

IPhO 2023

Теоретические задачи и решения · Токио, Япония · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iphO/2023/

Задача 1: Определение характеристик почвенных коллоидов

Коллоидная наука позволяет определять характеристики почвенных частиц, поскольку многие из них можно рассматривать как коллоидные частицы микрометрового размера. Например, броуновское движение (хаотическое движение коллоидных частиц) можно использовать для измерения размеров частиц.

Часть А. Движение коллоидных частиц (1.6 балла)

Рассмотрим одномерное броуновское движение коллоидной частицы массой M .

Уравнение движения для её скорости $v(t)$ имеет вид:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

где γ — коэффициент трения, $F(t)$ — сила, обусловленная случайными столкновениями с молекулами воды, а $F_{\text{ext}}(t)$ — внешняя сила. В части А предполагается, что $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

А.1 — 0.8 балла

Пусть молекула воды сталкивается с частицей в момент $t = t_0$, передавая ей импульс I_0 , а после этого $F(t) = 0$. Если до столкновения $v(t) = 0$, то при $t > t_0$ имеем $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$. Определите v_0 и τ , используя I_0 и необходимые параметры из уравнения (1).

В дальнейшем в ответах можно использовать τ .

А.2 — 0.8 балла

В действительности молекулы воды сталкиваются с частицей одна за другой.

Предположите, что при i -м столкновении в момент t_i частице передаётся импульс I_i , и определите $v(t)$ при условии, что $t > 0$ и $v(0) = 0$. Также запишите неравенство, задающее диапазон значений t_i , которые необходимо учитывать при данном t . В листе ответов не требуется указывать этот диапазон в выражении для $v(t)$.

Часть В. Эффективное уравнение движения (1.8 балла)

Полученные результаты показывают, что скорости частицы $v(t)$ и $v(t')$ можно считать некоррелированными случайными величинами, если $|t - t'| \gg \tau$. На этой основе введём теоретическую модель для приближённого описания одномерного броуновского движения, в которой скорость случайным образом меняется через каждый интервал времени δ ($\gg \tau$), то есть

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

где $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а v_n — случайная величина. Она удовлетворяет условиям

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

где параметр C зависит от δ . Здесь $\langle X \rangle$ обозначает математическое ожидание X . Иными словами, если бесконечное число раз выбирать случайные значения X , их среднее будет равно $\langle X \rangle$.

Теперь рассмотрим перемещение частицы $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ при $t = N\delta$, где N — целое число.

В.1 — 1.0 балла

Определите $\langle \Delta x(t) \rangle$ и $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$, используя C , δ и t .

В.2 — 0.8 балла

Величина $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ называется средним квадратом перемещения (MSD). Это характерная наблюдаемая величина броуновского движения, которому соответствует предельный случай $\delta \rightarrow 0$. Отсюда можно показать, что $C \propto \delta^\alpha$ и $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$. Определите значения α и β .

Часть С. Электрофорез (2.7 балла)

Здесь мы рассмотрим электрофорез, то есть перенос заряженных частиц электрическим полем. Суспензию коллоидных частиц массой M и зарядом Q (> 0) помещают в узкий канал с площадью поперечного сечения A (рис. 1(a)). Пренебрежём взаимодействием между частицами, влиянием стенок, жидкости, содержащихся в ней ионов и силы тяжести.

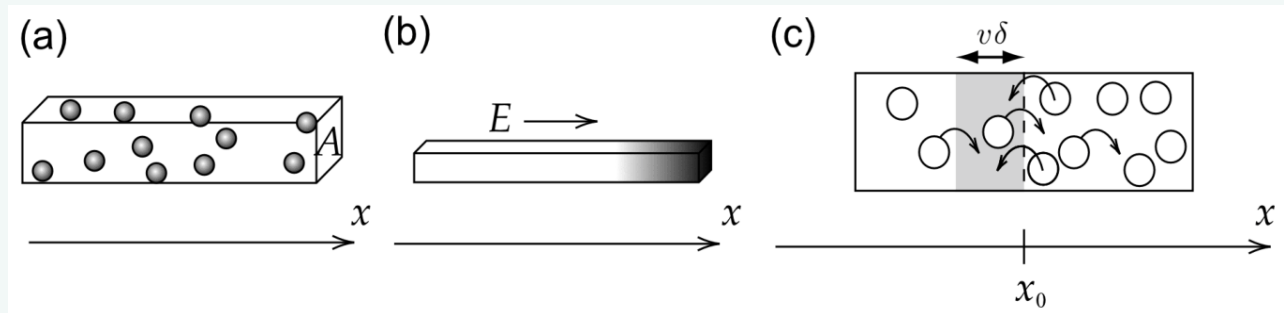


Рис. 1: Схема установки для части С.

При приложении однородного электрического поля E , направленного вдоль оси x , частицы перемещаются, и их концентрация $n(x)$ (число частиц в единице объёма) становится неоднородной (рис. 1(b)). После выключения поля E эта неоднородность постепенно исчезает. Это происходит вследствие броуновского движения частиц. Если $n(x)$ неоднородна, число частиц, движущихся вправо и влево, может различаться (рис. 1(c)). Это создаёт поток частиц $J_D(x)$ — среднее число частиц, проходящих в точке x вдоль оси x через единицу площади поперечного сечения за единицу времени. Известно, что этот поток удовлетворяет соотношению

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

где D называется коэффициентом диффузии.

Теперь для простоты предположим, что половина частиц имеет скорость $+v$, а другая половина — скорость $-v$. Обозначим через $N_+(x_0)$ число частиц со скоростью $+v$, пересекающих сечение x_0 слева направо за единицу времени в расчёте на единицу площади поперечного сечения. Чтобы частицы со скоростью $+v$ пересекли x_0 за интервал времени δ , они должны находиться в заштрихованной области на рис. 1(с). Поскольку δ мало, в этой области можно записать $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$.

С.1 — 0.5 балла

Выразите $N_+(x_0)$ через необходимые величины из числа v , δ , $n(x_0)$ и $\frac{dn}{dx}(x_0)$.

Определим $N_-(x_0)$ аналогично $N_+(x_0)$, но для скорости $-v$. Тогда $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. Согласно уравнению (3), $\langle v^2 \rangle = C$.

С.2 — 0.7 балла

Определите $J_D(x_0)$, используя необходимые величины из числа C , δ , $n(x_0)$ и $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Используя полученный результат и уравнение (4), выразите D через C и δ , а $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ — через D и t .

Теперь рассмотрим влияние осмотического давления Π . Оно определяется соотношением $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$, где N_A — постоянная Авогадро, R — универсальная газовая постоянная, T — температура, а $k = \frac{R}{N_A}$ — постоянная Больцмана. Рассмотрим неоднородную концентрацию, возникающую под действием электрического поля E (рис. 1(b)). Поскольку $n(x)$ зависит от x , от x зависит и $\Pi(x)$. Тогда силы, обусловленные $\Pi(x)$ и $\Pi(x + \Delta x)$, должны уравниваться суммарной силой, действующей на частицы со стороны поля E (рис. 2). Здесь рассматривается малое Δx , так что $n(x)$ можно считать постоянной на этом участке, при этом $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.

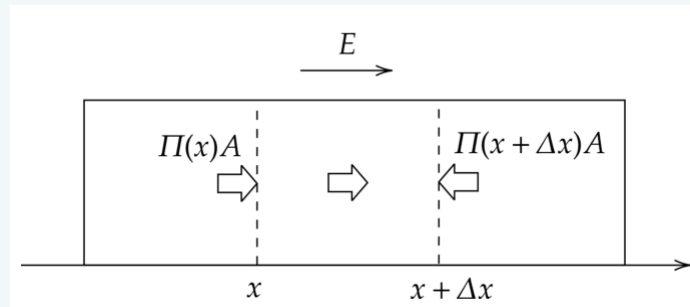


Рис. 2: Баланс сил.

С.3 — 0.5 балла

Выразите $\frac{dn}{dx}(x)$ через $n(x)$, T , Q , E и k .

Теперь рассмотрим баланс потоков. Помимо потока $J_D(x)$, обусловленного броуновским движением, существует также поток, обусловленный электрическим полем, $J_Q(x)$. Он задаётся выражением

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

где u — установившаяся скорость частиц, движущихся под действием поля.

C.4 — 0.5 балла

Для определения u используем уравнение (1) с $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Поскольку $v(t)$ флуктуирует, рассмотрим $\langle v(t) \rangle$. Полагая $\langle v(0) \rangle = 0$ и используя $\langle F(t) \rangle = 0$, найдите $\langle v(t) \rangle$ и получите $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$.

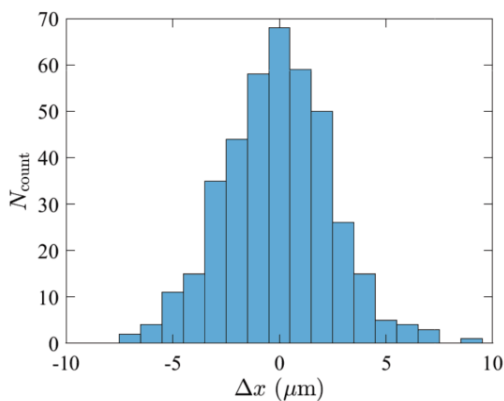
C.5 — 0.5 балла

Баланс потоков имеет вид $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Выразите коэффициент диффузии D через k , γ и T .

Часть D. Средний квадрат перемещения (2.4 балла)

Предположим, что мы наблюдали броуновское движение отдельной сферической коллоидной частицы радиусом $a = 5.0 \mu\text{m}$ в воде. На рисунке 3 показана гистограмма перемещений Δx , измеренных вдоль оси x через каждый интервал $\Delta t = 60 \text{ s}$.

Коэффициент трения определяется выражением $\gamma = 6\pi a\eta$, где вязкость воды $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, а температура составляла $T = 25^\circ \text{C}$.



$\Delta x (\mu\text{m})$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15
$\Delta x (\mu\text{m})$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26
$\Delta x (\mu\text{m})$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

Рис. 3: Гистограмма перемещений.

$\Delta x (\mu\text{m})$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15
$\Delta x (\mu\text{m})$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26
$\Delta x (\mu\text{m})$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

D.1 — 1.0 балла

Оцените значение N_A по данным на рис. 3 с точностью до двух значащих цифр, не используя тот факт, что это постоянная Авогадро. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$. Не используйте значение постоянной Больцмана k , приведённое в общих инструкциях. Для постоянной Авогадро у вас может получиться значение, отличающееся от указанного в общих инструкциях.

Теперь расширим модель из части В для описания движения частицы с зарядом Q в электрическом поле E . Скорость частицы $v(t)$, рассматриваемую в уравнении (2), следует заменить на $v(t) = u + v_n$ ($t_{n-1} < t \leq t_n$), где v_n удовлетворяет уравнению (3), а u — установившаяся скорость, рассматриваемая в уравнении (5).

D.2 — 0.8 балла

Выразите средний квадрат перемещения $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ через u , D и t . Получите приближённые степенные зависимости для малых t и больших t , а также характерное время t_* , при котором происходит переход между ними. Нарисуйте схематический график среднего квадрата перемещения в двойном логарифмическом масштабе, указав примерное положение t_* .

Далее рассмотрим плавающие микроорганизмы (рис. 4(a)), для простоты — в одном измерении (рис. 4(b)). Это сферические частицы радиусом a . Они плывут со скоростью либо $+u_0$, либо $-u_0$, причём знак выбирается случайным образом через каждый интервал времени δ_0 независимо от предыдущих выборов. Наблюдаемое движение представляет собой сочетание перемещений за счёт плавания и перемещений за счёт броуновского движения сферической частицы.

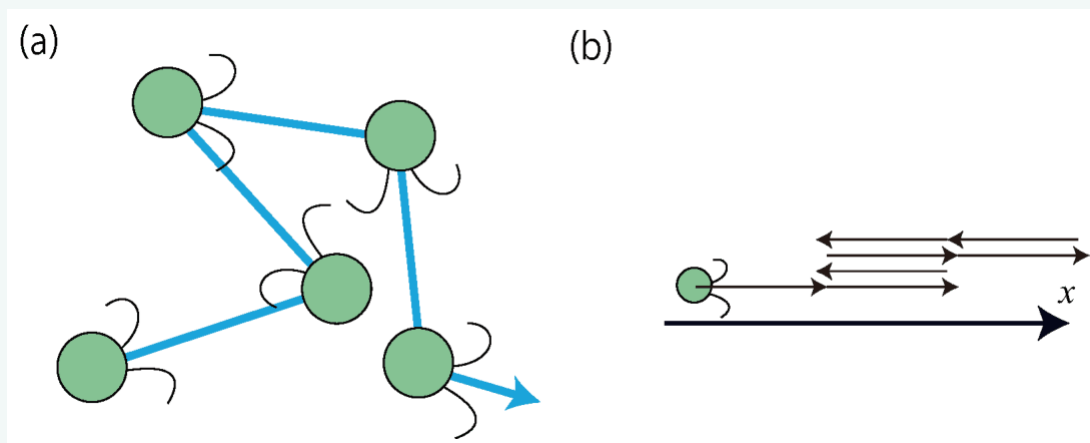


Рис. 4: (a) Движение микроорганизмов. (b) Его одномерный вариант.

D.3 — 0.6 балла

На рисунке 5 показан средний квадрат перемещения $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ этих микроорганизмов; для малых, больших и промежуточных t наблюдаются различные степенные зависимости, отмеченные штриховыми линиями. Получите степенную зависимость для каждого диапазона времени и выразите её через необходимые величины из числа D , u_0 , δ_0 и t .

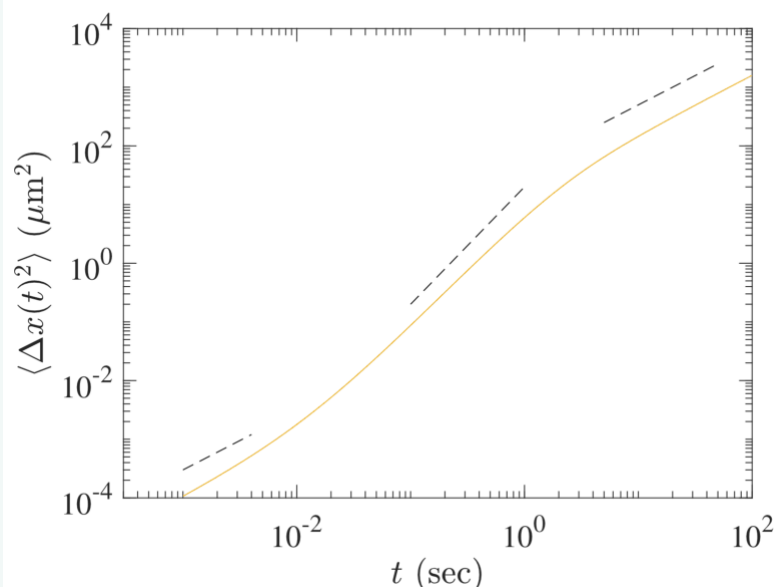


Рис. 5: Средний квадрат перемещения микроорганизмов.

Часть Е. Очистка воды (1.5 балла)

Здесь мы рассмотрим очистку воды, содержащей коллоидные почвенные частицы, путём добавления электролитов для их коагуляции. Частицы взаимодействуют посредством сил Ван-дер-Ваальса и электростатических сил; последние учитывают влияние как поверхностных зарядов, так и окружающего слоя противоположно заряженных ионов (такие ионы и их слой называются соответственно противоионами и двойным электрическим слоем; см. рис. 6(a)). В результате потенциальная энергия взаимодействия при расстоянии между частицами d (рис. 6(b)) задаётся выражением

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

где A и B — положительные постоянные, ϵ — диэлектрическая проницаемость воды, а λ — толщина двойного электрического слоя. Если заряды ионов равны $\pm q$, то

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \quad (7)$$

где c — молярная концентрация ионов.

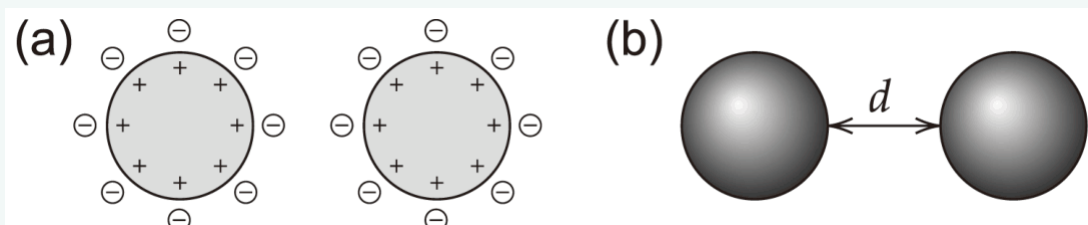


Рис. 6: (a) Поверхностные заряды коллоидных частиц и противоионы. (b) Определение расстояния d .

Е.1 — 1.5 балла

Добавление хлорида натрия (NaCl) в суспензию вызывает коагуляцию коллоидных частиц. Определите наименьшую концентрацию c NaCl, необходимую для коагуляции. Достаточно рассмотреть две частицы без тепловых флуктуаций, то есть положить $F(t) = 0$ в уравнении (1), и предположить, что установившаяся скорость для данной потенциальной силы достигается мгновенно.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A.1

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

- A.2

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i e^{-(t-t_i)/\tau}, \quad 0 < t_i < t.$$

Непосредственно после столкновения, происходящего в момент наблюдения, следует включить $t_i = t$.

- B.1

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.$$

- B.2

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

- C.1

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2 \delta}{4} \frac{dn}{dx}(x_0).$$

- C.2

$$J_D(x_0) = -\frac{C\delta}{2} \frac{dn}{dx}(x_0), \quad D = \frac{C\delta}{2}, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

- C.3

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

- C.4

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}), \quad u = \frac{QE}{\gamma}.$$

- C.5

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

- D.1

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

- D.2

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2, \quad t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

При $t \ll t_*$ средний квадрат перемещения приблизительно равен $2Dt$, а наклон графика в двойном логарифмическом масштабе равен 1. При $t \gg t_*$ он приблизительно равен $u^2 t^2$, а наклон равен 2.

- D.3 Введём $t_s = 2D/u_0^2$. Для трёх показанных отчётливых режимов $t_s \ll \delta_0$, и

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq \begin{cases} 2Dt, & t \ll t_s, \\ u_0^2 t^2, & t_s \ll t \ll \delta_0, \\ (2D + u_0^2 \delta_0)t \simeq u_0^2 \delta_0 t, & t \gg \delta_0. \end{cases}$$

Соответствующие наклоны в двойном логарифмическом масштабе равны 1, 2, 1.

- E.1 Критическая концентрация равна

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6},$$

где для NaCl q — модуль элементарного заряда. Коагуляция частиц, первоначально находящихся на большом расстоянии друг от друга, происходит при $c > c_{\text{crit}}$. В точности при $c = c_{\text{crit}}$ заданная безынерционная динамика без шума соответствует предельному случаю: расстояние между частицами асимптотически стремится к конечному значению.

Решение

A.1

Интегрирование уравнения движения за очень короткое время столкновения даёт соотношение между импульсом силы и изменением импульса частицы. Импульс силы трения стремится к нулю при стремлении длительности столкновения к нулю, поэтому

$$M[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = I_0.$$

Поскольку первоначально частица покоилась,

$$v_0 = v(t_0^+) = \frac{I_0}{M}.$$

После столкновения обе силы F и F_{ext} обращаются в нуль. Следовательно,

$$M \frac{dv}{dt} = -\gamma v,$$

решение этого уравнения имеет вид

$$v(t) = \frac{I_0}{M} \exp \left[-\frac{\gamma}{M} (t - t_0) \right].$$

Сравнение с заданным видом зависимости даёт

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2

Уравнение движения линейно. Каждое столкновение вызывает мгновенное приращение скорости I_i/M , которое затем затухает со временем релаксации τ . Поэтому по принципу суперпозиции

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i \exp \left[-\frac{t - t_i}{\tau} \right].$$

Вклад дают только столкновения, произошедшие после начального момента и до момента наблюдения:

$$0 < t_i < t.$$

В момент столкновения скорость скачком изменяется на I_i/M . Если $v(t)$ обозначает скорость непосредственно после этого столкновения, верхняя граница включается.

B.1

За интервал n перемещение равно $v_n \delta$. Поэтому при $t = N\delta$

$$\Delta x(t) = \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Его математическое ожидание равно

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0.$$

Для второго момента получаем

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \delta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle v_n v_m \rangle \\ &= \delta^2 N C \\ &= C \delta t. \end{aligned}$$

Перекрёстные слагаемые обращаются в нуль, поскольку скорости на разных интервалах не коррелируют. Таким образом,

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t.$$

B.2

При фиксированном положительном времени наблюдения средний квадрат перемещения при броуновском движении в диффузионном пределе должен быть конечным и ненулевым. Поскольку

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t,$$

произведение $C\delta$ должно стремиться к конечной ненулевой постоянной при $\delta \rightarrow 0$.

Следовательно,

$$C \propto \delta^{-1}.$$

Оставшаяся зависимость от времени линейна:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t.$$

Таким образом,

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1.}$$

Это непрерывный предел эффективной модели, описывающей движение на временах, значительно превышающих микроскопическое время релаксации τ .

С.1

Частицы, движущиеся вправо, пересекут x_0 за следующий интервал δ , если вначале они находятся между $x_0 - v\delta$ и x_0 . Половина частиц в этой области движется вправо. Разделив их число в расчёте на единицу площади на δ , получаем

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0 - v\delta}^{x_0} n(x) dx.$$

Используя заданное линейное приближение,

$$n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)n'(x_0),$$

получаем

$$N_+(x_0) \simeq \frac{1}{2\delta} \left[v\delta n(x_0) - \frac{(v\delta)^2}{2} n'(x_0) \right].$$

Следовательно,

$$\boxed{N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0).}$$

Это приближение требует, чтобы концентрация медленно менялась на расстоянии $v\delta$.

С.2

Аналогично, частицы, движущиеся влево, первоначально находятся в области $x_0 < x < x_0 + v\delta$, что даёт

$$\begin{aligned} N_-(x_0) &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0}^{x_0 + v\delta} n(x) dx \\ &\simeq \frac{v}{2} n(x_0) + \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0). \end{aligned}$$

Вычитая и усредняя, получаем

$$\begin{aligned} J_D(x_0) &= \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle \\ &= -\frac{\delta}{2} \langle v^2 \rangle n'(x_0) \\ &= -\frac{C\delta}{2} n'(x_0). \end{aligned}$$

Сравнение с законом Фика, $J_D = -Dn'$, даёт

$$D = \frac{C\delta}{2}.$$

Подставляя в результат В.1, получаем

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

С.3

Рассмотрим слой с площадью поперечного сечения A и толщиной Δx . Действующая на него электрическая сила в положительном направлении оси x равна

$$F_E = n(x)A\Delta x QE.$$

Результирующая сила осмотического давления равна

$$F_\Pi = A\Pi(x) - A\Pi(x + \Delta x) \simeq -A\Delta x \frac{d\Pi}{dx}.$$

Баланс сил даёт

$$n(x)QE = \frac{d\Pi}{dx}.$$

При однородной температуре $\Pi = nkT$, поэтому

$$\frac{d\Pi}{dx} = kT \frac{dn}{dx}.$$

Отсюда

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT}n(x).$$

Положительный градиент согласуется с накоплением положительно заряженных частиц в направлении электрического поля.

С.4

Усредняя уравнение (1) с учётом постоянства приложенной силы и условия $\langle F(t) \rangle = 0$, получаем

$$M \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\gamma \langle v \rangle + QE.$$

Решение, удовлетворяющее условию $\langle v(0) \rangle = 0$, имеет вид

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t/M} \right) = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Следовательно, установившаяся скорость равна

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma}.$$

С.5

В равновесии диффузионный поток уравнивает поток электрического дрейфа:

$$-D \frac{dn}{dx} + nu = 0.$$

Подставляя результаты С.3 и С.4, получаем

$$-D \frac{nQE}{kT} + n \frac{QE}{\gamma} = 0.$$

Таким образом,

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

Это соотношение Эйнштейна, связывающее диффузию и трение.

D.1

Используя приведённые в таблице перемещения как представительные значения интервалов гистограммы, находим полное число измерений:

$$N_{\text{tot}} = \sum_j N_j = 400.$$

Взвешенная сумма квадратов перемещений равна

$$\sum_j N_j (\Delta x_j)^2 = 2536 \mu\text{m}^2.$$

Следовательно, оценка среднего квадрата перемещения за $\Delta t = 60 \text{ s}$ равна

$$\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle = \frac{2536}{400} \mu\text{m}^2 = 6.34 \times 10^{-12} \text{ m}^2.$$

Из С.2,

$$D = \frac{\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}{2\Delta t} = \frac{6.34 \times 10^{-12}}{120} = 5.2833 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Коэффициент трения равен

$$\begin{aligned} \gamma &= 6\pi a \eta \\ &= 6\pi (5.0 \times 10^{-6}) (8.9 \times 10^{-4}) \\ &= 8.3881 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя $k = R/N_A$ в соотношение Эйнштейна, получаем

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma},$$

откуда

$$N_A = \frac{RT}{\gamma D} = \frac{2RT\Delta t}{\gamma \langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}.$$

При $T = 298.15 \text{ K}$

$$N_A = \frac{8.31(298.15)}{(8.3881 \times 10^{-8})(5.2833 \times 10^{-14})} = 5.5907 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

С точностью до двух значащих цифр

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Ни общепринятое значение N_A , ни численное значение k не использовались.

D.2

С учётом установившегося дрейфа перемещение равно

$$\Delta x(t) = ut + \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Случайная часть имеет нулевое среднее и второй момент $2Dt$. Поэтому среднее перекрёстного слагаемого, содержащего дрейфовое и случайное перемещения, равно нулю:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= u^2 t^2 + 2ut \delta \sum_n \langle v_n \rangle + \delta^2 \sum_{n,m} \langle v_n v_m \rangle \\ &= u^2 t^2 + 2Dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2.$$

Переход происходит, когда два вклада равны:

$$2Dt_* = u^2 t_*^2,$$

откуда

$$t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

Предельные степенные зависимости имеют вид

$$\begin{aligned} t \ll t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt, \\ t \gg t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq u^2 t^2. \end{aligned}$$

Здесь «малые t » относятся к эффективной диффузионной модели, в которой микроскопической релаксацией уже пренебрегли, а дрейф достиг установившегося режима.

Для точного описания требуемого схематического графика в двойном логарифмическом масштабе введём

$$s = \frac{t}{t_*}, \quad Y = \frac{\langle \Delta x(t)^2 \rangle}{2Dt_*}.$$

Тогда

$$Y = s + s^2.$$

При малых s график идёт вдоль прямолинейной асимптоты $Y = s$ с наклоном 1, плавно загибается вверх вблизи $s = 1$ и при больших s приближается к $Y = s^2$ с наклоном 2. Две асимптоты пересекаются в точке $(s, Y) = (1, 1)$, тогда как сама кривая проходит через $(1, 2)$. Поэтому на изгибе следует отметить $t = t_*$. В этой точке

$$\langle \Delta x(t_*)^2 \rangle = \frac{8D^2}{u^2}.$$

D.3

Запишем перемещение как сумму вкладов теплового движения и плавания:

$$\Delta x(t) = \Delta x_B(t) + \Delta x_S(t).$$

Тепловое движение и выбор направления плавания считаются независимыми, а оба вклада имеют нулевое среднее. Поэтому

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle.$$

При $t \ll \delta_0$ направление плавания практически не меняется за время наблюдения.

Следовательно,

$$\Delta x_S(t) \simeq \pm u_0 t, \quad \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle \simeq u_0^2 t^2.$$

Таким образом,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt + u_0^2 t^2 \quad (t \ll \delta_0).$$

Два слагаемых становятся сравнимыми при

$$t_s = \frac{2D}{u_0^2}.$$

Следовательно, при $t \ll t_s$ преобладает тепловая диффузия, а при $t_s \ll t \ll \delta_0$ плавание приводит к баллистическому режиму.

Для больших времён рассмотрим N полных интервалов плавания, так что $t = N\delta_0$. Пусть $s_j = \pm 1$ обозначает независимо выбранный знак на интервале j . Тогда

$$\Delta x_S(t) = u_0 \delta_0 \sum_{j=1}^N s_j.$$

Поскольку $\langle s_j \rangle = 0$ и $\langle s_j s_\ell \rangle = 0$ при $j \neq \ell$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle &= u_0^2 \delta_0^2 N \\ &= u_0^2 \delta_0 t. \end{aligned}$$

Неполный последний интервал не изменяет эту ведущую зависимость при $t \gg \delta_0$. Поэтому средний квадрат перемещения на больших временах равен

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq (2D + u_0^2 \delta_0) t.$$

Эквивалентно, коэффициент диффузии на больших временах равен

$$D_{\text{eff}} = D + \frac{u_0^2 \delta_0}{2}.$$

Для хорошо выраженного промежуточного режима, как на рисунке, характерные времена должны удовлетворять условию

$$\frac{2D}{u_0^2} \ll \delta_0.$$

Отсюда также следует $u_0^2 \delta_0 \gg 2D$. Поэтому три наблюдаемые асимптоты имеют вид

Диапазон времени	$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$	Наклон в двойном логарифмическом масштабе
$t \ll 2D/u_0^2$	$2Dt$	1
$2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0$	$u_0^2 t^2$	2
$t \gg \delta_0$	$u_0^2 \delta_0 t$	1

причём, когда тепловая диффузия существенна, для больших времён следует сохранять полный коэффициент $2D + u_0^2 \delta_0$.

Е.1

Введём положительный масштаб энергии

$$K = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}.$$

Тогда

$$U(d) = -\frac{A}{d} + Ke^{-d/\lambda},$$

и

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{K}{\lambda} e^{-d/\lambda}.$$

Сила, направленная в сторону увеличения расстояния, равна $-U'(d)$. В предположении мгновенного достижения установившейся скорости скорость каждой частицы пропорциональна действующей на неё силе. Для двух одинаковых частиц с коэффициентом трения γ

$$\dot{d} = -\frac{2}{\gamma} U'(d).$$

Таким образом, частицы сближаются везде, где $U'(d) > 0$.

Чтобы частицы, сближающиеся с большого расстояния, достигли контакта без тепловых флуктуаций, на их пути не должно быть области отталкивания или устойчивого равновесия при конечном расстоянии. Поэтому критическим условием является исчезновение области, в которой $U'(d) < 0$.

Перепишем производную в виде

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} \left[1 - \frac{K\lambda}{A} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 e^{-d/\lambda} \right].$$

Положим $z = d/\lambda > 0$. Функция, определяющая знак, имеет вид

$$f(z) = z^2 e^{-z}.$$

Её производная равна

$$f'(z) = ze^{-z}(2 - z),$$

поэтому её глобальный максимум достигается при $z = 2$ и равен

$$f_{\max} = 4e^{-2}.$$

Соответственно, $U'(d) \geq 0$ при любом расстоянии тогда и только тогда, когда

$$\frac{K\lambda}{A} 4e^{-2} \leq 1.$$

Критическая длина экранирования равна

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{\exp(2)A}{4K} = \frac{\exp(2)Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2}.$$

На этом пороге две стационарные точки потенциальной энергии сливаются при

$$d_{\text{crit}} = 2\lambda_{\text{crit}},$$

где и $U'(d_{\text{crit}})$, и $U''(d_{\text{crit}})$ обращаются в нуль.

Увеличение концентрации соли уменьшает λ . Подставляя λ_{crit} в уравнение (7), получаем

$$\begin{aligned} c_{\text{crit}} &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 \lambda_{\text{crit}}^2} \\ &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2} \left[\frac{4B\epsilon(kT)^2}{\exp(2)Aq^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2\epsilon^3(kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6}.$$

Для NaCl ионы одновалентны, поэтому q — модуль элементарного заряда. Концентрация ионов каждого вида равна молярной концентрации NaCl; множитель 2 в уравнении (7) уже учитывает оба вида ионов. При подстановке параметров в СИ результат имеет единицы mol m^{-3} .

При $c > c_{\text{crit}}$ имеем $U'(d) > 0$ при любом положительном расстоянии, и детерминированное движение приводит первоначально разделённую пару частиц к контакту. При $c < c_{\text{crit}}$ пара, сближающаяся с достаточно большого расстояния, оказывается захваченной во внешнем локальном минимуме U .

Для случая равенства необходимо точное уточнение. При $c = c_{\text{crit}}$

$$U'(d) \propto (d - d_{\text{crit}})^2$$

вблизи d_{crit} . Поэтому при безынерционном сближении со стороны больших расстояний достижение этого расстояния занимает бесконечное время. Таким образом, c_{crit} — критический порог, или точная нижняя грань концентраций, приводящих к коагуляции при сближении с большого расстояния; для фактического достижения контакта в рамках идеализированной динамики требуется $c > c_{\text{crit}}$.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Нейтронные звёзды

Мы рассмотрим устойчивость больших ядер и оценим массу нейтронных звёзд теоретически и экспериментально.

Часть А. Масса и устойчивость ядер (2.5 балла)

Энергия покоя ядра $m(Z, N)c^2$, состоящего из Z протонов и N нейтронов, меньше суммы энергий покоя протонов и нейтронов, далее называемых нуклонами, на величину энергии связи $B(Z, N)$, где c — скорость света в вакууме. Пренебрегая малыми поправками, энергию связи, состоящую из объёмного члена с коэффициентом a_V , поверхностного члена с коэффициентом a_S , члена кулоновской энергии с коэффициентом a_C и члена энергии симметрии с коэффициентом a_{sym} , можно приближённо записать следующим образом.

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

Здесь $A = Z + N$ — массовое число, а m_N — масса нуклона. В расчётах используйте $a_V \approx 15.8 \text{ MeV}$, $a_S \approx 17.8 \text{ MeV}$, $a_C \approx 0.711 \text{ MeV}$ и $a_{\text{sym}} \approx 23.7 \text{ MeV}$ ($\text{MeV} = 10^6$ электронвольт).

А.1 — 0.9 балла

При условии $Z = N$ определите A , при котором энергия связи на нуклон, B/A , максимальна.

А.2 — 0.9 балла

При фиксированном A атомный номер наиболее устойчивого ядра Z^* определяется максимизацией $B(Z, A - Z)$. Для $A = 197$ вычислите Z^* , используя уравнение (1).

А.3 — 0.7 балла

Ядро с большим A распадается на более лёгкие ядра в процессе деления, чтобы минимизировать полную энергию покоя. Для простоты рассмотрим один из возможных способов разделения ядра с (Z, N) на два одинаковых ядра, которое происходит при выполнении следующего энергетического соотношения:

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Если записать это соотношение в виде

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

найдите C_{fission} с точностью до двух значащих цифр.

Часть В. Нейтронная звезда как гигантское ядро (1.5 балла)

Большие ядра с достаточно большим массовым числом $A > A_c$, где A_c — пороговое значение, остаются устойчивыми относительно деления благодаря достаточно большой гравитационной энергии связи.

В.1 — 1.5 балла

Предположим, что при достаточно больших A выполняются условия $N = A$ и $Z = 0$, а уравнение (1) остаётся справедливым при добавлении гравитационной энергии связи. Гравитационная энергия связи равна

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

где $M = m_N A$ и $R = R_0 A^{1/3}$ при $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ м} = 1.1 \text{ фм}$ — соответственно масса и радиус ядра.

Для $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ найдите a_{grav} в МэВ с точностью до одной значащей цифры. Затем, пренебрегая поверхностным членом, оцените A_c с точностью до одной значащей цифры. В расчётах используйте $m_N c^2 \simeq 939 \text{ МэВ}$ и $G = \hbar c / M_P^2$, где $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ МэВ}$ и $\hbar c \simeq 197 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}$.

Часть С. Нейтронная звезда в двойной системе (6.0 балла)

Некоторые нейтронные звёзды являются пульсарами, регулярно излучающими электромагнитные волны, которые мы здесь для простоты называем «светом», с постоянным периодом. Нейтронные звёзды часто образуют двойные системы с белыми карликами. Рассмотрим расположение звёзд, показанное на рис. 1, где световой импульс, идущий от нейтронной звезды **N** к Земле **E**, проходит вблизи белого карлика **W**, входящего в двойную систему. Измерение этих импульсов, на которые влияет гравитация звезды, позволяет точно оценить массу **W**, как объясняется ниже, и в результате оценить массу **N**.

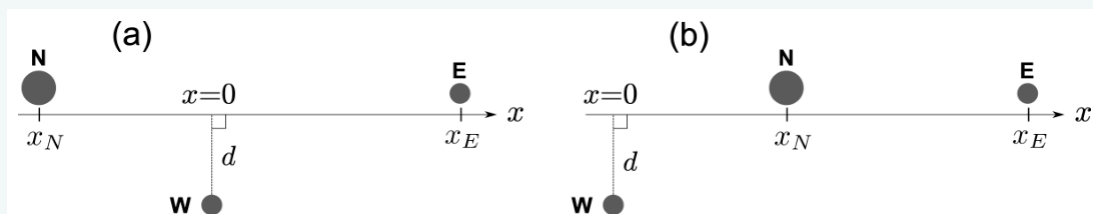


Рис. 1: Расположение объектов с осью x , направленной вдоль линии, соединяющей **N** и **E**. (a) при $x_N < 0$ и (b) при $x_N > 0$.

С.1 — 1.0 балла

Как показано на рисунке ниже, в поле с постоянным ускорением свободного падения g выберем два уровня I и II с разностью высот $\Delta h (> 0)$. Установим одинаковые часы на уровнях I, II и в свободно падающей системе F , обозначив их соответственно как часы I, часы II и часы F .

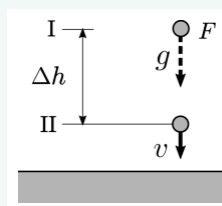


Схема мысленного эксперимента.

Предположим, что наблюдатель находится рядом с часами F , причём первоначально F расположена на той же высоте, что и часы I, и её скорость равна нулю. Поскольку часы одинаковые, они отсчитывают равные промежутки времени: $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. Затем позволим F свободно падать и будем работать в системе отсчёта F , которую считаем инерциальной. В этой системе часы II проходят мимо часов F со скоростью v , так что замедление хода часов II можно определить с помощью преобразования Лоренца. Когда по часам F проходит время $\Delta\tau_I$, по часам II проходит время $\Delta\tau_{II}$.

Выразите $\Delta\tau_{II}$ через $\Delta\tau_I$ с точностью до первого порядка по $\Delta\phi/c^2$, где $\Delta\phi = g\Delta h$ — разность гравитационных потенциалов, то есть гравитационных потенциальных энергий на единицу массы.

С.2 — 1.8 балла

В гравитационном поле с потенциалом ϕ замедление времени изменяет эффективную скорость света c_{eff} , наблюдаемую на бесконечности, хотя локальная скорость света равна c . При $\phi(r = \infty) = 0$ величину c_{eff} с точностью до первого порядка по ϕ/c^2 можно записать как

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

с учётом искривления пространства, которое не рассматривалось в С.1. Отметим, что траекторию света можно приближённо считать прямой линией.

Как показано на рис. 1 (а), направим ось x вдоль траектории света от нейтронной звезды **N** к Земле **E** и выберем $x = 0$ в точке, в которой расстояние от белого карлика **W** до траектории света минимально. Пусть $x_N (< 0)$ — координата x звезды **N**, $x_E (> 0)$ — координата Земли **E**, а d — расстояние между **W** и траекторией света.

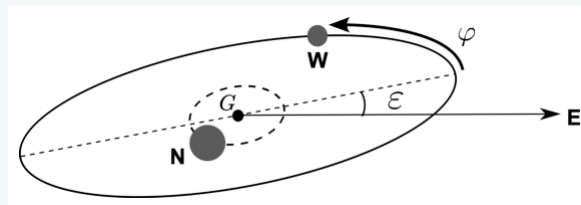
Оцените изменение времени прихода Δt света от **N** к **E**, вызванное белым карликом с массой M_{WD} , и представьте ответ в простом виде, пренебрегая членами высших порядков по следующим малым величинам: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ и $GM_{WD}/(c^2d) \ll 1$. При необходимости используйте следующую формулу.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

(log — натуральный логарифм)

С.3 — 1.8 балла

Предположим, что в двойной звёздной системе **N** и **W**, показанной ниже, звёзды движутся по круговым орбитам с нулевым эксцентриситетом вокруг центра масс G в плоскости орбит. Пусть ε — угол наклона, отсчитываемый от плоскости орбит до направления из G к **E**, L — расстояние между **N** и **W**, а M_{WD} — масса белого карлика. Далее будем считать, что $\varepsilon \ll 1$.



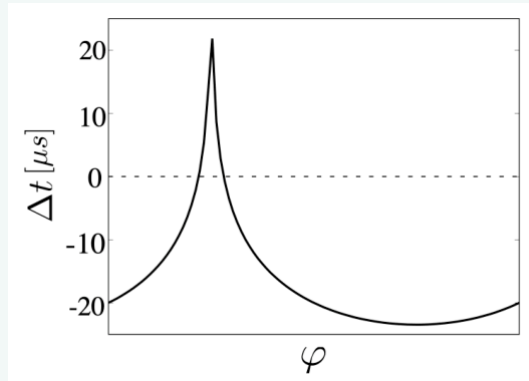
Двойная звёздная система.

Мы наблюдаем световые импульсы от **N** на Земле **E**, находящейся далеко от **N**. Траектория света к **E** изменяется со временем в зависимости от расположения **N** и **W**. Задержка во временном интервале между импульсами, приходящими на **E**, имеет максимальное значение Δt_{max} при $x_N \simeq -L$ и минимальное значение Δt_{min} при $x_N \simeq L$ (расположение объектов см. на рис. 1 (b)).

Вычислите $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$ в простом виде, пренебрегая членами высших порядков по малым величинам, как в **С.2**. Отметим, что задержки, обусловленные гравитацией звёздных объектов, отличных от **W**, считаются сокращающимися в разности $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$.

С.4 — 0.8 балла

На рисунке ниже показаны наблюдаемые задержки времени в зависимости от орбитальной фазы φ для двойной звёздной системы с $L \approx 6 \times 10^6 \text{ km}$ и $\cos \varepsilon \approx 0.99989$. Оцените M_{WD} в единицах массы Солнца $M_{\odot}$ и приведите результат для $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$ с точностью до одной значащей цифры. Здесь можно использовать приближённое соотношение $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$.



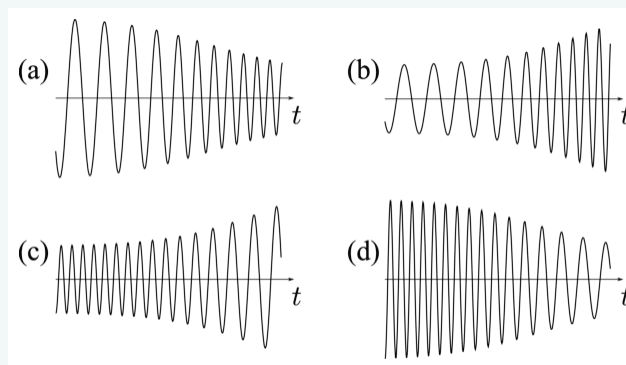
Наблюдаемые задержки времени Δt в зависимости от орбитальной фазы φ (см. рисунок в **С.3**), определяющей положение **N** и **W** на орбитах.

С.5 — 0.4 балла

В двойной системе нейтронных звёзд обе звезды теряют энергию и момент импульса, излучая гравитационные волны, и в конце концов сталкиваются и сливаются. Для простоты рассмотрим только движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω . Тогда, если пренебречь релятивистскими эффектами, выполняется соотношение $\omega = \chi R^p$ с постоянной χ , не зависящей ни от ω , ни от R . Определите значение p .

С.6 — 0.2 балла

Амплитуда гравитационной волны, излучаемой двойной системой из **С.5**, пропорциональна $R^2 \omega^2$. На рисунке ниже качественно показаны четыре различные зависимости наблюдаемых гравитационных волн от времени перед столкновением двух звёзд. Выберите наиболее подходящую зависимость из вариантов (a)–(d).



Графики наблюдаемых сигналов гравитационных волн.

Ответы

- **A.1:** $A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 50$.
- **A.2:** $Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}} = 78.55 \dots$, что даёт целочисленный атомный номер **79**.
- **A.3:** $C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx \mathbf{0.70}$.
- **B.1:** $a_{\text{grav}} \approx \mathbf{6 \times 10^{-37} \text{ MeV}}$, $A_c \approx \mathbf{4 \times 10^{55}}$, при использовании обсуждаемого ниже критерия положительной полной энергии связи.
- **C.1:** $\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)$.
- **C.2:** $\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)$.
- **C.3:** $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \approx \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$.
- **C.4:** $\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5$, или $M_{\text{WD}} \approx 0.5M_{\odot}$.
- **C.5:** $p = -\frac{3}{2}$.
- **C.6:** **(b)**: при приближении звёзд к столкновению увеличиваются и амплитуда, и частота.

Решение

A.1

При $Z = N = A/2$ член энергии симметрии обращается в нуль. Энергия связи на нуклон принимает вид

$$\frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - \frac{a_C}{4} A^{2/3}.$$

Считая A непрерывной величиной, получаем

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{a_S}{3} A^{-4/3} - \frac{a_C}{6} A^{-1/3} = \frac{2a_S - a_C A}{6A^{4/3}}.$$

Эта производная положительна ниже $A = 2a_S/a_C$ и отрицательна выше этого значения, поэтому данная стационарная точка является максимумом:

$$A = \frac{2a_S}{a_C} = \frac{2(17.8)}{0.711} = 50.07 \dots$$

Таким образом,

$$A \approx 50.$$

Ближайшее допустимое чётное массовое число, согласующееся с целочисленными $Z = N$, равно $A = 50$.

A.2

При фиксированном A имеем $N = A - Z$, следовательно, $N - Z = A - 2Z$. От Z зависят только кулоновский член и член энергии симметрии:

$$B(Z, A - Z) = \text{константа} - a_C Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z)^2.$$

Условие максимума имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-1/3} + \frac{4a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z) = 0.$$

Преобразуя, получаем

$$4a_{\text{sym}} A = Z (8a_{\text{sym}} + 2a_C A^{2/3}),$$

откуда

$$Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}}.$$

Это максимум, поскольку

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_C A^{-1/3} - \frac{8a_{\text{sym}}}{A} < 0.$$

При $A = 197$

$$Z^* = \frac{197}{2 + \frac{0.711}{2(23.7)} 197^{2/3}} = 78.553 \dots$$

Поскольку зависимость от Z представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, оптимальным целым значением является ближайшее целое число:

$$Z^* = 79.$$

A.3

Общее число нуклонов сохраняется, поэтому члены, соответствующие энергии покоя свободных нуклонов, сокращаются. Деление энергетически выгодно, когда

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) > 0.$$

Суммарные объёмный член и член энергии симметрии не изменяются. Суммарный поверхностный член дочерних ядер равен

$$-2a_S (A/2)^{2/3} = -a_S 2^{1/3} A^{2/3},$$

а их суммарный кулоновский член равен

$$-2a_C \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} = -a_C 2^{-2/3} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Следовательно,

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) = -a_S(2^{1/3} - 1)A^{2/3} + a_C(1 - 2^{-2/3})\frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Условие положительного энергосвязывания принимает вид

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{a_S}{a_C}.$$

Отсюда

$$C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0.702414 \dots \approx 0.70.$$

Физически деление становится выгодным, когда уменьшение энергии кулоновского отталкивания превышает энергетические затраты на увеличение площади поверхности.

B.1

Подставляя заданные массу и радиус в выражение для гравитационной энергии связи, получаем

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G(m_N A)^2}{R_0 A^{1/3}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} A^{5/3}.$$

Таким образом,

$$a_{\text{grav}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c}{R_0} \left(\frac{m_N c^2}{M_P c^2} \right)^2.$$

Используя приведённые постоянные, получаем

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.1 \text{ fm}} \left(\frac{939}{1.22 \times 10^{22}} \right)^2 = 6.3656 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

С точностью до одной значащей цифры

$$a_{\text{grav}} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

При $Z = 0$ и $N = A$ кулоновский член обращается в нуль, а член энергии симметрии равен $-a_{\text{sym}}A$. Пренебрегая поверхностным членом согласно условию, получаем

$$B_{\text{tot}}(A) = (a_V - a_{\text{sym}})A + a_{\text{grav}}A^{5/3},$$

или

$$\frac{B_{\text{tot}}}{A} = -7.9 \text{ MeV} + a_{\text{grav}}A^{2/3}.$$

Если понимать под конечным порогом начало образования связанного состояния относительно A свободных нейтронов, условие имеет вид

$$B_{\text{tot}} > 0.$$

Следовательно,

$$A > A_c, \quad A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_V}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2}.$$

Сохраняя в этом расчёте неокруглённое значение a_{grav} , получаем

$$A_c = \left(\frac{7.9}{6.3656 \times 10^{-37}} \right)^{3/2} = 4.3721 \times 10^{55}.$$

Таким образом,

$$\boxed{A_c \approx 4 \times 10^{55}}.$$

Различие между этим порогом образования связанного состояния и строгим сравнением энергий при делении на две капли здесь существенно: при $Z = 0$ и без поверхностного члена разность $B_{\text{tot}}(A) - 2B_{\text{tot}}(A/2)$ равна $(1 - 2^{-2/3}) a_{\text{grav}} A^{5/3}$ и положительна при любом A , поэтому сравнение с двумя каплями не даёт конечного порога.

С.1

При свободном падении с перепадом высот Δh ньютоновский закон сохранения энергии с требуемой точностью даёт

$$\frac{1}{2}v^2 = g\Delta h = \Delta\phi,$$

откуда

$$v^2 = 2\Delta\phi.$$

В мгновенной инерциальной системе отсчёта свободно падающего наблюдателя часы II движутся со скоростью v . Замедление времени в специальной теории относительности даёт

$$\Delta\tau_{\text{II}} = \Delta\tau_F \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Используя заданное в условии сопоставление показаний часов, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\text{I}}$, и раскладывая до первого порядка, получаем

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\text{II}} &= \Delta\tau_{\text{I}} \sqrt{1 - \frac{2\Delta\phi}{c^2}} \\ &\approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boxed{\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)}.$$

Нижние часы идут медленнее.

С.2

В точке с координатой x расстояние до белого карлика равно

$$r(x) = \sqrt{x^2 + d^2},$$

а его гравитационный потенциал равен

$$\phi(x) = -\frac{GM_{\text{WD}}}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

Из заданного выражения для слабого поля следует

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} \right).$$

Время распространения света в отсутствие белого карлика равно $(x_E - x_N)/c$. Вычитая его из фактического времени распространения вдоль той же прямолинейной траектории, получаем

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}}} - \frac{1}{c} \right) dx \\ &\approx -\frac{2}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \phi(x) dx \\ &= \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}. \end{aligned}$$

Эквивалентная форма приведённой первообразной $-\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$. Таким образом, в первом порядке по гравитационному потенциалу

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2}}{x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2}} \right).$$

При $x_E \gg d$

$$x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2} \approx 2x_E.$$

При $x_N < 0$ и $|x_N| \gg d$ рационализация позволяет избежать вычитания близких величин:

$$x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2} = \frac{d^2}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + |x_N|} \approx \frac{d^2}{2|x_N|}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E|x_N|}{d^2} \right)}.$$

Это положительная гравитационная задержка распространения. Аргумент логарифма безразмерен, а GM_{WD}/c^3 имеет размерность времени.

С.3

В двух положениях соединения проекция расстояния L на луч зрения даёт

$$x_N = -L \cos \varepsilon \quad \text{при максимальной задержке,}$$

и

$$x_N = +L \cos \varepsilon \quad \text{при минимальной задержке.}$$

В каждом из двух положений соединения

$$d = L \sin \varepsilon, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} = L.$$

Поскольку Земля находится далеко от двойной системы, с принятой точностью можно использовать одно и то же x_E для обоих расположений. Результат интегрирования из С.2, полученный до предположения об отрицательном x_N , даёт

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L + x_N} \right).$$

Отсюда

$$\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 - \cos \varepsilon)} \right),$$

тогда как

$$\Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 + \cos \varepsilon)} \right).$$

Вычитание исключает как x_E , так и L :

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right).$$

При $\varepsilon \ll 1$

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + \cos \varepsilon \approx 2.$$

Таким образом, искомое выражение для малых углов имеет вид

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) = \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right).$$

Здесь ε выражен в радианах. Логарифмический рост при малом наклоне соответствует тому, что свет проходит всё ближе к белому карлику в рамках указанных приближений.

C.4

Считывая значения с графика, получаем приближённо

$$\Delta t_{\text{max}} \approx +22 \mu\text{s}, \quad \Delta t_{\text{min}} \approx -23 \mu\text{s}.$$

Следовательно, измеряемый размах составляет приблизительно

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx 45 \mu\text{s}.$$

Произвольное постоянное смещение задержек на графике не влияет на эту разность.

Используя заданный наклон, получаем

$$\ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{1.99989}{0.00011} \right) \approx 9.808.$$

Тогда из C.3 следует

$$45 \mu\text{s} \approx 2 (5 \mu\text{s}) \frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} (9.808).$$

Следовательно,

$$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx \frac{45}{98.08} \approx 0.46.$$

С точностью до одной значащей цифры

$$\boxed{\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5}, \quad \boxed{M_{\text{WD}} \approx 0.5 M_{\odot}}.$$

Заданное расстояние L сокращается в разности максимальной и минимальной задержек.

С.5

Пусть массы звёзд равны M_1, M_2 , а расстояние между ними — r . Ньютоновское движение двух тел по круговым орбитам подчиняется соотношению

$$\omega^2 r^3 = G(M_1 + M_2).$$

При фиксированных массах радиус орбиты R любой из звёзд пропорционален r с постоянным коэффициентом. Следовательно,

$$\omega \propto r^{-3/2} \propto R^{-3/2}.$$

Сравнивая с $\omega = \chi R^p$, получаем

$$p = -\frac{3}{2}.$$

С.6

По мере потери двойной системой орбитальной энергии радиус её орбиты уменьшается. Согласно С.5,

$$\omega \propto R^{-3/2},$$

поэтому орбитальная частота, а значит, и частота гравитационных волн увеличивается.

Заданная зависимость амплитуды даёт

$$\text{амплитуда} \propto R^2 \omega^2 \propto R^2 R^{-3} = R^{-1}.$$

Таким образом, при уменьшении R амплитуда также увеличивается. Искомый сигнал имеет расширяющуюся огибающую и всё более частые колебания:

График (b).

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Вода и тела

В этой задаче рассматриваются явления, вызванные взаимодействием воды с телами и связанные с поверхностным натяжением. В части А рассматривается движение, а части В и С посвящены статическим ситуациям.

При необходимости можно воспользоваться тем, что если функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''(x) = ay(x)$ (a — положительная постоянная), то его общее решение имеет вид $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, где A и B — произвольные постоянные.

Часть А. Слияние капель воды (2.0 балла)

Рассмотрим две неподвижные сферические капли воды на поверхности супергидрофобного материала, как показано на рис. 1; это означает, что между материалом и водой действует очень сильная сила отталкивания.

Вначале две одинаковые сферические капли воды расположены рядом на поверхности; затем, соприкоснувшись, они сливаются и образуют более крупную сферическую каплю воды, которая резко подскакивает вверх.

А.1 2.0 балла

Радиус a обеих капель воды до слияния равен $100\ \mu\text{m}$. Плотность воды ρ равна $1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Коэффициент поверхностного натяжения γ равен $7.27 \times 10^{-2}\ \text{J/m}^2$.

Доля k разности поверхностных энергий до и после слияния, ΔE , превращается в кинетическую энергию подскочившей капли воды. Определите начальную скорость подскока v образовавшейся капли воды с двумя значащими цифрами при следующих предположениях:

- $k = 0.06$
- При слиянии общий объём воды сохраняется.

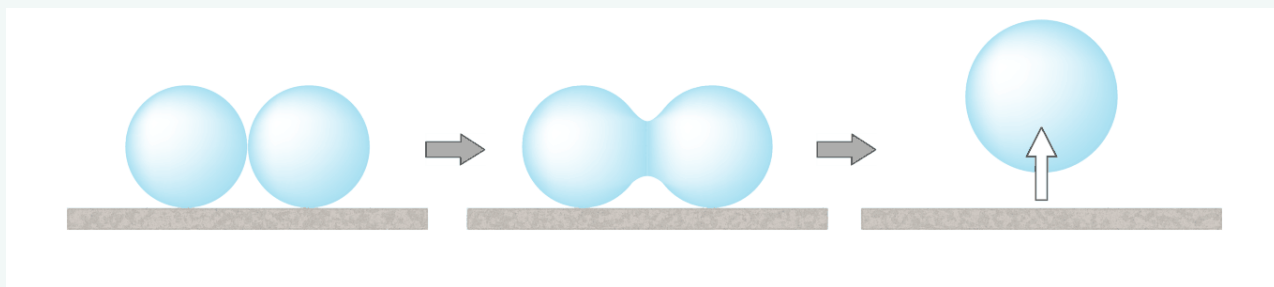


Рис. 1: Слияние двух капель воды и подскок образовавшейся капли.

Часть В. Вертикально расположенная пластина (4.5 балла)

Плоская пластина вертикально погружена в воду. На рис. 2(a) и 2(b) показана форма поверхности воды для гидрофильного (притягивающего воду) и гидрофобного материалов пластины соответственно. Толщиной пластины пренебрегаем.

Поверхность пластины лежит в плоскости yz , а горизонтальная поверхность воды вдали от пластины — в плоскости xy при $z = 0$. Форма поверхности не зависит от координаты y . Обозначим через $\theta(x)$ угол между поверхностью воды и горизонтальной плоскостью в точке (x, z) поверхности воды в плоскости xz . Угол $\theta(x)$ отсчитывается от положительного направления оси x , причём положительным считается поворот против часовой стрелки. Пусть в точке контакта пластины с поверхностью воды ($x = 0$) угол $\theta(x)$ равен θ_0 . Далее считаем, что θ_0 определяется свойствами материала пластины и имеет фиксированное значение.

Плотность воды ρ постоянна, а коэффициент поверхностного натяжения воды γ одинаков во всех точках поверхности. Ускорение свободного падения обозначается через g . Предполагается, что атмосферное давление P_0 всегда одинаково во всех точках. Определим форму поверхности воды, выполнив следующие шаги. Обратите внимание, что единицей коэффициента поверхностного натяжения служит как J/m^2 , так и N/m .

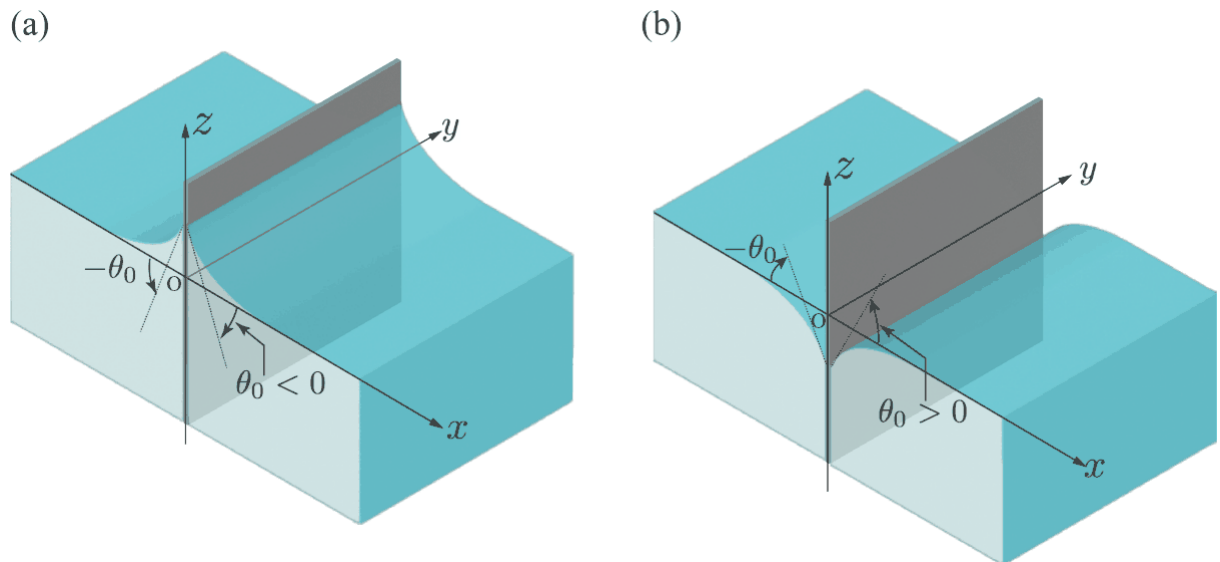


Рис. 2: Пластины, вертикально погружённые в воду. (a) Гидрофильная пластина; (b) гидрофобная пластина.

B.1 0.6 балла

Рассмотрим гидрофильную пластину, как показано на рис. 2(a). Заметим, что давление воды P удовлетворяет условиям $P < P_0$ при $z > 0$ и $P = P_0$ при $z = 0$. Выразите давление P на высоте z через ρ , g , z и P_0 .

B.2 0.8 балла

Рассмотрим выделенный объём воды, показанный затенением на рис. 3(a). Его сечение плоскостью xz показано заштрихованной областью на рис. 3(b). Пусть z_1 и z_2 — координаты левого и правого краёв границы (поверхности воды) между выделенным объёмом воды и воздухом соответственно.

Найдите горизонтальную составляющую (x -составляющую) равнодействующей сил давления, действующих на выделенный объём воды, в расчёте на единицу длины вдоль оси y , f_x , выразив её через ρ , g , z_1 и z_2 . Учтите, что давление P_0 не создаёт результирующей горизонтальной силы, действующей на выделенный объём воды.

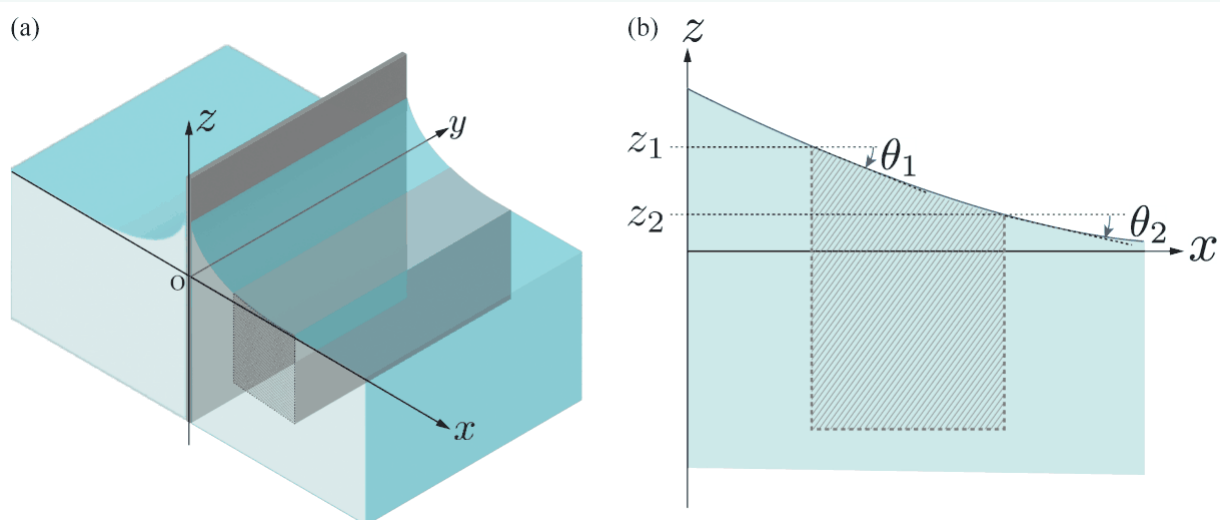


Рис. 3: Форма объёма воды, выделенного у её поверхности. (a) Вид сверху под углом и (b) вид в поперечном сечении.

В.3 0.8 балла

Сила поверхностного натяжения, действующая на выделенный объём воды, уравнивает силу f_x , рассмотренную в В.2. Обозначим через θ_1 и θ_2 углы между поверхностью воды и горизонтальной плоскостью на левом и правом краях соответственно. Выразите f_x через γ , θ_1 и θ_2 .

В.4 0.8 балла

В произвольной точке (x, z) поверхности воды выполняется следующее уравнение:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{постоянная.} \quad (1)$$

Определите показатель степени a и выразите постоянную ℓ через γ и ρ . Обратите внимание, что это уравнение справедливо как для гидрофильного, так и для гидрофобного материала пластины.

В.5 1.5 балла

В уравнении (1) из В.4 предположим, что высота поверхности воды меняется медленно, то есть $|z'(x)| \ll 1$, так что можно разложить $\cos \theta(x)$ по $z'(x)$ до второго порядка. Затем, дифференцируя полученное уравнение по x , получим дифференциальное уравнение для $z(x)$. Решите это дифференциальное уравнение и определите $z(x)$ при $x \geq 0$, выразив результат через $\tan \theta_0$ и ℓ . Обратите внимание, что для наглядности вертикальный масштаб на рис. 2 и 3 увеличен и изображённые профили не удовлетворяют условию $|z'(x)| \ll 1$.

Часть С. Взаимодействие двух стержней (3.5 балла)

Одинаковые стержни А и В, изготовленные из одного и того же материала и плавающие параллельно друг другу на поверхности воды, расположены на одинаковом расстоянии от оси y (рис. 4).

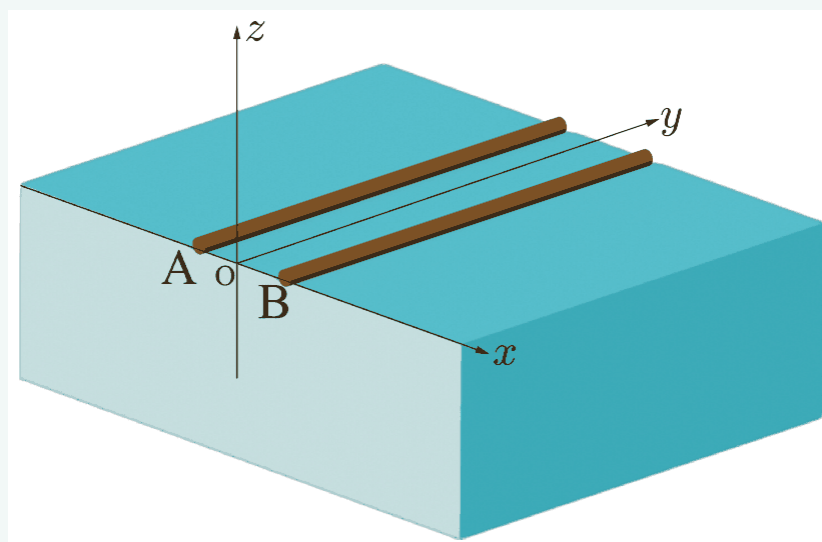


Рис. 4: Два стержня А и В, плавающие на поверхности воды.

С.1 1.0 балла

В точках контакта стержня В с поверхностью воды обозначим координаты z через z_a и z_b , а углы — через θ_a и θ_b , как показано на рис. 5. Определите горизонтальную составляющую силы F_x , действующей на стержень В в расчёте на единицу длины вдоль оси y , выразив её через θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g и γ .

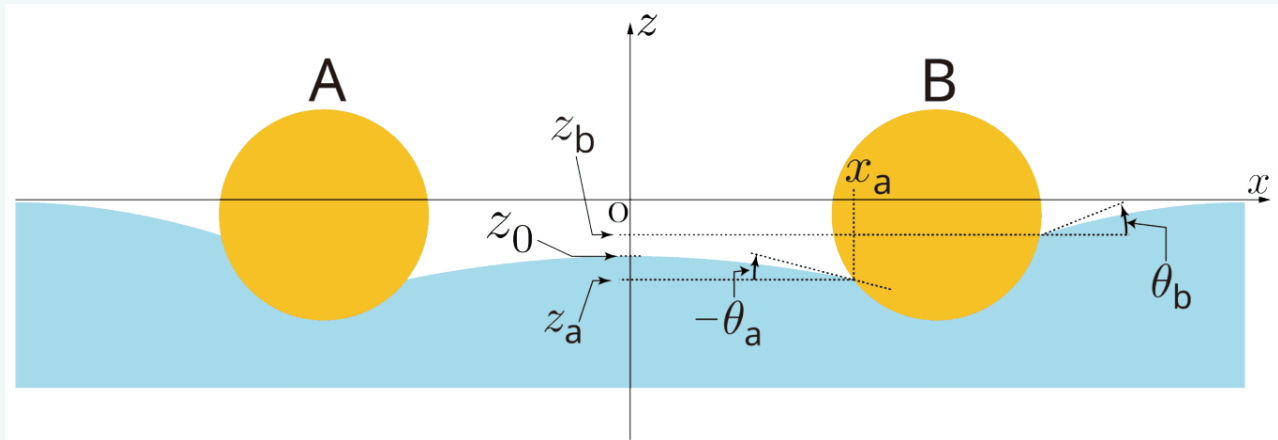


Рис. 5: Вертикальное поперечное сечение двух стержней, плавающих на поверхности воды.

С.2 1.5 балла

Обозначим через z_0 координату z поверхности воды посередине между двумя стержнями в плоскости xz . Выразите силу F_x , полученную в С.1, не используя θ_a , θ_b , z_a и z_b .

С.3 1.0 балла

Пусть x_a — координата x точки контакта поверхности воды с левой стороной стержня В. Используя дифференциальное уравнение, полученное в В.5, выразите координату уровня воды z_0 посередине между двумя стержнями А и В через x_a и z_a . Можно использовать постоянную ℓ , введённую в В.4.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Положительные горизонтальные силы направлены вдоль $+x$. Величины f_x и F_x представляют собой силы в расчёте на единицу длины вдоль y и измеряются в N/m .

• А.1

$$v = \sqrt{\frac{3k\gamma}{\rho a}} (2 - 2^{2/3}) = 0.23 \text{ m/s} \quad \text{вверх.}$$

• В.1

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

• В.2

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

• B.3

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

• B.4

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Для мениска у пластины постоянная в правой части уравнения (1) равна 1.

• B.5, в приближении малых наклонов:

$$z''(x) = \frac{z(x)}{\ell^2}, \quad z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

• C.1

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

• C.2

$$F_x = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

При $z_0 \neq 0$ сила, действующая на В, направлена к А.

• C.3, в приближении малых наклонов:

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Решение

A.1

Пусть R — радиус капли, образовавшейся после слияния. Из сохранения объёма следует

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad R = 2^{1/3} a.$$

Следовательно, масса образовавшейся капли равна

$$m = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \rho a^3.$$

Поверхностная энергия равна произведению коэффициента поверхностного натяжения на площадь поверхности. Поэтому уменьшение поверхностной энергии составляет

$$\begin{aligned} \Delta E &= \gamma (2 \cdot 4\pi a^2 - 4\pi R^2) \\ &= 4\pi \gamma a^2 (2 - 2^{2/3}). \end{aligned}$$

Согласно условию, доля k этой энергии превращается в кинетическую энергию поступательного движения:

$$\frac{1}{2} m v^2 = k \Delta E.$$

Следовательно,

$$v^2 = \frac{3k\gamma}{\rho a} \left(2 - 2^{2/3} \right).$$

При $a = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}$

$$m = 8.3776 \times 10^{-9} \text{ kg}, \quad \Delta E = 3.7694 \times 10^{-9} \text{ J},$$

и

$$v = 0.23236 \dots \text{ m/s}.$$

С двумя значащими цифрами начальная скорость равна

$$v = 0.23 \text{ m/s вверх}.$$

B.1

В гидростатическом равновесии направленная вверх сила давления уравнивает силу тяжести, откуда

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Поскольку ρ постоянна и $P(0) = P_0$, интегрирование даёт

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

В частности, выше уровня $z = 0$ давление воды ниже атмосферного, как и указано в условии.

B.2

Равномерное давление P_0 , приложенное ко всей замкнутой границе, создаёт нулевую равнодействующую силу. Поэтому расчёт можно вести, используя избыточное давление

$$p(z) = P(z) - P_0 = -\rho g z.$$

Избыточное давление на поверхности, граничащей с воздухом, равно нулю. Пусть z_* — высота, на которой лежит горизонтальное дно выделенного объёма. Давление на левую вертикальную грань действует в направлении $+x$, а давление на правую грань — в направлении $-x$. Давление на дно не создаёт горизонтальной силы.

В расчёте на единицу длины вдоль y

$$\begin{aligned} f_x &= \int_{z_*}^{z_1} p(z) dz - \int_{z_*}^{z_2} p(z) dz \\ &= -\rho g \int_{z_2}^{z_1} z dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

Для изображённого мениска у гидрофильной пластины $z_1 > z_2 > 0$, поэтому эта сила давления направлена вдоль $-x$.

В.3

На каждом краю сила поверхностного натяжения направлена по касательной от выделенного объёма воды. Её горизонтальные составляющие в расчёте на единицу длины равны

$$-\gamma \cos \theta_1 \quad \text{на левом краю}, \quad +\gamma \cos \theta_2 \quad \text{на правом краю}.$$

Условие равновесия по горизонтали имеет вид

$$f_x - \gamma \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta_2 = 0.$$

Следовательно,

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

В.4

Приравнявая выражения из В.2 и В.3, получаем

$$\frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2) = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

После перегруппировки слагаемых

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z_1^2 + \cos \theta_1 = \frac{\rho g}{2\gamma} z_2^2 + \cos \theta_2.$$

Поскольку оба края можно выбрать произвольно вдоль поверхности,

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z^2 + \cos \theta(x) = C.$$

Сравнивая с уравнением (1), получаем

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Величина ℓ называется капиллярной длиной. Вывод допускает оба знака z , поэтому он применим как к поднятым, так и к опущенным менискам.

Вдали от пластины $z \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow 0$. Следовательно, $C = 1$, и точное соотношение для поверхности воды у пластины имеет вид

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + \cos \theta(x) = 1.$$

В.5

Для касательной к поверхности выполняется

$$\tan \theta(x) = z'(x).$$

Для поверхности, представленной графиком функции,

$$\cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}.$$

При указанном приближении $|z'(x)| \ll 1$ разложение до второго порядка имеет вид

$$\cos \theta(x) = 1 - \frac{1}{2} [z'(x)]^2 + O([z'(x)]^4).$$

Подстановка в уравнение (1) с точностью до этого порядка даёт

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + 1 - \frac{1}{2}(z')^2 = C.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{zz'}{\ell^2} - z'z'' = 0.$$

Для неплоского профиля отсюда следует

$$\boxed{z'' = \frac{z}{\ell^2}},$$

причём в силу непрерывности это уравнение выполняется и в изолированных стационарных точках. Плоский профиль $z = 0$ также ему удовлетворяет.

Общее решение имеет вид

$$z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}.$$

Граничное условие $z(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ требует $A = 0$. У пластины

$$z'(0) = \tan \theta_0 = -\frac{B}{\ell},$$

поэтому $B = -\ell \tan \theta_0$. Следовательно,

$$\boxed{z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.}$$

Для гидрофильной пластины $\theta_0 < 0$, поэтому $z > 0$. Для гидрофобной пластины $\theta_0 > 0$, поэтому $z < 0$. В обоих случаях поверхность экспоненциально приближается к уровню $z = 0$ на характерной длине ℓ . Для согласованности приближения необходимо $|\tan \theta_0| \ll 1$.

С.1

Горизонтальная сила, действующая на стержень В, складывается из двух вкладов: поверхностного натяжения на линиях контакта и давления на стержень.

Поверхностное натяжение тянет стержень в сторону прилегающей свободной поверхности. Поэтому результирующая горизонтальная составляющая этой силы равна

$$F_{\gamma,x} = -\gamma \cos \theta_a + \gamma \cos \theta_b.$$

При расчёте силы давления вычтем равномерное атмосферное давление, равнодействующая которого по замкнутой поверхности стержня равна нулю. Оставшееся давление на смоченной поверхности равно $p(z) = -\rho g z$.

Горизонтальная сила давления на криволинейную поверхность находится интегрированием давления по её вертикальной проекции. Пусть z_* — высота нижней точки стержня. Давление на левую смоченную сторону даёт вклад в направлении $+x$, а на правую смоченную сторону — в направлении $-x$:

$$\begin{aligned} F_{p,x} &= \int_{z_*}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_*}^{z_b} (-\rho g z) dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2). \end{aligned}$$

Сила тяжести не имеет горизонтальной составляющей. Складывая два вклада, получаем

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2

Соотношение для поверхности из B.4 применяется отдельно к поверхности между стержнями и к внешней поверхности. Их постоянные интегрирования не обязаны совпадать.

С внешней стороны стержня В поверхность вдали от него становится горизонтальной на уровне $z = 0$. Следовательно,

$$\frac{z_b^2}{2\ell^2} + \cos \theta_b = 1.$$

Между одинаковыми стержнями зеркальная симметрия относительно $x = 0$ означает, что посередине поверхность горизонтальна. Там $z = z_0$, поэтому соотношение для внутренней поверхности имеет вид

$$\frac{z_a^2}{2\ell^2} + \cos \theta_a = 1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2}.$$

Поскольку $\rho g = \gamma/\ell^2$, силу из C.1 можно записать как

$$F_x = \gamma \left[\left(\cos \theta_b + \frac{z_b^2}{2\ell^2} \right) - \left(\cos \theta_a + \frac{z_a^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Подстановка даёт

$$F_x = \gamma \left[1 - \left(1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Таким образом,

$$F_x = -\frac{\gamma z_0^2}{2\ell^2} = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

Стержень В находится со стороны положительных значений x , поэтому отрицательный знак означает притяжение к стержню А. При $z_0 = 0$ сила обращается в нуль. Этот результат не требует приближения малых наклонов.

C.3

Теперь применим уравнение для малых наклонов из B.5 к поверхности между стержнями:

$$z'' = \frac{z}{\ell^2}.$$

Запишем его решение через гиперболические функции:

$$z(x) = C_1 \cosh(x/\ell) + C_2 \sinh(x/\ell).$$

Из симметрии следует $z'(0) = 0$, что требует $C_2 = 0$. Поскольку $z(0) = z_0$, имеем $C_1 = z_0$, и, следовательно,

$$z(x) = z_0 \cosh(x/\ell).$$

В точке контакта с внутренней стороной стержня В $x = x_a$ и $z = z_a$. Следовательно,

$$z_a = z_0 \cosh(x_a/\ell),$$

откуда

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Это соотношение между высотой и расстоянием справедливо в приближении малых наклонов.

Решение проверено по официальному решению.