

المسألة 1: توصيف غرويات التربة

يفيد علم الغرويات في توصيف جسيمات التربة، إذ يمكن اعتبار كثير منها جسيمات غروية ذات أحجام ميكرومترية. فعلى سبيل المثال، يمكن استخدام الحركة البراونية (الحركة العشوائية للجسيمات الغروية) لقياس أحجام الجسيمات.

الجزء A. حركات الجسيمات الغروية (1.6 نقطة)

نحل الحركة البراونية أحادية البعد لجسيم غروي كتلته M . نُكتب معادلة الحركة لسرعته $v(t)$ على الصورة:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

حيث γ معامل الاحتكاك، و $F(t)$ قوة ناتجة عن التصادمات العشوائية مع جزيئات الماء، و $F_{\text{ext}}(t)$ قوة خارجية. نفترض في الجزء A أن $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

0.8 — A.1 نقطة

افترض أن جزيء ماء يصطدم بالجسيم عند $t = t_0$ ، فيمنحه دفعة I_0 ، وأن $F(t) = 0$ بعد ذلك. إذا كانت $v(t) = 0$ قبل التصادم، فإن $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ عندما $t > t_0$. أوجد v_0 و τ ، باستخدام I_0 وما يلزم من معاملات المعادلة (1). يمكنك فيما يلي استخدام τ في إجاباتك.

0.8 — A.2 نقطة

في الواقع، تتصادم جزيئات الماء مع الجسيم تبعاً. افترض أن التصادم رقم i يمنحه دفعة I_i عند الزمن t_i ، وأوجد $v(t)$ بشرط أن $t > 0$ و $v(0) = 0$. اكتب أيضاً المتباينة التي تحدد مجال t_i الواجب أخذه في الحسبان عند قيمة معينة لـ t . لا يلزم تحديد هذا المجال في تعبير $v(t)$ في ورقة الإجابة.

الجزء B. معادلة الحركة الفعالة (1.8 نقطة)

تشير النتائج حتى الآن إلى أنه يمكن اعتبار سرعتي الجسيم $v(t)$ و $v(t')$ كميتين عشوائيتين غير مترابطتين إذا كان $|t - t'| \gg \tau$. وبناءً على ذلك، نقدم نموذجاً نظرياً لوصف الحركة البراونية أحادية البعد وصفاً تقريبياً، تتغير فيه السرعة عشوائياً كل فترة زمنية δ ($\gg \tau$)، أي:

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

حيث $t_n = n\delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)، و v_n كمية عشوائية. وهي تحقق

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

حيث المعامل C يعتمد على δ . هنا تشير $\langle X \rangle$ إلى القيمة المتوقعة لـ X . أي إنك إذا سحبت أعداداً عشوائية X عدداً لا نهائياً من المرات، فسيكون متوسطها $\langle X \rangle$.

ندرس الآن إزاحة الجسيم $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ عند $t = N\delta$ ، حيث N عدد صحيح.

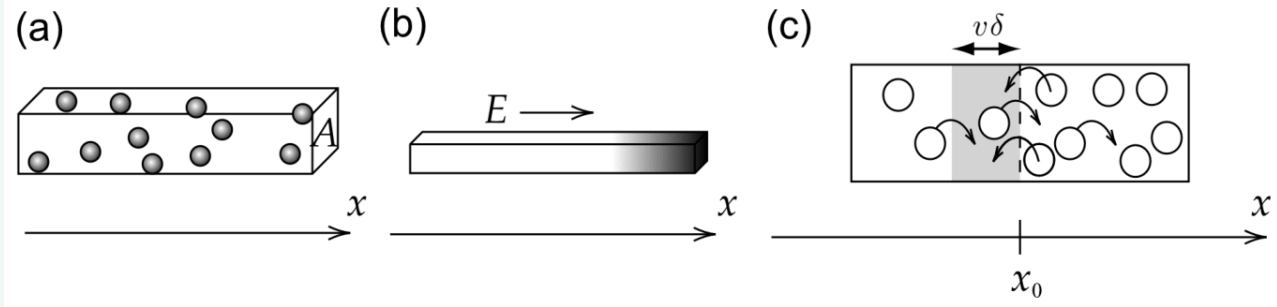
1.0 — B.1 نقطة

أوجد $\langle \Delta x(t) \rangle$ و $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ باستخدام C و δ و t .

تسمى الكمية $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ متوسط مربع الإزاحة (MSD). وهي كمية قابلة للرصد تميز الحركة البراونية، التي تقابل الحالة الحدية $\delta \rightarrow 0$. انطلاقاً من ذلك، يمكننا إثبات أن $C \propto \delta^\alpha$ و $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$. أوجد قيمتي α و β .

الجزء C. الرحلان الكهربائي (نقطة 2.7)

نناقش هنا الرحلان الكهربائي، أي نقل الجسيمات المشحونة بواسطة مجال كهربائي. يوضع معلق من جسيمات غروية كتلتها M وشحنتها Q (> 0) في قناة ضيقة مساحة مقطعها العرضي A (الشكل 1(a)). نهمل التفاعل بين الجسيمات، وتأثيرات الجدار والمائع والأيونات الموجودة فيه والجاذبية.



الشكل 1: ترتيب التجربة للجزء C.

بتطبيق مجال كهربائي منتظم E في اتجاه x ، تنتقل الجسيمات ويصبح تركيزها $n(x)$ (عدد الجسيمات في وحدة الحجم) غير منتظم (الشكل 1(b)). عند إزالة E ، يزول عدم الانتظام هذا تدريجياً. ويعود ذلك إلى الحركة البراونية للجسيمات. إذا لم يكن $n(x)$ منتظماً، فقد يختلف عدد الجسيمات المتجهة إلى اليمين عن عدد الجسيمات المتجهة إلى اليسار (الشكل 1(c)). وينشأ عن ذلك فيض جسيمات $J_D(x)$ ، وهو متوسط عدد الجسيمات المتدفقة عند x على امتداد محور x لكل وحدة مساحة مقطع عرضي ولكل وحدة زمن. ومن المعروف أن هذا الفيض يحقق

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

حيث يسمى D معامل الانتشار.

لنفترض الآن، للتبسيط، أن نصف الجسيمات سرعتها $+v$ ، وأن النصف الآخر سرعتها $-v$. لتكن $N_+(x_0)$ عدد الجسيمات ذات السرعة $+v$ التي تعبر x_0 من اليسار إلى اليمين لكل وحدة مساحة مقطع عرضي ولكل وحدة زمن. ولكي تعبر الجسيمات ذات السرعة $+v$ الموضع x_0 خلال الفترة الزمنية δ ، يجب أن تكون في المنطقة المظلمة من الشكل 1(c). وبما أن δ صغيرة، فإن $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx}(x_0)$.

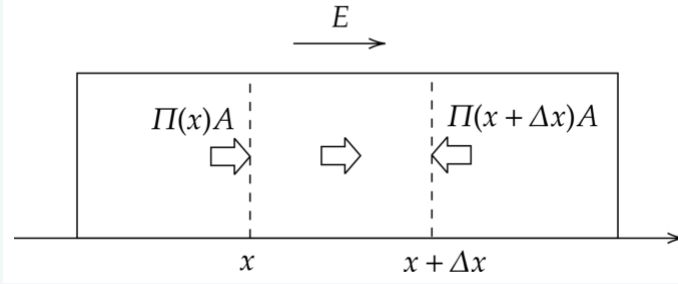
0.5 — C.1 نقطة

عبّر عن $N_+(x_0)$ باستخدام ما يلزم من الكميات v و δ و $n(x_0)$ و $\frac{dn}{dx}(x_0)$. نعرّف $N_-(x_0)$ بوصفها نظيرة $N_+(x_0)$ للسرعة $-v$. وبذلك يكون $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$ وفقاً للمعادلة (3)، لدينا $\langle v^2 \rangle = C$.

0.7 — C.2 نقطة

أوجد $J_D(x_0)$ باستخدام ما يلزم من الكميات C و δ و $n(x_0)$ و $\frac{dn}{dx}(x_0)$. باستخدام هذه النتيجة والمعادلة (4)، عبّر عن D بدلالة C و δ ، وعن $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ بدلالة D و t .

نناقش الآن تأثير الضغط الأسموزي Π . يُعطى هذا الضغط بالعلاقة $\Pi = \frac{n}{N_A} RT = nkT$ ، حيث N_A ثابت أفوغادرو، و R ثابت الغازات، و T درجة الحرارة، و $k = \frac{R}{N_A}$ ثابت بولتزمان. لندرس التركيز غير المنتظم المتكون تحت تأثير المجال الكهربائي E (الشكل 1(b)). بما أن $n(x)$ يعتمد على x ، فإن $\Pi(x)$ يعتمد عليه أيضاً. عندئذ يجب أن تتوازن القوتان الناشئتان عن $\Pi(x)$ و $\Pi(x + \Delta x)$ مع القوة الكلية التي يؤثر بها المجال E في الجسيمات (الشكل 2). نعتبر هنا أن Δx صغيرة، بحيث يمكن عدّ $n(x)$ ثابتاً على هذا المجال، بينما $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.



الشكل 2: توازن القوى.

0.5 — C.3 نقطة

عبر عن $\frac{dn}{dx}(x)$ باستخدام $n(x)$ و T و Q و E و k .

لنناقش الآن توازن الفيض. إلى جانب الفيض $J_D(x)$ الناتج عن الحركة البراونية، يوجد أيضاً فيض ناتج عن المجال الكهربائي، هو $J_Q(x)$. ويُعطى بالعلاقة

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

حيث u السرعة الحدية للجسيمات المدفوعة بالمجال.

0.5 — C.4 نقطة

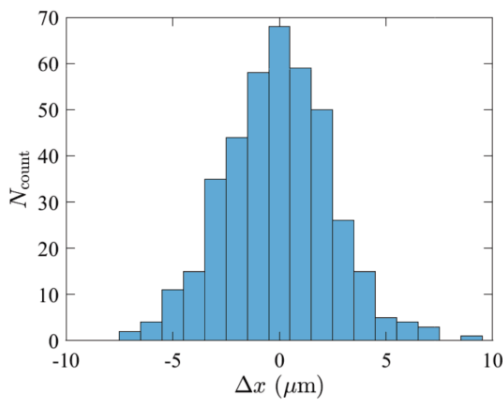
لتحديد u ، نستخدم المعادلة (1) مع $F_{\text{ext}}(t) = QE$. بما أن $v(t)$ تتقلب، فإننا ندرس $\langle v(t) \rangle$. بافتراض $\langle v(0) \rangle = 0$ وباستخدام $\langle F(t) \rangle = 0$ ، احسب $\langle v(t) \rangle$ وأوجد $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$.

0.5 — C.5 نقطة

يُكتب توازن الفيض على الصورة $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. عبر عن معامل الانتشار D بدلالة k و γ و T .

الجزء D. متوسط مربع الإزاحة (2.4 نقطة)

افترض أننا رصدنا الحركة البراونية لجسيم غروي كروي معزول نصف قطره $a = 5.0 \mu\text{m}$ في الماء. يبين الشكل 3 المدرج التكراري للإزاحات Δx المقاسة في اتجاه x كل فترة زمنية $\Delta t = 60 \text{ s}$. يُعطى معامل الاحتكاك بالعلاقة $\gamma = 6\pi a\eta$ ، حيث لزوجة الماء $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ، وكانت درجة الحرارة $T = 25^\circ \text{C}$.



$\Delta x (\mu\text{m})$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15
$\Delta x (\mu\text{m})$	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26
$\Delta x (\mu\text{m})$	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

الشكل 3: المدرج التكراري للإزاحات.

-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	$\Delta x (\mu\text{m})$
15	11	4	2	0	0	0	N_{count}

3	2	1	0	-1	-2	-3	$\Delta x (\mu\text{m})$
26	50	59	68	58	44	35	N_{count}

10	9	8	7	6	5	4	$\Delta x (\mu\text{m})$
0	1	0	3	4	5	15	N_{count}

1.0 — D.1 نقطة

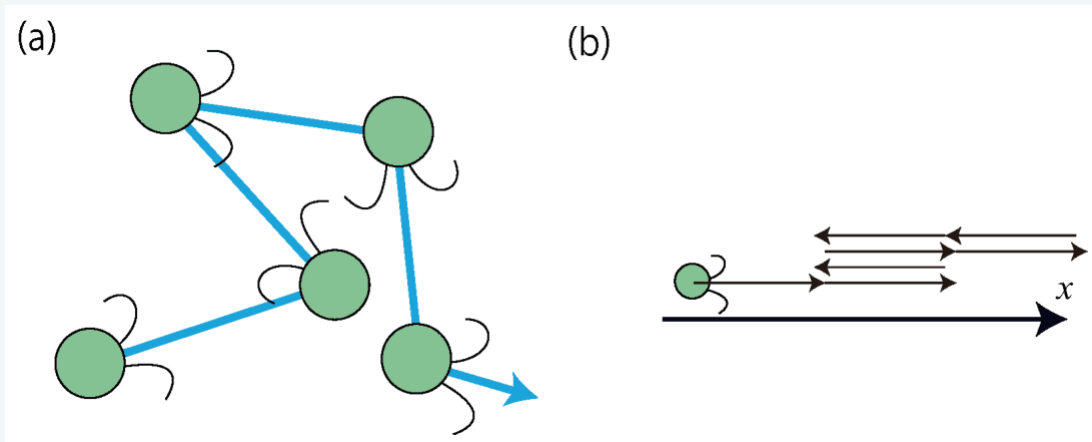
قدّر قيمة N_A برقمين معنويين من بيانات الشكل 3، دون الاستعانة بكونه ثابت أفوغادرو. ثابت الغازات هو $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$. لا تستخدم قيمة ثابت بولتزمان k الواردة في التعليمات العامة. أما ثابت أفوغادرو، فقد تحصل له على قيمة تختلف عن القيمة الواردة في التعليمات العامة.

نوسّع الآن النموذج الوارد في الجزء B لوصف حركة جسيم شحنته Q تحت تأثير مجال كهربائي E . ينبغي استبدال سرعة الجسيم $v(t)$ الواردة في المعادلة (2) بالتعبير $v(t) = u + v_n$ ، حيث تحقق v_n المعادلة (3)، و u هي السرعة الحدية الواردة في المعادلة (5).

0.8 — D.2 نقطة

عبر عن متوسط مربع الإزاحة $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ بدلالة u و D و t . أوجد قوانين القوة التقريبية عند قيم t الصغيرة والكبيرة، وكذلك الزمن المميز t_* الذي يحدث عنده هذا التغير. ارسم مخططاً تقريبياً لمتوسط مربع الإزاحة بمقياس لوغاريتمي على كلا المحورين، موضحاً الموضع التقريبي لـ t_* .

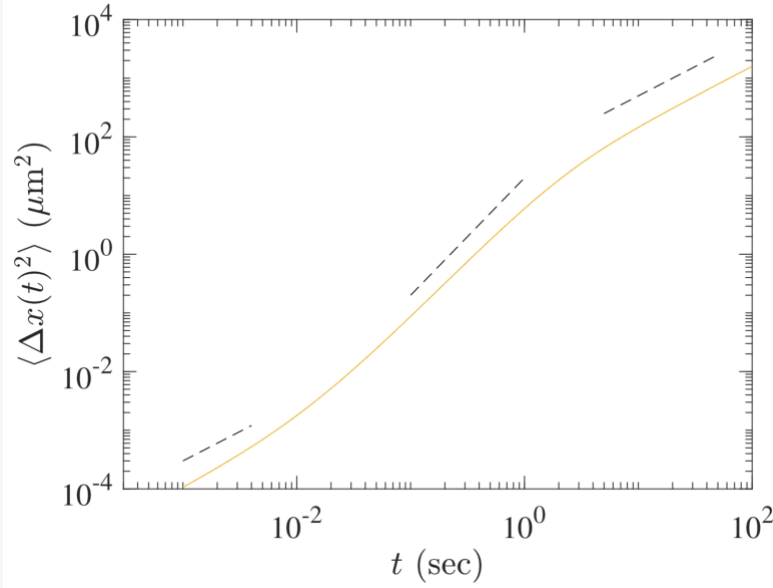
ندرس بعد ذلك ميكروبات تسبح (الشكل 4(a))، في بعد واحد للتبسيط (الشكل 4(b)). وهي جسيمات كروية نصف قطرها a . تسبح بسرعة إما $+u_0$ أو $-u_0$ ، ونختار الإشارة عشوائياً كل فترة زمنية δ_0 دون ترابط. الحركة المرصودة هي مزيج من الإزاحات الناتجة عن السباحة وتلك الناتجة عن الحركة البراونية لجسيم كروي.



الشكل 4: (a) حركة الميكروبات. (b) صورتها أحادية البعد.

0.6 — D.3 نقطة

يعرض الشكل 5 متوسط مربع الإزاحة $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ لتلك الميكروبات، ويظهر قوانين قوة مختلفة عند قيم t الصغيرة والكبيرة والمتوسطة، كما تبين الخطوط المنقطعة. أوجد قانون القوة لكل مجال زمني، وعبر عنه باستخدام ما يلزم من الكميات D و u_0 و δ_0 و t .



الشكل 5: متوسط مربع إزاحة الميكروبات.

الجزء E. تنقية الماء (1.5 نقطة)

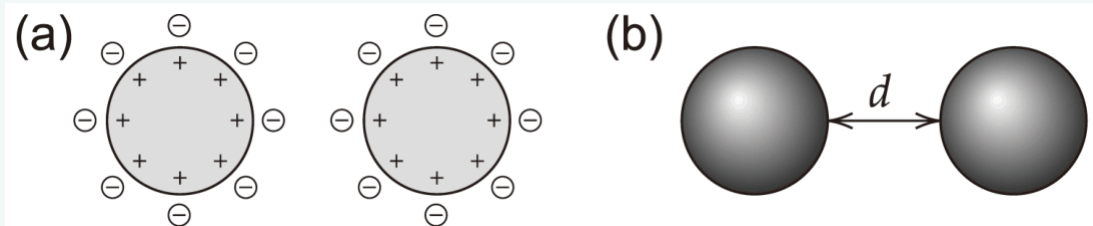
نناقش هنا تنقية الماء المحتوي على جسيمات تربة شبيهة بالغرويات، بإضافة إلكتروليات لتخثيرها. تتفاعل الجسيمات من خلال قوة فان دير فالس والقوة الكهروستاتيكية، وتشمل الأخيرة تأثيرات كل من الشحنات السطحية والطبقة المحيطة من الأيونات ذات الشحنة المعاكسة (تسمى هذه الأيونات وطبقتها بالأيونات المضادة والطبقة الكهربائية المزدوجة، على الترتيب؛ انظر الشكل 6(a)). ونتيجة لذلك، تُعطى طاقة وضع التفاعل عند المسافة d بين الجسيمات (الشكل 6(b)) بالعلاقة

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

حيث A و B ثابتان موجبان، و ϵ ثابت العزل الكهربائي للماء، و λ سمك الطبقة الكهربائية المزدوجة. بافتراض أن شحنات الأيونات هي $\pm q$ ، لدينا

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \quad (7)$$

حيث c التركيز المولي للأيون.



الشكل 6: (a) الشحنات السطحية للجسيمات الغروية والأيونات المضادة. (b) تعريف المسافة d .

1.5 — E.1 نقطة

تؤدي إضافة كلوريد الصوديوم (NaCl) إلى المعلق إلى تخثر الجسيمات الغروية. أوجد أقل تركيز c من NaCl يلزم للتخثر. يكفي النظر في جسيمين دون تقلبات حرارية، أي $F(t) = 0$ في المعادلة (1)، وافترض بلوغ السرعة الحدية الموافقة للقوة المشتقة من طاقة الوضع المعطاة بصورة آنية.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

A.1 •

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2 •

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i e^{-(t-t_i)/\tau}, \quad 0 < t_i < t.$$

مباشرة بعد تصادم يقع عند زمن الرصد، أدرج $t_i = t$.

B.1 •

$$\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.$$

B.2 •

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

C.1 •

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2} n(x_0) - \frac{v^2 \delta}{4} \frac{dn}{dx}(x_0).$$

C.2 •

$$J_D(x_0) = -\frac{C\delta}{2} \frac{dn}{dx}(x_0), \quad D = \frac{C\delta}{2}, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

C.3 •

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT} n(x).$$

C.4 •

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau}), \quad u = \frac{QE}{\gamma}.$$

C.5 •

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

D.1 •

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

D.2 •

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2, \quad t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

عندما $t \ll t_*$ ، يساوي متوسط مربع الإزاحة تقريباً $2Dt$ ، ويكون ميله على مخطط لوغاريتمي لكلا المحورين 1. وعندما $t \gg t_*$ ، يساوي تقريباً $u^2 t^2$ ، ويكون ميله 2.

• **D.3** نعرّف $t_s = 2D/u_0^2$. بالنسبة إلى الأنظمة الثلاثة المتميزة المبينة، يكون $t_s \ll \delta_0$ و

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq \begin{cases} 2Dt, & t \ll t_s, \\ u_0^2 t^2, & t_s \ll t \ll \delta_0, \\ (2D + u_0^2 \delta_0)t \simeq u_0^2 \delta_0 t, & t \gg \delta_0. \end{cases}$$

المحول المقابلة على المخطط اللوغاريتمي لكلا المحورين هي 1, 2, 1.

• **E.1** التركيز الحرج هو

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2 \epsilon^3 (kT)^5}{\exp(4) N_A A^2 q^6},$$

حيث q مقدار الشحنة الأولية في حالة NaCl. يحدث التخرثر انطلاقاً من تباعد كبير عندما $c > c_{\text{crit}}$. وعند $c = c_{\text{crit}}$ تماماً، تكون الديناميكا المذكورة، الخالية من الضوضاء والمفرطة التخمد، في حالة حدية: يقترب الجسيमान تقاربياً من مسافة فصل منتهية.

الحل

A.1

يعطي تكامل معادلة الحركة على مدى التصادم القصير جداً علاقة الدفع بكمية الحركة. يتلاشى دفع الاحتكاك عندما تؤول مدة التصادم إلى الصفر، ومن ثم

$$M[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = I_0.$$

بما أن الجسيم كان ساكناً في البداية،

$$v_0 = v(t_0^+) = \frac{I_0}{M}.$$

بعد التصادم، تنعدم القوتان F و F_{ext} . لذلك

$$M \frac{dv}{dt} = -\gamma v,$$

وحل هذه المعادلة هو

$$v(t) = \frac{I_0}{M} \exp \left[-\frac{\gamma}{M} (t - t_0) \right].$$

بالمقارنة مع الصورة المعطاة نحصل على

$$v_0 = \frac{I_0}{M}, \quad \tau = \frac{M}{\gamma}.$$

A.2

معادلة الحركة خطية. يُحدث كل تصادم زيادة آنية في السرعة مقدارها I_i/M ، ثم تتضاءل هذه الزيادة بزمّن استرخاء τ . ومن ثم يعطي مبدأ التراكب

$$v(t) = \frac{1}{M} \sum_{0 < t_i < t} I_i \exp \left[-\frac{t - t_i}{\tau} \right].$$

لا تسهم إلا التصادمات التي تقع بعد الزمن الابتدائي وقبل الرصد:

$$0 < t_i < t.$$

عند لحظة التصادم، تقفز السرعة بمقدار I_i/M . وإذا كانت $v(t)$ تمثل السرعة مباشرة بعد ذلك التصادم، تُدرج النهاية العليا للمجال.

B.1

خلال الفترة n ، تكون الإزاحة $v_n \delta$. ومن ثم، عند $t = N\delta$ ،

$$\Delta x(t) = \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

قيمتها المتوقعة هي

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \delta \sum_{n=1}^N \langle v_n \rangle = 0.$$

أما العزم الثاني،

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \delta^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle v_n v_m \rangle \\ &= \delta^2 NC \\ &= C\delta t. \end{aligned}$$

تتعدم الحدود المختلطة لأن سرعات الفترات المختلفة غير مترابطة. لذلك

$$\boxed{\langle \Delta x(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t.}$$

B.2

عند زمن رصد موجب وثابت، يجب أن يكون متوسط مربع الإزاحة للحركة البراونية منتهياً وغير صفري في حد الانتشار. وبما أن

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = C\delta t,$$

فيجب أن يؤول حاصل الضرب $C\delta$ إلى ثابت منتهٍ وغير صفري عندما $\delta \rightarrow 0$. لذلك

$$C \propto \delta^{-1}.$$

ويكون الاعتماد المتبقي على الزمن خطياً:

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t.$$

وعليه،

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1.}$$

هذا هو حد الاستمرارية للنموذج الفعال، الذي يصف الحركة على مقاييس زمنية أطول بكثير من زمن الاسترخاء المجهرى τ .

C.1

تعبير الجسيمات المتحركة إلى اليمين الموضع x_0 خلال الفترة التالية δ إذا كانت تقع في البداية بين $x_0 - v\delta$ و x_0 . يتحرك نصف الجسيمات في هذه المنطقة إلى اليمين. وبقسمة عددها لكل وحدة مساحة على δ ،

$$N_+(x_0) = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0 - v\delta}^{x_0} n(x) dx.$$

باستخدام التقريب الخطي المعطى،

$$n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)n'(x_0),$$

نحصل على

$$N_+(x_0) \simeq \frac{1}{2\delta} \left[v\delta n(x_0) - \frac{(v\delta)^2}{2} n'(x_0) \right].$$

لذلك،

$$N_+(x_0) \simeq \frac{v}{2}n(x_0) - \frac{v^2\delta}{4}n'(x_0).$$

يتطلب هذا التقريب أن يتغير التركيز ببطء على مدى مسافة $v\delta$.

C.2

وبالمثل، تنطلق الجسيمات المتحركة إلى اليسار من المجال $x_0 < x < x_0 + v\delta$ ، مما يعطي

$$\begin{aligned} N_-(x_0) &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0}^{x_0+v\delta} n(x) dx \\ &\simeq \frac{v}{2}n(x_0) + \frac{v^2\delta}{4}n'(x_0). \end{aligned}$$

بالطرح وأخذ المتوسط،

$$\begin{aligned} J_D(x_0) &= \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle \\ &= -\frac{\delta}{2} \langle v^2 \rangle n'(x_0) \\ &= -\frac{C\delta}{2} n'(x_0). \end{aligned}$$

بالمقارنة مع قانون فيك، $J_D = -Dn'$ ، نحصل على

$$D = \frac{C\delta}{2}.$$

بالتعويض في B.1،

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt.$$

C.3

لنعتبر الشريحة التي مساحة مقطعها العرضي A وسمكها Δx . القوة الكهربائية المؤثرة فيها في اتجاه x الموجب هي

$$F_E = n(x)A\Delta x QE.$$

محصلة قوة الضغط الأسموزي هي

$$F_\Pi = A\Pi(x) - A\Pi(x + \Delta x) \simeq -A\Delta x \frac{d\Pi}{dx}.$$

يعطي توازن القوى

$$n(x)QE = \frac{d\Pi}{dx}.$$

عند درجة حرارة منتظمة، $\Pi = nkT$ ، ومن ثم

$$\frac{d\Pi}{dx} = kT \frac{dn}{dx}.$$

وعليه

$$\frac{dn}{dx}(x) = \frac{QE}{kT}n(x).$$

يتفق التدرج الموجب مع تراكم الجسيمات الموجبة الشحنة في اتجاه المجال الكهربائي.

C.4

بأخذ القيمة المتوقعة للمعادلة (1)، واستخدام القوة المطبقة الثابتة و $\langle F(t) \rangle = 0$ ، نحصل على

$$M \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -\gamma \langle v \rangle + QE.$$

الحل الذي يحقق $\langle v(0) \rangle = 0$ هو

$$\langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t/M} \right) = \frac{QE}{\gamma} \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

إن السرعة الحدية هي

$$u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \frac{QE}{\gamma}.$$

C.5

عند الاتزان، يوازن فيض الانتشار فيض الانجراف الكهربائي:

$$-D \frac{dn}{dx} + nu = 0.$$

بالتعويض بنتيجتي C.3 و C.4،

$$-D \frac{nQE}{kT} + n \frac{QE}{\gamma} = 0.$$

إن

$$D = \frac{kT}{\gamma}.$$

هذه هي علاقة أينشتاين بين الانتشار والاحتكاك.

D.1

باستخدام الإزاحات المدرجة في الجدول بوصفها قيمًا ممثلة لفئات المدرج التكراري، يكون العدد الكلي للقياسات

$$N_{\text{tot}} = \sum_j N_j = 400.$$

المجموع المرجح لمربعات الإزاحات هو

$$\sum_j N_j (\Delta x_j)^2 = 2536 \mu\text{m}^2.$$

إن متوسط مربع الإزاحة المقدّر خلال $\Delta t = 60 \text{ s}$ هو

$$\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle = \frac{2536}{400} \mu\text{m}^2 = 6.34 \times 10^{-12} \text{ m}^2.$$

من C.2،

$$D = \frac{\langle \widehat{\Delta x^2} \rangle}{2\Delta t} = \frac{6.34 \times 10^{-12}}{120} = 5.2833 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

معامل الاحتكاك هو

$$\begin{aligned} \gamma &= 6\pi a \eta \\ &= 6\pi (5.0 \times 10^{-6}) (8.9 \times 10^{-4}) \\ &= 8.3881 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-1}. \end{aligned}$$

باستخدام $k = R/N_A$ في علاقة أينشتاين نحصل على

$$D = \frac{RT}{N_A \gamma},$$

ومن ثم

$$N_A = \frac{RT}{\gamma D} = \frac{2RT\Delta t}{\gamma \langle \Delta x^2 \rangle}.$$

عند $T = 298.15 \text{ K}$.

$$N_A = \frac{8.31(298.15)}{(8.3881 \times 10^{-8})(5.2833 \times 10^{-14})} = 5.5907 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

برقمين معنويين،

$$N_A \simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

لم تُستخدم قيمة معتمدة لـ N_A ولا قيمة عددية لـ k .

D.2

بإدراج الانجراف بالسرعة الحدية، تكون الإزاحة

$$\Delta x(t) = ut + \delta \sum_{n=1}^N v_n.$$

للجزء العشوائي متوسط صفري وعزم ثانٍ $2Dt$. لذلك يكون متوسط الحد المختلط بين الانجراف والإزاحة العشوائية صفراً:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= u^2 t^2 + 2ut\delta \sum_n \langle v_n \rangle + \delta^2 \sum_{n,m} \langle v_n v_m \rangle \\ &= u^2 t^2 + 2Dt. \end{aligned}$$

وعليه،

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + u^2 t^2.$$

يحدث الانتقال عندما تتساوى المساهمتان:

$$2Dt_* = u^2 t_*^2,$$

مما يعطي

$$t_* = \frac{2D}{u^2}.$$

قوانين القوة الحدية هي

$$\begin{aligned} t \ll t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt, \\ t \gg t_* : \quad & \langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq u^2 t^2. \end{aligned}$$

تشير عبارة « t الصغيرة» هنا إلى نموذج الانتشار الفعال، الذي أهمل فيه الاسترخاء المجهرى بالفعل واستقر فيه الانجراف عند السرعة الحدية.

لوصف الرسم التقريبي المطلوب على مقياس لوغاريتمي لكلا المحورين وصفاً دقيقاً، نعرّف

$$s = \frac{t}{t_*}, \quad Y = \frac{\langle \Delta x(t)^2 \rangle}{2Dt_*}.$$

عندئذ

$$Y = s + s^2.$$

يتبع الرسم الخط المقارب المستقيم $Y = s$ ، ذي الميل 1، عند قيم s الصغيرة، وينحني بسلاسة إلى أعلى قرب $s = 1$ ، ويقترب من $Y = s^2$ ، ذي الميل 2، عند قيم s الكبيرة. يتقاطع الخطان المقاريبان عند $(s, Y) = (1, 1)$ ، بينما يمر المنحنى الفعلي بالنقطة $(1, 2)$. لذا ضع علامة $t = t_*$ عند الانحناء. وعند هذه النقطة،

$$\langle \Delta x(t_*)^2 \rangle = \frac{8D^2}{u^2}.$$

D.3

نكتب الإزاحة بوصفها مجموع مساهمتي الحركة الحرارية والسباحة:

$$\Delta x(t) = \Delta x_B(t) + \Delta x_S(t).$$

نفترض أن الحركة الحرارية واختيارات اتجاه السباحة مستقلة، وأن متوسط كل من المساهمتين صفري. ومن ثم

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = 2Dt + \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle.$$

عندما $t \ll \delta_0$ ، يظل اتجاه السباحة ثابتاً عملياً خلال فترة الرصد. لذلك

$$\Delta x_S(t) \simeq \pm u_0 t, \quad \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle \simeq u_0^2 t^2.$$

إذن

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq 2Dt + u_0^2 t^2 \quad (t \ll \delta_0).$$

يصبح الحدان متقاربين في المقدار عند

$$t_s = \frac{2D}{u_0^2}.$$

وعليه، يسود الانتشار الحراري عندما $t \ll t_s$ ، وتنتج السباحة نظاماً باليسئياً عندما $t_s \ll t \ll \delta_0$.

عند الأزمنة الطويلة، لنعتبر N فترات سباحة كاملة، حيث $t = N\delta_0$. ولتكن $s_j = \pm 1$ الإشارة المختارة بصورة مستقلة في الفترة j . عندئذ

$$\Delta x_S(t) = u_0 \delta_0 \sum_{j=1}^N s_j.$$

بما أن $\langle s_j \rangle = 0$ و $\langle s_j s_\ell \rangle = 0$ عندما $j \neq \ell$ ،

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_S(t)^2 \rangle &= u_0^2 \delta_0^2 N \\ &= u_0^2 \delta_0 t. \end{aligned}$$

لا تغير فترة أخيرة غير مكتملة هذا السلوك السائد عندما $t \gg \delta_0$. لذلك فإن متوسط مربع الإزاحة عند الأزمنة الطويلة هو

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \simeq (2D + u_0^2 \delta_0) t.$$

وبصورة مكافئة، فإن معامل الانتشار عند الأزمنة الطويلة هو

$$D_{\text{eff}} = D + \frac{u_0^2 \delta_0}{2}.$$

لكي يكون النظام المتوسط واضحاً وممتدّاً، كما في الشكل، يجب أن تحقق المقاييس الزمنية

$$\frac{2D}{u_0^2} \ll \delta_0.$$

وهذا يعني أيضاً أن $u_0^2 \delta_0 \gg 2D$. لذا تكون الخطوط المقاربة الثلاثة المرصودة

المجال الزمني	$\langle \Delta x(t)^2 \rangle$	الميل على مقياس لوغاريتمي لكلا المحورين
$t \ll 2D/u_0^2$	$2Dt$	1
$2D/u_0^2 \ll t \ll \delta_0$	$u_0^2 t^2$	2
$t \gg \delta_0$	$u_0^2 \delta_0 t$	1

مع الاحتفاظ بالمعامل الكامل للأزمنة الطويلة $2D + u_0^2 \delta_0$ عندما يكون الانتشار الحراري ذا أثر ملحوظ.

E.1

نعرف مقياس الطاقة الموجب

$$K = \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}.$$

عندئذ

$$U(d) = -\frac{A}{d} + Ke^{-d/\lambda},$$

و

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} - \frac{K}{\lambda} e^{-d/\lambda}.$$

القوة التي تميل إلى زيادة المسافة الفاصلة هي $-U'(d)$. وفق افتراض بلوغ السرعة الحدية أنياً، تتناسب سرعة كل جسيم مع القوة المؤثرة فيه. ولجسيمين متماثلين معامل احتكاك كل منهما γ ،

$$\dot{d} = -\frac{2}{\gamma} U'(d).$$

إذن يقترب الجسيمن أحدهما من الآخر حيثما $U'(d) > 0$.

لكي تصل الجسيمات المقتربة من تباعد كبير إلى التلامس دون تقلبات حرارية، يجب ألا تعترضها منطقة تنافر أو حالة اتزان مستقر عند مسافة فصل منتهية. لذلك يتمثل الشرط الحرج في اختفاء المنطقة التي فيها $U'(d) < 0$.

نعيد كتابة المشتقة على الصورة

$$U'(d) = \frac{A}{d^2} \left[1 - \frac{K\lambda}{A} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 e^{-d/\lambda} \right].$$

نضع $z = d/\lambda > 0$. الدالة التي نتحكم في الإشارة هي

$$f(z) = z^2 e^{-z}.$$

مشتقتها هي

$$f'(z) = ze^{-z}(2 - z),$$

ومن ثم تبلغ قيمتها العظمى المطلقة عند $z = 2$ ، حيث

$$f_{\max} = 4e^{-2}.$$

وعليه، يكون $U'(d) \geq 0$ عند كل مسافة فصل إذا وفقط إذا

$$\frac{K\lambda}{A} 4e^{-2} \leq 1.$$

طول الحجب الحرج هو

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{\exp(2)A}{4K} = \frac{\exp(2)Aq^2}{4B\epsilon(kT)^2}.$$

عند هذه العتبة، تندمج النقطتان الساكنتان لطاقة الوضع عند

$$d_{\text{crit}} = 2\lambda_{\text{crit}},$$

حيث تتعدم كل من $U'(d_{\text{crit}})$ و $U''(d_{\text{crit}})$.

تؤدي زيادة تركيز الملح إلى تقليل λ . بالتعويض بـ λ_{crit} في المعادلة (7)،

$$\begin{aligned} c_{\text{crit}} &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 \lambda_{\text{crit}}^2} \\ &= \frac{\epsilon kT}{2N_A q^2} \left[\frac{4B\epsilon(kT)^2}{\exp(2)Aq^2} \right]^2. \end{aligned}$$

إذن،

$$c_{\text{crit}} = \frac{8B^2\epsilon^3(kT)^5}{\exp(4)N_A A^2 q^6}.$$

في حالة NaCl، تكون الأيونات أحادية التكافؤ، ومن ثم فإن q هو مقدار الشحنة الأولية. يساوي تركيز كل نوع أيوني التركيز المولي لـ NaCl: والعامل 2 في المعادلة (7) يأخذ النوعين في الحساب بالفعل. عند استخدام معاملات بوحدات النظام الدولي، تكون وحدة النتيجة mol m^{-3} .

عندما $c > c_{\text{crit}}$ ، يكون $U'(d) > 0$ عند كل مسافة فصل موجبة، وتؤدي الحركة الحتمية إلى تلامس زوج من الجسيمات كانا منفصلين في البداية. وعندما $c < c_{\text{crit}}$ ، يُحتجز زوج يقترب من تباعد كبير بما يكفي عند الحد الأدنى المحلي الخارجي لـ U .

يلزم قيد دقيق عند المساواة. فعندما $c = c_{\text{crit}}$ ،

$$U'(d) \propto (d - d_{\text{crit}})^2$$

بالقرب من d_{crit} . لذلك يستغرق الاقتراب المفرط التخميد من مسافة أكبر زمناً لا نهائياً للوصول إلى تلك المسافة. ومن ثم فإن c_{crit} هو العتبة الحرجة، أو الحد السفلي الأعظم للتراكيز التي تُحدث التخرن انطلاقاً من تباعد كبير؛ وتتطلب الديناميكا المثالية $c > c_{\text{crit}}$ لكي يحدث العبور الفعلي إلى التلامس.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: النجوم النيوترونية

نناقش استقرار النوى الكبيرة ونقدّر كتلة النجوم النيوترونية نظرياً وتجريبياً.

الجزء A. كتلة النوى واستقرارها (2.5 نقطة)

طاقة السكون لنواة $m(Z, N)c^2$ تتكوّن من Z بروتوناً و N نيوترونًا أقل من مجموع طاقات سكون البروتونات والنيوترونات، التي سنسمّيها فيما يلي النوكليونات، بمقدار طاقة الربط $B(Z, N)$ ، حيث c سرعة الضوء في الفراغ. وبإهمال التصحيحات الصغيرة، يمكننا تقريب طاقة الربط، التي تتكوّن من حد الحجم ذي المعامل a_V ، وحد السطح ذي المعامل a_S ، وحد طاقة كولوم ذي المعامل a_C ، وحد طاقة التناظر ذي المعامل a_{sym} ، على النحو الآتي.

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

حيث $A = Z + N$ هو العدد الكتلي و m_N كتلة النوكليون. استخدم في الحساب $a_V \approx 15.8 \text{ MeV}$ و $a_S \approx 17.8 \text{ MeV}$ و $a_C \approx 0.711 \text{ MeV}$ و $a_{\text{sym}} \approx 23.7 \text{ MeV}$ (10^6 MeV إلكترون فولت).

0.9 — A.1 نقطة

في ظل الشرط $Z = N$ ، حدّد A التي تجعل طاقة الربط لكل نوكليون، B/A ، عظمى.

0.9 — A.2 نقطة

عند ثبات A ، يُحدّد العدد الذري للنواة الأكثر استقرارًا Z^* بجعل $B(Z, A - Z)$ عظمى. احسب Z^* عند $A = 197$ باستخدام المعادلة (1).

0.7 — A.3 نقطة

تنقسم النواة ذات العدد الكتلي الكبير A إلى نوى أخف عن طريق الانشطار لتقليل طاقة كتلة السكون الكلية إلى أدنى قيمة. للتبسيط، ندرس إحدى الطرق المتعددة لانقسام نواة ذات (Z, N) إلى نواتين متساويتين، وهو ما يحدث عندما تتحقق علاقة الطاقة الآتية،

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

عندما تُكتب هذه العلاقة على الصورة

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_s}{a_c},$$

أوجد C_{fission} بدقة رقمين معنويين.

الجزء B. النجم النيوتروني بوصفه نواة عملاقة (1.5 نقطة)

بالنسبة إلى النوى الكبيرة ذات العدد الكتلي الكبير بما يكفي $A > A_c$ ، حيث A_c قيمة عتبية، تبقى هذه النوى مستقرة إزاء الانشطار النووي بفضل طاقة الربط الناشئة عن الجاذبية، الكبيرة بما يكفي.

1.5 — B.1 نقطة

نفترض أن $N = A$ و $Z = 0$ يتحققان عندما تكون A كبيرة بما يكفي، وأن المعادلة (1) تظل صالحة مع إضافة طاقة الربط الثقالي. طاقة الربط الناشئة عن الجاذبية هي

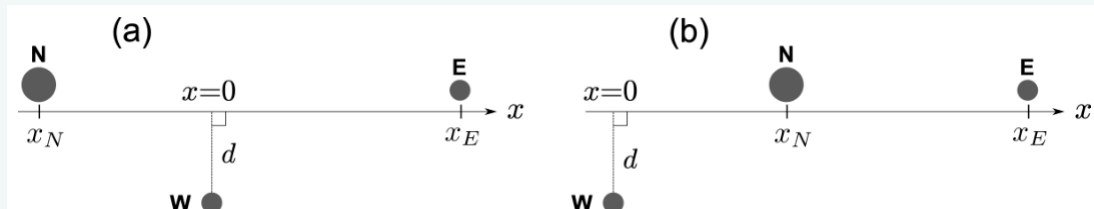
$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

حيث $M = m_N A$ و $R = R_0 A^{1/3}$ ، مع $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$ ، هما كتلة النواة ونصف قطرها، على الترتيب.

من أجل $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ ، أوجد a_{grav} بوحدة MeV بدقة رقم معنوي واحد. ثم، بإهمال حد السطح، قدّر A_c بدقة رقم معنوي واحد. استخدم في الحساب $G = \hbar c / M_P^2$ و $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ ، حيث $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ و $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

الجزء C. نجم نيوتروني في نظام ثنائي (6.0 نقاط)

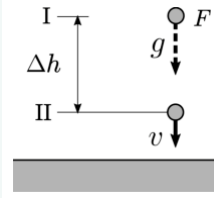
بعض النجوم النيوترونية نجوم نابضة تبعث بانتظام موجات كهرومغناطيسية، سنسمّيها هنا «ضوءًا» للتبسيط، بدور ثابت. وغالبًا ما تكون النجوم النيوترونية أنظمة ثنائية مع أقزام بيضاء. لننظر في ترتيب النجوم المبين في الشكل 1، حيث تمر نبضة ضوئية من نجم نيوتروني N إلى الأرض E بالقرب من قرم أبيض W في النظام الثنائي. يتيح قياس هذه النبضات المتأثرة بجاذبية النجم تقديرًا دقيقًا لكتلة W ، كما سيُشرح أدناه، مما يفضي إلى تقدير كتلة N .



الشكل 1: الترتيبان مع توجيه المحور x على امتداد الخط الواصل بين N و E . (a) من أجل $x_N < 0$ و (b) من أجل $x_N > 0$.

1.0 — C.1 نقطة

كما هو مبين في الشكل أدناه، نضع، تحت تأثير تسارع جاذبية ثابت g ، مستويين I و II فرق الارتفاع بينهما $\Delta h (> 0)$. نضع ساعات متطابقة عند I و II وفي F ، وهو النظام الساقط سقوطاً حراً، ونرمز إليها بالساعة- I والساعة- II والساعة- F ، على الترتيب.



ترتيب التجربة الفكرية.

نفترض أن راصداً يجلس بجانب الساعة- F ، وأن F موضوع في البداية على ارتفاع الساعة- I نفسه وسرعته صفر. وبما أن الساعات متطابقة، فإنها تسجل فترات زمنية متساوية، $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. ثم نترك F يسقط سقوطاً حراً، ونعمل في مرجع F ، الذي نعدّه مرجعاً قصورياً. في هذا المرجع، تمر الساعة- II بجانب الساعة- F بسرعة v ، ومن ثم يمكن تحديد تمدد الزمن للساعة- II باستخدام تحويل لورنتز. عندما ينقضي زمن $\Delta\tau_I$ على الساعة- F ، ينقضي زمن $\Delta\tau_{II}$ على الساعة- II .

حدّد $\Delta\tau_{II}$ بدلالة $\Delta\tau_I$ حتى الرتبة الأولى في $\Delta\phi/c^2$ ، حيث $\Delta\phi = g\Delta h$ هو فرق الجهد الثقالي، أي طاقة الوضع الثقالية لكل وحدة كتلة.

1.8 — C.2 نقطة

في وجود الجهد الثقالي ϕ ، تغيّر التأخيرات الزمنية سرعة الضوء الفعالة، c_{eff} ، المرصودة عند اللانهاية، على الرغم من أن سرعة الضوء محلياً هي c . عندما يكون $\phi(r = \infty) = 0$ ، يمكن إعطاء c_{eff} حتى الرتبة الأولى في ϕ/c^2 على الصورة

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c$$

مع تضمين تأثير تشوّه الفضاء، الذي لم يؤخذ في الحسبان في C.1. ونشير إلى أنه يمكن تقريب مسار الضوء بخط مستقيم.

كما هو مبين في الشكل 1 (a)، نختار المحور x على امتداد مسار الضوء من النجم النيوتروني N إلى الأرض E ، ونضع $x = 0$ عند النقطة من مسار الضوء الأقرب إلى القزم الأبيض W . ليكن $x_N (< 0)$ الإحداثي للنجم N ، و $x_E (> 0)$ الإحداثي المناظر للأرض E ، و d المسافة بين W ومسار الضوء.

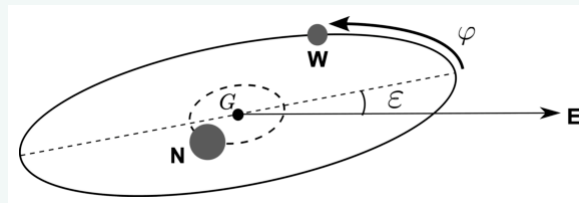
قدّر التغيّر في زمن وصول الضوء Δt من N إلى E الناجم عن القزم الأبيض ذي الكتلة M_{WD} ، وأعطِ الإجابة في صورة بسيطة بإهمال الحدود ذات الرتب الأعلى في المقادير الصغيرة الآتية: $d/|x_N| \ll 1$ ، $d/x_E \ll 1$ ، و $GM_{\text{WD}}/(c^2d) \ll 1$. استخدم الصيغة الآتية إذا لزم الأمر.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C.$$

(log هو اللوغاريتم الطبيعي)

1.8 — C.3 نقطة

كما هو مبين أدناه، نفترض أن N و W في نظام نجمي ثنائي يتحركان في مدارين دائريين ذوي اختلال مركزي صفري حول مركز الكتلة G في مستوى المدار. لتكن ε زاوية الميل المداري المقاسة من مستوى المدار إلى الخط المتجه من G نحو E ، وليكن L المسافة بين N و W ، و M_{WD} كتلة القزم الأبيض. نفترض فيما يلي أن $\varepsilon \ll 1$.



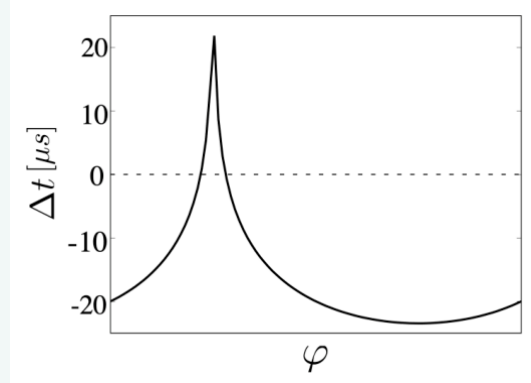
نظام نجمي ثنائي.

نرصد النبضات الضوئية الصادرة عن **N** على الأرض **E** البعيدة عن **N**. ويتغيّر مسار الضوء إلى **E** مع الزمن تبعاً لترتيب **N** و **W**. يبلغ التأخر في الفاصل الزمني بين النبضات الواصلة إلى **E** قيمته العظمى $\Delta t_{\max}$ عندما يكون $x_N \simeq -L$ ، وقيمته الصغرى $\Delta t_{\min}$ عندما يكون $x_N \simeq L$ (انظر الشكل 1 (b) للاطلاع على الترتيب).

احسب $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$ في صورة بسيطة بإهمال الحدود ذات الرتب الأعلى في المقادير الصغيرة، كما في **C.2**. ونشير إلى أننا نفترض أن التأخيرات الناجمة عن جاذبية الأجرام النجمية الأخرى غير **W** تلغى في الفرق $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$.

0.8 — C.4 نقطة

يبين الشكل أدناه التأخيرات الزمنية المرصودة بدلالة الطور المداري φ للنظام النجمي الثنائي الذي فيه $L \approx 6 \times 10^6$ km و $\cos \varepsilon \approx 0.99989$. قدّر M_{WD} بدلالة الكتلة الشمسية $M_{\odot}$ ، وأعط نتيجة $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$ بدقة رقم معنوي واحد. يمكن هنا استخدام العلاقة التقريبية $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$.



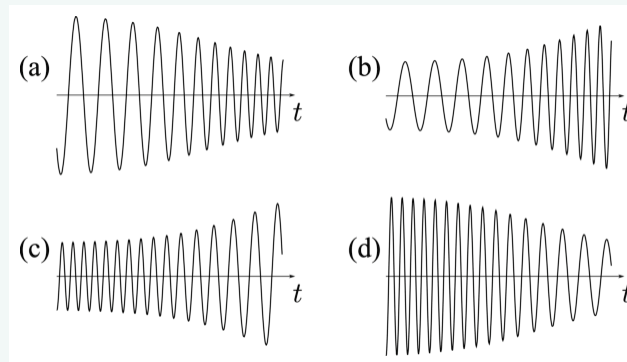
التأخيرات الزمنية المرصودة Δt بدلالة الطور المداري φ (انظر الشكل في **C.3**) الذي يحدّد موضعي **N** و **W** على المدارين.

0.4 — C.5 نقطة

في النظام الثنائي للنجوم النيوترونية، يفقد النجمان الطاقة والزخم الزاوي بإصدار موجات ثقالية، وينتهي بهما الأمر إلى التصادم والاندماج. للتبسيط، لننظر فقط في حركة دائرية نصف قطرها R وسرعتها الزاوية ω ، وعندئذ تتحقق العلاقة $\omega = \chi R^p$ ، حيث χ الثابت لا يعتمد على ω ولا على R ، إذا أهملت التأثيرات النسبية. حدّد قيمة p .

0.2 — C.6 نقطة

تتناسب سعة الموجة الثقالية الصادرة عن النظام الثنائي في **C.5** مع $R^2 \omega^2$. يبين الشكل أدناه، بصورة نوعية، أربعة أشكال زمنية مختلفة للموجات الثقالية المرصودة قبل تصادم النجمين. اختر الشكل الأنسب من (a) إلى (d).



أشكال البيانات المرصودة للموجات الثقالية.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **A.1** : $A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 50$.

• **A.2** : $Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}} = 78.55 \dots$ ، مما يعطي العدد الذري الصحيح [79].

• **A.3** : $C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx [0.70]$.

• **B.1** : $A_c \approx [4 \times 10^{55}]$ ، باستخدام معيار إيجابية طاقة الربط الكلية الذي يناقش أدناه. $a_{\text{grav}} \approx [6 \times 10^{-37} \text{ MeV}]$.

• **C.1** : $\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$.

• **C.2** : $\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right)$.

• **C.3** : $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \approx \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$.

• **C.4** : $\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}} \approx 0.5$ ، أو $M_{\text{WD}} \approx 0.5M_{\odot}$.

• **C.5** : $p = -\frac{3}{2}$.

• **C.6** : (b) : تزداد كل من السعة والتردد مع اقتراب النجمين من التصادم.

الحل

A.1

عند $Z = N = A/2$ ، ينعدم حد التناظر. وتصبح طاقة الربط لكل نوكلين

$$\frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - \frac{a_C}{4} A^{2/3}.$$

بمعادلة A بوصفه متغيرًا متصلًا،

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right) = \frac{a_S}{3} A^{-4/3} - \frac{a_C}{6} A^{-1/3} = \frac{2a_S - a_C A}{6A^{4/3}}.$$

تكون هذه المشتقة موجبة عندما تكون A أصغر من $A = 2a_S/a_C$ ، وسالبة عندما تكون أكبر منها، لذا فإن نقطة السكون هذه تمثل قيمة عظمى:

$$A = \frac{2a_S}{a_C} = \frac{2(17.8)}{0.711} = 50.07 \dots$$

إذن

$$[A \approx 50].$$

أقرب عدد كتلي زوجي مسموح به، بما يتوافق مع كون $Z = N$ عددين صحيحين، هو $A = 50$.

A.2

عند ثبات A ، يكون $N = A - Z$ ، ومن ثم $N - Z = A - 2Z$. لا يعتمد على Z سوى حدي كولوم والتناظر:

$$B(Z, A - Z) = \text{ثابت} - a_C Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z)^2.$$

شرط بلوغ القيمة العظمى هو

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-1/3} + \frac{4a_{\text{sym}}}{A} (A - 2Z) = 0.$$

بإعادة الترتيب،

$$4a_{\text{sym}} A = Z (8a_{\text{sym}} + 2a_C A^{2/3}),$$

ومن ثم

$$Z^* = \frac{A}{2 + \frac{a_C}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3}}.$$

وهي قيمة عظمى لأن

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_C A^{-1/3} - \frac{8a_{\text{sym}}}{A} < 0.$$

من أجل $A = 197$ ،

$$Z^* = \frac{197}{2 + \frac{0.711}{2(23.7)} 197^{2/3}} = 78.553 \dots$$

بما أن الاعتماد على Z دالة تربيعية مقعرة، فإن العدد الصحيح الأمثل هو أقرب عدد صحيح:

$$Z^* = 79.$$

A.3

العدد الكلي للنوكليونات محفوظ، لذا تُلغى حدود طاقة سكون النوكليونات الحرة. يكون الانشطار مفضلاً من حيث الطاقة عندما

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) > 0.$$

يبقى مجموع كل من حدي الحجم والتناظر دون تغيير. أما حد السطح الكلي للنواتين الناتجتين فهو

$$-2a_S (A/2)^{2/3} = -a_S 2^{1/3} A^{2/3},$$

وحد كولوم الكلي لهما هو

$$-2a_C \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} = -a_C 2^{-2/3} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

لذلك،

$$2B(Z/2, N/2) - B(Z, N) = -a_S (2^{1/3} - 1) A^{2/3} + a_C (1 - 2^{-2/3}) \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

يصبح شرط تحرر مقدار موجب من الطاقة

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \frac{a_S}{a_C}.$$

وعليه

$$C_{\text{fission}} = \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0.702414 \dots \approx 0.70.$$

فيزيائياً، يصبح الانشطار مفضلاً عندما يتجاوز الانخفاض في طاقة تنافر كولوم كلفة المساحة السطحية الإضافية.

B.1

بالتعويض عن الكتلة ونصف القطر المعطيين في طاقة الربط الثقالي نحصل على

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{G(m_N A)^2}{R_0 A^{1/3}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} A^{5/3}.$$

إن

$$a_{\text{grav}} = \frac{3Gm_N^2}{5R_0} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c}{R_0} \left(\frac{m_N c^2}{M_P c^2} \right)^2.$$

باستخدام الثوابت المعطاة،

$$a_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.1 \text{ fm}} \left(\frac{939}{1.22 \times 10^{22}} \right)^2 = 6.3656 \times 10^{-37} \text{ MeV}.$$

بدقة رقم معنوي واحد،

$$\boxed{a_{\text{grav}} \approx 6 \times 10^{-37} \text{ MeV}}.$$

من أجل $N = A$ و $Z = 0$ ، ينعدم حد كولوم ويكون حد التناظر $-a_{\text{sym}}A$. وبإهمال حد السطح كما طُلب،

$$B_{\text{tot}}(A) = (a_V - a_{\text{sym}})A + a_{\text{grav}}A^{5/3},$$

أو

$$\frac{B_{\text{tot}}}{A} = -7.9 \text{ MeV} + a_{\text{grav}}A^{2/3}.$$

إذا فُهمت العتبة المحدودة على أنها بداية الارتباط مقارنةً بـ A نيوترونًا حرًا، فإن الشرط هو

$$B_{\text{tot}} > 0.$$

وبالتالي،

$$A > A_c, \quad A_c = \left(\frac{a_{\text{sym}} - a_V}{a_{\text{grav}}} \right)^{3/2}.$$

مع الاحتفاظ بالقيمة غير المقربة لـ a_{grav} أثناء هذا الحساب،

$$A_c = \left(\frac{7.9}{6.3656 \times 10^{-37}} \right)^{3/2} = 4.3721 \times 10^{55}.$$

إن

$$\boxed{A_c \approx 4 \times 10^{55}}.$$

الفرق بين عتبة الارتباط هذه والمقارنة الصارمة للانحطاط إلى قطرتين جوهري هنا: من أجل $Z = 0$ ومع إهمال حد السطح، يساوي المقدار $B_{\text{tot}}(A) - 2B_{\text{tot}}(A/2)$ القيمة $a_{\text{grav}}A^{5/3}(1 - 2^{-2/3})$ الموجبة لكل A ، ولذلك لا تعطي المقارنة بقطرتين أي عتبة محدودة.

C.1

أثناء السقوط الحر عبر فرق الارتفاع Δh ، يعطي انحفاظ الطاقة النيوتوني، ضمن الدقة المطلوبة،

$$\frac{1}{2}v^2 = g\Delta h = \Delta\phi,$$

ومن ثم

$$v^2 = 2\Delta\phi.$$

في المرجع القصوري اللحظي للراصد الساقط سقوطاً حرًا، تتحرك الساعة-II بسرعة v . ويعطي تمدد الزمن في النسبية الخاصة

$$\Delta\tau_{\text{II}} = \Delta\tau_F \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

باستخدام مقارنة الساعات المحددة في المسألة، $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\text{I}}$ ، وبالتوسيع حتى الرتبة الأولى،

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\text{II}} &= \Delta\tau_{\text{I}} \sqrt{1 - \frac{2\Delta\phi}{c^2}} \\ &\approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

لذلك،

$$\boxed{\Delta\tau_{\text{II}} \approx \Delta\tau_{\text{I}} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)}.$$

تسير الساعة الواقعة في المستوى الأدنى بمعدل أبطأ.

C.2

عند الموضع x ، تكون المسافة إلى القزم الأبيض

$$r(x) = \sqrt{x^2 + d^2},$$

ويكون جهده الثقالي

$$\phi(x) = -\frac{GM_{\text{WD}}}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

يقتضي التعبير المعطى في تقريب المجال الضعيف أن

$$\frac{1}{c_{\text{eff}}} \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right).$$

زمن الانتقال في غياب القزم الأبيض هو $(x_E - x_N)/c$. ويطرحه من زمن الانتقال الفعلي على طول المسار المستقيم نفسه نحصل على

$$\begin{aligned}\Delta t &= \int_{x_N}^{x_E} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}}} - \frac{1}{c} \right) dx \\ &\approx -\frac{2}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \phi(x) dx \\ &= \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \int_{x_N}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}.\end{aligned}$$

توجد صورة مكافئة للدالة الأصلية المعطاة هي $\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$. ومن ثم، حتى الرتبة الأولى في الجهد الثقالي،

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2}}{x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2}} \right).$$

من أجل $x_E \gg d$

$$x_E + \sqrt{x_E^2 + d^2} \approx 2x_E.$$

من أجل $x_N < 0$ و $|x_N| \gg d$ ، يجنبنا الضرب بالمرافق طرح مقدارين متقاربين:

$$x_N + \sqrt{x_N^2 + d^2} = \frac{d^2}{\sqrt{x_N^2 + d^2} + |x_N|} \approx \frac{d^2}{2|x_N|}.$$

لذلك،

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4x_E |x_N|}{d^2} \right).$$

هذا تأخر موجب في الانتشار ناجم عن الجاذبية. واللوغاريتم عديم الأبعاد، أما GM_{WD}/c^3 فله وحدات الزمن.

C.3

عند الاقترانين، يعطي إسقاط المسافة الفاصلة L على خط النظر

$$x_N = -L \cos \varepsilon \quad \text{عند التأخر الأعظمي}$$

و

$$x_N = +L \cos \varepsilon \quad \text{عند التأخر الأصغري}$$

عند أيٍّ من الاقترانين،

$$d = L \sin \varepsilon, \quad \sqrt{x_N^2 + d^2} = L.$$

بما أن الأرض بعيدة عن النظام الثنائي، يمكننا استخدام القيمة نفسها لـ x_E في كلا الترتيبين ضمن الدقة المعتمدة. وتعطي نتيجة التكامل في C.2، قبل افتراض أن x_N سالب،

$$\Delta t \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L + x_N} \right).$$

وعليه

$$\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 - \cos \varepsilon)} \right),$$

بينما

$$\Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2x_E}{L(1 + \cos \varepsilon)} \right).$$

يؤدي الطرح إلى حذف كل من x_E و L :

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right).$$

من أجل $1 \gg \varepsilon$ ،

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad 1 + \cos \varepsilon \approx 2.$$

إن الصورة المطلوبة في تقريب الزاوية الصغيرة هي

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx \frac{2GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{4}{\varepsilon^2} \right) = \frac{4GM_{\text{WD}}}{c^3} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right).$$

نُقاس ε هنا بالراديان. ويقابل النمو اللوغاريتمي عند الميل الصغير مرور الضوء بالقرب من القزم الأبيض على مسافات تتناقص باستمرار، ضمن التقريبات المذكورة.

C.4

تعطي قراءة الرسم البياني تقريباً

$$\Delta t_{\text{max}} \approx +22 \mu\text{s}, \quad \Delta t_{\text{min}} \approx -23 \mu\text{s}.$$

ومن ثم يكون المدى القابل للقياس تقريباً

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} \approx 45 \mu\text{s}.$$

لا تؤثر أي إزاحة ثابتة اعتباطية في التأخيرات المرسومة على هذا الفرق.

باستخدام الميل المعطى،

$$\ln \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{1.99989}{0.00011} \right) \approx 9.808.$$

تعطي C.3 عندئذ

$$45 \mu s \approx 2 (5 \mu s) \frac{M_{WD}}{M_{\odot}} (9.808).$$

لذلك،

$$\frac{M_{WD}}{M_{\odot}} \approx \frac{45}{98.08} \approx 0.46.$$

بدقة رقم معنوي واحد،

$$\boxed{\frac{M_{WD}}{M_{\odot}} \approx 0.5}, \quad \boxed{M_{WD} \approx 0.5 M_{\odot}}.$$

تُغى المسافة الفاصلة المعطاة L من الفرق بين التأخر الأعظمي والتأخر الأصغري.

C.5

لتكن كتلتا النجمين M_1, M_2 ، ولتكن المسافة الفاصلة بينهما r . تخضع الحركة الدائرية النيوتونية لجسمين للعلاقة

$$\omega^2 r^3 = G(M_1 + M_2).$$

عند ثبات الكتلتين، يكون نصف قطر مدار أيٍّ من النجمين R مضاعفًا ثابتًا لـ r . وبالتالي،

$$\omega \propto r^{-3/2} \propto R^{-3/2}.$$

بالمقارنة مع $\omega = \chi R^p$

$$\boxed{p = -\frac{3}{2}}.$$

C.6

مع فقدان النظام الثنائي للطاقة المدارية، يتناقص نصف قطر مداره. ومن C.5،

$$\omega \propto R^{-3/2},$$

لذا يزداد التردد المداري، ومن ثم تردد الموجة الثقالية.

يعطي الاعتماد المعطى للسعة

$$\text{السعة} \propto R^2 \omega^2 \propto R^2 R^{-3} = R^{-1}.$$

إنّ تزداد السعة أيضًا مع تناقص R . وللشكل الموجي المطلوب غلاف يتسع واهتزازات تتقارب تدريجيًا:

$$\boxed{\text{(b) الشكل}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: الماء والأجسام

في هذه المسألة، ندرس الظواهر الناجمة عن التفاعل بين الماء والأجسام، والمتعلقة بالتوتر السطحي. يتناول الجزء A الحركة، بينما يتناول الجزآن B و C حالات السكون.

يمكنك، عند الحاجة، استخدام الحقيقة الآتية: إذا كانت الدالة $y(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية $y''(x) = ay(x)$ (حيث a ثابت موجب)، فإن حلها العام هو $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ ، حيث A و B ثابتان اختياريان.

الجزء A. اندماج قطرات الماء (2.0 نقطة)

كما هو موضح في الشكل 1، ندرس قطرتي ماء كرويتين ساكنتين على سطح مادة فائقة الكراهية للماء، أي إن هناك قوة تنافر شديدة جداً بين المادة والماء.

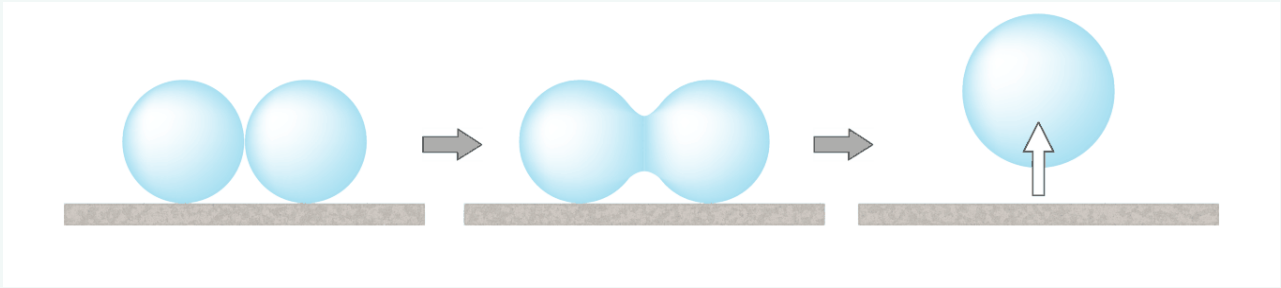
في البداية، نضع قطرتا ماء كرويتان متماثلتان ومتجاورتان على السطح؛ ثم تندمجان بعد تلامسهما لتشكلا قطرة ماء كروية أكبر، تقفز فجأة إلى أعلى.

2.0 A.1 نقطة

نصف قطر كلتا قطرتي الماء قبل الاندماج هو a ، ويساوي $100 \mu\text{m}$. كثافة الماء ρ هي $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. والتوتر السطحي γ هو $7.27 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$.

يتحول جزء k من فرق الطاقة السطحية قبل الاندماج وبعده، ΔE ، إلى طاقة حركية لقطرة الماء التي تقفز. أوجد إذن السرعة الابتدائية للقفز إلى أعلى، v ، لقطرة الماء الناتجة عن الاندماج، برقمين معنويين، وفق الافتراضين الآتيين:

- $k = 0.06$
- يُحفظ الحجم الكلي للماء قبل الاندماج وبعده.



الشكل 1: اندماج قطرتي ماء وقفز قطرة الماء الناتجة عن الاندماج.

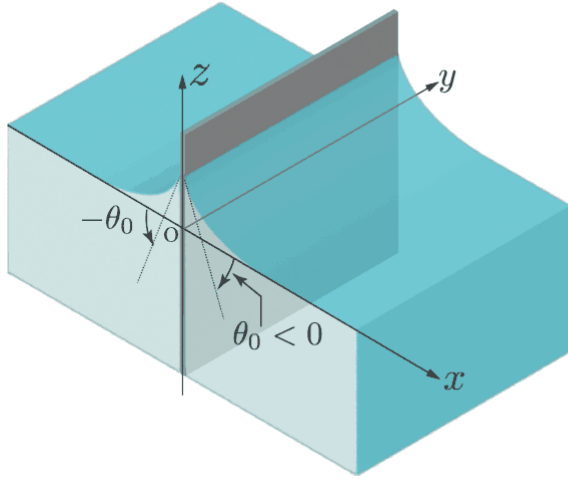
الجزء B. لوح موضوع رأسياً (4.5 نقطة)

يُغمَر لوح مستوٍ رأسياً في الماء. يوضح الشكلان 2(a) و 2(b) شكل سطح الماء لمادتي لوح محبة للماء (جاذبة له) وكارهة للماء، على الترتيب. نهمل سُمك اللوح.

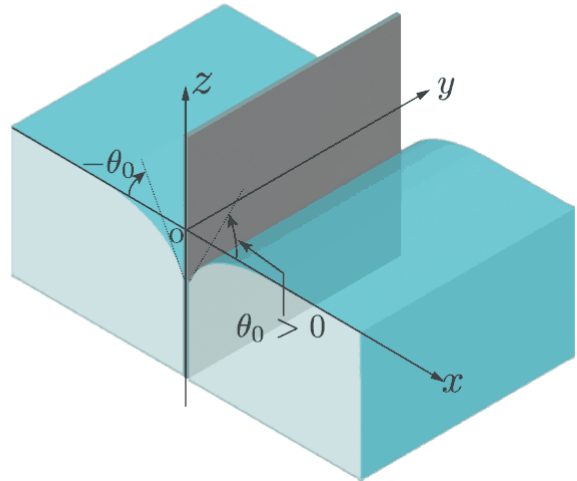
يقع سطح اللوح في المستوى yz ، ويقع سطح الماء الأفقي البعيد عن اللوح في المستوى xy حيث $z = 0$. لا يعتمد شكل السطح على الإحداثي y . لتكن $\theta(x)$ الزاوية بين سطح الماء والمستوى الأفقي عند نقطة (x, z) على سطح الماء في المستوى xz . تُقاس $\theta(x)$ هنا بالنسبة إلى محور x الموجب، ويُعد الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة موجباً. لتكن قيمة $\theta(x)$ هي θ_0 عند نقطة التلامس بين اللوح وسطح الماء ($x = 0$). فيما يأتي، تتحدد θ_0 بخصائص مادة اللوح.

كثافة الماء ρ ثابتة، والتوتر السطحي للماء γ منتظم. يُرمز إلى ثابت تسارع الجاذبية بـ g . يُفترض أن الضغط الجوي، P_0 ، منتظم دائماً. لنحدد شكل سطح الماء باتباع الخطوات الآتية. لاحظ أن وحدة التوتر السطحي هي J/m^2 ، وكذلك N/m .

(a)



(b)



الشكل 2: لوحان مغموران رأسياً في الماء. (a) حالة اللوح المحب للماء؛ (b) حالة اللوح الكاره للماء.

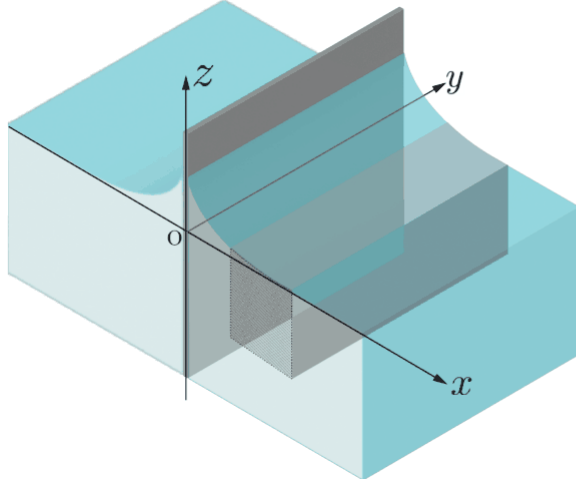
0.6 B.1 نقطة

ندرس حالة لوح محب للماء، كما هو موضح في الشكل 2(a). نلاحظ أن ضغط الماء، P ، يحقق الشرطين $P < P_0$ عندما $z > 0$ ، و $P = P_0$ عندما $z = 0$. عبر إذن عن P عند z بدلالة ρ و g و P_0 .

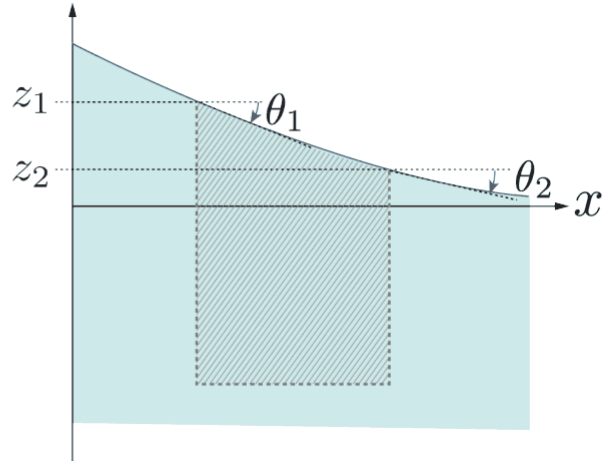
0.8 B.2 نقطة

ندرس كتلة من الماء يُبين الجزء المقتطع منها بالتظليل في الشكل 3(a). ويُبين مقطعها في المستوى xz بالمنطقة المهشّرة في الشكل 3(b). لتكن z_1 و z_2 إحداثيي الحافتين اليسرى واليمنى، على الترتيب، للحد الفاصل (سطح الماء) بين كتلة الماء والهواء. أوجد المركبة الأفقية (المركبة x) لمحصلة القوة لكل وحدة طول على امتداد محور y ، f_x ، المؤثرة في كتلة الماء بسبب الضغط، بدلالة ρ و g و z_1 و z_2 . لاحظ أن P_0 لا ينتج عنه أي محصلة قوة أفقية على كتلة الماء.

(a)



(b)



الشكل 3: شكل كتلة ماء مقتطعة عند سطح الماء. (a) منظور علوي مائل و (b) منظر المقطع العرضي.

0.8 B.3 نقطة

يتوازن التوتر السطحي المؤثر في كتلة الماء مع القوة f_x التي نوقشت في B.2. نعرّف θ_1 و θ_2 بأنهما الزاويتان بين سطح الماء والمستوى الأفقي عند الحافتين اليسرى واليمنى، على الترتيب. عبر عن f_x بدلالة γ و θ_1 و θ_2 .

0.8 B.4 نقطة

تتحقق المعادلة الآتية عند نقطة اعتباطية (x, z) على سطح الماء،

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{ثابت.} \quad (1)$$

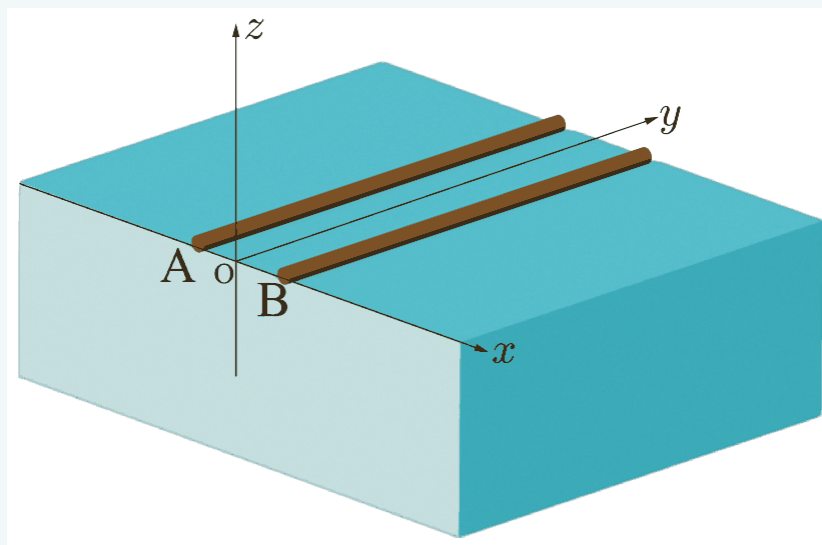
حدد الأس a ، وعبر عن الثابت ℓ بدلالة γ و ρ . لاحظ أن هذه المعادلة تصح سواء كانت مادة اللوح محبة للماء أم كارهة له.

1.5 B.5 نقطة

في المعادلة (1) في B.4، نفترض أن تغير سطح الماء بطيء، أي إن $|z'(x)| \ll 1$ ، بحيث يمكننا توسيع $\cos \theta(x)$ بدلالة $z'(x)$ حتى الرتبة الثانية. ثم، باستقاق المعادلة الناتجة بالنسبة إلى x ، نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها $z(x)$. حل هذه المعادلة التفاضلية وحدد $z(x)$ من أجل $x \geq 0$ بدلالة $\tan \theta_0$ و ℓ . لاحظ أن الأبعاد الرأسية في الشكلين 2 و3 مبالغ فيها لتحسين الإيضاح، وأنهما لا يحققان الشرط $|z'(x)| \ll 1$.

الجزء C. التفاعل بين قضيبين (3.5 نقطة)

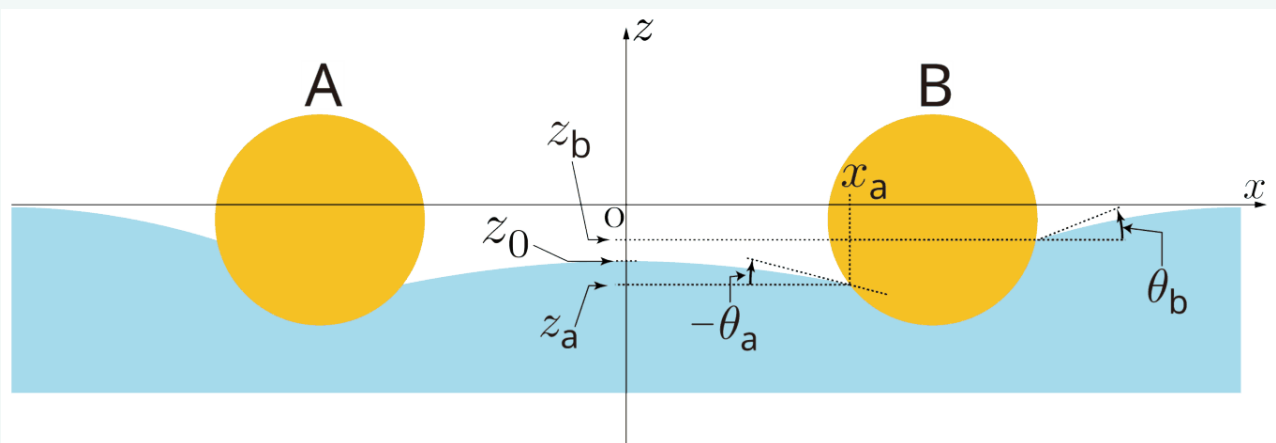
يوضع القضيبان المتماثلان A و B، المصنوعان من المادة نفسها والطاقيان بالتوازي على سطح الماء، على المسافة نفسها من محور y (الشكل 4).



الشكل 4: قضيبان A و B يطفوان على سطح الماء.

1.0 C.1 نقطة

عند نقطتي تلامس القضيب B مع سطح الماء، نعرّف الإحداثيين z ، وهما z_a و z_b ، والزوايتين θ_a و θ_b ، كما هو موضح في الشكل 5. حدد المركبة الأفقية للقوة، F_x ، المؤثرة في القضيب B لكل وحدة طول على امتداد محور y ، بدلالة θ_a و θ_b و z_a و z_b و ρ و g و γ .



الشكل 5: منظر مقطع رأسى لقضيبين يطفوان على سطح الماء.

1.5 C.2 نقطة

نعرف الإحداثي z لسطح الماء، z_0 ، عند نقطة المنتصف بين القضيبين في المستوى xz . عبّر عن القوة F_x التي حصلت عليها في C.1 دون استخدام θ_a و θ_b و z_a و z_b .

1.0 C.3 نقطة

ليكن x_a الإحداثي x لنقطة التلامس بين سطح الماء والجانب الأيسر من القضيب B. باستخدام المعادلة التفاضلية التي حصلت عليها في B.5، عبّر عن إحداثي منسوب الماء z_0 عند نقطة المنتصف بين هذين القضيبين A و B بدلالة x_a و z_a . يمكنك استخدام الثابت ℓ الذي قُدّم في B.4.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تتجه القوى الأفقية الموجبة في اتجاه $+x$. وكل من f_x و F_x قوة لكل وحدة طول على امتداد y ، ووحدتهما N/m.

A.1 •

$$v = \sqrt{\frac{3k\gamma}{\rho a}} (2 - 2^{2/3}) = 0.23 \text{ m/s} \quad \text{إلى أعلى.}$$

B.1 •

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

B.2 •

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

B.3 •

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

B.4 •

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

الثابت في الطرف الأيمن من المعادلة (1) يساوي 1 للسطح الهلالي عند اللوح.

B.5 •، في تقريب الميل الصغير:

$$z''(x) = \frac{z(x)}{\ell^2}, \quad z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

C.1 •

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2 •

$$F_x = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

تتجه القوة المؤثرة في B نحو A عندما $z_0 \neq 0$.

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

الحل

A.1

ليكن R نصف قطر القطرة الناتجة عن الاندماج. يعطي حفظ الحجم

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3}, \quad R = 2^{1/3}a.$$

وعليه، فإن كتلة القطرة الناتجة عن الاندماج هي

$$m = \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \rho a^3.$$

تساوي الطاقة السطحية حاصل ضرب التوتر السطحي في مساحة السطح. ومن ثم فإن النقص في الطاقة السطحية هو

$$\begin{aligned} \Delta E &= \gamma (2 \cdot 4\pi a^2 - 4\pi R^2) \\ &= 4\pi \gamma a^2 (2 - 2^{2/3}). \end{aligned}$$

باستخدام التحول المفترض لجزء k إلى طاقة حركية انتقالية،

$$\frac{1}{2}mv^2 = k\Delta E.$$

وبالتالي،

$$v^2 = \frac{3k\gamma}{\rho a} (2 - 2^{2/3}).$$

عندما $a = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}$

$$m = 8.3776 \times 10^{-9} \text{ kg}, \quad \Delta E = 3.7694 \times 10^{-9} \text{ J},$$

و

$$v = 0.23236 \dots \text{ m/s}.$$

إلى رقمين معنويين، تكون السرعة الابتدائية

$$v = 0.23 \text{ m/s} \text{ إلى أعلى}$$

B.1

في الاتزان الهيدروستاتيكي، توازن قوة الضغط المتجهة إلى أعلى قوة الجاذبية، فنحصل على

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

بما أن ρ ثابتة و $P(0) = P_0$ ، فإن التكامل يعطي

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

وعلى وجه الخصوص، يكون ضغط الماء فوق $z = 0$ أقل من الضغط الجوي، كما ورد في نص المسألة.

B.2

ينتج عن ضغط منتظم P_0 يؤثر على كامل السطح الحدي المغلق محصلة قوة تساوي صفرًا. لذا يمكننا إجراء الحساب باستخدام الضغط النسبي

$$p(z) = P(z) - P_0 = -\rho g z.$$

الضغط النسبي على السطح المواجه للهواء يساوي صفرًا. ليكن z_* الارتفاع المشترك لقاع الكتلة. يدفع الضغط على الوجه الرأسي الأيسر في اتجاه $+x$ ، ويدفع الضغط على الوجه الأيمن في اتجاه $-x$. ولا يسهم القاع بأي قوة أفقية. لكل وحدة طول على امتداد y ,

$$\begin{aligned} f_x &= \int_{z_*}^{z_1} p(z) dz - \int_{z_*}^{z_2} p(z) dz \\ &= -\rho g \int_{z_2}^{z_1} z dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2). \end{aligned}$$

ومن ثم

$$f_x = \frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2).$$

بالنسبة إلى السطح الهلالي المحب للماء الموضح في الشكل، $z_1 > z_2 > 0$ ، لذا تتجه قوة الضغط هذه في اتجاه $-x$.

B.3

يشد التوتر السطحي مماسيًا بعيدًا عن الكتلة عند كل حافة. ومركبتاه الأفقيتان لكل وحدة طول هما
عند الحافة اليمنى $+\gamma \cos \theta_2$ ، عند الحافة اليسرى $-\gamma \cos \theta_1$.

يتطلب الاتزان الأفقي

$$f_x - \gamma \cos \theta_1 + \gamma \cos \theta_2 = 0.$$

لذلك،

$$f_x = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

B.4

بمساواة التعبيرين الواردين في B.2 و B.3،

$$\frac{\rho g}{2} (z_2^2 - z_1^2) = \gamma (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

بإعادة الترتيب نحصل على

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z_1^2 + \cos \theta_1 = \frac{\rho g}{2\gamma} z_2^2 + \cos \theta_2.$$

بما أنه يمكن اختيار الحافتين اعتباطيًا على امتداد السطح،

$$\frac{\rho g}{2\gamma} z^2 + \cos \theta(x) = C.$$

بالمقارنة مع المعادلة (1) نحصل على

$$a = 2, \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

الطول ℓ هو الطول الشعري. يجيز الاشتقاق كلتا إشارتي z ، لذا ينطبق على السطوح الهلالية المرتفعة والمنخفضة على السواء.

بعيدًا عن اللوح، $z \rightarrow 0$ و $\theta \rightarrow 0$. ومن ثم $C = 1$ ، وتكون العلاقة الدقيقة لسطح الماء عند اللوح

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + \cos \theta(x) = 1.$$

يحقّق المماس للسطح

$$\tan \theta(x) = z'(x).$$

بالنسبة إلى السطح المُثَلَّ بمنحنى دالة،

$$\cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}.$$

في ظل التقريب المذكور $|z'(x)| \ll 1$ ، يكون توسعه حتى الرتبة الثانية

$$\cos \theta(x) = 1 - \frac{1}{2}[z'(x)]^2 + O([z'(x)]^4).$$

يعطي التعويض في المعادلة (1)، حتى هذه الرتبة،

$$\frac{z^2}{2\ell^2} + 1 - \frac{1}{2}(z')^2 = C.$$

بالاشتقاق،

$$\frac{zz'}{\ell^2} - z'z'' = 0.$$

لشكل سطح غير مستوٍ، ينتج عن ذلك

$$z'' = \frac{z}{\ell^2},$$

وتمتد صلاحية المعادلة إلى النقاط المعزولة التي تنعدم عندها المشتقة بفضل الاستمرارية. كما يحققها شكل السطح المستوي $z = 0$.

الحل العام هو

$$z(x) = Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}.$$

يتطلب الشرط الحدي $z(x) \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow +\infty$ أن يكون $A = 0$. وعند اللوح،

$$z'(0) = \tan \theta_0 = -\frac{B}{\ell},$$

ومن ثم $B = -\ell \tan \theta_0$. لذلك،

$$z(x) = -\ell \tan \theta_0 e^{-x/\ell}, \quad x \geq 0.$$

بالنسبة إلى لوح محب للماء، $\theta_0 < 0$ ، لذا $z > 0$. وبالنسبة إلى لوح كاره للماء، $\theta_0 > 0$ ، لذا $z < 0$. وفي كلتا الحالتين، يقترب السطح من $z = 0$ أسياً على مقياس الطول ℓ . ويتطلب الاتساق $|\tan \theta_0| \ll 1$.

C.1

هناك مساهمتان في القوة الأفقية المؤثرة في القضيب B: التوتر السطحي عند خطي التلامس، والضغط على القضيب.

يشد التوتر السطحي القضيب نحو السطح الحر المجاور. ومن ثم فإن محصلة مركبته الأفقية هي

$$F_{\gamma,x} = -\gamma \cos \theta_a + \gamma \cos \theta_b.$$

لحساب قوة الضغط، نطرح الضغط الجوي المنتظم، الذي تساوي محصلته على سطح القضيب المغلق صفرًا. والضغط المتبقي على السطح المبتل هو $p(z) = -\rho g z$.

تُحسب قوة الضغط الأفقية على سطح منحنٍ بتكامل الضغط على إسقاطه الرأسي. ليكن ارتفاع أسفل القضيب. يسهم الجانب الأيسر المبتل بقوة في اتجاه $+x$ ، والجانب الأيمن المبتل بقوة في اتجاه $-x$:

$$F_{p,x} = \int_{z_*}^{z_a} (-\rho g z) dz - \int_{z_*}^{z_b} (-\rho g z) dz$$

$$= \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

ليس للجاذبية مركبة أفقية. وجميع المساهمات،

$$F_x = \gamma (\cos \theta_b - \cos \theta_a) + \frac{\rho g}{2} (z_b^2 - z_a^2).$$

C.2

تنطبق علاقة السطح الواردة في B.4 بصورة منفصلة على السطح بين القضيبين وعلى السطح الخارجي. وليس من الضروري أن يتساوى ثابتا التكامل لهما.

على الجانب الخارجي من B، يصبح السطح أفقيًا عند $z = 0$ بعيدًا عن القضيب. ومن ثم

$$\frac{z_b^2}{2\ell^2} + \cos \theta_b = 1.$$

بين القضيبين المتماثلين، يجعل التناظر الانعكاسي حول $x = 0$ السطح أفقيًا عند نقطة المنتصف. وهناك $z = z_0$ ، لذا تكون العلاقة الداخلية

$$\frac{z_a^2}{2\ell^2} + \cos \theta_a = 1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2}.$$

بما أن $\rho g = \gamma/\ell^2$ ، يمكن كتابة القوة الواردة في C.1 على الصورة

$$F_x = \gamma \left[\left(\cos \theta_b + \frac{z_b^2}{2\ell^2} \right) - \left(\cos \theta_a + \frac{z_a^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

يعطي التعويض

$$F_x = \gamma \left[1 - \left(1 + \frac{z_0^2}{2\ell^2} \right) \right].$$

ومن ثم

$$F_x = -\frac{\gamma z_0^2}{2\ell^2} = -\frac{\rho g}{2} z_0^2.$$

يقع القضيب B في جهة x الموجبة، لذا تعني الإشارة السالبة تجاذبًا نحو القضيب A. وتندعم القوة عندما $z_0 = 0$. لا تتطلب هذه النتيجة تقريب الميل الصغير.

C.3

نطبق الآن معادلة الميل الصغير الواردة في B.5 على السطح بين القضيبين:

$$z'' = \frac{z}{\ell^2}.$$

بكتابة حلها بدلالة الدوال الزائدية،

$$z(x) = C_1 \cosh(x/\ell) + C_2 \sinh(x/\ell).$$

يعطي التناظر $z'(0) = 0$ ، وهو ما يتطلب $C_2 = 0$. وبما أن $z(0) = z_0$ ، فإن $C_1 = z_0$ ، وبالتالي

$$z(x) = z_0 \cosh(x/\ell).$$

عند نقطة التلامس الداخلية مع القضيب B، $x = x_a$ و $z = z_a$ ، وبالتالي،

$$z_a = z_0 \cosh(x_a/\ell),$$

ومن ثم

$$z_0 = \frac{z_a}{\cosh(x_a/\ell)} = \frac{2z_a}{e^{x_a/\ell} + e^{-x_a/\ell}}.$$

تصح هذه العلاقة بين الارتفاع والتباعد ضمن تقريب الميل الصغير.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.