

IPhO 2023

Problemas teóricos y soluciones · Tokio, Japón · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2023/

Problema 1: Caracterización de los coloides del suelo

La ciencia de los coloides es útil para caracterizar las partículas del suelo, porque muchas de ellas pueden considerarse partículas coloidales de tamaño micrométrico. Por ejemplo, el movimiento browniano (movimiento aleatorio de las partículas coloidales) puede utilizarse para medir el tamaño de las partículas.

Parte A. Movimientos de las partículas coloidales (1.6 puntos)

Analizamos el movimiento browniano unidimensional de una partícula coloidal de masa M . La ecuación de movimiento para su velocidad $v(t)$ es:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

donde γ es el coeficiente de fricción, $F(t)$ es una fuerza debida a las colisiones aleatorias con las moléculas de agua y $F_{\text{ext}}(t)$ es una fuerza externa. En la Parte A, suponemos que $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

A.1 — 0.8pt

Considere que una molécula de agua colisiona con la partícula en $t = t_0$, transmitiéndole un impulso I_0 , y que $F(t) = 0$ después de la colisión. Si $v(t) = 0$ antes de la colisión, $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ para $t > t_0$. Determine v_0 y τ , utilizando I_0 y los parámetros necesarios de la Ec.(1).

En lo que sigue, puede utilizar τ en sus respuestas.

A.2 — 0.8pt

En realidad, las moléculas de agua colisionan con la partícula una tras otra. Suponga que la colisión i -ésima transmite el impulso I_i en el instante t_i y determine $v(t)$ bajo las condiciones $t > 0$ y $v(0) = 0$. Indique también la desigualdad que especifica el intervalo de t_i que debe considerarse para un t dado. En la hoja de respuestas, no es necesario especificar este intervalo en la expresión de $v(t)$.

Parte B. Ecuación de movimiento efectiva (1.8 puntos)

Los resultados obtenidos hasta ahora implican que las velocidades de la partícula $v(t)$ y $v(t')$ pueden considerarse magnitudes aleatorias no correlacionadas si $|t - t'| \gg \tau$. Sobre esta base, introducimos un modelo teórico para describir aproximadamente el movimiento browniano unidimensional, en el que la velocidad cambia aleatoriamente en cada intervalo de tiempo δ ($\gg \tau$), es decir,

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

con $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) y una magnitud aleatoria v_n . Esta satisface

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

con un parámetro C que depende de δ . Aquí, $\langle X \rangle$ indica el valor esperado de X . Es decir, si se generan números aleatorios X infinitas veces, la media será $\langle X \rangle$.

Ahora consideramos el desplazamiento de la partícula $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ para $t = N\delta$, con un entero N .

B.1 – 1.0pt

Determine $\langle \Delta x(t) \rangle$ y $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ utilizando C , δ y t .

B.2 – 0.8pt

La magnitud $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ se denomina desplazamiento cuadrático medio (MSD). Es un observable característico del movimiento browniano, que corresponde al caso límite $\delta \rightarrow 0$. A partir de esto, podemos demostrar que $C \propto \delta^\alpha$ y $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$. Determine los valores de α y β .

Parte C. Electroforesis (2.7 puntos)

Aquí analizamos la electroforesis, es decir, el transporte de partículas cargadas por un campo eléctrico. Se coloca una suspensión de partículas coloidales de masa M y carga Q (> 0) en un canal estrecho de sección transversal A (Fig.1(a)). Despreciamos la interacción entre las partículas, los efectos de la pared, del fluido y de los iones que contiene, así como la gravedad.

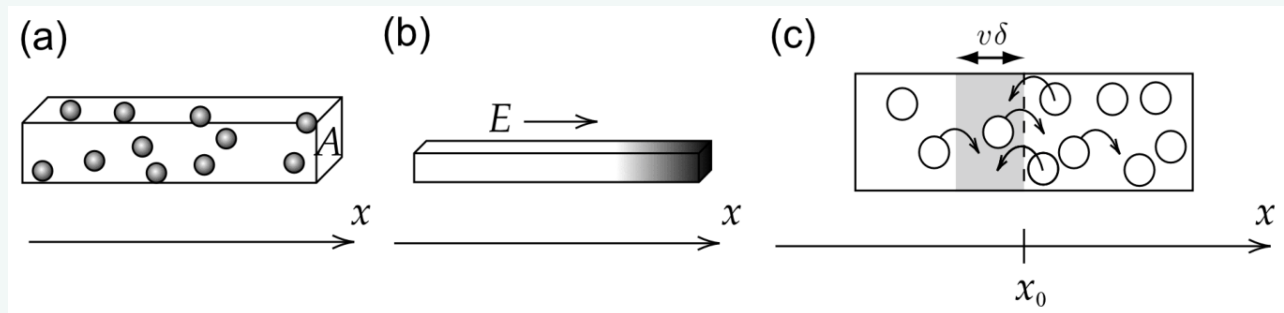


Fig.1: Disposición para la Parte C.

Al aplicar un campo eléctrico uniforme E en la dirección x , las partículas se transportan y su concentración $n(x)$ (número de partículas por unidad de volumen) deja de ser uniforme (Fig.1(b)). Cuando se retira E , esta falta de uniformidad desaparece gradualmente. Esto se debe al movimiento browniano de las partículas. Si $n(x)$ no es uniforme, los números de partículas que se mueven hacia la derecha y hacia la izquierda pueden diferir (Fig.1(c)). Esto genera un flujo de partículas $J_D(x)$, el número medio de partículas que fluyen en x a lo largo del eje x por unidad de área de la sección transversal y por unidad de tiempo. Se sabe que este flujo satisface

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

donde D se denomina coeficiente de difusión.

Supongamos ahora, por simplicidad, que la mitad de las partículas tienen velocidad $+v$ y la otra mitad tienen velocidad $-v$. Sea $N_+(x_0)$ el número de partículas con velocidad $+v$ que cruzan x_0 de izquierda a derecha por unidad de área de la sección transversal y por unidad de tiempo. Para

que las partículas con velocidad $+v$ crucen x_0 en el intervalo de tiempo δ , deben encontrarse en la región sombreada de la Fig.1(c). Como δ es pequeño, tenemos $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$ en esta región.

C.1 – 0.5pt

Expresé $N_+(x_0)$ utilizando las magnitudes necesarias de entre v , δ , $n(x_0)$ y $\frac{dn}{dx}(x_0)$.

Definimos $N_-(x_0)$ como el análogo de $N_+(x_0)$ para la velocidad $-v$. Con ello, tenemos $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. Según la Ec.(3), tenemos $\langle v^2 \rangle = C$.

C.2 – 0.7pt

Determine $J_D(x_0)$ utilizando las magnitudes necesarias de entre C , δ , $n(x_0)$ y $\frac{dn}{dx}(x_0)$.

Utilizando este resultado y la Ec.(4), exprese D en función de C y δ , y $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ en función de D y t .

Ahora analizamos el efecto de la presión osmótica Π . Viene dada por $\Pi = \frac{n}{N_A} RT = nkT$, donde N_A es la constante de Avogadro, R la constante de los gases, T la temperatura y $k = \frac{R}{N_A}$ la constante de Boltzmann. Consideremos la concentración no uniforme que se forma bajo el campo eléctrico E (Fig.1(b)). Como $n(x)$ depende de x , $\Pi(x)$ también depende de x . Entonces, las fuerzas debidas a $\Pi(x)$ y $\Pi(x + \Delta x)$ deben equilibrarse con la fuerza total del campo E que actúa sobre las partículas (Fig.2). Aquí consideramos un Δx pequeño, de modo que $n(x)$ puede considerarse constante en este intervalo, mientras que $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.

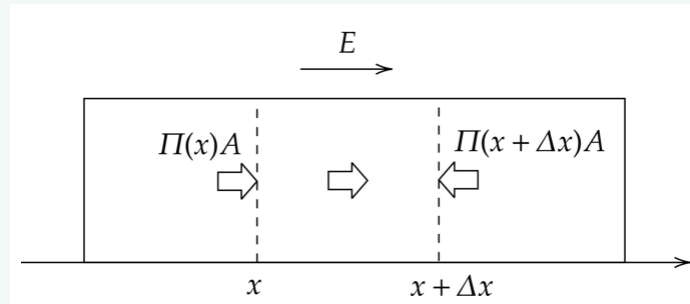


Fig.2: Equilibrio de fuerzas.

C.3 – 0.5pt

Expresé $\frac{dn}{dx}(x)$ utilizando $n(x)$, T , Q , E y k .

Analicemos ahora el equilibrio de los flujos. Además del flujo $J_D(x)$ debido al movimiento browniano, existe un flujo debido al campo eléctrico, $J_Q(x)$. Viene dado por

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

donde u es la velocidad terminal de las partículas impulsadas por el campo.

C.4 – 0.5pt

Para determinar u , utilizamos la Ec.(1) con $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Como $v(t)$ fluctúa, consideramos $\langle v(t) \rangle$. Suponiendo que $\langle v(0) \rangle = 0$ y utilizando $\langle F(t) \rangle = 0$, calcule $\langle v(t) \rangle$ y obtenga $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$.

C.5 — 0.5pt

El equilibrio de los flujos se expresa como $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Expresé el coeficiente de difusión D en función de k , γ y T .

Parte D. Desplazamiento cuadrático medio (2.4 puntos)

Suponga que observamos el movimiento browniano de una partícula coloidal esférica aislada de radio $a = 5.0 \mu\text{m}$ en agua. La Figura 3 muestra el histograma de los desplazamientos Δx medidos en la dirección x en cada intervalo $\Delta t = 60 \text{ s}$. El coeficiente de fricción viene dado por $\gamma = 6\pi a\eta$, con una viscosidad del agua $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, y la temperatura era $T = 25^\circ \text{C}$.

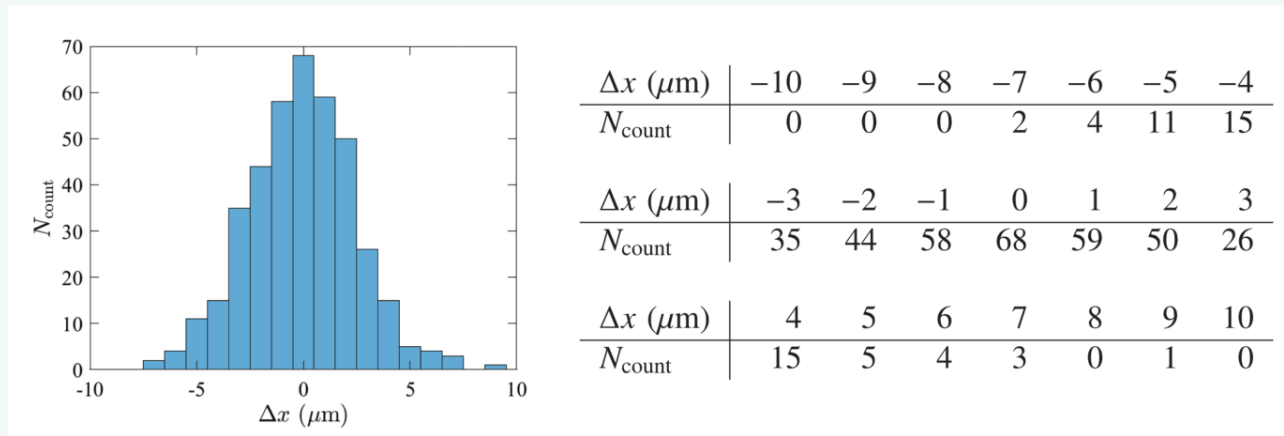


Fig.3: Histograma de los desplazamientos.

$\Delta x (\mu\text{m})$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

$\Delta x (\mu\text{m})$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

$\Delta x (\mu\text{m})$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

D.1 — 1.0pt

Estime el valor de N_A , sin utilizar el hecho de que es la constante de Avogadro, con dos cifras significativas a partir de los datos de la Fig.3. La constante de los gases es $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$. No utilice el valor de la constante de Boltzmann k dado en las Instrucciones Generales. En cuanto a la constante de Avogadro, podría obtener un valor diferente del indicado en las Instrucciones Generales.

Ahora ampliamos el modelo de la Parte B para describir el movimiento de una partícula de carga Q bajo un campo eléctrico E . La velocidad de la partícula $v(t)$ considerada en la Ec.(2) debe sustituirse por $v(t) = u + v_n (t_{n-1} < t \leq t_n)$, donde v_n satisface la Ec. (3) y u es la velocidad terminal considerada en la Ec.(5).

D.2 — 0.8pt

Expresé el MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ en función de u , D y t . Obtenga leyes de potencias aproximadas para t pequeño y t grande, así como el tiempo característico t_* en el que se produce este cambio. Esboce una gráfica del MSD en escala logarítmica en ambos ejes, indicando la posición aproximada de t_* .

A continuación, consideramos microorganismos nadadores (Fig.4(a)), en una dimensión por simplicidad (Fig.4(b)). Son partículas esféricas de radio a . Nadan a una velocidad $+u_0$ o $-u_0$, cuyo signo se elige aleatoriamente en cada intervalo de tiempo δ_0 , sin correlación. El movimiento observado es una combinación de los desplazamientos debidos a la natación y de los debidos al movimiento browniano de una partícula esférica.

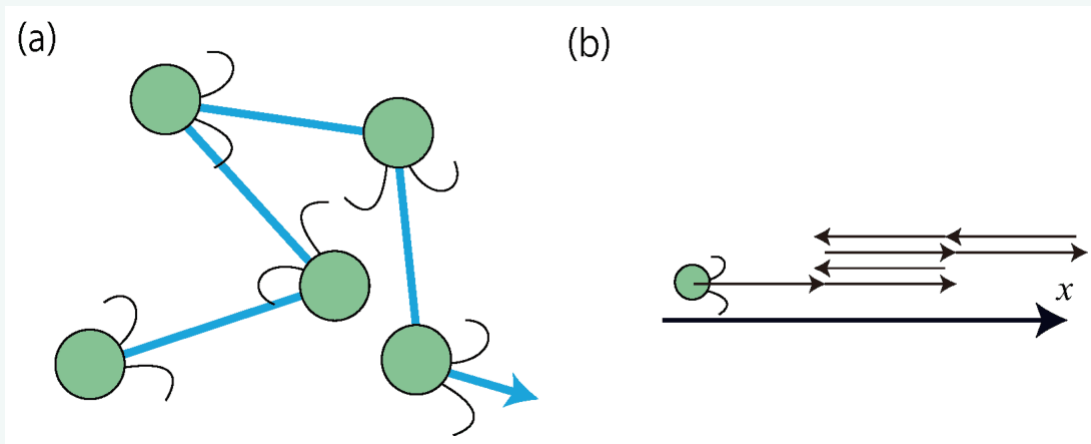


Fig.4: (a) Movimiento de los microorganismos. (b) Su versión unidimensional.

D.3 — 0.6pt

La Figura 5 muestra el MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ de esos microorganismos, con distintas leyes de potencias para t pequeño, grande e intermedio, indicadas mediante líneas discontinuas. Obtenga la ley de potencias para cada intervalo de tiempo y exprese la utilizando las magnitudes necesarias de entre D , u_0 , δ_0 y t .

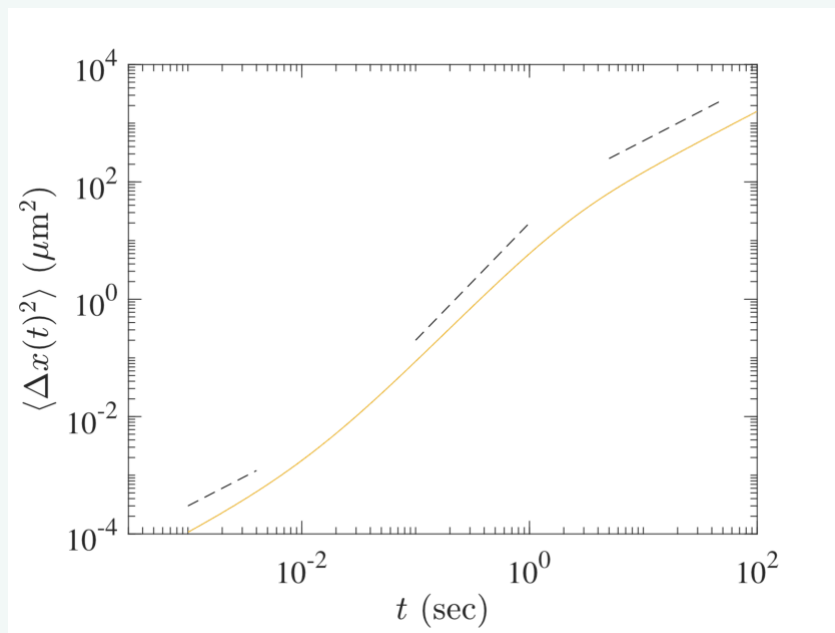


Fig.5: Desplazamiento cuadrático medio de los microorganismos.

Parte E. Purificación del agua (1.5 puntos)

Aquí analizamos la purificación del agua que contiene partículas de suelo de tipo coloidal, mediante la adición de electrolitos para hacerlas coagular. Las partículas interactúan mediante la fuerza de van der Waals y la fuerza electrostática; esta última incluye los efectos tanto de las cargas superficiales como de la capa circundante de iones de carga opuesta (estos iones y su capa se denominan contraiones y doble capa eléctrica, respectivamente; véase la Fig.6(a)). Como resultado, el potencial de interacción para una distancia entre partículas d (Fig.6(b)) viene dado por

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

donde A y B son constantes positivas, ϵ es la constante dieléctrica del agua y λ es el espesor de la doble capa eléctrica. Suponiendo que las cargas de los iones son $\pm q$, tenemos

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \quad (7)$$

donde c es la concentración molar de iones.

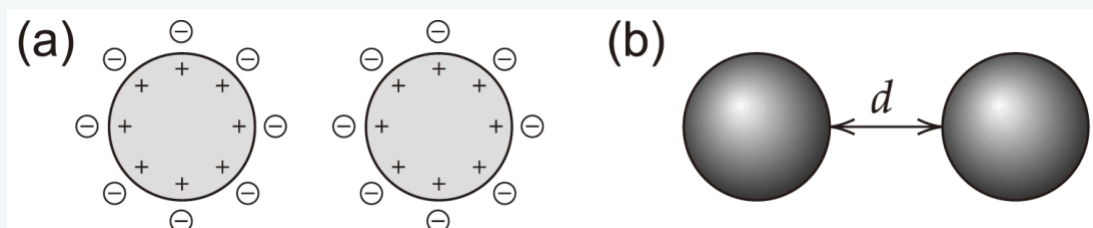


Fig.6: (a) Cargas superficiales de las partículas coloidales y contraiones. (b) Definición de la distancia d .

E.1 — 1.5pt

La adición de cloruro de sodio (NaCl) a la suspensión provoca la coagulación de las partículas coloidales. Determine la concentración mínima c de NaCl necesaria para la coagulación. Basta con considerar dos partículas sin fluctuaciones térmicas, es decir, $F(t) = 0$ en la Ec.(1), y suponer que la velocidad terminal para la fuerza debida al potencial dado se alcanza instantáneamente.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- A.1

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

- A.2

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i e^{-(t-t_i)/\tau}, \quad 0 < t_i < t.$$

Inmediatamente después de una colisión en el instante de observación, incluya $t_i = t$.

- B.1

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.$$

- B.2

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

- C.1

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2 \delta}{4} \frac{dn}{dx}(x_0).$$

- C.2

$$J_D(x_0) = -\frac{C\delta}{2} \frac{dn}{dx}(x_0), \quad D = \frac{C\delta}{2}, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

- C.3

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

- C.4

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad u = \frac{QE}{\gamma}.$$

- C.5

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

- D.1

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

- D.2

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2, \quad t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

Para $t \ll t_*$, el MSD es aproximadamente $2Dt$, con pendiente 1 en escala logarítmica en ambos ejes. Para $t \gg t_*$, es aproximadamente $u^2 t^2$, con pendiente 2.

- **D.3** Definamos $t_s = 2D/u_0^2$. Para los tres regímenes distintos mostrados, $t_s \ll \delta_0$, y

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq \begin{cases} 2Dt, & t \ll t_s, \\ u_0^2 t^2, & t_s \ll t \ll \delta_0, \\ (2D + u_0^2 \delta_0)t \simeq u_0^2 \delta_0 t, & t \gg \delta_0. \end{cases}$$

Las pendientes respectivas en escala logarítmica en ambos ejes son 1, 2, 1.

- **E.1** La concentración crítica es

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6},$$

donde q es la magnitud de la carga elemental para el NaCl. La coagulación desde una separación grande se produce para $c > c_{\text{crit}}$. Exactamente en $c = c_{\text{crit}}$, la dinámica sobreamortiguada y sin ruido planteada es marginal: las partículas se aproximan asintóticamente a una separación finita.

Solución

A.1

Al integrar la ecuación de movimiento durante la brevísima colisión, se obtiene la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento. El impulso de la fuerza de fricción se anula cuando la duración de la colisión tiende a cero, por lo que

$$M[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = I_0.$$

Como la partícula estaba inicialmente en reposo,

$$v_0 = v(t_0^+) = \frac{I_0}{M}.$$

Después de la colisión, ambas fuerzas, F y F_{ext} , se anulan. Por tanto,

$$M \frac{dv}{dt} = -\gamma v,$$

cuya solución es

$$v(t) = \frac{I_0}{M} \exp \left[-\frac{\gamma}{M} (t - t_0) \right].$$

La comparación con la forma dada proporciona

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2

La ecuación de movimiento es lineal. Cada colisión produce un incremento instantáneo de velocidad I_i/M , que posteriormente decae con un tiempo de relajación τ . Por superposición se obtiene, por tanto,

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i \exp \left[-\frac{t - t_i}{\tau} \right].$$

Solo contribuyen las colisiones posteriores al instante inicial y anteriores a la observación:

$$0 < t_i < t.$$

En el instante de una colisión, la velocidad presenta un salto I_i/M . Si $v(t)$ denota la velocidad inmediatamente después de esa colisión, se incluye el extremo superior.

B.1

Durante el intervalo n , el desplazamiento es $v_n \delta$. Por tanto, en $t = N\delta$,

$$\Delta x(t) = \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Su valor esperado es

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0.$$

Para el segundo momento,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \delta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle v_n v_m \rangle \\ &= \delta^2 NC \\ &= C\delta t. \end{aligned}$$

Los términos cruzados se anulan porque las velocidades en intervalos distintos no están correlacionadas. Por tanto,

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.$$

B.2

Para un tiempo de observación positivo fijo, el movimiento browniano debe tener un MSD finito y no nulo en el límite difusivo. Como

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t,$$

el producto $C\delta$ debe tender a una constante finita y no nula cuando $\delta \rightarrow 0$. Por tanto,

$$C \propto \delta^{-1}.$$

La dependencia temporal restante es lineal:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t.$$

En consecuencia,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

Este es el límite continuo del modelo efectivo, que describe el movimiento en escalas temporales mucho mayores que el tiempo de relajación microscópico τ .

C.1

Las partículas que se mueven hacia la derecha cruzan x_0 durante el siguiente intervalo δ si inicialmente se encuentran entre $x_0 - v\delta$ y x_0 . La mitad de las partículas de esta región se mueven hacia la derecha. Al dividir su número por unidad de área entre δ ,

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-v\delta}^{x_0} n(x) dx.$$

Utilizando la aproximación lineal indicada,

$$n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)n'(x_0),$$

obtenemos

$$N_+(x_0) \simeq \frac{1}{2\delta} \left[v\delta n(x_0) - \frac{(v\delta)^2}{2} n'(x_0) \right].$$

Por tanto,

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0).$$

Esta aproximación requiere que la concentración varíe lentamente a lo largo de una distancia $v\delta$.

C.2

Análogamente, las partículas que se mueven hacia la izquierda proceden de $x_0 < x < x_0 + v\delta$, lo que da

$$\begin{aligned} N_-(x_0) &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0}^{x_0+v\delta} n(x) dx \\ &\simeq \frac{v}{2} n(x_0) + \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0). \end{aligned}$$

Al restar y tomar el promedio,

$$\begin{aligned} J_D(x_0) &= \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle \\ &= -\frac{\delta}{2} \langle v^2 \rangle n'(x_0) \\ &= -\frac{C\delta}{2} n'(x_0). \end{aligned}$$

La comparación con la ley de Fick, $J_D = -Dn'$, da

$$D = \frac{C\delta}{2}.$$

Sustituyendo en B.1,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

C.3

Consideremos la lámina de área transversal A y espesor Δx . La fuerza eléctrica que actúa sobre ella en la dirección positiva de x es

$$F_E = n(x) A \Delta x Q E.$$

La fuerza neta debida a la presión osmótica es

$$F_{\Pi} = A\Pi(x) - A\Pi(x + \Delta x) \simeq -A\Delta x \frac{d\Pi}{dx}.$$

El equilibrio de fuerzas da

$$n(x)QE = \frac{d\Pi}{dx}.$$

A temperatura uniforme, $\Pi = nkT$, por lo que

$$\frac{d\Pi}{dx} = kT \frac{dn}{dx}.$$

De ahí,

$$\boxed{\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).}$$

El gradiente positivo es coherente con la acumulación de partículas cargadas positivamente en la dirección del campo eléctrico.

C.4

Al tomar el valor esperado de la Ec.(1), utilizando la fuerza aplicada constante y $\langle F(t) \rangle = 0$, se obtiene

$$M \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\gamma \langle v \rangle + QE.$$

La solución que satisface $\langle v(0) \rangle = 0$ es

$$\boxed{\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/M}) = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}).}$$

Por tanto, la velocidad terminal es

$$\boxed{u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma}.}$$

C.5

En equilibrio, el flujo difusivo compensa el flujo de deriva eléctrica:

$$-D \frac{dn}{dx} + nu = 0.$$

Sustituyendo los resultados de C.3 y C.4,

$$-D \frac{nQE}{kT} + n \frac{QE}{\gamma} = 0.$$

Así,

$$\boxed{D = \frac{kT}{\gamma}.}$$

Esta es la relación de Einstein entre la difusión y la fricción.

D.1

Utilizando los desplazamientos tabulados como valores representativos de los intervalos del histograma, el número total de mediciones es

$$N_{\text{tot}} = \sum_j N_j = 400.$$

La suma ponderada de los cuadrados de los desplazamientos es

$$\sum_j N_j (\Delta x_j)^2 = 2536 \mu\text{m}^2.$$

Por tanto, el MSD estimado para $\Delta t = 60 \text{ s}$ es

$$\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle = \frac{2536}{400} \mu\text{m}^2 = 6.34 \times 10^{-12} \text{ m}^2.$$

A partir de C.2,

$$D = \frac{\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}{2\Delta t} = \frac{6.34 \times 10^{-12}}{120} = 5.2833 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

El coeficiente de fricción es

$$\begin{aligned} \gamma &= 6\pi a \eta \\ &= 6\pi (5.0 \times 10^{-6}) (8.9 \times 10^{-4}) \\ &= 8.3881 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Al utilizar $k = R/N_A$ en la relación de Einstein se obtiene

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma},$$

por lo que

$$N_A = \frac{RT}{\gamma D} = \frac{2RT\Delta t}{\gamma \langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}.$$

Con $T = 298.15 \text{ K}$,

$$N_A = \frac{8.31(298.15)}{(8.3881 \times 10^{-8})(5.2833 \times 10^{-14})} = 5.5907 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Con dos cifras significativas,

$$\boxed{N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.}$$

No se ha utilizado ni un valor aceptado de N_A ni un valor numérico de k .

D.2

Al incluir la deriva a velocidad terminal, el desplazamiento es

$$\Delta x(t) = ut + \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

La parte aleatoria tiene media nula y segundo momento $2Dt$. Por tanto, el término cruzado entre la deriva y el desplazamiento aleatorio tiene promedio nulo:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= u^2 t^2 + 2ut \delta \sum_n \langle v_n \rangle + \delta^2 \sum_{n,m} \langle v_n v_m \rangle \\ &= u^2 t^2 + 2Dt. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2.}$$

La transición se produce cuando las dos contribuciones son iguales:

$$2Dt_* = u^2 t_*^2,$$

lo que da

$$t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

Las leyes de potencias en los límites son

$$\begin{array}{ll} t \ll t_* : & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt, \\ t \gg t_* : & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq u^2 t^2. \end{array}$$

Aquí, « t pequeño» se refiere al modelo difusivo efectivo, en el que ya se ha despreciado la relajación microscópica y se ha establecido la deriva a velocidad terminal.

Para describir con precisión el esbozo solicitado en escala logarítmica en ambos ejes, definamos

$$s = \frac{t}{t_*}, \quad Y = \frac{\langle \Delta x(t)^2 \rangle}{2Dt_*}.$$

Entonces

$$Y = s + s^2.$$

La gráfica sigue la asíntota recta $Y = s$, de pendiente 1, para s pequeño, se curva suavemente hacia arriba cerca de $s = 1$ y se aproxima a $Y = s^2$, de pendiente 2, para s grande. Las dos asíntotas se cortan en $(s, Y) = (1, 1)$, mientras que la curva real pasa por $(1, 2)$. Por tanto, se debe marcar $t = t_*$ en la zona donde se curva la gráfica. En ese punto,

$$\langle \Delta x(t_*)^2 \rangle = \frac{8D^2}{u^2}.$$

D.3

Escribamos el desplazamiento como la suma de las contribuciones térmica y de natación:

$$\Delta x(t) = \Delta x_B(t) + \Delta x_S(t).$$

Se supone que el movimiento térmico y las elecciones de la dirección de natación son independientes, y ambas contribuciones tienen media nula. Por tanto,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle.$$

Para $t \ll \delta_0$, la dirección de natación permanece prácticamente invariable durante el intervalo de observación. Por tanto,

$$\Delta x_S(t) \simeq \pm u_0 t, \quad \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle \simeq u_0^2 t^2.$$

Así,

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt + u_0^2 t^2 \quad (t \ll \delta_0).$$

Los dos términos se hacen comparables en

$$t_s = \frac{2D}{u_0^2}.$$

En consecuencia, la difusión térmica domina para $t \ll t_s$, y la natación produce un régimen balístico para $t_s \ll t \ll \delta_0$.

Para tiempos largos, consideremos N intervalos completos de natación, con $t = N\delta_0$. Sea $s_j = \pm 1$ el signo elegido de forma independiente en el intervalo j . Entonces

$$\Delta x_S(t) = u_0 \delta_0 \sum_{j=1}^N s_j.$$

Como $\langle s_j \rangle = 0$ y $\langle s_j s_\ell \rangle = 0$ para $j \neq \ell$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle &= u_0^2 \delta_0^2 N \\ &= u_0^2 \delta_0 t. \end{aligned}$$

Un intervalo final incompleto no altera este comportamiento dominante para $t \gg \delta_0$. Por tanto, el MSD a tiempos largos es

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq (2D + u_0^2 \delta_0) t.$$

De forma equivalente, el coeficiente de difusión a tiempos largos es

$$D_{\text{eff}} = D + \frac{u_0^2 \delta_0}{2}.$$

Para que exista un régimen intermedio bien desarrollado, como en la figura, las escalas temporales deben satisfacer

$$\frac{2D}{u_0^2} \ll \delta_0.$$

Esto también implica $u_0^2 \delta_0 \gg 2D$. Por tanto, las tres asíntotas observadas son

Intervalo de tiempo	$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$	Pendiente log-log
$t \ll 2D/u_0^2$	$2Dt$	1
$2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0$	$u_0^2 t^2$	2
$t \gg \delta_0$	$u_0^2 \delta_0 t$	1

conservando el coeficiente completo a tiempos largos $2D + u_0^2 \delta_0$ cuando la difusión térmica es apreciable.

E.1

Definamos la escala de energía positiva

$$K = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}.$$

Entonces

$$U(d) = -\frac{A}{d} + K e^{-d/\lambda},$$

y

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{K}{\lambda} e^{-d/\lambda}.$$

La fuerza que tiende a aumentar la separación es $-U'(d)$. Bajo la hipótesis de que la velocidad terminal se alcanza instantáneamente, la velocidad de cada partícula es proporcional a la fuerza que actúa sobre ella. Para dos partículas idénticas con coeficiente de fricción γ ,

$$\dot{d} = -\frac{2}{\gamma} U'(d).$$

Por tanto, las partículas se acercan entre sí siempre que $U'(d) > 0$.

Para que las partículas que se aproximan desde una separación grande lleguen a entrar en contacto sin fluctuaciones térmicas, no debe existir ninguna región repulsiva intermedia ni un equilibrio estable a una separación finita. La condición crítica es, por tanto, la desaparición de la región en la que $U'(d) < 0$.

Reescribimos la derivada como

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} \left[1 - \frac{K\lambda}{A} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 e^{-d/\lambda} \right].$$

Sea $z = d/\lambda > 0$. La función que determina el signo es

$$f(z) = z^2 e^{-z}.$$

Su derivada es

$$f'(z) = ze^{-z}(2 - z),$$

por lo que su máximo global se alcanza en $z = 2$, con

$$f_{\max} = 4e^{-2}.$$

En consecuencia, $U'(d) \geq 0$ para cualquier separación si y solo si

$$\frac{K\lambda}{A} 4e^{-2} \leq 1.$$

La longitud de apantallamiento crítica es

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{\exp(2)A}{4K} = \frac{\exp(2)Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2}.$$

En este umbral, los dos puntos estacionarios del potencial se fusionan en

$$d_{\text{crit}} = 2\lambda_{\text{crit}},$$

donde tanto $U'(d_{\text{crit}})$ como $U''(d_{\text{crit}})$ se anulan.

El aumento de la concentración de sal disminuye λ . Al sustituir λ_{crit} en la Ec.(7),

$$\begin{aligned} c_{\text{crit}} &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 \lambda_{\text{crit}}^2} \\ &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2} \left[\frac{4B\epsilon(kT)^2}{\exp(2)Aq^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2\epsilon^3(kT)^5}{\exp(4)N_A A^2 q^6}.$$

Para el NaCl, los iones son monovalentes, por lo que q es la magnitud de la carga elemental. La concentración de cada especie iónica es igual a la concentración molar de NaCl; el factor 2 de la Ec.(7) ya tiene en cuenta ambas especies. Con parámetros en el SI, el resultado tiene unidades de mol m^{-3} .

Para $c > c_{\text{crit}}$, $U'(d) > 0$ para toda separación positiva, y el movimiento determinista lleva a un par inicialmente separado a entrar en contacto. Para $c < c_{\text{crit}}$, un par que se aproxima desde una separación suficientemente grande queda atrapado en el mínimo local exterior de U .

Hay una salvedad precisa en el caso de igualdad. En $c = c_{\text{crit}}$,

$$U'(d) \propto (d - d_{\text{crit}})^2$$

cerca de d_{crit} . Por tanto, la aproximación sobrearmortiguada desde separaciones mayores tarda un tiempo infinito en alcanzar esa separación. Así, c_{crit} es el umbral crítico, o ínfimo de las concentraciones que producen coagulación desde una separación grande; la dinámica idealizada requiere $c > c_{\text{crit}}$ para llegar efectivamente al contacto.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Estrellas de neutrones

Estudiamos la estabilidad de los núcleos grandes y estimamos la masa de las estrellas de neutrones de forma teórica y experimental.

Parte A. Masa y estabilidad de los núcleos (2.5 puntos)

La energía en reposo de un núcleo $m(Z, N)c^2$ compuesto por Z protones y N neutrones es menor que la suma de las energías en reposo de los protones y neutrones, denominados en adelante nucleones, en una cantidad igual a la energía de enlace $B(Z, N)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Despreciando pequeñas correcciones, podemos aproximar la energía de enlace, compuesta por el término de volumen con a_V , el término de superficie con a_S , el término de energía de Coulomb con a_C y el término de energía de simetría con a_{sym} , de la siguiente manera.

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

Aquí, $A = Z + N$ es el número másico y m_N es la masa del nucleón. En el cálculo, utilice $a_V \approx 15.8$ MeV, $a_S \approx 17.8$ MeV, $a_C \approx 0.711$ MeV y $a_{\text{sym}} \approx 23.7$ MeV (MeV = 10^6 electronvoltios).

A.1 — 0.9pt

Bajo la condición $Z = N$, determine A para maximizar la energía de enlace por nucleón, B/A .

A.2 — 0.9pt

Bajo la condición de que A sea fijo, el número atómico del núcleo más estable, Z^* , se determina maximizando $B(Z, A - Z)$. Para $A = 197$, calcule Z^* utilizando la ec. (1).

A.3 — 0.7pt

Un núcleo con un valor grande de A se divide en núcleos más ligeros mediante fisión para minimizar la energía total de masa en reposo. Por simplicidad, consideramos una de las múltiples formas de dividir un núcleo con (Z, N) en dos núcleos iguales, lo cual ocurre cuando se cumple la siguiente relación energética:

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Si esta relación se escribe como

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

obtenga C_{fission} con dos cifras significativas.

Parte B. La estrella de neutrones como un núcleo gigantesco (1.5 puntos)

Los núcleos grandes con un número másico suficientemente grande $A > A_c$, donde A_c es un umbral, permanecen estables frente a la fisión nuclear gracias a una energía de enlace gravitatoria suficientemente grande.

B.1 — 1.5pt

Suponemos que, para un valor de A suficientemente grande, se cumplen $N = A$ y $Z = 0$, y que la ec. (1) sigue siendo válida al añadir la energía de enlace gravitatoria. La energía de enlace debida a la gravedad es

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

donde $M = m_N A$ y $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$, son la masa y el radio del núcleo, respectivamente.

Para $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$, obtenga a_{grav} en MeV con una cifra significativa. A continuación, despreciando el término de superficie, estime A_c con una cifra significativa. En el cálculo, utilice $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ y $G = \hbar c / M_P^2$, donde $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ y $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

Parte C. Una estrella de neutrones en un sistema binario (6.0 puntos)

Algunas estrellas de neutrones son púlsares que emiten regularmente ondas electromagnéticas, que aquí llamamos «luz» por simplicidad, con un período constante. Las estrellas de neutrones suelen formar sistemas binarios con una enana blanca. Consideremos la configuración estelar mostrada en la Fig. 1, en la que un pulso de luz procedente de una estrella de neutrones **N** y dirigido hacia la Tierra **E** pasa cerca de una enana blanca **W** del sistema binario. La medición de estos pulsos, afectados por la gravedad de la estrella, permite estimar con precisión la masa de **W**, como se explica a continuación, lo que a su vez permite estimar la masa de **N**.

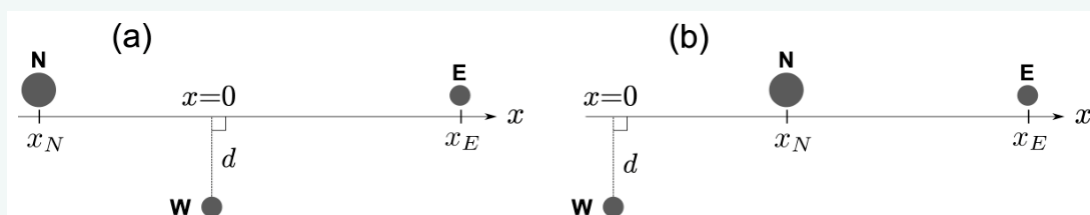
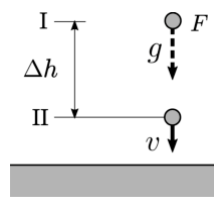


Fig. 1: Configuraciones con el eje x a lo largo de la línea que une **N** y **E**. (a) para $x_N < 0$ y (b) para $x_N > 0$.

C.1 — 1.0pt

Como se muestra en la figura siguiente, bajo una aceleración gravitatoria constante g , situamos dos niveles I y II con una diferencia de altura $\Delta h (> 0)$. Coloque relojes idénticos en I, II y F , el sistema en caída libre, denominados reloj-I, reloj-II y reloj- F , respectivamente.



Disposición del experimento mental.

Suponemos que un observador se encuentra junto al reloj- F y que, inicialmente, F está situado a la misma altura que el reloj-I y su velocidad es cero. Como los relojes son idénticos, registran intervalos de tiempo iguales, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. A continuación, dejamos que F caiga libremente y trabajamos en el sistema de referencia de F , que se considera inercial. En este sistema de referencia, el reloj-II pasa junto al reloj- F con velocidad v , de modo que la dilatación temporal del reloj-II puede determinarse mediante la transformación de Lorentz. Cuando transcurre un tiempo $\Delta\tau_I$ en el reloj- F , transcurre un tiempo $\Delta\tau_{II}$ en el reloj-II.

Determine $\Delta\tau_{II}$ en función de $\Delta\tau_I$ hasta primer orden en $\Delta\phi/c^2$, donde $\Delta\phi = g\Delta h$ es una diferencia de potencial gravitatorio, es decir, de energía potencial gravitatoria por unidad de masa.

C.2 — 1.8pt

Bajo el potencial gravitatorio ϕ , los retardos temporales modifican la velocidad efectiva de la luz, c_{eff} , observada desde el infinito, aunque la velocidad local de la luz es c . Cuando $\phi(r = \infty) = 0$, c_{eff} puede expresarse hasta primer orden en ϕ/c^2 como

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

incluyendo el efecto de la distorsión del espacio, que no se tuvo en cuenta en **C.1**. Señalamos que la trayectoria de la luz puede aproximarse por una línea recta.

Como se muestra en la Fig. 1 (a), tomamos el eje x a lo largo de la trayectoria de la luz desde la estrella de neutrones **N** hasta la Tierra **E** y situamos $x = 0$ en el punto de la trayectoria de la luz más cercano a la enana blanca **W**. Sea $x_N (< 0)$ la coordenada x de **N**, $x_E (> 0)$ la de **E** y d la distancia entre **W** y la trayectoria de la luz.

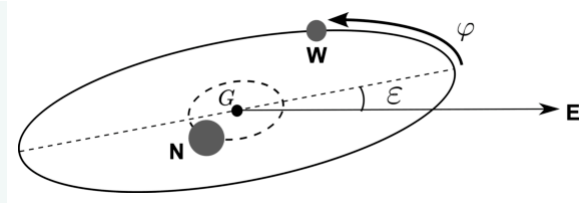
Estime la variación del tiempo de llegada Δt de la luz de **N** a **E** causada por la enana blanca de masa M_{WD} y exprese la respuesta de forma sencilla, despreciando los términos de orden superior de las siguientes cantidades pequeñas: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ y $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Si es necesario, utilice la siguiente fórmula.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

(log es el logaritmo natural)

C.3 — 1.8pt

Como se muestra a continuación, en un sistema estelar binario se supone que **N** y **W** se mueven en órbitas circulares de excentricidad nula alrededor del centro de masas G , en el plano orbital. Sea ε el ángulo de inclinación orbital medido desde el plano orbital hasta la línea dirigida hacia **E** desde G , sea L la distancia entre **N** y **W**, y sea M_{WD} la masa de la enana blanca. En lo que sigue, suponemos que $\varepsilon \ll 1$.



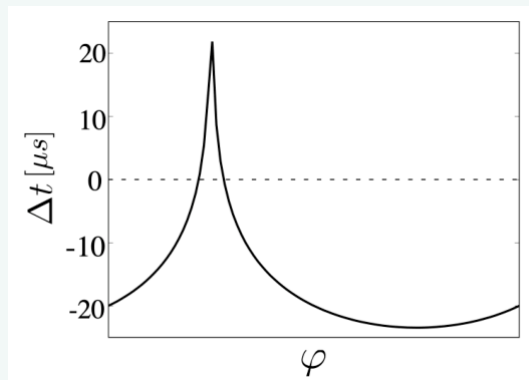
Sistema estelar binario.

Observamos en **E**, muy lejos de **N**, pulsos de luz procedentes de **N**. La trayectoria de la luz hasta **E** varía con el tiempo según la configuración de **N** y **W**. El retardo en el intervalo temporal de llegada de los pulsos a **E** tiene el valor máximo $\Delta t_{\max}$ para $x_N \simeq -L$ y el valor mínimo $\Delta t_{\min}$ para $x_N \simeq L$ (véase la configuración en la Fig. 1 (b)).

Calcule $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$ de forma sencilla, despreciando los términos de orden superior de las cantidades pequeñas, como se hizo en **C.2**. Señalamos que se supone que los retardos debidos a la gravedad de objetos estelares distintos de **W** se cancelan en $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$.

C.4 — 0.8pt

La figura siguiente muestra los retardos temporales observados en función de la fase orbital φ para el sistema estelar binario con $L \approx 6 \times 10^6$ km y $\cos \varepsilon \approx 0.99989$. Estime M_{WD} en términos de la masa solar $M_{\odot}$ y dé el resultado de $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$ con una cifra significativa. Aquí puede utilizarse la relación aproximada $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$.



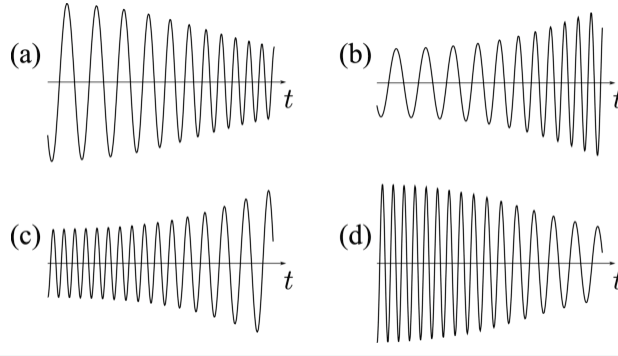
Retardos temporales observados Δt en función de la fase orbital φ (véase la figura de **C.3**) que permite situar **N** y **W** en sus órbitas.

C.5 — 0.4pt

En un sistema binario de estrellas de neutrones, las dos estrellas pierden energía y momento angular al emitir ondas gravitacionales y finalmente colisionan y se fusionan. Por simplicidad, consideremos únicamente un movimiento circular de radio R y velocidad angular ω ; entonces se cumple $\omega = \chi R^p$, con una constante χ que no depende ni de ω ni de R , si se desprecian los efectos relativistas. Determine el valor de p .

C.6 — 0.2pt

La amplitud de la onda gravitacional emitida por el sistema binario de **C.5** es proporcional a $R^2 \omega^2$. La figura siguiente muestra cualitativamente cuatro perfiles temporales distintos de las ondas gravitacionales observadas antes de la colisión de las dos estrellas. Seleccione el perfil más apropiado entre (a) y (d).



Perfiles de los datos observados de ondas gravitacionales.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** $A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 50$.
- **A.2:** $Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}} = 78.55 \dots$, lo que da el número atómico entero 79.
- **A.3:** $C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx \text{0.70}$.
- **B.1:** $a_{\text{grav}} \approx \text{6} \times 10^{-37} \text{ MeV}$, $A_c \approx \text{4} \times 10^{55}$, utilizando el criterio de energía de enlace total positiva que se analiza más adelante.
- **C.1:** $\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)$.
- **C.2:** $\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)$.
- **C.3:** $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \approx \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$.
- **C.4:** $\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5$, o $M_{\text{WD}} \approx 0.5M_{\odot}$.
- **C.5:** $p = -\frac{3}{2}$.
- **C.6:** (b): tanto la amplitud como la frecuencia aumentan a medida que las estrellas se acercan a la colisión.

Solución

A.1

Para $Z = N = A/2$, el término de simetría se anula. La energía de enlace por nucleón pasa a ser

$$\frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - \frac{a_C}{4} A^{2/3}.$$

Tratando A como una variable continua,

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{a_S}{3} A^{-4/3} - \frac{a_C}{6} A^{-1/3} = \frac{2a_S - a_C A}{6A^{4/3}}.$$

Esta derivada es positiva por debajo de $A = 2a_S/a_C$ y negativa por encima, por lo que este punto estacionario es un máximo:

$$A = \frac{2a_S}{a_C} = \frac{2(17.8)}{0.711} = 50.07 \dots$$

Por tanto,

$$\boxed{A \approx 50}.$$

El número másico par permitido más cercano, compatible con valores enteros de $Z = N$, es $A = 50$.

A.2

Para A fijo, $N = A - Z$, de modo que $N - Z = A - 2Z$. Solo los términos de Coulomb y de simetría dependen de Z :

$$B(Z, A - Z) = \text{constante} - a_C Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z)^2.$$

La condición de maximización es

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-1/3} + \frac{4a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z) = 0.$$

Reordenando,

$$4a_{\text{sym}} A = Z \left(8a_{\text{sym}} + 2a_C A^{2/3} \right),$$

por lo que

$$\boxed{Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}}}.$$

Es un máximo porque

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_C A^{-1/3} - \frac{8a_{\text{sym}}}{A} < 0.$$

Para $A = 197$,

$$Z^* = \frac{197}{2 + \frac{0.711}{2(23.7)} 197^{2/3}} = 78.553 \dots$$

Como la dependencia respecto de Z es una función cuadrática cóncava, el entero óptimo es el entero más cercano:

$$\boxed{Z^* = 79}.$$

A.3

El número total de nucleones se conserva, por lo que los términos de energía en reposo de los nucleones libres se cancelan. La fisión es energéticamente favorable cuando

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) > 0.$$

Los términos de volumen y de simetría no cambian en conjunto. El término de superficie total de los núcleos hijos es

$$-2a_S(A/2)^{2/3} = -a_S 2^{1/3} A^{2/3},$$

y su término de Coulomb total es

$$-2a_C \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} = -a_C 2^{-2/3} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Por tanto,

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) = -a_S(2^{1/3} - 1)A^{2/3} + a_C(1 - 2^{-2/3}) \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

La condición para que la energía liberada sea positiva pasa a ser

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{a_S}{a_C}.$$

Así pues,

$$C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0.702414 \dots \approx 0.70.$$

Físicamente, la fisión se vuelve favorable cuando la reducción de la repulsión de Coulomb supera el coste de la superficie adicional.

B.1

Al sustituir la masa y el radio indicados en la energía de enlace gravitatoria, se obtiene

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G(m_N A)^2}{R_0 A^{1/3}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} A^{5/3}.$$

Por tanto,

$$a_{\text{grav}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c}{R_0} \left(\frac{m_N c^2}{M_P c^2} \right)^2.$$

Utilizando las constantes proporcionadas,

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.1 \text{ fm}} \left(\frac{939}{1.22 \times 10^{22}} \right)^2 = 6.3656 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

Con una cifra significativa,

$$a_{\text{grav}} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

Para $Z = 0$ y $N = A$, el término de Coulomb se anula y el término de simetría es $-a_{\text{sym}}A$. Despreciando el término de superficie, como se indica,

$$B_{\text{tot}}(A) = (a_V - a_{\text{sym}})A + a_{\text{grav}}A^{5/3},$$

o bien

$$\frac{B_{\text{tot}}}{A} = -7.9 \text{ MeV} + a_{\text{grav}}A^{2/3}.$$

Interpretando el umbral finito como el inicio de un estado ligado respecto de A neutrones libres, la condición es

$$B_{\text{tot}} > 0.$$

En consecuencia,

$$A > A_c, \quad A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_V}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2}.$$

Conservando el valor sin redondear de a_{grav} durante este cálculo,

$$A_c = \left(\frac{7.9}{6.3656 \times 10^{-37}} \right)^{3/2} = 4.3721 \times 10^{55}.$$

Por tanto,

$$\boxed{A_c \approx 4 \times 10^{55}}.$$

La distinción entre este umbral de enlace y una comparación estricta de fisión en dos gotas es esencial aquí: para $Z = 0$ y despreciando el término de superficie, $B_{\text{tot}}(A) - 2B_{\text{tot}}(A/2)$ es igual a $(1 - 2^{-2/3}) a_{\text{grav}} A^{5/3}$, que es positivo para todo A , de modo que la comparación con dos gotas no da ningún umbral finito.

C.1

Durante la caída libre a lo largo de una altura Δh , la conservación de la energía newtoniana da, con la precisión requerida,

$$\frac{1}{2}v^2 = g\Delta h = \Delta\phi,$$

por lo que

$$v^2 = 2\Delta\phi.$$

En el sistema de referencia inercial instantáneo del observador en caída libre, el reloj-II se mueve con rapidez v . La dilatación temporal de la relatividad especial da

$$\Delta\tau_{\text{II}} = \Delta\tau_F \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Utilizando la comparación de relojes indicada en el problema, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\text{I}}$, y desarrollando hasta primer orden,

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\text{II}} &= \Delta\tau_{\text{I}} \sqrt{1 - \frac{2\Delta\phi}{c^2}} \\ &\approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)}.$$

El reloj situado más abajo marcha más despacio.

C.2

En la posición x , la distancia a la enana blanca es

$$r(x) = \sqrt{x^2 + d^2},$$

y su potencial gravitatorio es

$$\phi(x) = -\frac{GM_{\text{WD}}}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

La expresión dada para un campo débil implica

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} \right).$$

El tiempo de propagación sin la enana blanca es $(x_E - x_N)/c$. Al restarlo del tiempo de propagación real a lo largo de la misma trayectoria recta, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}}} - \frac{1}{c} \right) dx \\ &\approx -\frac{2}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \phi(x) dx \\ &= \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}. \end{aligned}$$

Una forma equivalente de la primitiva proporcionada es $\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$. Por tanto, a primer orden en el potencial gravitatorio,

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2}}{x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2}} \right).$$

Para $x_E \gg d$,

$$x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2} \approx 2x_E.$$

Para $x_N < 0$ y $|x_N| \gg d$, racionalizar evita la cancelación:

$$x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2} = \frac{d^2}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + |x_N|} \approx \frac{d^2}{2|x_N|}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)}.$$

Este es un retardo gravitatorio positivo en la propagación. El logaritmo es adimensional y GM_{WD}/c^3 tiene unidades de tiempo.

C.3

En las dos conjunciones, la proyección de la separación L sobre la línea de visión da

$$x_N = -L \cos \varepsilon \quad \text{para el retardo máximo,}$$

y

$$x_N = +L \cos \varepsilon \quad \text{para el retardo mínimo.}$$

En cualquiera de las dos conjunciones,

$$d = L \sin \varepsilon, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} = L.$$

Como la Tierra está lejos del sistema binario, podemos utilizar el mismo x_E en ambas configuraciones con la precisión adoptada. El resultado de la integral de C.2, antes de suponer un x_N negativo, da

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L + x_N} \right).$$

Así pues,

$$\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 - \cos \varepsilon)} \right),$$

mientras que

$$\Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 + \cos \varepsilon)} \right).$$

Al restar, se eliminan tanto x_E como L :

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right).$$

Para $\varepsilon \ll 1$,

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + \cos \varepsilon \approx 2.$$

Por tanto, la forma solicitada para ángulos pequeños es

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) = \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right).$$

Aquí, ε se expresa en radianes. El crecimiento logarítmico para inclinaciones pequeñas corresponde a que la luz pasa cada vez más cerca de la enana blanca, dentro de las aproximaciones indicadas.

C.4

La lectura de la gráfica da aproximadamente

$$\Delta t_{\text{max}} \approx +22 \mu\text{s}, \quad \Delta t_{\text{min}} \approx -23 \mu\text{s}.$$

Por tanto, el intervalo medible es aproximadamente

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx 45 \mu\text{s}.$$

Un desplazamiento constante arbitrario en los retardos representados no afecta a esta diferencia.

Utilizando la inclinación proporcionada,

$$\ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{1.99989}{0.00011} \right) \approx 9.808.$$

Entonces, C.3 da

$$45 \mu\text{s} \approx 2 (5 \mu\text{s}) \frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} (9.808).$$

Por tanto,

$$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx \frac{45}{98.08} \approx 0.46.$$

Con una cifra significativa,

$$\boxed{\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5}, \quad \boxed{M_{\text{WD}} \approx 0.5 M_{\odot}}.$$

La separación proporcionada L se cancela en la diferencia entre el retardo máximo y el mínimo.

C.5

Sean M_1, M_2 las masas de las estrellas y r su separación. El movimiento circular newtoniano de dos cuerpos satisface

$$\omega^2 r^3 = G(M_1 + M_2).$$

Para masas fijas, el radio orbital R de cualquiera de las estrellas es un múltiplo constante de r . En consecuencia,

$$\omega \propto r^{-3/2} \propto R^{-3/2}.$$

Comparando con $\omega = \chi R^p$,

$$\boxed{p = -\frac{3}{2}}.$$

C.6

A medida que el sistema binario pierde energía orbital, su radio orbital disminuye. De C.5,

$$\omega \propto R^{-3/2},$$

por lo que la frecuencia orbital, y por tanto la frecuencia de las ondas gravitacionales, aumenta.

La dependencia dada de la amplitud da

$$\text{amplitud} \propto R^2 \omega^2 \propto R^2 R^{-3} = R^{-1}.$$

Por tanto, la amplitud también aumenta a medida que R disminuye. La forma de onda buscada tiene una envolvente que se expande y oscilaciones cada vez más próximas entre sí:

$$\boxed{\text{Perfil (b)}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Agua y objetos

En este problema, consideramos los fenómenos causados por la interacción entre el agua y los objetos, relacionados con la tensión superficial. La Parte A trata del movimiento, mientras que las Partes B y C se refieren a situaciones estáticas.

Si es necesario, puede utilizar el hecho de que, si la función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial $y''(x) = ay(x)$ (a es una constante positiva), entonces su solución general es $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, donde A y B son constantes arbitrarias.

Parte A. Coalescencia de gotas de agua (2.0 puntos)

Como se muestra en la Fig.1, consideramos dos gotas de agua esféricas en reposo sobre la superficie de un material superhidrófobo, es decir, existe una fuerza de repulsión muy intensa entre el material y el agua.

Inicialmente, se colocan sobre la superficie dos gotas de agua esféricas idénticas, una junto a la otra; después, estas dos gotas se unen al entrar en contacto y forman una gota de agua esférica más grande, que de repente salta hacia arriba.

A.1 2.0pt

El radio a de ambas gotas de agua antes de la coalescencia es $100\ \mu\text{m}$. La densidad del agua ρ es $1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. La tensión superficial γ es $7.27 \times 10^{-2}\ \text{J/m}^2$.

Una fracción k de la diferencia de energía superficial antes y después de la coalescencia, ΔE , se transforma en energía cinética de la gota de agua que salta. Determine entonces la velocidad inicial de ascenso, v , de la gota de agua resultante, con dos cifras significativas, bajo las siguientes hipótesis:

- $k = 0.06$
- Antes y después de la coalescencia, el volumen total de agua se conserva.

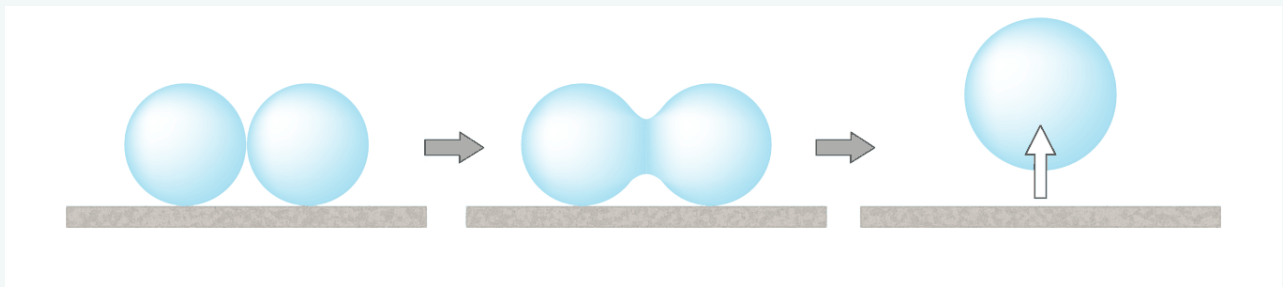


Fig. 1: Coalescencia de dos gotas de agua y salto de la gota de agua resultante.

Parte B. Una placa colocada verticalmente (4.5 puntos)

Una placa plana se sumerge verticalmente en agua. Las Figuras 2(a) y 2(b) muestran, respectivamente, las formas de la superficie del agua para placas de materiales hidrófilos (atractivos) e hidrófobos. Despreciamos el espesor de la placa.

La superficie de la placa se encuentra en el plano yz , y la superficie horizontal del agua lejos de la placa se encuentra en el plano xy , con $z = 0$. La forma de la superficie no depende de la coordenada y . Sea $\theta(x)$ el ángulo entre la superficie del agua y el plano horizontal en un punto (x, z) de la superficie del agua en el plano xz . Aquí, $\theta(x)$ se mide respecto al semieje positivo x , y se toma como positivo el sentido de giro antihorario. Sea θ_0 el valor de $\theta(x)$ en el punto de contacto entre la placa y la superficie del agua ($x = 0$). En lo que sigue, θ_0 queda fijado por las propiedades del material de la placa.

La densidad del agua ρ es constante y la tensión superficial del agua γ es uniforme. La aceleración de la gravedad, constante, viene dada por g . Se supone que la presión atmosférica, P_0 , es siempre uniforme. Determinemos la forma de la superficie del agua mediante los siguientes pasos. Tenga en cuenta que la unidad de la tensión superficial es tanto J/m^2 como N/m .

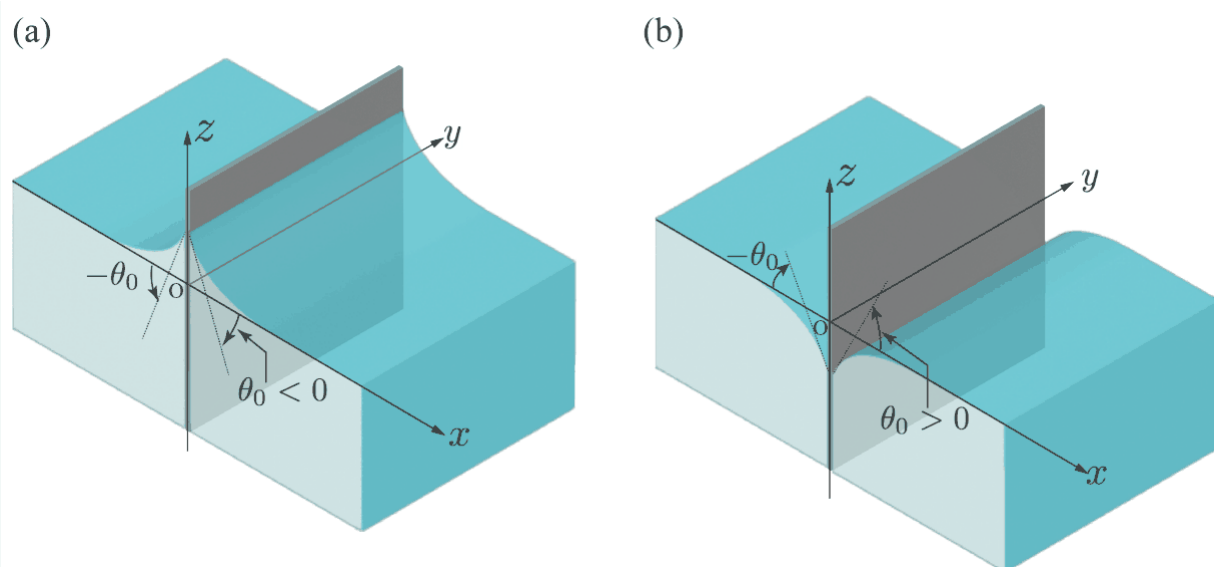


Fig. 2: Placas sumergidas verticalmente en el agua. (a) Caso de una placa hidrófila; (b) caso de una placa hidrófoba.

B.1 0.6pt

Consideramos el caso de una placa hidrófila, como se muestra en la Fig.2(a). Observamos que la presión del agua, P , satisface las condiciones $P < P_0$ para $z > 0$ y $P = P_0$ para $z = 0$. Expresé entonces P a la altura z en función de ρ , g , z y P_0 .

B.2 0.8pt

Consideramos un bloque de agua cuya porción recortada se muestra sombreada en la Fig.3(a). Su sección transversal en el plano xz se muestra como una región rayada en la Fig.3(b). Sean z_1 y z_2 , respectivamente, las coordenadas de los extremos izquierdo y derecho de la frontera (superficie del agua) entre el bloque de agua y el aire.

Obtenga la componente horizontal (componente x) de la fuerza neta por unidad de longitud a lo largo del eje y , f_x , que la presión ejerce sobre el bloque de agua, en función de ρ , g , z_1 y z_2 . Tenga en cuenta que P_0 no produce ninguna fuerza horizontal neta sobre el bloque de agua.

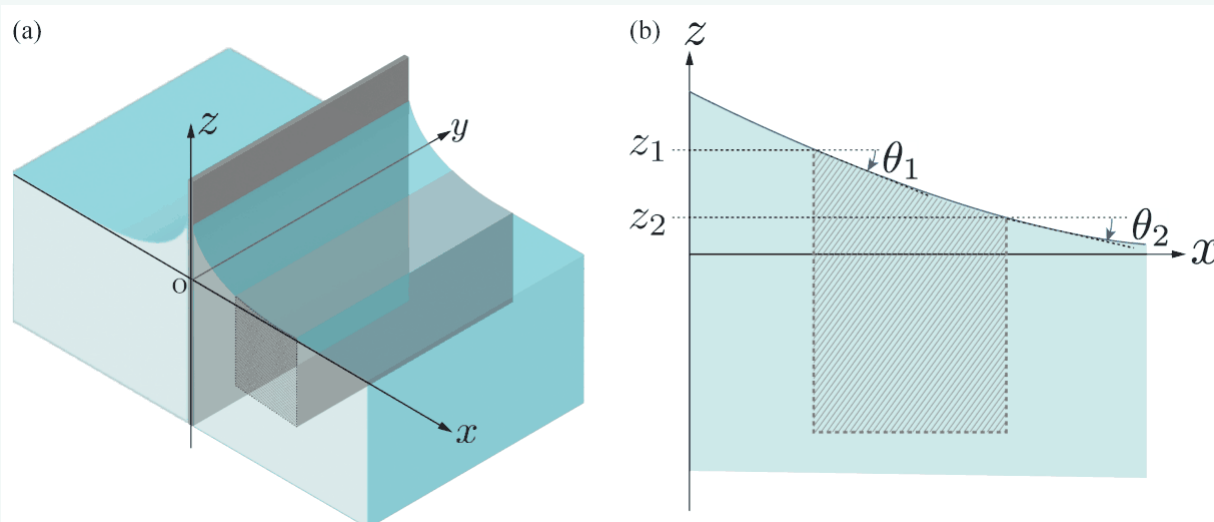


Fig. 3: Forma de la porción recortada del bloque de agua en la superficie del agua. (a) Vista aérea y (b) vista en sección transversal.

B.3 0.8pt

La tensión superficial que actúa sobre el bloque de agua se equilibra con la fuerza f_x considerada en B.2. Definimos θ_1 y θ_2 , respectivamente, como los ángulos entre la superficie del agua y el plano horizontal en los extremos izquierdo y derecho. Expresé f_x en función de γ , θ_1 y θ_2 .

B.4 0.8pt

La siguiente ecuación se cumple en un punto arbitrario (x, z) de la superficie del agua:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{constante.} \quad (1)$$

Determine el exponente a y exprese la constante ℓ en función de γ y ρ . Tenga en cuenta que esta ecuación se cumple independientemente de que el material de la placa sea hidrófilo o hidrófobo.

B.5 1.5pt

En la Ec. (1) de B.4, suponemos que la variación de la superficie del agua es lenta, es decir, $|z'(x)| \ll 1$, de modo que podemos desarrollar $\cos \theta(x)$ respecto a $z'(x)$ hasta segundo orden. A continuación, derivando la ecuación resultante respecto a x , obtenemos la ecuación diferencial que satisface $z(x)$. Resuelva esta ecuación diferencial y determine $z(x)$ para $x \geq 0$ en función de $\tan \theta_0$ y ℓ . Tenga en cuenta que las dimensiones verticales de las Figs. 2 y 3 están exageradas para facilitar la visualización y no satisfacen la condición $|z'(x)| \ll 1$.

Parte C. Interacción entre dos varillas (3.5 puntos)

Las varillas idénticas A y B, hechas del mismo material y que flotan paralelas sobre la superficie del agua, se colocan a la misma distancia del eje y (Fig.4).

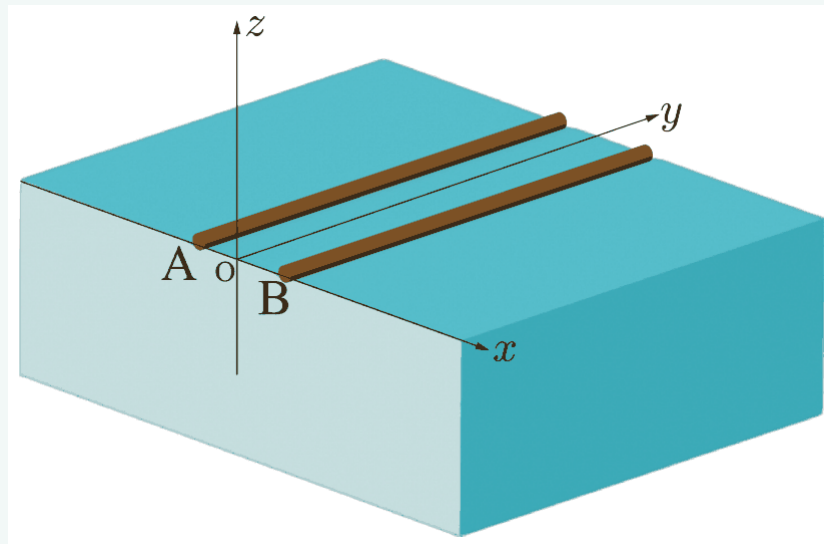


Fig. 4: Dos varillas A y B que flotan sobre la superficie del agua.

C.1 1.0pt

En los puntos de contacto entre la varilla B y la superficie del agua, definimos las coordenadas z_a y z_b , y los ángulos θ_a y θ_b , como se muestra en la Fig.5. Determine la componente horizontal de la fuerza, F_x , sobre la varilla B por unidad de longitud a lo largo del eje y , en función de θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g y γ .

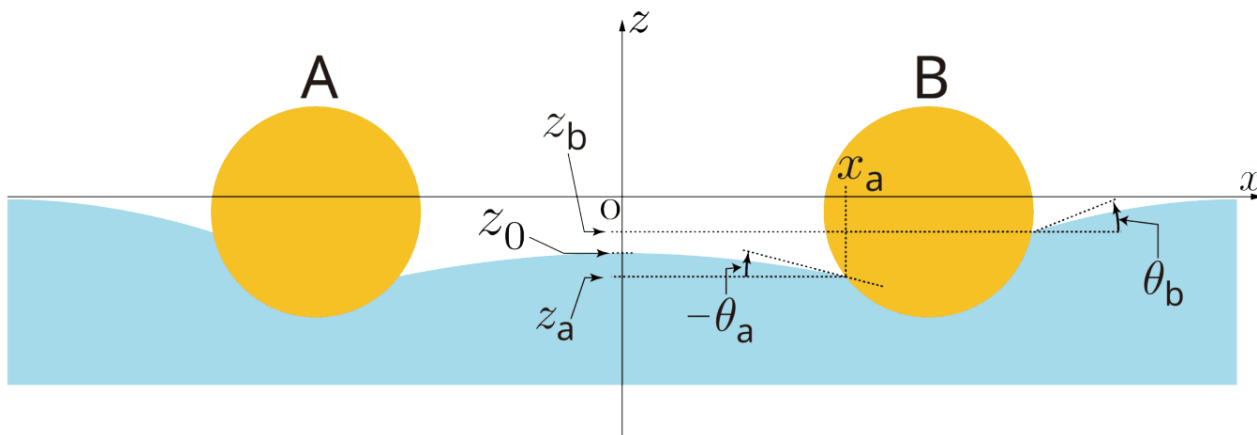


Fig. 5: Vista en sección transversal vertical de dos varillas que flotan sobre la superficie del agua.

C.2 1.5pt

Definimos la coordenada z de la superficie del agua, z_0 , en el punto medio entre las dos varillas en el plano xz . Exprese la fuerza F_x obtenida en C.1 sin utilizar θ_a , θ_b , z_a ni z_b .

C.3 1.0pt

Sea x_a la coordenada x del punto de contacto entre la superficie del agua y el lado izquierdo de la varilla B. Utilizando la ecuación diferencial obtenida en B.5, exprese la coordenada del nivel del agua z_0 en el punto medio entre estas dos varillas A y B en función de x_a y z_a . Puede utilizar la constante ℓ introducida en B.4.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Las fuerzas horizontales positivas apuntan en la dirección $+x$. Tanto f_x como F_x son fuerzas por unidad de longitud a lo largo de y , con unidades de N/m.

• A.1

$$v = \sqrt{\frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3})} = 0.23 \text{ m/s} \quad \text{hacia arriba.}$$

• B.1

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

• B.2

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

• B.3

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

• **B.4**

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

La constante del lado derecho de la Ec. (1) es 1 para el menisco de la placa.

• **B.5**, en la aproximación de pendientes pequeñas:

$$z''(x) = \frac{z(x)}{\ell^2}, \quad z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

• **C.1**

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

• **C.2**

$$F_x = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

La fuerza sobre B está dirigida hacia A cuando $z_0 \neq 0$.

• **C.3**, en la aproximación de pendientes pequeñas:

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Solución

A.1

Sea R el radio de la gota resultante de la coalescencia. La conservación del volumen da

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad R = 2^{1/3} a.$$

La masa de la gota resultante es, por tanto,

$$m = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \rho a^3.$$

La energía superficial es igual a la tensión superficial multiplicada por el área de la superficie. Por tanto, la disminución de la energía superficial es

$$\begin{aligned} \Delta E &= \gamma (2 \cdot 4\pi a^2 - 4\pi R^2) \\ &= 4\pi \gamma a^2 (2 - 2^{2/3}). \end{aligned}$$

Utilizando la conversión estipulada de una fracción k en energía cinética de traslación,

$$\frac{1}{2} m v^2 = k \Delta E.$$

En consecuencia,

$$v^2 = \frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3}).$$

Con $a = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}$,

$$m = 8.3776 \times 10^{-9} \text{ kg}, \quad \Delta E = 3.7694 \times 10^{-9} \text{ J},$$

y

$$v = 0.23236 \dots \text{ m/s}.$$

Con dos cifras significativas, la velocidad inicial es

$$v = 0.23 \text{ m/s hacia arriba.}$$

B.1

En equilibrio hidrostático, la fuerza de presión dirigida hacia arriba equilibra la gravedad, lo que da

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Como ρ es constante y $P(0) = P_0$, la integración da

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

En particular, el agua situada por encima de $z = 0$ tiene una presión inferior a la atmosférica, como se indica en el enunciado.

B.2

Una presión uniforme P_0 aplicada sobre toda la superficie cerrada produce una fuerza resultante nula. Por tanto, podemos realizar el cálculo utilizando la presión manométrica

$$p(z) = P(z) - P_0 = -\rho g z.$$

La presión manométrica sobre la superficie en contacto con el aire es nula. Sea z_* la altura común del fondo del bloque. La presión sobre la cara vertical izquierda empuja hacia $+x$, y la presión sobre la cara derecha empuja hacia $-x$. El fondo no aporta ninguna fuerza horizontal.

Por unidad de longitud a lo largo de y ,

$$\begin{aligned} f_x &= \int_{z_*}^{z_1} p(z) dz - \int_{z_*}^{z_2} p(z) dz \\ &= -\rho g \int_{z_2}^{z_1} z dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

Para el menisco hidrófilo representado, $z_1 > z_2 > 0$, de modo que esta fuerza de presión apunta hacia $-x$.

B.3

La tensión superficial tira tangencialmente hacia fuera del bloque en cada extremo. Sus componentes horizontales por unidad de longitud son

$$-\gamma \cos \theta_1 \quad \text{en el extremo izquierdo,} \quad +\gamma \cos \theta_2 \quad \text{en el extremo derecho.}$$

El equilibrio horizontal exige

$$f_x - \gamma \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta_2 = 0.$$

Por tanto,

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

B.4

Igualando las expresiones de B.2 y B.3,

$$\frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2) = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Al reordenar se obtiene

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z_1^2 + \cos \theta_1 = \frac{\rho g}{2\gamma} z_2^2 + \cos \theta_2.$$

Como los dos extremos pueden elegirse arbitrariamente a lo largo de la superficie,

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z^2 + \cos \theta(x) = C.$$

La comparación con la Ec. (1) da

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

La longitud ℓ es la longitud capilar. La deducción admite ambos signos de z , por lo que se aplica tanto a meniscos elevados como deprimidos.

Lejos de la placa, $z \rightarrow 0$ y $\theta \rightarrow 0$. Así, $C = 1$, y la relación exacta para la superficie junto a la placa es

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + \cos \theta(x) = 1.$$

B.5

La tangente a la superficie satisface

$$\tan \theta(x) = z'(x).$$

Para la superficie representada como la gráfica de una función,

$$\cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}.$$

En la aproximación indicada, $|z'(x)| \ll 1$, su desarrollo hasta segundo orden es

$$\cos \theta(x) = 1 - \frac{1}{2} [z'(x)]^2 + O([z'(x)]^4).$$

La sustitución en la Ec. (1) da, hasta este orden,

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + 1 - \frac{1}{2} (z')^2 = C.$$

Derivando,

$$\frac{zz'}{\ell^2} - z'z'' = 0.$$

Para un perfil no plano, esto da

$$z'' = \frac{z}{\ell^2},$$

y la ecuación se extiende por continuidad a los puntos estacionarios aislados. El perfil plano $z = 0$ también la satisface.

La solución general es

$$z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}.$$

La condición de contorno $z(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$ exige $A = 0$. En la placa,

$$z'(0) = \tan \theta_0 = -\frac{B}{\ell},$$

de modo que $B = -\ell \tan \theta_0$. Por tanto,

$$z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

Para una placa hidrófila, $\theta_0 < 0$, de modo que $z > 0$. Para una placa hidrófoba, $\theta_0 > 0$, de modo que $z < 0$. En ambos casos, la superficie se aproxima exponencialmente a $z = 0$ con una escala de longitud ℓ . La consistencia de la aproximación exige $|\tan \theta_0| \ll 1$.

C.1

Hay dos contribuciones a la fuerza horizontal sobre la varilla B: la tensión superficial en las líneas de contacto y la presión sobre la varilla.

La tensión superficial tira de la varilla hacia la superficie libre adyacente. Por tanto, su componente horizontal neta es

$$F_{\gamma,x} = -\gamma \cos \theta_a + \gamma \cos \theta_b.$$

Para la fuerza de presión, restamos la presión atmosférica uniforme, cuya resultante sobre la superficie cerrada de la varilla es nula. La presión restante sobre la superficie mojada es $p(z) = -\rho g z$.

La fuerza horizontal de presión sobre una superficie curva se obtiene integrando la presión sobre su proyección vertical. Sea z_* la altura del punto más bajo de la varilla. El lado izquierdo mojado contribuye hacia $+x$, y el lado derecho mojado, hacia $-x$:

$$\begin{aligned} F_{p,x} &= \int_{z_*}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_*}^{z_b} (-\rho g z) dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2). \end{aligned}$$

La gravedad no tiene componente horizontal. Sumando las dos contribuciones,

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2

La relación para la superficie obtenida en B.4 se aplica por separado a la superficie entre las varillas y a la superficie exterior. Sus constantes de integración no tienen por qué ser iguales.

En el lado exterior de B, la superficie se vuelve horizontal a la altura $z = 0$ a gran distancia. Así,

$$\frac{z_b^2}{2\ell^2} + \cos \theta_b = 1.$$

Entre las varillas idénticas, la simetría de reflexión respecto a $x = 0$ hace que la superficie sea horizontal en el punto medio. Allí, $z = z_0$, por lo que la relación interior es

$$\frac{z_a^2}{2\ell^2} + \cos \theta_a = 1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2}.$$

Como $\rho g = \gamma/\ell^2$, la fuerza de C.1 puede escribirse como

$$F_x = \gamma \left[\left(\cos \theta_b + \frac{z_b^2}{2\ell^2} \right) - \left(\cos \theta_a + \frac{z_a^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

La sustitución da

$$F_x = \gamma \left[1 - \left(1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Por lo tanto,

$$F_x = -\frac{\gamma z_0^2}{2\ell^2} = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

La varilla B se encuentra en el lado de x positivo, por lo que el signo negativo indica atracción hacia la varilla A. La fuerza se anula cuando $z_0 = 0$. Este resultado no requiere la aproximación de pendientes pequeñas.

C.3

Apliquemos ahora la ecuación para pendientes pequeñas de B.5 a la superficie entre las varillas:

$$z'' = \frac{z}{\ell^2}.$$

Escribiendo su solución en forma hiperbólica,

$$z(x) = C_1 \cosh(x/\ell) + C_2 \sinh(x/\ell).$$

La simetría da $z'(0) = 0$, lo que exige $C_2 = 0$. Como $z(0) = z_0$, tenemos $C_1 = z_0$ y, por tanto,

$$z(x) = z_0 \cosh(x/\ell).$$

En el contacto interior con la varilla B, $x = x_a$ y $z = z_a$. En consecuencia,

$$z_a = z_0 \cosh(x_a/\ell),$$

de modo que

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Esta relación entre la altura y la separación es válida dentro de la aproximación de pendientes pequeñas.

La solución se comprobó con la solución oficial.