortadan kaldırır:

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right).$$

$\varepsilon \ll 1$ için,

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + \cos \varepsilon \approx 2.$$

Böylece istenen küçük açı biçimi

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) = \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right).$$

olur. Burada ε radyan cinsindendir. Küçük eğim açılarındaki logaritmik büyüme, belirtilen yaklaşıklıklar çerçevesinde, ışığın beyaz cüceye giderek daha yakın geçmesine karşılık gelir.

C.4

Grafikten yaklaşık olarak

$$\Delta t_{\text{max}} \approx +22 \mu\text{s}, \quad \Delta t_{\text{min}} \approx -23 \mu\text{s}.$$

değerleri okunur. Dolayısıyla ölçülebilir aralık yaklaşık olarak

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} \approx 45 \mu s.$$

olur. Grafikteki gecikmelere eklenen keyfi bir sabit kayma bu farkı etkilemez.

Verilen eğim açısını kullanarak,

$$\ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{1.99989}{0.00011} \right) \approx 9.808.$$

Böylece C.3'ten

$$45 \mu s \approx 2 (5 \mu s) \frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} (9.808).$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx \frac{45}{98.08} \approx 0.46.$$

Bir anlamlı basamakla,

$$\boxed{\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5}, \quad \boxed{M_{\text{WD}} \approx 0.5 M_{\odot}}.$$

Verilen L uzaklığı, maksimum ve minimum gecikmelerin farkında birbirini götürür.

C.5

Yıldızların kütleleri M_1, M_2 , aralarındaki uzaklık ise r olsun. Newton mekaniğinde dairesel iki cisim hareketi

$$\omega^2 r^3 = G(M_1 + M_2).$$

bağıntısına uyar. Sabit kütleler için her iki yıldızın da yörünge yarıçapı R , r 'nin sabit bir katıdır. Sonuç olarak,

$$\omega \propto r^{-3/2} \propto R^{-3/2}.$$

$\omega = \chi R^p$ ile karşılaştırırsak,

$$\boxed{p = -\frac{3}{2}}.$$

C.6

İkili sistem yörünge enerjisini kaybettiğinde yörünge yarıçapı azalır. C.5'ten,

$$\omega \propto R^{-3/2},$$

olduğundan yörünge frekansı, dolayısıyla kütleçekim dalgasının frekansı artar.

Verilen genlik bağımlılığı

$$\text{genlik} \propto R^2 \omega^2 \propto R^2 R^{-3} = R^{-1}.$$

sonucunu verir. Böylece R azaldıkça genlik de artar. İstenen dalga biçiminin zarfı genişler ve salınımları giderek sıklaşır:

$$\boxed{\text{Profil (b)}}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Su ve Cisimler

Bu soruda, su ile cisimler arasındaki etkileşimin yol açtığı, yüzey gerilimiyle ilişkili olayları ele alıyoruz. Bölüm A hareketi ele alırken, Bölüm B ve C statik durumlarla ilgilidir.

Gerekirse, $y(x)$ fonksiyonu $y''(x) = ay(x)$ diferansiyel denklemini sağlıyorsa (a pozitif bir sabittir), genel çözümünün $y(x) = Ae^{\sqrt{ax}} + Be^{-\sqrt{ax}}$ olduğu bilgisini kullanabilirsiniz; burada A ve B keyfî sabitlerdir.

Bölüm A. Su damlalarının birleşmesi (2.0 puan)

Şekil 1'de gösterildiği gibi, süperhidrofobik bir malzemenin yüzeyinde duran iki küresel su damlasını ele alıyoruz; başka bir deyişle, malzeme ile su arasında çok güçlü bir itme kuvveti vardır.

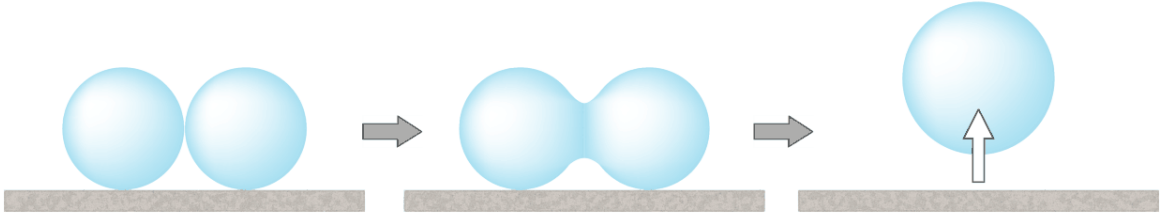
Başlangıçta birbirine komşu iki özdeş küresel su damlası yüzeye yerleştirilir; ardından bu iki damla birbirine temas ettikten sonra birleşerek daha büyük bir küresel su damlası oluşturur ve bu damla aniden yukarı sıçrar.

A.1 2.0 puan

Birleşmeden önce her iki su damlasının yarıçapı a , $100 \mu\text{m}$ 'dir. Suyun yoğunluğu ρ , $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 'tür. Yüzey gerilimi γ , $7.27 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$ 'dir.

Birleşmeden önceki ve sonraki yüzey enerjileri arasındaki farkın, ΔE , k oranındaki bir kısmı sıçrayan su damlasının kinetik enerjisine dönüşür. Buna göre, aşağıdaki varsayımlar altında birleşen su damlasının ilk yukarı sıçrama hızını, v , iki anlamlı basamakla belirleyiniz:

- $k = 0.06$
- Birleşmeden önce ve sonra suyun toplam hacmi korunur.



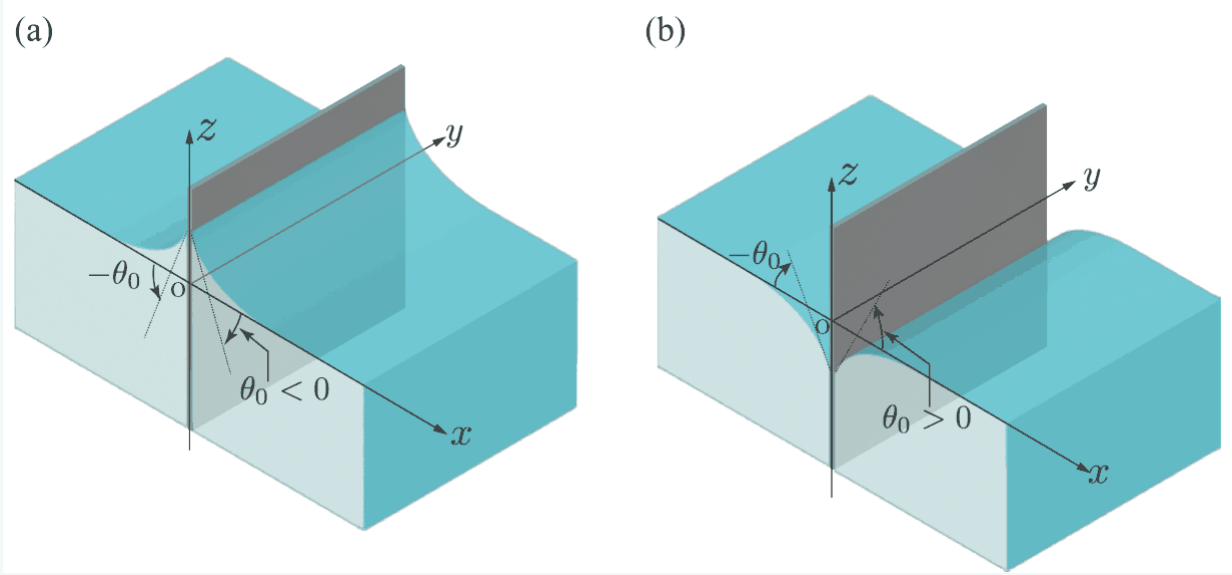
Şekil 1: İki su damlasının birleşmesi ve birleşen su damlasının sıçraması.

Bölüm B. Düşey yerleştirilmiş bir levha (4.5 puan)

Düz bir levha suya düşey olarak daldırılmıştır. Şekil 2(a) ve 2(b), sırasıyla hidrofilik (çekici) ve hidrofobik levha malzemeleri için su yüzeyinin biçimlerini göstermektedir. Levhanın kalınlığını ihmal ediyoruz.

Levhanın yüzeyi yz düzleminde ve levhadan çok uzaktaki yatay su yüzeyi, $z = 0$ olan xy düzleminde. Yüzeyin biçimi y koordinatına bağlı değildir. $\theta(x)$, xz düzlemindeki su yüzeyi üzerinde bulunan bir (x, z) noktasında su yüzeyi ile yatay düzlem arasındaki açı olsun. Burada $\theta(x)$, pozitif x eksenine göre ölçülür ve saat yönünün tersine dönme pozitif kabul edilir. Levha ile su yüzeyinin temas noktasında ($x = 0$), $\theta(x)$ açısı θ_0 olsun. Aşağıda, θ_0 levha malzemesinin özellikleri tarafından belirlenen sabit bir değerdir.

Suyun yoğunluğu ρ sabittir ve suyun yüzey gerilimi γ her yerde aynıdır. Yerçekimi ivmesi sabiti g ile verilmiştir. Atmosfer basıncı P_0 'ın her zaman her yerde aynı olduğu varsayılır. Su yüzeyinin biçimini aşağıdaki adımlarla belirleyelim. Yüzey geriliminin biriminin J/m^2 olduğu gibi N/m de olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 2: Suya düşey olarak daldırılmış levhalar. (a) hidrofilik levha durumu; (b) hidrofobik levha durumu.

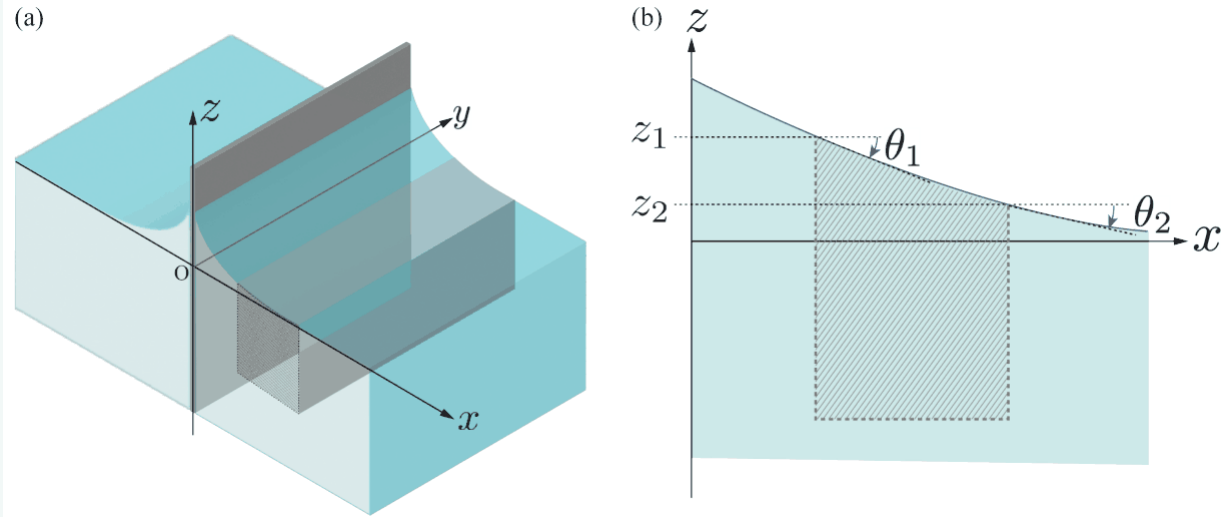
B.1 0.6 puan

Şekil 2(a)'da gösterildiği gibi hidrofilik bir levha durumunu ele alıyoruz. Su basıncı P 'nin, $z > 0$ için $P < P_0$ ve $z = 0$ için $P = P_0$ koşullarını sağladığına dikkat ediniz. Buna göre, z yüksekliğindeki P 'yi ρ , g , z ve P_0 cinsinden ifade ediniz.

B.2 0.8 puan

Şekil 3(a)'da gölgeli olarak gösterilen, kesilip ayrılmış bir su bloğunu ele alıyoruz. Bu bloğun xz düzlemindeki kesiti, Şekil 3(b)'de taralı alanla gösterilmiştir. z_1 ve z_2 , sırasıyla su bloğu ile hava arasındaki sınırın (su yüzeyinin) sol ve sağ kenarlarının koordinatları olsun.

Basınç nedeniyle su bloğuna etki eden net kuvvetin, y eksenini boyunca birim uzunluk başına yatay bileşenini (x bileşenini), f_x , ρ , g , z_1 ve z_2 cinsinden bulunuz. P_0 'ın su bloğu üzerinde net bir yatay kuvvet oluşturmadığına dikkat ediniz.



Şekil 3: Su yüzeyinden kesilip ayrılan su bloğunun biçimi. (a) Kuş bakışı görünüm ve (b) kesit görünümü.

B.3 0.8 puan

Su bloğuna etki eden yüzey gerilimi, B.2'de ele alınan f_x kuvvetiyle dengelenir. Sol ve sağ kenarlarda su yüzeyi ile yatay düzlem arasındaki açılar sırasıyla θ_1 ve θ_2 olarak tanımlıyoruz. f_x 'i γ , θ_1 ve θ_2 cinsinden ifade ediniz.

B.4 0.8 puan

Su yüzeyi üzerindeki herhangi bir (x, z) noktasında aşağıdaki denklem geçerlidir:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{sabit.} \quad (1)$$

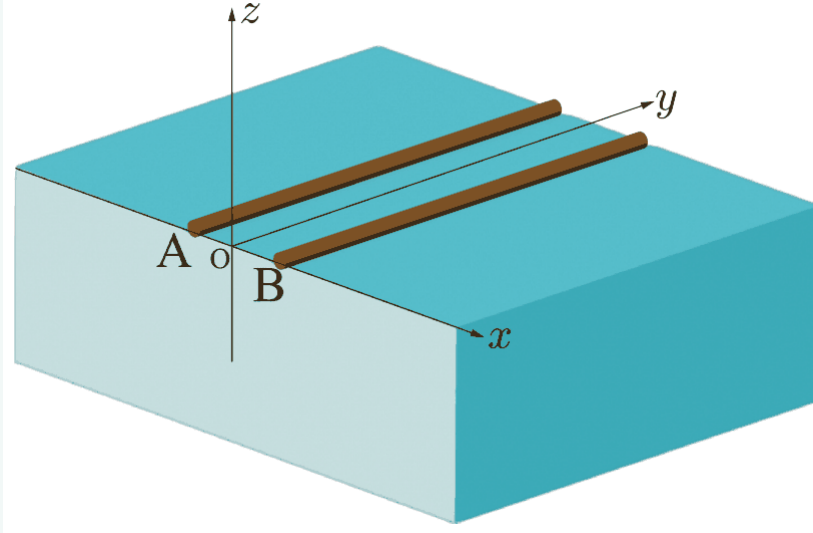
a üssünü belirleyiniz ve ℓ sabitini γ ve ρ cinsinden ifade ediniz. Bu denklemin levha malzemesinin hidrofilik ya da hidrofobik olmasından bağımsız olarak geçerli olduğuna dikkat ediniz.

B.5 1.5 puan

B.4'teki Denklem (1)'de, su yüzeyinin yavaş değiştiğini, yani $|z'(x)| \ll 1$ olduğunu varsayıyoruz; böylece $\cos \theta(x)$ 'i $z'(x)$ 'e göre ikinci mertebeye kadar açabiliriz. Ardından, elde edilen denklemin x 'e göre türevini alarak $z(x)$ 'in sağladığı diferansiyel denklemi elde ederiz. Bu diferansiyel denklemi çözünüz ve $x \geq 0$ için $z(x)$ 'i $\tan \theta_0$ ve ℓ cinsinden belirleyiniz. Şekil 2 ve 3'te daha iyi bir görünüm için dikey boyutların abartıldığına ve bu şekillerin $|z'(x)| \ll 1$ koşulunu sağlamadığına dikkat ediniz.

Bölüm C. İki çubuk arasındaki etkileşim (3.5 puan)

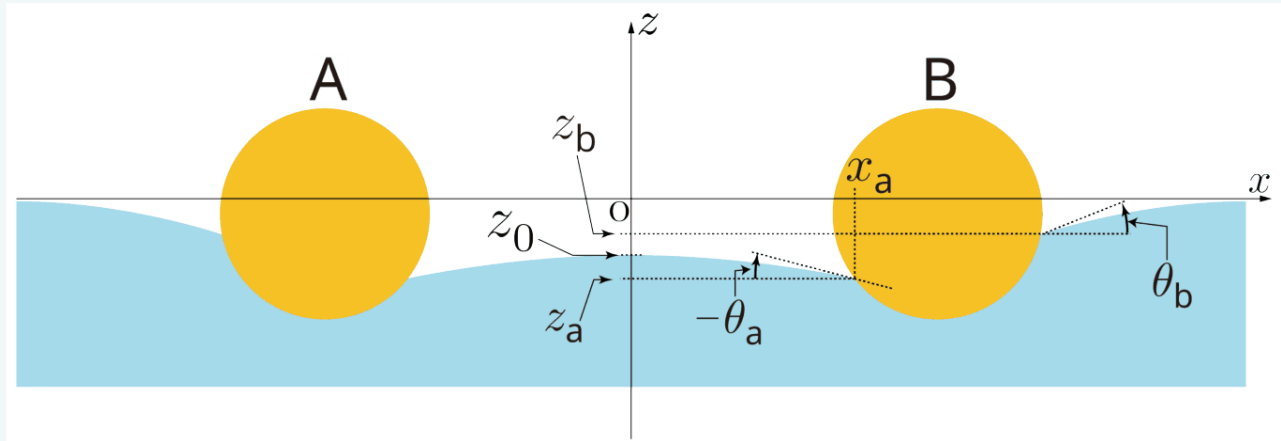
Aynı malzemeden yapılmış, su yüzeyinde birbirine paralel olarak yüzen özdeş A ve B çubukları, y eksenine eşit uzaklıklarda yerleştirilmiştir (Şekil 4).



Şekil 4: Su yüzeyinde yüzen iki çubuk A ve B.

C.1 1.0 puan

B çubuğu ile su yüzeyinin temas noktalarında, Şekil 5'te gösterildiği gibi z koordinatlarını z_a ve z_b , açıları ise θ_a ve θ_b olarak tanımlıyoruz. B çubuğuna etki eden kuvvetin y eksenine boyunca birim uzunluk başına yatay bileşenini, F_x , θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g ve γ cinsinden belirleyiniz.



Şekil 5: Su yüzeyinde yüzen iki çubuğun düşey kesit görünümü.

C.2 1.5 puan

xz düzleminde iki çubuğun orta noktasındaki su yüzeyinin z koordinatını z_0 olarak tanımlıyoruz. C.1'de elde edilen F_x kuvvetini θ_a , θ_b , z_a ve z_b kullanmadan ifade ediniz.

C.3 1.0 puan

x_a , su yüzeyi ile B çubuğunun sol tarafı arasındaki temas noktasının x koordinatı olsun. B.5'te elde edilen diferansiyel denklemi kullanarak, bu iki A ve B çubuğunun orta noktasındaki su seviyesi koordinatını, z_0 , x_a ve z_a cinsinden ifade ediniz. B.4'te tanımlanan ℓ sabitini kullanabilirsiniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Pozitif yatay kuvvetler $+x$ yönündedir. Hem f_x hem de F_x , y boyunca birim uzunluk başına kuvvetlerdir ve birimleri N/m 'dir.

- A.1

$$v = \sqrt{\frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3})} = 0.23 \text{ m/s} \quad \text{yukarı doğru.}$$

- B.1

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

- B.2

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

- B.3

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

- B.4

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Levhanın menisküsü için Denklemler (1)'in sağ tarafındaki sabit 1'dir.

- B.5, küçük eğim yaklaşımında:

$$z''(x) = \frac{z(x)}{\ell^2}, \quad z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

- C.1

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

- C.2

$$F_x = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

$z_0 \neq 0$ olduğunda B'ye etki eden kuvvet A'ya doğrudur.

- C.3, küçük eğim yaklaşımında:

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Çözüm

A.1

Birleşen damlanın yarıçapı R olsun. Hacmin korunumundan

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad R = 2^{1/3} a.$$

Buna göre birleşen damlanın kütlesi

$$m = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \rho a^3.$$

Yüzey enerjisi, yüzey gerilimi ile yüzey alanının çarpımına eşittir. Dolayısıyla yüzey enerjisindeki azalma

$$\begin{aligned} \Delta E &= \gamma (2 \cdot 4\pi a^2 - 4\pi R^2) \\ &= 4\pi \gamma a^2 (2 - 2^{2/3}). \end{aligned}$$

Bu enerjinin k oranındaki bir kısmının öteleme kinetik enerjisine dönüştüğü koşulunu kullanırsak,

$$\frac{1}{2} m v^2 = k \Delta E.$$

Sonuç olarak,

$$v^2 = \frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3}).$$

$a = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}$ için,

$$m = 8.3776 \times 10^{-9} \text{ kg}, \quad \Delta E = 3.7694 \times 10^{-9} \text{ J},$$

ve

$$v = 0.23236 \dots \text{ m/s}.$$

İki anlamlı basamakla ilk hız

$$v = 0.23 \text{ m/s yukarı doğru.}$$

B.1

Hidrostatik dengede, yukarı yönlü basınç kuvveti yerçekimini dengeler ve

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

ρ sabit ve $P(0) = P_0$ olduğundan, integral alındığında

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

Özellikle, belirtildiği gibi $z = 0$ 'ın üzerindeki suyun basıncı atmosfer basıncından düşüktür.

B.2

Kapalı sınırın tamamına uygulanan düzgün bir P_0 basıncı, sıfır bileşke kuvvet oluşturur. Bu nedenle hesabı manometrik basıncı kullanarak yapabiliriz:

$$p(z) = P(z) - P_0 = -\rho g z.$$

Havaya bakan yüzeydeki manometrik basınç sıfırdır. z_* , bloğun tabanının ortak yüksekliği olsun. Sol düşey yüzeydeki basınç $+x$ yönünde, sağ yüzeydeki basınç ise $-x$ yönünde iter. Tabanın yatay kuvvete katkısı yoktur.

y boyunca birim uzunluk başına,

$$\begin{aligned}
f_x &= \int_{z_*}^{z_1} p(z) dz - \int_{z_*}^{z_2} p(z) dz \\
&= -\rho g \int_{z_2}^{z_1} z dz \\
&= \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).
\end{aligned}$$

Böylece

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

Şekildeki hidrofilik menisküs için $z_1 > z_2 > 0$ olduğundan, bu basınç kuvveti $-x$ yönündedir.

B.3

Yüzey gerilimi, her kenarda bloğu teğetsel olarak dışarı doğru çeker. Birim uzunluk başına yatay bileşenleri

$$-\gamma \cos \theta_1 \quad \text{sol kenarda,} \quad +\gamma \cos \theta_2 \quad \text{sağ kenarda.}$$

Yatay denge koşulu

$$f_x - \gamma \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta_2 = 0.$$

Dolayısıyla,

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

B.4

B.2 ve B.3'teki ifadeleri eşitlersek,

$$\frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2) = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z_1^2 + \cos \theta_1 = \frac{\rho g}{2\gamma} z_2^2 + \cos \theta_2.$$

İki kenar yüzey boyunca keyfî olarak seçilebildiğinden,

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z^2 + \cos \theta(x) = C.$$

Denklem (1) ile karşılaştırıldığında

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

ℓ uzunluğu, kılcak uzunluğudur. Türetim, z 'nin her iki işaretine de izin verdiğinden hem yükselmiş hem de alçalmış menisküslere uygulanır.

Levhadan uzakta $z \rightarrow 0$ ve $\theta \rightarrow 0$ olur. Böylece $C = 1$ olur ve levha için tam yüzey bağıntısı

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + \cos \theta(x) = 1.$$

B.5

Yüzeye teğet doğru şu bağıntıyı sağlar:

$$\tan \theta(x) = z'(x).$$

Bir fonksiyonun grafiği olarak gösterilen yüzey için,

$$\cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}.$$

Verilen $|z'(x)| \ll 1$ yaklaşımı altında, ikinci mertebeye kadar açılımı

$$\cos \theta(x) = 1 - \frac{1}{2}[z'(x)]^2 + O([z'(x)]^4).$$

Denklem (1)'de yerine konulduğunda, bu mertebeye kadar,

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + 1 - \frac{1}{2}(z')^2 = C.$$

Türev alındığında,

$$\frac{zz'}{\ell^2} - z'z'' = 0.$$

Düz olmayan bir profil için buradan

$$z'' = \frac{z}{\ell^2},$$

elde edilir; denklem, süreklilik sayesinde yalıtık durağan noktalarda da geçerlidir. Düz profil $z = 0$ da bu denklemi sağlar.

Genel çözüm

$$z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}.$$

$x \rightarrow +\infty$ iken $z(x) \rightarrow 0$ sınır koşulu $A = 0$ olmasını gerektirir. Levhada,

$$z'(0) = \tan \theta_0 = -\frac{B}{\ell},$$

olduğundan $B = -\ell \tan \theta_0$ olur. Dolayısıyla,

$$z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

Hidrofilik bir levha için $\theta_0 < 0$ olduğundan $z > 0$ olur. Hidrofobik bir levha için $\theta_0 > 0$ olduğundan $z < 0$ olur. Her iki durumda da yüzey, ℓ uzunluk ölçeğinde üstel olarak $z = 0$ 'a yaklaşır. Tutarlılık, $|\tan \theta_0| \ll 1$ olmasını gerektirir.

C.1

B çubuğuna etki eden yatay kuvvete iki katkı vardır: temas çizgilerindeki yüzey gerilimi ve çubuk üzerindeki basınç.

Yüzey gerilimi çubuğu bitişindeki serbest yüzeye doğru çeker. Bu nedenle net yatay bileşeni

$$F_{\gamma,x} = -\gamma \cos \theta_a + \gamma \cos \theta_b.$$

Basınç kuvveti için, çubuğun kapalı yüzeyi üzerindeki bileşkesi sıfır olan düzgün atmosfer basıncını çıkarırız. Islak yüzeyde kalan basınç $p(z) = -\rho g z$ 'dir.

Eğri bir yüzey üzerindeki yatay basınç kuvveti, basıncın bu yüzeyin düşey izdüşümü üzerinde integrali alınarak elde edilir. z_* , çubuğun en alt noktasının yüksekliği olsun. Islak sol taraf $+x$ yönünde, ıslak sağ taraf ise $-x$ yönünde katkıda bulunur:

$$F_{p,x} = \int_{z_*}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_*}^{z_b} (-\rho g z) dz$$

$$= \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

Yerçekiminin yatay bileşeni yoktur. İki katkıyı toplarsak,

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2

B.4'teki yüzey bağıntısı, çubuklar arasındaki yüzeye ve dış yüzeye ayrı ayrı uygulanır. Bunların integrasyon sabitlerinin eşit olması gerekmez.

B'nin dış tarafında, yüzey uzakta $z = 0$ 'da yatay hâle gelir. Dolayısıyla

$$\frac{z_b^2}{2\ell^2} + \cos \theta_b = 1.$$

Özdeş çubuklar arasında, $x = 0$ 'a göre yansıma simetrisi nedeniyle yüzey orta noktada yataydır. Burada $z = z_0$ olduğundan, iç bölgedeki bağıntı

$$\frac{z_a^2}{2\ell^2} + \cos \theta_a = 1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2}.$$

$\rho g = \gamma/\ell^2$ olduğundan, C.1'deki kuvvet şu şekilde yazılabilir:

$$F_x = \gamma \left[\left(\cos \theta_b + \frac{z_b^2}{2\ell^2} \right) - \left(\cos \theta_a + \frac{z_a^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Yerine koyarsak

$$F_x = \gamma \left[1 - \left(1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Böylece

$$F_x = -\frac{\gamma z_0^2}{2\ell^2} = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

B çubuğu pozitif x tarafında yer aldığından, eksi işareti A çubuğuna doğru bir çekim olduğunu gösterir. $z_0 = 0$ olduğunda kuvvet sıfır olur. Bu sonuç küçük eğim yaklaşımını gerektirmez.

C.3

Şimdi B.5'teki küçük eğim denklemini çubuklar arasındaki yüzeye uygulayalım:

$$z'' = \frac{z}{\ell^2}.$$

Çözümünü hiperbolik fonksiyonlarla yazarsak,

$$z(x) = C_1 \cosh(x/\ell) + C_2 \sinh(x/\ell).$$

Simetri $z'(0) = 0$ koşulunu verir; bu da $C_2 = 0$ olmasını gerektirir. $z(0) = z_0$ olduğundan $C_1 = z_0$ olur ve dolayısıyla

$$z(x) = z_0 \cosh(x/\ell).$$

B çubuğuyla iç taraftaki temas noktasında $x = x_a$ ve $z = z_a$ olur. Sonuç olarak,

$$z_a = z_0 \cosh(x_a/\ell),$$

olduğundan

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Bu yükseklik–uzaklık bağıntısı, küçük eğim yaklaşımı çerçevesinde geçerlidir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.