

IPhO 2023

Theorieaufgaben und Lösungen · Tokio, Japan · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2023/

Aufgabe 1: Charakterisierung von Bodenkolloiden

Die Kolloidwissenschaft eignet sich zur Charakterisierung von Bodenpartikeln, da viele von ihnen als kolloidale Teilchen im Mikrometerbereich betrachtet werden können. Beispielsweise lässt sich die Brownsche Bewegung (zufällige Bewegung kolloidaler Teilchen) zur Messung von Teilchengrößen nutzen.

Teil A. Bewegungen kolloidaler Teilchen (1.6 Punkte)

Wir untersuchen die eindimensionale Brownsche Bewegung eines kolloidalen Teilchens mit der Masse M . Die Bewegungsgleichung für seine Geschwindigkeit $v(t)$ lautet:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

wobei γ der Reibungskoeffizient, $F(t)$ eine durch zufällige Stöße mit Wassermolekülen verursachte Kraft und $F_{\text{ext}}(t)$ eine äußere Kraft ist. In Teil A nehmen wir $F_{\text{ext}}(t) = 0$ an.

A.1 — 0.8 Punkte

Ein Wassermolekül stoße zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit dem Teilchen zusammen und übertrage dabei den Impuls I_0 ; anschließend gelte $F(t) = 0$. Wenn vor dem Stoß $v(t) = 0$ gilt, ist $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ für $t > t_0$. Bestimmen Sie v_0 und τ mithilfe von I_0 und den erforderlichen Parametern aus Gl.(1).

Im Folgenden dürfen Sie τ in Ihren Antworten verwenden.

A.2 — 0.8 Punkte

Tatsächlich stoßen Wassermoleküle nacheinander mit dem Teilchen zusammen. Nehmen Sie an, dass der i -te Stoß zum Zeitpunkt t_i den Impuls I_i überträgt, und bestimmen Sie $v(t)$ unter den Bedingungen $t > 0$ und $v(0) = 0$. Geben Sie außerdem die Ungleichung an, die den für ein gegebenes t zu berücksichtigenden Bereich von t_i festlegt. Auf dem Antwortbogen müssen Sie diesen Bereich im Ausdruck für $v(t)$ nicht angeben.

Teil B. Effektive Bewegungsgleichung (1.8 Punkte)

Die bisherigen Ergebnisse legen nahe, dass die Teilchengeschwindigkeiten $v(t)$ und $v(t')$ als unkorrelierte Zufallsgrößen betrachtet werden können, wenn $|t - t'| \gg \tau$ gilt. Auf dieser Grundlage führen wir ein theoretisches Modell zur näherungsweisen Beschreibung der eindimensionalen Brownschen Bewegung ein, in dem sich die Geschwindigkeit nach jedem Zeitintervall δ ($\gg \tau$) zufällig ändert, d. h.,

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

mit $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und einer Zufallsgröße v_n . Sie erfüllt

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

mit einem von δ abhängigen Parameter C . Hier bezeichnet $\langle X \rangle$ den Erwartungswert von X . Wenn man also unendlich oft Zufallszahlen X zieht, ist deren Mittelwert $\langle X \rangle$.

Nun betrachten wir die Verschiebung des Teilchens $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ für $t = N\delta$ mit einer ganzen Zahl N .

B.1 — 1.0 Punkte

Bestimmen Sie $\langle \Delta x(t) \rangle$ und $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ mithilfe von C , δ und t .

B.2 — 0.8 Punkte

Die Größe $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ heißt mittlere quadratische Verschiebung (MSD). Sie ist eine charakteristische Messgröße der Brownschen Bewegung, die dem Grenzfall $\delta \rightarrow 0$ entspricht. Daraus lässt sich zeigen, dass $C \propto \delta^\alpha$ und $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$ gelten. Bestimmen Sie die Werte von α und β .

Teil C. Elektrophorese (2.7 Punkte)

Hier behandeln wir die Elektrophorese, d. h. den Transport geladener Teilchen durch ein elektrisches Feld. Eine Suspension kolloidaler Teilchen mit der Masse M und der Ladung Q (> 0) wird in einen engen Kanal mit der Querschnittsfläche A eingebracht (Abb.1(a)). Wir vernachlässigen die Wechselwirkung zwischen den Teilchen, die Einflüsse der Wand, der Flüssigkeit und der darin enthaltenen Ionen sowie die Schwerkraft.

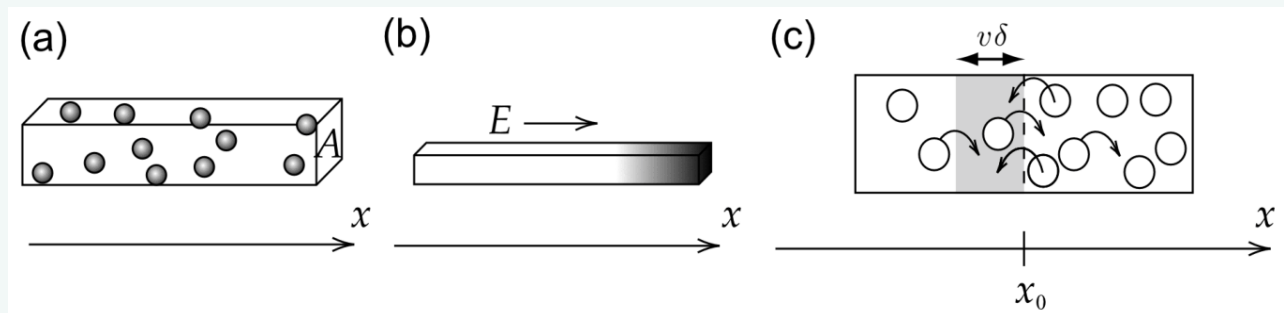


Abb.1: Anordnung für Teil C.

Durch Anlegen eines homogenen elektrischen Feldes E in x -Richtung werden die Teilchen transportiert, und ihre Konzentration $n(x)$ (Teilchenzahl pro Volumeneinheit) wird inhomogen (Abb.1(b)). Wird E abgeschaltet, verschwindet diese Inhomogenität allmählich. Dies ist auf die Brownsche Bewegung der Teilchen zurückzuführen. Wenn $n(x)$ nicht homogen ist, können sich die Anzahlen der nach rechts und nach links bewegten Teilchen unterscheiden (Abb.1(c)). Dadurch entsteht eine Teilchenstromdichte $J_D(x)$, die die mittlere Anzahl von Teilchen, die am Ort x entlang der x -Achse pro Querschnittsfläche und Zeit strömen. Für diese Stromdichte gilt bekanntermaßen

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

wobei D als Diffusionskoeffizient bezeichnet wird.

Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, dass die Hälfte der Teilchen die Geschwindigkeit $+v$ und die andere Hälfte die Geschwindigkeit $-v$ hat. Sei $N_+(x_0)$ die Anzahl der Teilchen mit der Geschwindigkeit $+v$, die x_0 pro Querschnittsfläche und Zeit von links nach rechts passieren. Damit Teilchen mit der Geschwindigkeit $+v$ den Ort x_0 innerhalb des Zeitintervalls δ passieren, müssen sie sich im schraffierten Bereich von Abb.1(c) befinden. Da δ klein ist, gilt in diesem Bereich $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$.

C.1 – 0.5 Punkte

Drücken Sie $N_+(x_0)$ mithilfe der erforderlichen Größen aus v , δ , $n(x_0)$ und $\frac{dn}{dx}(x_0)$ aus.

Wir definieren $N_-(x_0)$ als das Gegenstück zu $N_+(x_0)$ für die Geschwindigkeit $-v$. Damit gilt $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. Gemäß Gl.(3) gilt $\langle v^2 \rangle = C$.

C.2 – 0.7 Punkte

Bestimmen Sie $J_D(x_0)$ mithilfe der erforderlichen Größen aus C , δ , $n(x_0)$ und $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Drücken Sie damit und mithilfe von Gl.(4) D durch C und δ sowie $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ durch D und t aus.

Nun behandeln wir den Einfluss des osmotischen Drucks Π . Er ist gegeben durch

$\Pi = \frac{n}{N_A} RT = nkT$, mit der Avogadro-Konstante N_A , der Gaskonstante R , der Temperatur T und der Boltzmann-Konstante $k = \frac{R}{N_A}$. Betrachten wir die inhomogene Konzentration, die sich unter dem elektrischen Feld E ausgebildet hat (Abb.1(b)). Da $n(x)$ von x abhängt, gilt dies auch für $\Pi(x)$. Dann müssen die durch $\Pi(x)$ und $\Pi(x + \Delta x)$ verursachten Kräfte mit der Gesamtkraft im Gleichgewicht stehen, die das Feld E auf die Teilchen ausübt (Abb.2). Hier betrachten wir ein kleines Δx , sodass $n(x)$ über diesen Bereich als konstant angesehen werden kann, während $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$ gilt.

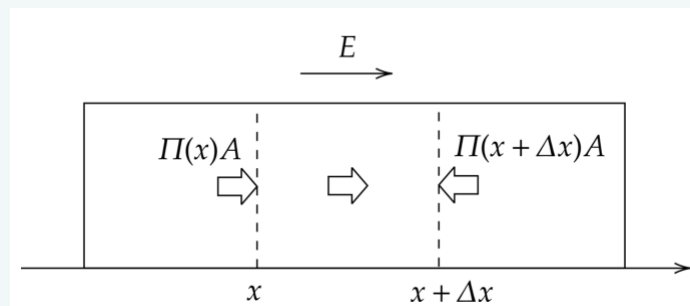


Abb.2: Kräftegleichgewicht.

C.3 – 0.5 Punkte

Drücken Sie $\frac{dn}{dx}(x)$ mithilfe von $n(x)$, T , Q , E und k aus.

Betrachten wir nun das Gleichgewicht der Teilchenströme. Neben der Stromdichte $J_D(x)$ aufgrund der Brownschen Bewegung gibt es auch eine Stromdichte aufgrund des elektrischen Feldes, $J_Q(x)$. Sie ist gegeben durch

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

wobei u die Endgeschwindigkeit der vom Feld angetriebenen Teilchen ist.

C.4 — 0.5 Punkte

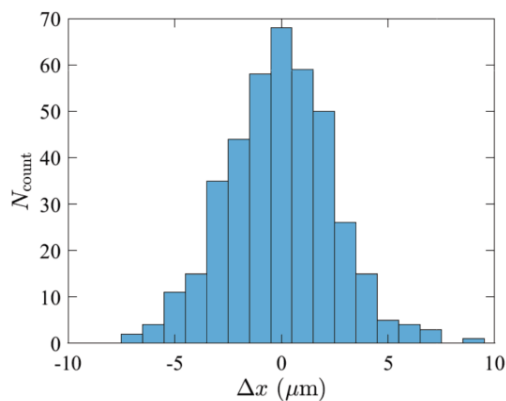
Zur Bestimmung von u verwenden wir Gl.(1) mit $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Da $v(t)$ schwankt, betrachten wir $\langle v(t) \rangle$. Berechnen Sie unter der Annahme $\langle v(0) \rangle = 0$ und mithilfe von $\langle F(t) \rangle = 0$ den Ausdruck $\langle v(t) \rangle$, und bestimmen Sie $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$.

C.5 — 0.5 Punkte

Das Gleichgewicht der Teilchenströme lautet $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Drücken Sie den Diffusionskoeffizienten D durch k , γ und T aus.

Teil D. Mittlere quadratische Verschiebung (2.4 Punkte)

Angenommen, wir haben die Brownsche Bewegung eines isolierten, kugelförmigen kolloidalen Teilchens mit dem Radius $a = 5.0 \mu\text{m}$ in Wasser beobachtet. Abbildung 3 zeigt das Histogramm der Verschiebungen Δx , die in x -Richtung jeweils über ein Intervall $\Delta t = 60 \text{ s}$ gemessen wurden. Der Reibungskoeffizient ist gegeben durch $\gamma = 6\pi a \eta$, mit der Viskosität des Wassers $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, und die Temperatur betrug $T = 25^\circ \text{C}$.



$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

Abb.3: Histogramm der Verschiebungen.

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

$\Delta x \text{ (}\mu\text{m)}$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

D.1 — 1.0 Punkte

Schätzen Sie den Wert von N_A anhand der Daten in Abb.3 auf zwei signifikante Stellen, ohne die Tatsache zu nutzen, dass es sich um die Avogadro-Konstante handelt. Die Gaskonstante beträgt $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$. Verwenden Sie nicht den in den allgemeinen Hinweisen angegebenen Wert der Boltzmann-Konstante k . Für die Avogadro-Konstante erhalten Sie möglicherweise einen Wert, der von dem in den allgemeinen Hinweisen abweicht.

Nun erweitern wir das Modell aus Teil B, um die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung Q in einem elektrischen Feld E zu beschreiben. Die in Gl.(2) betrachtete Teilchengeschwindigkeit $v(t)$ ist durch $v(t) = u + v_n$ ($t_{n-1} < t \leq t_n$) zu ersetzen, wobei v_n Gl. (3) erfüllt und u die in Gl.(5) betrachtete Endgeschwindigkeit ist.

D.2 — 0.8 Punkte

Drücken Sie die MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ durch u , D und t aus. Bestimmen Sie näherungsweise Potenzgesetze für kleine t und große t sowie die charakteristische Zeit t_* , bei der dieser Übergang auftritt. Skizzieren Sie den Verlauf der MSD in einem doppeltlogarithmischen Diagramm, und kennzeichnen Sie die ungefähre Lage von t_* .

Als Nächstes betrachten wir schwimmende Mikroorganismen (Abb.4(a)), der Einfachheit halber in einer Dimension (Abb.4(b)). Es handelt sich um kugelförmige Teilchen mit dem Radius a . Sie schwimmen entweder mit der Geschwindigkeit $+u_0$ oder $-u_0$, wobei das Vorzeichen nach jedem Zeitintervall δ_0 zufällig und ohne Korrelation gewählt wird. Die beobachtete Bewegung setzt sich aus den Verschiebungen durch das Schwimmen und denen durch die Brownsche Bewegung eines kugelförmigen Teilchens zusammen.

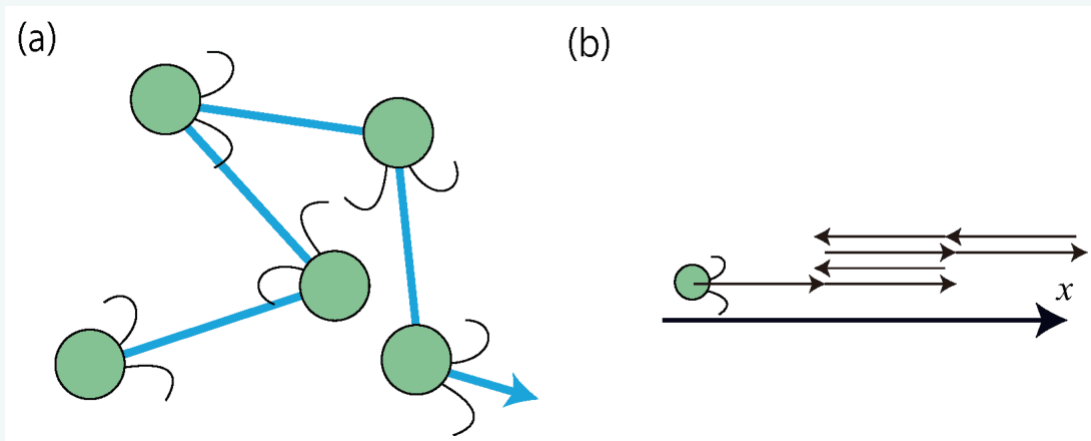


Abb.4: (a) Bewegung von Mikroorganismen. (b) Ihre eindimensionale Version.

D.3 — 0.6 Punkte

Abbildung 5 zeigt die MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ dieser Mikroorganismen mit unterschiedlichen Potenzgesetzen für kleine, große und mittlere t , die durch gestrichelte Linien dargestellt sind. Bestimmen Sie das Potenzgesetz für jeden Zeitbereich, und drücken Sie es mithilfe der erforderlichen Größen aus D , u_0 , δ_0 und t aus.

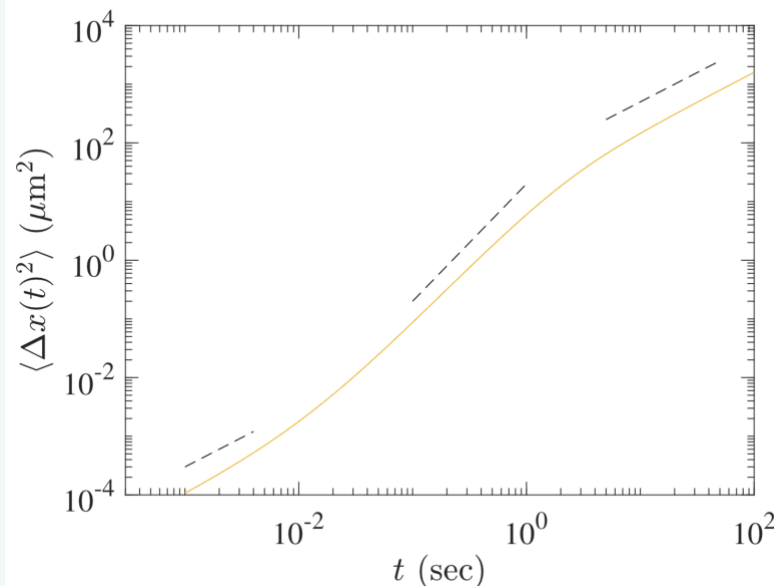


Abb.5: Mittlere quadratische Verschiebung der Mikroorganismen.

Teil E. Wasserreinigung (1.5 Punkte)

Hier behandeln wir die Reinigung von Wasser, das kolloidartige Bodenpartikel enthält, durch Zugabe von Elektrolyten, die diese Teilchen koagulieren lassen. Die Teilchen wechselwirken durch die Van-der-Waals-Kraft und die elektrostatische Kraft, wobei Letztere die Einflüsse sowohl der Oberflächenladungen als auch der umgebenden Schicht entgegengesetzt geladener Ionen umfasst (solche Ionen und ihre Schicht werden als Gegenionen beziehungsweise elektrische Doppelschicht bezeichnet; siehe Abb.6(a)). Daraus ergibt sich für den Teilchenabstand d (Abb.6(b)) das Wechselwirkungspotential

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

wobei A und B positive Konstanten sind, ϵ die Dielektrizitätskonstante des Wassers und λ die Dicke der elektrischen Doppelschicht ist. Unter der Annahme, dass die Ladungen der Ionen $\pm q$ betragen, gilt

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \quad (7)$$

wobei c die molare Ionenkonzentration ist.

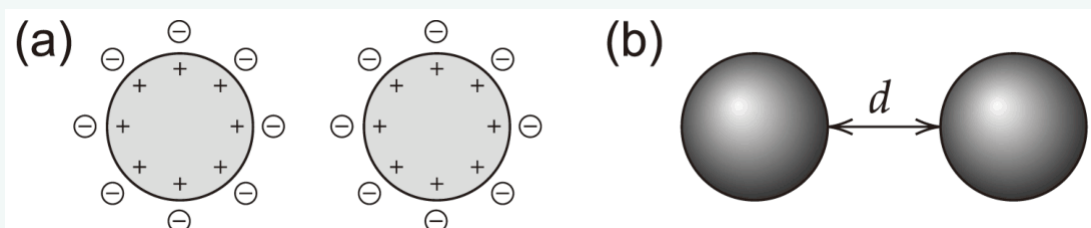


Abb.6: (a) Oberflächenladungen kolloidaler Teilchen und Gegenionen. (b) Definition des Abstands d .

E.1 — 1.5 Punkte

Die Zugabe von Natriumchlorid (NaCl) zur Suspension bewirkt die Koagulation der kolloidalen Teilchen. Bestimmen Sie die niedrigste für die Koagulation erforderliche Konzentration c von NaCl. Es genügt, zwei Teilchen ohne thermische Fluktuationen zu betrachten, d. h. $F(t) = 0$ in Gl.(1), und anzunehmen, dass die Endgeschwindigkeit für die gegebene Potentialkraft augenblicklich erreicht wird.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A.1

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

- A.2

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i e^{-(t-t_i)/\tau}, \quad 0 < t_i < t.$$

Unmittelbar nach einem Stoß zum Beobachtungszeitpunkt ist $t_i = t$ einzuschließen.

- B.1

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.$$

- B.2

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

- C.1

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2 \delta}{4} \frac{dn}{dx}(x_0).$$

- C.2

$$J_D(x_0) = -\frac{C\delta}{2} \frac{dn}{dx}(x_0), \quad D = \frac{C\delta}{2}, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

- C.3

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

- C.4

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad u = \frac{QE}{\gamma}.$$

- C.5

$$D = \frac{kT}{\gamma}$$

- D.1

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

- D.2

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2, \quad t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

Für $t \ll t_*$ beträgt die MSD näherungsweise $2Dt$, mit der Steigung 1 im doppeltlogarithmischen Diagramm. Für $t \gg t_*$ beträgt sie näherungsweise $u^2 t^2$, mit der Steigung 2.

- D.3 Definieren wir $t_s = 2D/u_0^2$. Für die drei dargestellten, deutlich getrennten Bereiche gilt $t_s \ll \delta_0$, und

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq \begin{cases} 2Dt, & t \ll t_s, \\ u_0^2 t^2, & t_s \ll t \ll \delta_0, \\ (2D + u_0^2 \delta_0)t \simeq u_0^2 \delta_0 t, & t \gg \delta_0. \end{cases}$$

Die jeweiligen Steigungen im doppeltlogarithmischen Diagramm sind 1, 2, 1.

- E.1 Die kritische Konzentration ist

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6},$$

wobei q für NaCl der Betrag der Elementarladung ist. Koagulation ausgehend von großem Abstand tritt für $c > c_{\text{crit}}$ auf. Genau bei $c = c_{\text{crit}}$ liegt die angegebene rauschfreie, überdämpfte Dynamik im Grenzfall: Die Teilchen nähern sich asymptotisch einem endlichen Abstand.

Lösung

A.1

Die Integration der Bewegungsgleichung über den sehr kurzen Stoß ergibt den Zusammenhang zwischen Kraftstoß und Impulsänderung. Der Kraftstoß der Reibung verschwindet, wenn die Stoßdauer gegen null geht, sodass

$$M[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = I_0.$$

Da das Teilchen anfangs ruhte,

$$v_0 = v(t_0^+) = \frac{I_0}{M}.$$

Nach dem Stoß verschwinden die beiden Kräfte F und F_{ext} . Somit gilt

$$M \frac{dv}{dt} = -\gamma v,$$

mit der Lösung

$$v(t) = \frac{I_0}{M} \exp \left[-\frac{\gamma}{M} (t - t_0) \right].$$

Der Vergleich mit der vorgegebenen Form ergibt

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2

Die Bewegungsgleichung ist linear. Jeder Stoß erzeugt einen augenblicklichen Geschwindigkeitszuwachs I_i/M , der anschließend mit der Relaxationszeit τ abklingt. Durch Superposition ergibt sich daher

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i \exp \left[-\frac{t - t_i}{\tau} \right].$$

Nur Stöße nach dem Anfangszeitpunkt und vor der Beobachtung tragen bei:

$$0 < t_i < t.$$

Zum Zeitpunkt eines Stoßes weist die Geschwindigkeit einen Sprung I_i/M auf. Bezeichnet $v(t)$ die Geschwindigkeit unmittelbar nach diesem Stoß, wird der obere Endpunkt eingeschlossen.

B.1

Während des Intervalls n beträgt die Verschiebung $v_n \delta$. Somit gilt bei $t = N\delta$:

$$\Delta x(t) = \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Ihr Erwartungswert ist

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0.$$

Für das zweite Moment gilt

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \delta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle v_n v_m \rangle \\ &= \delta^2 N C \\ &= C \delta t. \end{aligned}$$

Die gemischten Terme verschwinden, da die Geschwindigkeiten in verschiedenen Intervallen unkorreliert sind. Somit

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t.$$

B.2

Bei einem festen positiven Beobachtungszeitpunkt muss die Brownsche Bewegung im Diffusionsgrenzfall eine endliche, von null verschiedene MSD aufweisen. Da

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C \delta t,$$

muss das Produkt $C\delta$ für $\delta \rightarrow 0$ gegen eine endliche, von null verschiedene Konstante streben. Daher gilt

$$C \propto \delta^{-1}.$$

Die verbleibende Zeitabhängigkeit ist linear:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t.$$

Folglich

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1.}$$

Dies ist der Kontinuumsfall des effektiven Modells, das die Bewegung auf Zeitskalen beschreibt, die viel länger als die mikroskopische Relaxationszeit τ sind.

C.1

Nach rechts bewegte Teilchen passieren x_0 während des nächsten Intervalls δ , wenn sie sich anfangs zwischen $x_0 - v\delta$ und x_0 befinden. Die Hälfte der Teilchen in diesem Bereich bewegt sich nach rechts. Dividiert man ihre Anzahl pro Flächeneinheit durch δ , erhält man

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0 - v\delta}^{x_0} n(x) dx.$$

Mit der vorgegebenen linearen Näherung

$$n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)n'(x_0),$$

erhalten wir

$$N_+(x_0) \simeq \frac{1}{2\delta} \left[v\delta n(x_0) - \frac{(v\delta)^2}{2} n'(x_0) \right].$$

Daher

$$\boxed{N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0).}$$

Diese Näherung setzt voraus, dass sich die Konzentration über eine Strecke $v\delta$ nur langsam ändert.

C.2

Entsprechend stammen nach links bewegte Teilchen aus dem Bereich $x_0 < x < x_0 + v\delta$, sodass

$$\begin{aligned} N_-(x_0) &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0}^{x_0 + v\delta} n(x) dx \\ &\simeq \frac{v}{2} n(x_0) + \frac{v^2\delta}{4} n'(x_0). \end{aligned}$$

Subtraktion und Mittelung ergeben

$$\begin{aligned} J_D(x_0) &= \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle \\ &= -\frac{\delta}{2} \langle v^2 \rangle n'(x_0) \\ &= -\frac{C\delta}{2} n'(x_0). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem Fickschen Gesetz, $J_D = -Dn'$, ergibt

$$D = \frac{C\delta}{2}.$$

Einsetzen in B.1 liefert

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

C.3

Betrachten wir die Schicht mit der Querschnittsfläche A und der Dicke Δx . Die auf sie wirkende elektrische Kraft in positiver x -Richtung beträgt

$$F_E = n(x)A\Delta x QE.$$

Die resultierende Kraft aufgrund des osmotischen Drucks ist

$$F_{\Pi} = A\Pi(x) - A\Pi(x + \Delta x) \simeq -A\Delta x \frac{d\Pi}{dx}.$$

Das Kräftegleichgewicht ergibt

$$n(x)QE = \frac{d\Pi}{dx}.$$

Bei homogener Temperatur gilt $\Pi = nkT$, also

$$\frac{d\Pi}{dx} = kT \frac{dn}{dx}.$$

Daher

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

Der positive Gradient stimmt damit überein, dass sich positiv geladene Teilchen in Richtung des elektrischen Feldes ansammeln.

C.4

Die Bildung des Erwartungswerts von Gl.(1) unter Verwendung der konstanten angelegten Kraft und von $\langle F(t) \rangle = 0$ ergibt

$$M \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\gamma \langle v \rangle + QE.$$

Die Lösung, die $\langle v(0) \rangle = 0$ erfüllt, lautet

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t/M} \right) = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Die Endgeschwindigkeit ist daher

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma}.$$

C.5

Im Gleichgewicht gleicht die Diffusionsstromdichte die elektrische Driftstromdichte aus:

$$-D \frac{dn}{dx} + nu = 0.$$

Einsetzen der Ergebnisse aus C.3 und C.4 ergibt

$$-D \frac{nQE}{kT} + n \frac{QE}{\gamma} = 0.$$

Somit

$$\boxed{D = \frac{kT}{\gamma}}.$$

Dies ist die Einstein-Beziehung zwischen Diffusion und Reibung.

D.1

Verwendet man die tabellierten Verschiebungen als repräsentative Werte der Histogrammklassen, beträgt die Gesamtzahl der Messungen

$$N_{\text{tot}} = \sum_j N_j = 400.$$

Die gewichtete Summe der quadrierten Verschiebungen ist

$$\sum_j N_j (\Delta x_j)^2 = 2536 \mu\text{m}^2.$$

Daher beträgt die geschätzte MSD über $\Delta t = 60$ s

$$\widehat{\langle \Delta x^2 \rangle} = \frac{2536}{400} \mu\text{m}^2 = 6.34 \times 10^{-12} \text{m}^2.$$

Aus C.2 folgt

$$D = \frac{\widehat{\langle \Delta x^2 \rangle}}{2\Delta t} = \frac{6.34 \times 10^{-12}}{120} = 5.2833 \times 10^{-14} \text{m}^2 \text{s}^{-1}.$$

Der Reibungskoeffizient beträgt

$$\begin{aligned} \gamma &= 6\pi a \eta \\ &= 6\pi(5.0 \times 10^{-6})(8.9 \times 10^{-4}) \\ &= 8.3881 \times 10^{-8} \text{kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Mit $k = R/N_A$ ergibt sich aus der Einstein-Beziehung

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma},$$

also

$$N_A = \frac{RT}{\gamma D} = \frac{2RT\Delta t}{\gamma \widehat{\langle \Delta x^2 \rangle}}.$$

Mit $T = 298.15$ K gilt

$$N_A = \frac{8.31(298.15)}{(8.3881 \times 10^{-8})(5.2833 \times 10^{-14})} = 5.5907 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet,

$$\boxed{N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}}.$$

Es wurde weder ein anerkannter Wert von N_A noch ein Zahlenwert von k verwendet.

D.2

Unter Berücksichtigung der Drift mit Endgeschwindigkeit lautet die Verschiebung

$$\Delta x(t) = ut + \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

Der zufällige Anteil hat den Mittelwert null und das zweite Moment $2Dt$. Daher verschwindet der gemischte Term aus Drift und zufälliger Verschiebung bei der Mittelung:

$$\begin{aligned}\langle \Delta x(t)^2 \rangle &= u^2 t^2 + 2ut \delta \sum_n \langle v_n \rangle + \delta^2 \sum_{n,m} \langle v_n v_m \rangle \\ &= u^2 t^2 + 2Dt.\end{aligned}$$

Daher

$$\boxed{\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2.}$$

Der Übergang tritt auf, wenn die beiden Beiträge gleich groß sind:

$$2Dt_* = u^2 t_*^2,$$

woraus folgt

$$\boxed{t_* = \frac{2D}{u^2}.}$$

Die Potenzgesetze in den Grenzfällen lauten

$$\begin{array}{ll} t \ll t_* : & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt, \\ t \gg t_* : & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq u^2 t^2. \end{array}$$

Hier bezieht sich „kleines t “ auf das effektive Diffusionsmodell, in dem die mikroskopische Relaxation bereits vernachlässigt wird und die Drift mit Endgeschwindigkeit bereits erreicht ist.

Für eine genaue Beschreibung der geforderten doppeltlogarithmischen Skizze definieren wir

$$s = \frac{t}{t_*}, \quad Y = \frac{\langle \Delta x(t)^2 \rangle}{2Dt_*}.$$

Dann gilt

$$Y = s + s^2.$$

Der Graph folgt für kleine s der geraden Asymptote $Y = s$ mit der Steigung 1, krümmt sich in der Nähe von $s = 1$ stetig nach oben und nähert sich für große s der Asymptote $Y = s^2$ mit der Steigung 2. Die beiden Asymptoten schneiden sich bei $(s, Y) = (1, 1)$, während die tatsächliche Kurve durch $(1, 2)$ verläuft. Markieren Sie daher $t = t_*$ im Übergangsbereich. An dieser Stelle gilt

$$\langle \Delta x(t_*)^2 \rangle = \frac{8D^2}{u^2}.$$

D.3

Schreiben wir die Verschiebung als Summe des thermischen Beitrags und des Schwimmbeitrags:

$$\Delta x(t) = \Delta x_B(t) + \Delta x_S(t).$$

Die thermische Bewegung und die Wahl der Schwimmrichtung werden als unabhängig angenommen, und beide Beiträge haben den Mittelwert null. Daher

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle.$$

Für $t \ll \delta_0$ bleibt die Schwimmrichtung während des Beobachtungsintervalls praktisch unverändert. Daher

$$\Delta x_S(t) \simeq \pm u_0 t, \quad \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle \simeq u_0^2 t^2.$$

Somit

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt + u_0^2 t^2 \quad (t \ll \delta_0).$$

Die beiden Terme werden vergleichbar bei

$$t_s = \frac{2D}{u_0^2}.$$

Folglich dominiert die thermische Diffusion für $t \ll t_s$, und das Schwimmen erzeugt für $t_s \ll t \ll \delta_0$ einen ballistischen Bereich.

Für lange Zeiten betrachten wir N vollständige Schwimmintervalle mit $t = N\delta_0$. Sei $s_j = \pm 1$ das unabhängig gewählte Vorzeichen im Intervall j . Dann gilt

$$\Delta x_S(t) = u_0 \delta_0 \sum_{j=1}^N s_j.$$

Da $\langle s_j \rangle = 0$ und $\langle s_j s_\ell \rangle = 0$ für $j \neq \ell$ gelten,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle &= u_0^2 \delta_0^2 N \\ &= u_0^2 \delta_0 t. \end{aligned}$$

Ein unvollständiges letztes Intervall ändert dieses führende Verhalten für $t \gg \delta_0$ nicht. Daher lautet die MSD für lange Zeiten

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq (2D + u_0^2 \delta_0) t.$$

Entsprechend ist der Diffusionskoeffizient für lange Zeiten

$$D_{\text{eff}} = D + \frac{u_0^2 \delta_0}{2}.$$

Für einen deutlich ausgeprägten Zwischenbereich wie in der Abbildung muss für die Zeitskalen gelten:

$$\frac{2D}{u_0^2} \ll \delta_0.$$

Daraus folgt auch $u_0^2 \delta_0 \gg 2D$. Die drei beobachteten Asymptoten lauten daher

Zeitbereich	$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$	Doppeltlogarithmische Steigung
$t \ll 2D/u_0^2$	$2Dt$	1
$2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0$	$u_0^2 t^2$	2
$t \gg \delta_0$	$u_0^2 \delta_0 t$	1

wobei der vollständige Koeffizient für lange Zeiten $2D + u_0^2 \delta_0$ beibehalten wird, wenn die thermische Diffusion merklich beiträgt.

E.1

Definieren wir die positive Energieskala

$$K = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}.$$

Dann gilt

$$U(d) = -\frac{A}{d} + Ke^{-d/\lambda},$$

und

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{K}{\lambda}e^{-d/\lambda}.$$

Die Kraft, die den Abstand zu vergrößern sucht, ist $-U'(d)$. Unter der Annahme, dass die Endgeschwindigkeit augenblicklich erreicht wird, ist die Geschwindigkeit jedes Teilchens proportional zur auf es wirkenden Kraft. Für zwei identische Teilchen mit dem Reibungskoeffizienten γ gilt

$$\dot{d} = -\frac{2}{\gamma}U'(d).$$

Die Teilchen nähern sich also überall dort an, wo $U'(d) > 0$ gilt.

Damit Teilchen, die sich aus großem Abstand nähern, ohne thermische Fluktuationen in Kontakt kommen, darf dazwischen weder ein abstoßender Bereich noch ein stabiles Gleichgewicht bei endlichem Abstand liegen. Die kritische Bedingung ist daher das Verschwinden des Bereichs, in dem $U'(d) < 0$ gilt.

Schreiben wir die Ableitung um zu

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} \left[1 - \frac{K\lambda}{A} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 e^{-d/\lambda} \right].$$

Setzen wir $z = d/\lambda > 0$. Die für das Vorzeichen maßgebliche Funktion ist

$$f(z) = z^2 e^{-z}.$$

Ihre Ableitung lautet

$$f'(z) = ze^{-z}(2 - z),$$

sodass ihr globales Maximum bei $z = 2$ liegt, mit

$$f_{\max} = 4e^{-2}.$$

Dementsprechend gilt $U'(d) \geq 0$ für jeden Abstand genau dann, wenn

$$\frac{K\lambda}{A} 4e^{-2} \leq 1.$$

Die kritische Abschirmlänge ist

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{\exp(2)A}{4K} = \frac{\exp(2)Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2}.$$

An dieser Schwelle verschmelzen die beiden stationären Punkte des Potentials bei

$$d_{\text{crit}} = 2\lambda_{\text{crit}},$$

wo sowohl $U'(d_{\text{crit}})$ als auch $U''(d_{\text{crit}})$ verschwinden.

Eine Erhöhung der Salzkonzentration verringert λ . Einsetzen von λ_{crit} in Gl.(7) ergibt

$$c_{\text{crit}} = \frac{\epsilon k T}{2 N_A q^2 \lambda_{\text{crit}}^2}$$

$$= \frac{\epsilon k T}{2 N_A q^2} \left[\frac{4 B \epsilon (k T)^2}{\exp(2) A q^2} \right]^2.$$

Daher

$$c_{\text{crit}} = \frac{8 B^2 \epsilon^3 (k T)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6}.$$

Bei NaCl sind die Ionen einwertig, sodass q der Betrag der Elementarladung ist. Die Konzentration jeder Ionensorte entspricht der molaren NaCl-Konzentration; der Faktor 2 in Gl.(7) berücksichtigt bereits beide Sorten. Bei Verwendung von SI-Parametern hat das Ergebnis die Einheit mol m^{-3} .

Für $c > c_{\text{crit}}$ gilt $U'(d) > 0$ bei jedem positiven Abstand, und die deterministische Bewegung bringt ein anfangs getrenntes Teilchenpaar in Kontakt. Für $c < c_{\text{crit}}$ bleibt ein Paar, das sich aus hinreichend großem Abstand nähert, im äußeren lokalen Minimum von U gefangen.

Für den Gleichheitsfall ist eine präzise Einschränkung erforderlich. Bei $c = c_{\text{crit}}$ gilt

$$U'(d) \propto (d - d_{\text{crit}})^2$$

in der Nähe von d_{crit} . Die überdämpfte Annäherung von größeren Abständen aus benötigt daher unendlich lange, um diesen Abstand zu erreichen. Somit ist c_{crit} die kritische Schwelle beziehungsweise das Infimum der Konzentrationen, die eine Koagulation aus großem Abstand bewirken; die idealisierte Dynamik erfordert $c > c_{\text{crit}}$, damit die Teilchen tatsächlich bis zum Kontakt gelangen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Neutronensterne

Wir untersuchen die Stabilität großer Atomkerne und schätzen die Masse von Neutronensternen theoretisch und experimentell ab.

Teil A. Masse und Stabilität von Atomkernen (2.5 Punkte)

Die Ruheenergie eines aus Z Protonen und N Neutronen bestehenden Atomkerns $m(Z, N)c^2$ ist um die Bindungsenergie $B(Z, N)$ kleiner als die Summe der Ruheenergien der Protonen und Neutronen, die im Folgenden Nukleonen genannt werden; dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Unter Vernachlässigung kleiner Korrekturen können wir die Bindungsenergie, die sich aus dem Volumenterm mit a_V , dem Oberflächenterm mit a_S , dem Coulomb-Energieterm mit a_C und dem Symmetrieterm mit a_{sym} zusammensetzt, wie folgt näherungsweise angeben.

$$m(Z, N)c^2 = A m_N c^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

Dabei ist $A = Z + N$ die Massenzahl und m_N die Nukleonenmasse. Verwenden Sie für die Rechnung $a_V \approx 15.8 \text{ MeV}$, $a_S \approx 17.8 \text{ MeV}$, $a_C \approx 0.711 \text{ MeV}$ und $a_{\text{sym}} \approx 23.7 \text{ MeV}$ ($\text{MeV} = 10^6 \text{ Elektronenvolt}$).

A.1 — 0.9 Punkte

Bestimmen Sie unter der Bedingung $Z = N$ den Wert von A , für den die Bindungsenergie pro Nukleon, B/A , maximal wird.

A.2 — 0.9 Punkte

Bei festem A wird die Ordnungszahl des stabilsten Atomkerns Z^* durch Maximierung von $B(Z, A - Z)$ bestimmt. Berechnen Sie für $A = 197$ mithilfe von Gl. (1) den Wert von Z^* .

A.3 — 0.7 Punkte

Ein Atomkern mit großem A zerfällt durch Kernspaltung in leichtere Kerne, um die gesamte Ruheenergie zu minimieren. Der Einfachheit halber betrachten wir eine von mehreren Möglichkeiten, einen Kern mit (Z, N) in zwei gleiche Kerne zu spalten. Dies geschieht, wenn die folgende Energiebeziehung gilt:

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Wird diese Beziehung in der Form

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

geschrieben, bestimmen Sie C_{fission} auf zwei signifikante Stellen.

Teil B. Der Neutronenstern als gigantischer Atomkern (1.5 Punkte)

Große Atomkerne mit einer hinreichend großen Massenzahl $A > A_c$, wobei A_c ein Schwellenwert ist, bleiben aufgrund der ausreichend großen gravitativen Bindungsenergie gegenüber Kernspaltung stabil.

B.1 — 1.5 Punkte

Wir nehmen an, dass für hinreichend große A die Bedingungen $N = A$ und $Z = 0$ erfüllt sind und Gl. (1) unter Hinzunahme der gravitativen Bindungsenergie weiterhin gilt. Die gravitative Bindungsenergie lautet

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

wobei $M = m_N A$ und $R = R_0 A^{1/3}$ mit $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$ die Masse beziehungsweise den Radius des Atomkerns bezeichnen.

Bestimmen Sie für $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ den Wert von a_{grav} in der Einheit MeV auf eine signifikante Stelle. Schätzen Sie anschließend unter Vernachlässigung des Oberflächenterms A_c auf eine signifikante Stelle ab. Verwenden Sie für die Rechnung $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ und $G = \hbar c / M_P^2$, wobei $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ und $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

Teil C. Ein Neutronenstern in einem Doppelsternsystem (6.0 Punkte)

Einige Neutronensterne sind Pulsare, die regelmäßig mit einer konstanten Periode elektromagnetische Wellen aussenden, die wir hier der Einfachheit halber als „Licht“ bezeichnen. Neutronensterne bilden häufig Doppelsternsysteme mit einem Weißen Zwerg. Betrachten wir die in Abb. 1 gezeigte Sternkonfiguration, bei der ein Lichtpuls von einem Neutronenstern **N** zur Erde

E nahe an einem Weißen Zwerg **W** des Doppelsternsystems vorbeiläuft. Die Messung dieser durch die Gravitation des Sterns beeinflussten Pulse ermöglicht eine genaue Abschätzung der Masse von **W**, wie im Folgenden erläutert wird, und daraus eine Abschätzung der Masse von **N**.

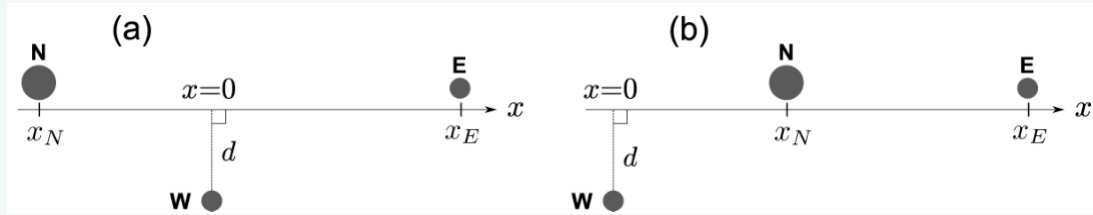
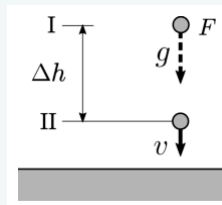


Abb. 1: Konfigurationen mit der x -Achse entlang der Verbindungsline zwischen **N** und **E**. (a) für $x_N < 0$ und (b) für $x_N > 0$.

C.1 — 1.0 Punkte

Wie in der folgenden Abbildung gezeigt, betrachten wir bei konstanter Fallbeschleunigung g zwei Höhenlagen I und II mit dem Höhenunterschied $\Delta h (> 0)$. Bei I, II und im frei fallenden System F werden identische Uhren aufgestellt, die als Uhr-I, Uhr-II beziehungsweise Uhr- F bezeichnet werden.



Aufbau des Gedankenexperiments.

Wir nehmen an, dass sich ein Beobachter bei Uhr- F befindet und dass F anfangs auf derselben Höhe wie Uhr-I ruht. Da die Uhren identisch sind, zeigen sie gleiche Zeitintervalle an, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. Anschließend lassen wir F frei fallen und betrachten das Bezugssystem von F , das als Inertialsystem angesehen wird. In diesem Bezugssystem bewegt sich Uhr-II mit der Geschwindigkeit v an Uhr- F vorbei, sodass die Zeitdilatation von Uhr-II durch die Lorentz-Transformation bestimmt werden kann. Wenn auf Uhr- F die Zeit $\Delta\tau_I$ vergeht, vergeht auf Uhr-II die Zeit $\Delta\tau_{II}$.

Bestimmen Sie $\Delta\tau_{II}$ in Abhängigkeit von $\Delta\tau_I$ bis zur ersten Ordnung in $\Delta\phi/c^2$, wobei $\Delta\phi = g\Delta h$ eine Differenz des Gravitationspotentials, also der potentiellen Gravitationsenergie pro Masseneinheit, ist.

C.2 — 1.8 Punkte

Im Gravitationspotential ϕ verändern Zeitverzögerungen die im Unendlichen beobachtete effektive Lichtgeschwindigkeit c_{eff} , obwohl die lokale Lichtgeschwindigkeit c beträgt. Für $\phi(r = \infty) = 0$ kann c_{eff} bis zur ersten Ordnung in ϕ/c^2 als

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

angegeben werden. Darin ist der Einfluss der Raumkrümmung berücksichtigt, der in **C.1** nicht behandelt wurde. Der Lichtweg kann näherungsweise als gerade Linie betrachtet werden.

Wie in Abb. 1 (a) gezeigt, legen wir die x -Achse entlang des Lichtwegs vom Neutronenstern **N** zur Erde **E** und setzen $x = 0$ an den Punkt, an dem der Weiße Zwerg **W** dem Lichtweg am nächsten ist. Dabei sei $x_N (< 0)$ die x -Koordinate von **N**, $x_E (> 0)$ diejenige von **E** und d der Abstand zwischen **W** und dem Lichtweg.

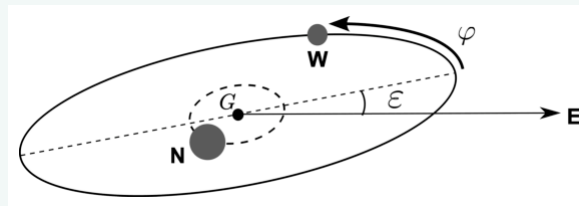
Schätzen Sie die durch den Weißen Zwerg mit der Masse M_{WD} verursachte Änderung der Ankunftszeit Δt des Lichts von **N** nach **E** ab und geben Sie das Ergebnis in einer einfachen Form an, indem Sie Terme höherer Ordnung in den folgenden kleinen Größen vernachlässigen: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ und $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Verwenden Sie bei Bedarf die folgende Formel.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

(log ist der natürliche Logarithmus)

C.3 — 1.8 Punkte

Wie unten gezeigt, nehmen wir an, dass sich **N** und **W** in einem Doppelsternsystem auf Kreisbahnen mit Exzentrizität null um den Schwerpunkt G in der Bahnebene bewegen. Dabei sei ε der Bahnneigungswinkel, gemessen von der Bahnebene zur von G nach **E** gerichteten Linie, L der Abstand zwischen **N** und **W** und M_{WD} die Masse des Weißen Zwergs. Im Folgenden nehmen wir $\varepsilon \ll 1$ an.



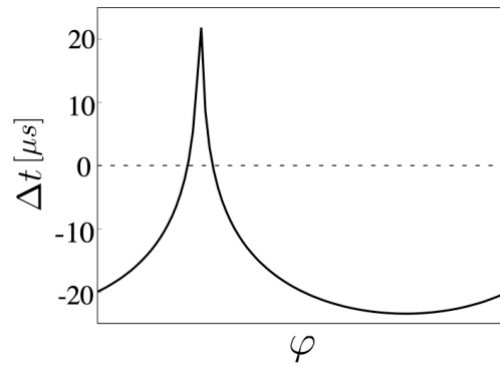
Doppelsternsystem.

Wir beobachten Lichtpulse von **N** auf der weit von **N** entfernten Erde **E**. Der Lichtweg zu **E** verändert sich mit der Zeit in Abhängigkeit von der Konfiguration von **N** und **W**. Die Verzögerung im Zeitintervall der auf **E** eintreffenden Pulse hat den Maximalwert Δt_{max} für $x_N \simeq -L$ und den Minimalwert Δt_{min} für $x_N \simeq L$ (die Konfiguration ist in Abb. 1 (b) dargestellt).

Berechnen Sie $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ in einer einfachen Form, indem Sie wie in **C.2** Terme höherer Ordnung in kleinen Größen vernachlässigen. Dabei wird angenommen, dass sich die gravitativen Verzögerungen durch andere stellare Objekte als **W** in $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ aufheben.

C.4 — 0.8 Punkte

Die folgende Abbildung zeigt die beobachteten Zeitverzögerungen als Funktion der Bahnphase φ für das Doppelsternsystem mit $L \approx 6 \times 10^6$ km und $\cos \varepsilon \approx 0.99989$. Schätzen Sie M_{WD} in Einheiten der Sonnenmasse $M_{\odot}$ ab und geben Sie das Ergebnis für $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$ auf eine signifikante Stelle an. Hier kann die Näherungsbeziehung $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$ verwendet werden.



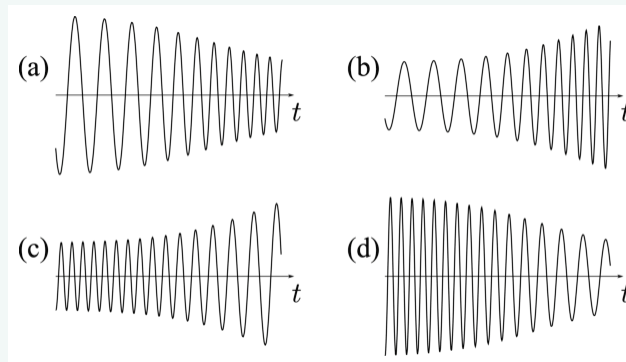
Beobachtete Zeitverzögerungen Δt als Funktion der Bahnphase φ (siehe die Abbildung in **C.3**), welche die Positionen von **N** und **W** auf ihren Bahnen angibt.

C.5 — 0.4 Punkte

In einem Doppelsternsystem aus Neutronensternen geben die beiden Sterne durch die Emission von Gravitationswellen Energie und Drehimpuls ab und stoßen schließlich zusammen, wobei sie verschmelzen. Der Einfachheit halber betrachten wir nur eine Kreisbewegung mit dem Radius R und der Winkelgeschwindigkeit ω . Dann gilt bei Vernachlässigung relativistischer Effekte $\omega = \chi R^p$ mit einer Konstanten χ , die weder von ω noch von R abhängt. Bestimmen Sie den Wert von p .

C.6 — 0.2 Punkte

Die Amplitude der vom Doppelsternsystem in **C.5** ausgesandten Gravitationswelle ist proportional zu $R^2 \omega^2$. Die folgende Abbildung zeigt qualitativ vier verschiedene zeitliche Verläufe der beobachteten Gravitationswellen vor dem Zusammenstoß der beiden Sterne. Wählen Sie aus (a) bis (d) den am besten geeigneten Verlauf aus.



Verläufe der beobachteten Gravitationswellendaten.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A.1:** $A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 50.$

- **A.2:** $Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}} = 78.55 \dots$, woraus sich die ganzzahlige Ordnungszahl 79 ergibt.
- **A.3:** $C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx \text{span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">0.70.$
- **B.1:** $a_{\text{grav}} \approx \text{span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">6 \times 10^{-37} \text{ MeV}, $A_c \approx \text{span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">4 \times 10^{55}, unter Verwendung des unten erläuterten Kriteriums einer positiven Gesamtbindungsenergie.$$
- **C.1:** $\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$.
- **C.2:** $\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)$.
- **C.3:** $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \approx \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$.
- **C.4:** $\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5$, beziehungsweise $M_{\text{WD}} \approx 0.5 M_{\odot}$.
- **C.5:** $p = -\frac{3}{2}$.
- **C.6:** (b): Sowohl die Amplitude als auch die Frequenz nehmen zu, während sich die Sterne dem Zusammenstoß nähern.

Lösung

A.1

Für $Z = N = A/2$ verschwindet der Symmetrieterm. Die Bindungsenergie pro Nukleon wird zu

$$\frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - \frac{a_C}{4} A^{2/3}.$$

Behandeln wir A als kontinuierliche Größe, so ergibt sich

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{a_S}{3} A^{-4/3} - \frac{a_C}{6} A^{-1/3} = \frac{2a_S - a_C A}{6A^{4/3}}.$$

Diese Ableitung ist unterhalb von $A = 2a_S/a_C$ positiv und oberhalb davon negativ, sodass diese stationäre Stelle ein Maximum ist:

$$A = \frac{2a_S}{a_C} = \frac{2(17.8)}{0.711} = 50.07 \dots$$

Somit gilt

$$\text{span style="border: 1px solid black; padding: 0 5px;">}A \approx 50\text{.}$$

Die nächstgelegene zulässige gerade Massenzahl, die mit ganzzahligen $Z = N$ vereinbar ist, lautet $A = 50$.

A.2

Bei festem A gilt $N = A - Z$, also $N - Z = A - 2Z$. Nur der Coulomb- und der Symmetrieterm hängen von Z ab:

$$B(Z, A - Z) = \text{konstant} - a_C Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z)^2.$$

Die Bedingung für das Maximum lautet

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-1/3} + \frac{4a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z) = 0.$$

Durch Umstellen folgt

$$4a_{\text{sym}} A = Z (8a_{\text{sym}} + 2a_C A^{2/3}),$$

also

$$Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}}.$$

Es handelt sich um ein Maximum, weil

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_C A^{-1/3} - \frac{8a_{\text{sym}}}{A} < 0.$$

Für $A = 197$ gilt

$$Z^* = \frac{197}{2 + \frac{0.711}{2(23.7)} 197^{2/3}} = 78.553 \dots$$

Da die Abhängigkeit von Z eine konkave quadratische Funktion ist, ist die optimale ganze Zahl die nächstgelegene ganze Zahl:

$$Z^* = 79.$$

A.3

Die Gesamtzahl der Nukleonen bleibt erhalten, sodass sich die Ruheenergieterme der freien Nukleonen aufheben. Die Spaltung ist energetisch günstig, wenn

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) > 0.$$

Der Volumen- und der Symmetrieterm bleiben in der Summe unverändert. Der gesamte Oberflächenterm der Tochterkerne lautet

$$-2a_S (A/2)^{2/3} = -a_S 2^{1/3} A^{2/3},$$

und ihr gesamter Coulomb-Term lautet

$$-2a_C \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} = -a_C 2^{-2/3} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Daher gilt

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) = -a_S (2^{1/3} - 1) A^{2/3} + a_C (1 - 2^{-2/3}) \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Die Bedingung für eine positive Energiefreisetzung wird zu

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{a_S}{a_C}.$$

Damit folgt

$$C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0.702414 \dots \approx 0.70.$$

Physikalisch wird die Spaltung günstig, wenn die Verringerung der Coulomb-Abstoßung den Energieaufwand für die zusätzliche Oberfläche übersteigt.

B.1

Einsetzen der vorgegebenen Masse und des Radius in die gravitative Bindungsenergie ergibt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G(m_N A)^2}{R_0 A^{1/3}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} A^{5/3}.$$

Somit gilt

$$a_{\text{grav}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c}{R_0} \left(\frac{m_N c^2}{M_{\text{PC}}^2} \right)^2.$$

Mit den angegebenen Konstanten folgt

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.1 \text{ fm}} \left(\frac{939}{1.22 \times 10^{22}} \right)^2 = 6.3656 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

Auf eine signifikante Stelle ergibt sich

$$a_{\text{grav}} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

Für $Z = 0$ und $N = A$ verschwindet der Coulomb-Term, und der Symmetrieterm lautet $-a_{\text{sym}}A$. Wird der Oberflächenterm wie gefordert vernachlässigt, so gilt

$$B_{\text{tot}}(A) = (a_V - a_{\text{sym}})A + a_{\text{grav}}A^{5/3},$$

oder

$$\frac{B_{\text{tot}}}{A} = -7.9 \text{ MeV} + a_{\text{grav}}A^{2/3}.$$

Wird der endliche Schwellenwert als Einsetzen der Bindung gegenüber A freien Neutronen verstanden, lautet die Bedingung

$$B_{\text{tot}} > 0.$$

Folglich gilt

$$A > A_c, \quad A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_V}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2}.$$

Mit dem ungerundeten Wert von a_{grav} in dieser Rechnung ergibt sich

$$A_c = \left(\frac{7.9}{6.3656 \times 10^{-37}} \right)^{3/2} = 4.3721 \times 10^{55}.$$

Somit folgt

$$A_c \approx 4 \times 10^{55}.$$

Der Unterschied zwischen dieser Bindungsschwelle und einem strikten Vergleich für die Spaltung in zwei Tropfen ist hier wesentlich: Für $Z = 0$ und ohne Oberflächenterm ist $B_{\text{tot}}(A) - 2B_{\text{tot}}(A/2)$ gleich $(1 - 2^{-2/3}) a_{\text{grav}} A^{5/3}$ und damit für jedes A positiv, sodass der Vergleich mit zwei Tropfen

keinen endlichen Schwellenwert liefert.

C.1

Beim freien Fall über die Höhe Δh liefert die Newtonsche Energieerhaltung mit der erforderlichen Genauigkeit

$$\frac{1}{2}v^2 = g\Delta h = \Delta\phi,$$

also

$$v^2 = 2\Delta\phi.$$

Im momentanen Inertialsystem des frei fallenden Beobachters bewegt sich Uhr-II mit der Geschwindigkeit v . Die speziell-relativistische Zeitdilatation ergibt

$$\Delta\tau_{\text{II}} = \Delta\tau_F \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Mit dem in der Aufgabe vorgegebenen Uhrenvergleich $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\text{I}}$ und einer Entwicklung bis zur ersten Ordnung folgt

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\text{II}} &= \Delta\tau_{\text{I}} \sqrt{1 - \frac{2\Delta\phi}{c^2}} \\ &\approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\boxed{\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)}.$$

Die tiefer gelegene Uhr geht langsamer.

C.2

An der Position x beträgt der Abstand vom Weißen Zwerg

$$r(x) = \sqrt{x^2 + d^2},$$

und sein Gravitationspotential lautet

$$\phi(x) = -\frac{GM_{\text{WD}}}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

Aus dem angegebenen Ausdruck für schwache Felder folgt

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right).$$

Die Laufzeit ohne den Weißen Zwerg beträgt $(x_E - x_N)/c$. Zieht man sie von der tatsächlichen Laufzeit entlang desselben geraden Weges ab, erhält man

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}}} - \frac{1}{c} \right) dx \\
&\approx -\frac{2}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \phi(x) dx \\
&= \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}.
\end{aligned}$$

Eine äquivalente Form der angegebenen Stammfunktion lautet $\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$. Damit ergibt sich in erster Ordnung im Gravitationspotential

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2}}{x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2}} \right).$$

Für $x_E \gg d$ gilt

$$x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2} \approx 2x_E.$$

Für $x_N < 0$ und $|x_N| \gg d$ vermeidet die Erweiterung mit dem konjugierten Ausdruck eine Auslöschung:

$$x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2} = \frac{d^2}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + |x_N|} \approx \frac{d^2}{2|x_N|}.$$

Daher folgt

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right).$$

Dies ist eine positive gravitative Laufzeitverzögerung. Der Logarithmus ist dimensionslos, und GM_{WD}/c^3 hat die Dimension einer Zeit.

C.3

Bei den beiden Konjunktionen ergibt die Projektion des Abstands L auf die Sichtlinie

$$x_N = -L \cos \varepsilon \quad \text{bei maximaler Verzögerung,}$$

und

$$x_N = +L \cos \varepsilon \quad \text{bei minimaler Verzögerung.}$$

Bei beiden Konjunktionen gilt

$$d = L \sin \varepsilon, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} = L.$$

Da die Erde weit vom Doppelsternsystem entfernt ist, können wir mit der beibehaltenen Genauigkeit in beiden Konfigurationen denselben Wert von x_E verwenden. Das Integralergebnis aus C.2 vor der Annahme eines negativen x_N liefert

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L + x_N} \right).$$

Daraus folgt

$$\Delta t_{\max} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 - \cos \varepsilon)} \right),$$

während

$$\Delta t_{\min} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 + \cos \varepsilon)} \right).$$

Durch Subtraktion fallen sowohl x_E als auch L heraus:

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right).$$

Für $\varepsilon \ll 1$ gilt

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + \cos \varepsilon \approx 2.$$

Damit lautet die gesuchte Form für kleine Winkel

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) = \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right).$$

Hier ist ε im Bogenmaß angegeben. Das logarithmische Anwachsen bei kleiner Neigung entspricht innerhalb der angegebenen Näherungen einem immer näheren Vorbeilaufen des Lichts am Weißen Zwerg.

C.4

Aus dem Diagramm liest man näherungsweise ab:

$$\Delta t_{\max} \approx +22 \mu\text{s}, \quad \Delta t_{\min} \approx -23 \mu\text{s}.$$

Die messbare Spannweite beträgt daher näherungsweise

$$\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min} \approx 45 \mu\text{s}.$$

Ein beliebiger konstanter Versatz der dargestellten Verzögerungen beeinflusst diese Differenz nicht.

Mit der angegebenen Neigung gilt

$$\ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{1.99989}{0.00011} \right) \approx 9.808.$$

C.3 liefert dann

$$45 \mu\text{s} \approx 2 (5 \mu\text{s}) \frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} (9.808).$$

Daher folgt

$$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx \frac{45}{98.08} \approx 0.46.$$

Auf eine signifikante Stelle ergibt sich

$$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5, \quad M_{\text{WD}} \approx 0.5 M_{\odot}.$$

Der angegebene Abstand L fällt aus der Differenz zwischen maximaler und minimaler Verzögerung heraus.

C.5

Die Sternmassen seien M_1, M_2 , und ihr Abstand sei r . Für die Newtonsche Zweikörperbewegung auf Kreisbahnen gilt

$$\omega^2 r^3 = G(M_1 + M_2).$$

Bei festen Massen ist der Bahnradius R jedes der beiden Sterne ein konstantes Vielfaches von r . Folglich gilt

$$\omega \propto r^{-3/2} \propto R^{-3/2}.$$

Der Vergleich mit $\omega = \chi R^p$ ergibt

$$p = -\frac{3}{2}.$$

C.6

Während das Doppelsternsystem Bahnenergie verliert, nimmt sein Bahnradius ab. Aus C.5 folgt

$$\omega \propto R^{-3/2},$$

sodass die Umlauffrequenz und damit auch die Frequenz der Gravitationswellen zunimmt.

Die angegebene Abhängigkeit der Amplitude liefert

$$\text{Amplitude} \propto R^2 \omega^2 \propto R^2 R^{-3} = R^{-1}.$$

Somit nimmt auch die Amplitude zu, wenn R abnimmt. Der gesuchte Wellenverlauf hat eine sich aufweitende Einhüllende und immer dichter aufeinanderfolgende Schwingungen:

$$\text{Verlauf (b)}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Wasser und Körper

In dieser Aufgabe betrachten wir Phänomene, die durch die Wechselwirkung zwischen Wasser und Körpern entstehen und mit der Oberflächenspannung zusammenhängen. Teil A behandelt Bewegungen, während sich die Teile B und C mit statischen Situationen befassen.

Falls erforderlich, können Sie die Tatsache verwenden, dass eine Funktion $y(x)$, die die Differentialgleichung $y''(x) = ay(x)$ erfüllt (a ist eine positive Konstante), die allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ hat, wobei A und B beliebige Konstanten sind.

Teil A. Verschmelzen von Wassertropfen (2.0 Punkte)

Wie in Abb. 1 dargestellt, betrachten wir zwei ruhende, kugelförmige Wassertropfen auf der Oberfläche eines superhydrophoben Materials, d. h., zwischen dem Material und dem Wasser wirkt eine sehr starke abstoßende Kraft.

Zu Beginn werden zwei identische kugelförmige Wassertropfen nebeneinander auf die Oberfläche gesetzt; anschließend verschmelzen diese beiden Tropfen, nachdem sie einander berührt haben, und bilden einen größeren kugelförmigen Wassertropfen, der plötzlich nach oben springt.

A.1 2.0 Punkte

Der Radius a beider Wassertropfen vor dem Verschmelzen beträgt $100\ \mu\text{m}$. Die Dichte des Wassers ρ beträgt $1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Die Oberflächenspannung γ beträgt $7.27 \times 10^{-2}\ \text{J/m}^2$.

Ein Anteil k der Differenz der Oberflächenenergie vor und nach dem Verschmelzen, ΔE , wird in die kinetische Energie des hochspringenden Wassertropfens umgewandelt. Bestimmen Sie unter den folgenden Annahmen die anfängliche Absprunggeschwindigkeit v des vereinigten Wassertropfens mit zwei signifikanten Stellen:

- $k = 0.06$
- Beim Verschmelzen bleibt das gesamte Wasservolumen erhalten.

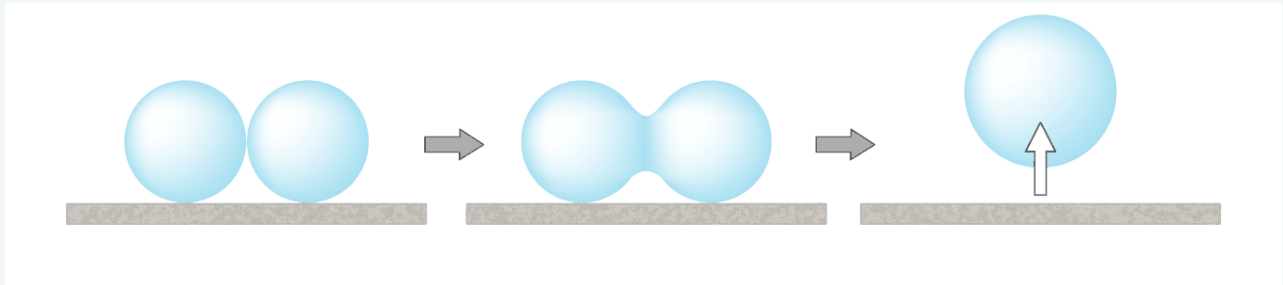


Abb. 1: Verschmelzen zweier Wassertropfen und Absprung des vereinigten Wassertropfens.

Teil B. Eine senkrecht aufgestellte Platte (4.5 Punkte)

Eine ebene Platte wird senkrecht in Wasser eingetaucht. Die Abbildungen 2(a) und 2(b) zeigen die Formen der Wasseroberfläche für hydrophiles (anziehendes) bzw. hydrophobes Plattenmaterial. Wir vernachlässigen die Dicke der Platte.

Die Plattenoberfläche liegt in der yz -Ebene, und die horizontale Wasseroberfläche weit entfernt von der Platte liegt in der xy -Ebene bei $z = 0$. Die Form der Oberfläche hängt nicht von der y -Koordinate ab. Sei $\theta(x)$ der Winkel zwischen der Wasseroberfläche und der Horizontalebene an einem Punkt (x, z) auf der Wasseroberfläche in der xz -Ebene. Dabei wird $\theta(x)$ bezüglich der positiven x -Achse gemessen, und eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn wird als positiv gewertet. Am Berührungspunkt zwischen der Platte und der Wasseroberfläche ($x = 0$) sei $\theta(x)$ gleich θ_0 . Im Folgenden ist θ_0 durch die Eigenschaften des Plattenmaterials festgelegt.

Die Wasserdichte ρ ist konstant, und die Oberflächenspannung des Wassers γ ist überall gleich. Die konstante Fallbeschleunigung ist durch g gegeben. Der Atmosphärendruck P_0 wird als stets räumlich konstant angenommen. Wir bestimmen die Form der Wasseroberfläche in den folgenden Schritten. Beachten Sie, dass die Einheit der Oberflächenspannung sowohl J/m^2 als auch N/m ist.

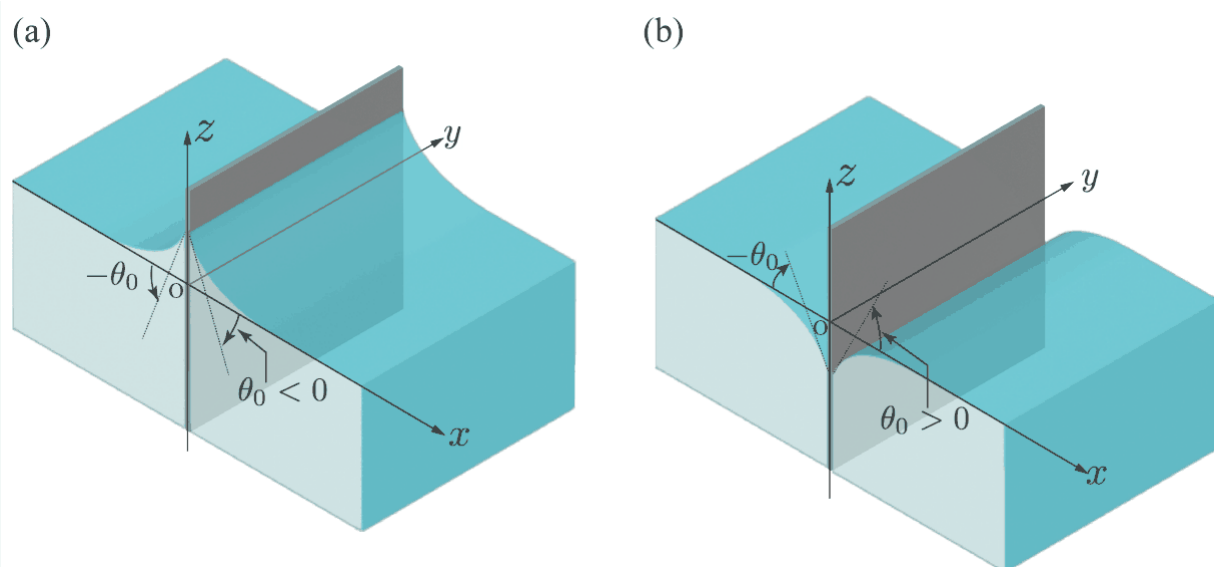


Abb. 2: Senkrecht in das Wasser eingetauchte Platten. (a) Fall einer hydrophilen Platte; (b) Fall einer hydrophoben Platte.

B.1 0.6 Punkte

Wir betrachten den Fall einer hydrophilen Platte, wie in Abb. 2(a) dargestellt. Wir stellen fest, dass der Wasserdruck P die Bedingungen $P < P_0$ für $z > 0$ und $P = P_0$ für $z = 0$ erfüllt. Drücken Sie nun P in der Höhe z durch ρ , g , z und P_0 aus.

B.2 0.8 Punkte

Wir betrachten einen Wasserblock, dessen herausgeschnittene Form in Abb. 3(a) schattiert dargestellt ist. Sein Querschnitt in der xz -Ebene ist als schraffierter Bereich in Abb. 3(b) dargestellt. Seien z_1 und z_2 die Koordinaten des linken bzw. rechten Randes der Grenzfläche (Wasseroberfläche) zwischen dem Wasserblock und der Luft.

Bestimmen Sie die horizontale Komponente (x -Komponente) der resultierenden Kraft pro Längeneinheit entlang der y -Achse, f_x , die aufgrund des Drucks auf den Wasserblock ausgeübt wird, in Abhängigkeit von ρ , g , z_1 und z_2 . Beachten Sie, dass P_0 keine resultierende horizontale Kraft auf den Wasserblock bewirkt.

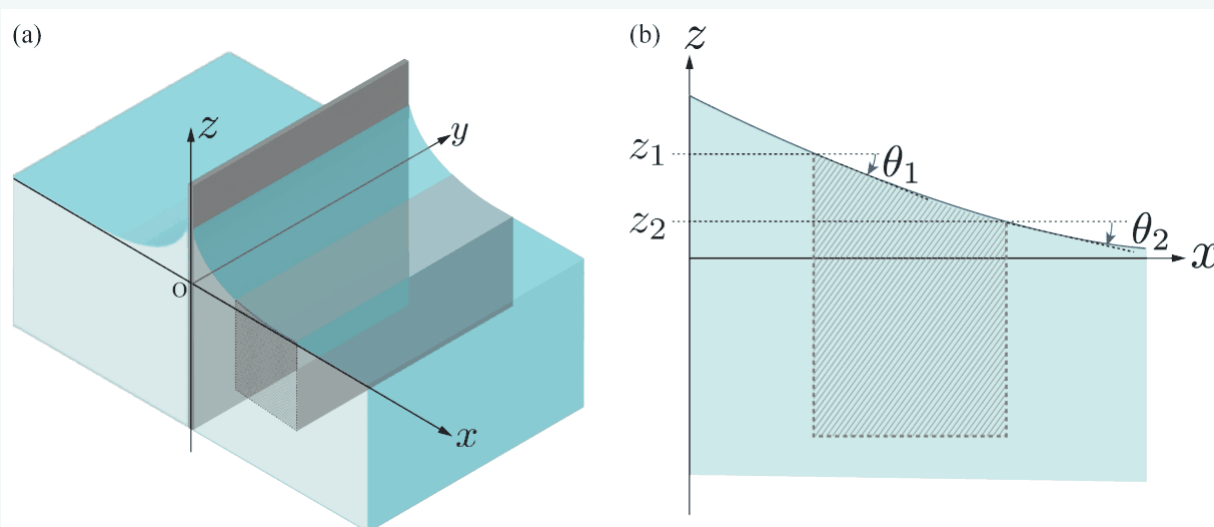


Abb. 3: Form des aus der Wasseroberfläche herausgeschnittenen Wasserblocks. (a) Ansicht aus der Vogelperspektive und (b) Querschnittsansicht.

B.3 0.8 Punkte

Die auf den Wasserblock wirkende Oberflächenspannung steht mit der in B.2 betrachteten Kraft f_x im Gleichgewicht. Wir definieren θ_1 und θ_2 als die Winkel zwischen der Wasseroberfläche und der Horizontalebene am linken bzw. rechten Rand. Drücken Sie f_x durch γ , θ_1 und θ_2 aus.

B.4 0.8 Punkte

An einem beliebigen Punkt (x, z) auf der Wasseroberfläche gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{konstant.} \quad (1)$$

Bestimmen Sie den Exponenten a und drücken Sie die Konstante ℓ durch γ und ρ aus. Beachten Sie, dass diese Gleichung unabhängig davon gilt, ob das Plattenmaterial hydrophil oder hydrophob ist.

B.5 1.5 Punkte

In Gl. (1) aus B.4 nehmen wir an, dass sich die Wasseroberfläche nur langsam ändert, d. h. $|z'(x)| \ll 1$, sodass wir $\cos \theta(x)$ bezüglich $z'(x)$ bis zur zweiten Ordnung entwickeln können. Durch anschließendes Differenzieren der erhaltenen Gleichung nach x erhalten wir die Differentialgleichung, die $z(x)$ erfüllt. Lösen Sie diese Differentialgleichung und bestimmen Sie $z(x)$ für $x \geq 0$ in Abhängigkeit von $\tan \theta_0$ und ℓ . Beachten Sie, dass die vertikalen Abmessungen in den Abb. 2 und 3 zur besseren Veranschaulichung überhöht dargestellt sind und die Bedingung $|z'(x)| \ll 1$ dort nicht erfüllt ist.

Teil C. Wechselwirkung zwischen zwei Stäben (3.5 Punkte)

Die identischen Stäbe A und B bestehen aus demselben Material, schwimmen parallel auf der Wasseroberfläche und befinden sich im gleichen Abstand von der y -Achse (Abb. 4).

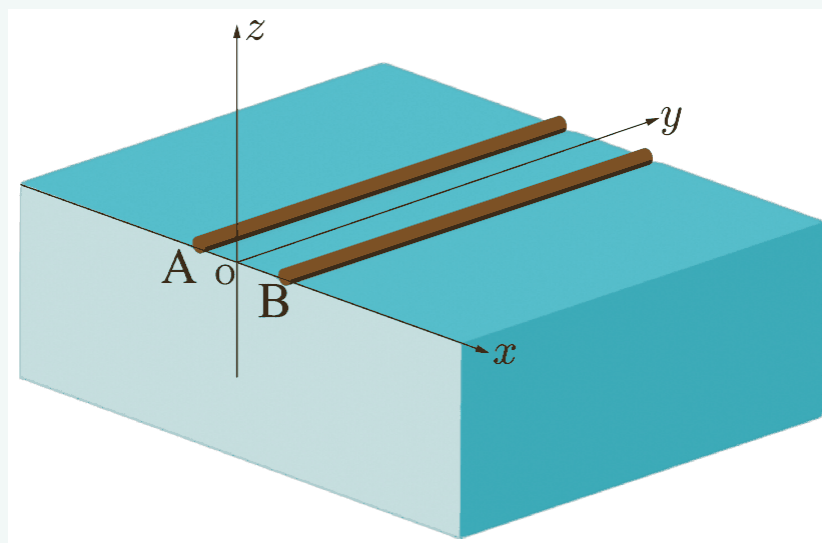


Abb. 4: Zwei auf der Wasseroberfläche schwimmende Stäbe A und B.

C.1 1.0 Punkte

An den Berührungspunkten des Stabes B mit der Wasseroberfläche definieren wir die z -Koordinaten z_a und z_b sowie die Winkel θ_a und θ_b , wie in Abb. 5 dargestellt. Bestimmen Sie die horizontale Kraftkomponente F_x auf den Stab B pro Längeneinheit entlang der y -Achse in Abhängigkeit von θ_a , θ_b , z_a , z_b , ρ , g und γ .

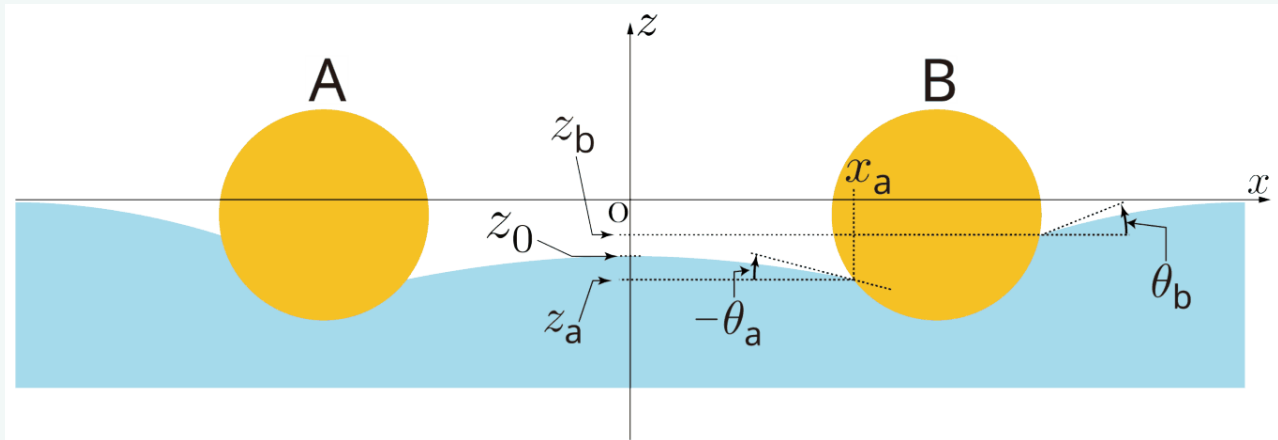


Abb. 5: Vertikaler Querschnitt durch zwei auf der Wasseroberfläche schwimmende Stäbe.

C.2 1.5 Punkte

Wir definieren die z -Koordinate der Wasseroberfläche in der Mitte zwischen den beiden Stäben in der xz -Ebene als z_0 . Drücken Sie die in C.1 erhaltene Kraft F_x ohne Verwendung von θ_a , θ_b , z_a und z_b aus.

C.3 1.0 Punkte

Sei x_a die x -Koordinate des Berührungspunktes zwischen der Wasseroberfläche und der linken Seite des Stabes B. Drücken Sie mithilfe der in B.5 erhaltenen Differentialgleichung die Wasserstandskoordinate z_0 in der Mitte zwischen diesen beiden Stäben A und B durch x_a und z_a aus. Sie können die in B.4 eingeführte Konstante ℓ verwenden.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Positive horizontale Kräfte zeigen in Richtung $+x$. Sowohl f_x als auch F_x sind Kräfte pro Längeneinheit entlang y mit der Einheit N/m.

• A.1

$$v = \sqrt{\frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3})} = 0.23 \text{ m/s} \quad \text{nach oben.}$$

• B.1

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

• B.2

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

- B.3

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

- B.4

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Die Konstante auf der rechten Seite von Gl. (1) ist für den Meniskus an der Platte gleich 1.

- B.5, in der Näherung kleiner Steigungen:

$$z''(x) = \frac{z(x)}{\ell^2}, \quad z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

- C.1

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

- C.2

$$F_x = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

Die Kraft auf B ist für $z_0 \neq 0$ auf A gerichtet.

- C.3, in der Näherung kleiner Steigungen:

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Lösung

A.1

Sei R der Radius des vereinigten Tropfens. Aus der Volumenerhaltung folgt

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad R = 2^{1/3} a.$$

Die Masse des vereinigten Tropfens ist daher

$$m = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \rho a^3.$$

Die Oberflächenenergie ist gleich dem Produkt aus Oberflächenspannung und Oberflächeninhalt. Somit beträgt die Abnahme der Oberflächenenergie

$$\begin{aligned} \Delta E &= \gamma (2 \cdot 4\pi a^2 - 4\pi R^2) \\ &= 4\pi \gamma a^2 (2 - 2^{2/3}). \end{aligned}$$

Mit der vorgegebenen Umwandlung eines Anteils k in kinetische Translationsenergie gilt

$$\frac{1}{2} m v^2 = k \Delta E.$$

Folglich ist

$$v^2 = \frac{3k\gamma}{\rho a} \left(2 - 2^{2/3}\right).$$

Mit $a = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}$ ergeben sich

$$m = 8.3776 \times 10^{-9} \text{ kg}, \quad \Delta E = 3.7694 \times 10^{-9} \text{ J},$$

und

$$v = 0.23236 \dots \text{ m/s}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet beträgt die Anfangsgeschwindigkeit

$$v = 0.23 \text{ m/s nach oben.}$$

B.1

Im hydrostatischen Gleichgewicht gleicht die nach oben gerichtete Druckkraft die Schwerkraft aus. Daraus folgt

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Da ρ konstant ist und $P(0) = P_0$ gilt, liefert die Integration

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

Insbesondere liegt der Druck im Wasser oberhalb von $z = 0$ wie angegeben unter dem Atmosphärendruck.

B.2

Ein gleichmäßiger Druck P_0 , der auf die gesamte geschlossene Begrenzungsfläche wirkt, erzeugt keine resultierende Kraft. Daher können wir mit dem Relativdruck rechnen:

$$p(z) = P(z) - P_0 = -\rho g z.$$

Der Relativdruck auf der der Luft zugewandten Oberfläche ist null. Sei z_* die einheitliche Höhe der Unterseite des Blocks. Der Druck auf die linke vertikale Seitenfläche wirkt in Richtung $+x$, der Druck auf die rechte Seitenfläche in Richtung $-x$. Die Unterseite trägt nicht zur horizontalen Kraft bei.

Pro Längeneinheit entlang y gilt

$$\begin{aligned} f_x &= \int_{z_*}^{z_1} p(z) dz - \int_{z_*}^{z_2} p(z) dz \\ &= -\rho g \int_{z_2}^{z_1} z dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2). \end{aligned}$$

Somit ist

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

Für den dargestellten hydrophilen Meniskus gilt $z_1 > z_2 > 0$, sodass diese Druckkraft in Richtung $-x$ zeigt.

B.3

Die Oberflächenspannung zieht an jedem Rand tangential vom Block weg. Ihre horizontalen Komponenten pro Längeneinheit sind

$$-\gamma \cos \theta_1 \quad \text{am linken Rand,} \quad +\gamma \cos \theta_2 \quad \text{am rechten Rand.}$$

Das horizontale Gleichgewicht erfordert

$$f_x - \gamma \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta_2 = 0.$$

Daher gilt

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

B.4

Gleichsetzen der Ausdrücke aus B.2 und B.3 liefert

$$\frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2) = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Umstellen ergibt

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z_1^2 + \cos \theta_1 = \frac{\rho g}{2\gamma} z_2^2 + \cos \theta_2.$$

Da die beiden Ränder entlang der Oberfläche beliebig gewählt werden können, gilt

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z^2 + \cos \theta(x) = C.$$

Der Vergleich mit Gl. (1) ergibt

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Die Länge ℓ ist die Kapillarlänge. Die Herleitung lässt beide Vorzeichen von z zu und gilt daher sowohl für angehobene als auch für abgesenkte Menisken.

Weit entfernt von der Platte gilt $z \rightarrow 0$ und $\theta \rightarrow 0$. Somit ist $C = 1$, und die exakte Beziehung für die Oberfläche an der Platte lautet

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + \cos \theta(x) = 1.$$

B.5

Für die Tangente an die Oberfläche gilt

$$\tan \theta(x) = z'(x).$$

Für die als Funktionsgraph dargestellte Oberfläche gilt

$$\cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}.$$

Unter der angegebenen Näherung $|z'(x)| \ll 1$ lautet die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung

$$\cos \theta(x) = 1 - \frac{1}{2} [z'(x)]^2 + O([z'(x)]^4).$$

Einsetzen in Gl. (1) ergibt bis zu dieser Ordnung

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + 1 - \frac{1}{2}(z')^2 = C.$$

Differenzieren liefert

$$\frac{zz'}{\ell^2} - z'z'' = 0.$$

Für ein nicht ebenes Profil ergibt sich daraus

$$z'' = \frac{z}{\ell^2},$$

wobei die Gleichung aufgrund der Stetigkeit auch an isolierten stationären Punkten gilt. Das ebene Profil $z = 0$ erfüllt sie ebenfalls.

Die allgemeine Lösung lautet

$$z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}.$$

Die Randbedingung $z(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$ erfordert $A = 0$. An der Platte gilt

$$z'(0) = \tan \theta_0 = -\frac{B}{\ell},$$

also $B = -\ell \tan \theta_0$. Daher ist

$$z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

Für eine hydrophile Platte gilt $\theta_0 < 0$, also $z > 0$. Für eine hydrophobe Platte gilt $\theta_0 > 0$, also $z < 0$. In beiden Fällen nähert sich die Oberfläche auf der Längenskala ℓ exponentiell dem Niveau $z = 0$. Die Konsistenz der Näherung erfordert $|\tan \theta_0| \ll 1$.

C.1

Zur horizontalen Kraft auf den Stab B gibt es zwei Beiträge: die Oberflächenspannung an den Kontaktlinien und den Druck auf den Stab.

Die Oberflächenspannung zieht den Stab zur angrenzenden freien Oberfläche hin. Ihre resultierende horizontale Komponente ist daher

$$F_{\gamma,x} = -\gamma \cos \theta_a + \gamma \cos \theta_b.$$

Für die Druckkraft ziehen wir den gleichmäßigen Atmosphärendruck ab, dessen resultierende Kraft auf die geschlossene Staboberfläche null ist. Der verbleibende Druck auf der benetzten Oberfläche ist $p(z) = -\rho g z$.

Die horizontale Druckkraft auf eine gekrümmte Oberfläche erhält man durch Integration des Drucks über ihre vertikale Projektion. Sei z_* die Höhe des tiefsten Punktes des Stabes. Die linke benetzte Seite liefert einen Beitrag in Richtung $+x$, die rechte benetzte Seite in Richtung $-x$:

$$\begin{aligned} F_{p,x} &= \int_{z_*}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_*}^{z_b} (-\rho g z) dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2). \end{aligned}$$

Die Schwerkraft hat keine horizontale Komponente. Addition der beiden Beiträge ergibt

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2

Die Beziehung für die Oberfläche aus B.4 gilt jeweils getrennt für die Oberfläche zwischen den Stäben und für die äußere Oberfläche. Ihre Integrationskonstanten müssen nicht gleich sein.

Auf der Außenseite von B wird die Oberfläche in großer Entfernung bei $z = 0$ horizontal. Daher gilt

$$\frac{z_b^2}{2\ell^2} + \cos \theta_b = 1.$$

Zwischen den identischen Stäben ist die Oberfläche aufgrund der Spiegelsymmetrie bezüglich $x = 0$ in der Mitte horizontal. Dort gilt $z = z_0$, sodass die Beziehung im Innenbereich lautet

$$\frac{z_a^2}{2\ell^2} + \cos \theta_a = 1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2}.$$

Da $\rho g = \gamma/\ell^2$ gilt, lässt sich die Kraft aus C.1 schreiben als

$$F_x = \gamma \left[\left(\cos \theta_b + \frac{z_b^2}{2\ell^2} \right) - \left(\cos \theta_a + \frac{z_a^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Einsetzen ergibt

$$F_x = \gamma \left[1 - \left(1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

Somit gilt

$$F_x = -\frac{\gamma z_0^2}{2\ell^2} = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

Stab B liegt auf der Seite mit positiver x -Koordinate, sodass das negative Vorzeichen eine Anziehung zum Stab A hin bedeutet. Die Kraft verschwindet für $z_0 = 0$. Dieses Ergebnis erfordert nicht die Näherung kleiner Steigungen.

C.3

Nun wenden wir die Gleichung für kleine Steigungen aus B.5 auf die Oberfläche zwischen den Stäben an:

$$z'' = \frac{z}{\ell^2}.$$

Mit Hyperbelfunktionen geschrieben lautet ihre Lösung

$$z(x) = C_1 \cosh(x/\ell) + C_2 \sinh(x/\ell).$$

Aus der Symmetrie folgt $z'(0) = 0$, was $C_2 = 0$ erfordert. Da $z(0) = z_0$ gilt, ist $C_1 = z_0$, und somit

$$z(x) = z_0 \cosh(x/\ell).$$

Am inneren Berührungspunkt mit Stab B gilt $x = x_a$ und $z = z_a$. Folglich ist

$$z_a = z_0 \cosh(x_a/\ell),$$

also

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

Diese Beziehung zwischen Höhe und Abstand gilt innerhalb der Näherung kleiner Steigungen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.