

IPhO 2022

理论题与解答 · 瑞士（线上举办） · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2022/

题目 1：永磁体

强永磁体由 NdFeB 合金制成，这种合金具有很宽的磁滞回线，因此在广泛的应用条件下，可以认为其磁化强度 J 保持不变；下文中，我们假设 $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$ ，其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ，并且所有永磁体都均匀磁化。磁化强度定义为物质的磁偶极矩的体积密度。

提示 1。下列等式可能有用：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

提示 2。球形磁体产生的磁场与点偶极子产生的磁场相同。其他形状的磁体产生的磁场，只有在距离远大于其直径时才等效于点偶极子的磁场。

提示 3。电点偶极子产生的电场与磁点偶极子产生的磁场，作为坐标和相应偶极矩的函数，具有相似的形式，即其中一个场乘以一个常数因子即可得到另一个场。

提示 4。由边界条件引起的感应场，总可以用给定边界之外的某种场源配置来替代。

部分 A. 磁体间的相互作用（4.5 分）

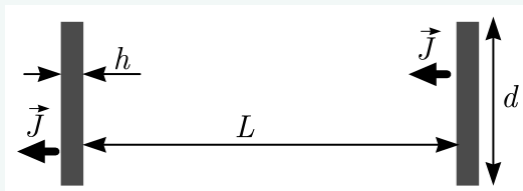
当到磁体的距离远大于磁体的尺寸时，它产生的磁场可以近似为其偶极矩 $\vec{m}$ 产生的磁场，

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

这里 $r = |\vec{r}|$ ，我们将偶极矩分解为平行和垂直于位矢 $\vec{r}$ 的分量，即 $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$ ，其中位矢从偶极子指向观测点。

A.1 — 0.6 分

两个同轴放置的圆柱形磁体，直径为 $d = 20 \text{ mm}$ ，厚度为 $h = 2 \text{ mm}$ ，磁化方向平行于轴线。若两磁体中心之间的距离为 $L = 20 \text{ cm}$ ，求它们之间相互作用力的大小。可以假设 $L \gg d, h$ 。



A.2 — 0.4 分

在远大于 $\frac{h}{2}$ 的距离处，A.1 中磁体产生的磁场与环形电流 I 产生的磁场相同。求 I 。

A.3 — 1.0 分

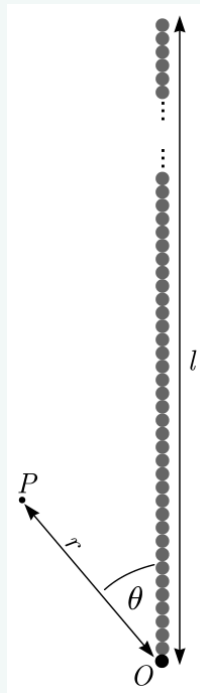
对于 A.1 中的装置，若改为 $L = 5 \text{ mm}$ ，求磁体之间的相互作用力。可以假设 $d \gg L \gg h$ 。

A.4 — 1.0 分

直径为 $\delta = 5 \text{ mm}$ 的相同球形磁体，由磁吸引力连接成一条链。当这条链悬挂在最上方的磁体下方时，不因自身重量而断开的最大长度 l 是多少？NdFeB 磁体的密度为 $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ 。

A.5 — 1.5 分

考虑 A.4 部分中的磁体链。点 P 到链的一个端点 O 的距离为 r ，链与直线 OP 的夹角为 θ （见下图）。假设 $l \gg r$ 且 $r \sin \theta \gg \delta$ ，求该点的磁感应强度 B 大小的表达式。



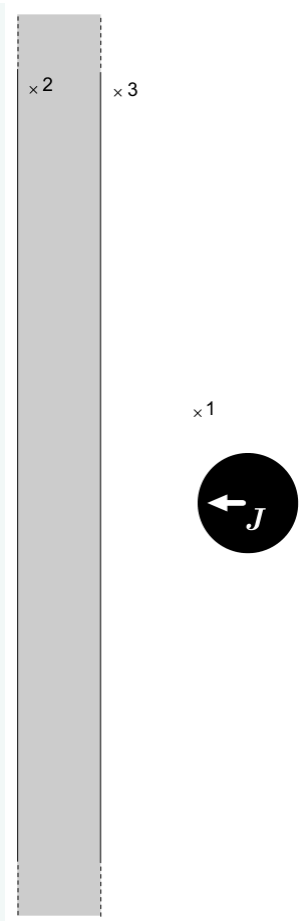
部分 B. 与铁磁体的相互作用 (3.5 分)

现在假设，除了永磁体之外，我们还有一些由铁磁材料制成的板，其材料类似于变压器铁芯所用的材料。在我们所考虑的情形中，可以认为这种材料具有恒定且很大的相对磁导率 $\mu_r \sim 10^5$ 。

提示 5. 磁导率很大意味着，在由这种材料制成的物体的外表面附近，磁感线几乎垂直于表面。这与导体外表面附近电场线的行为相似。

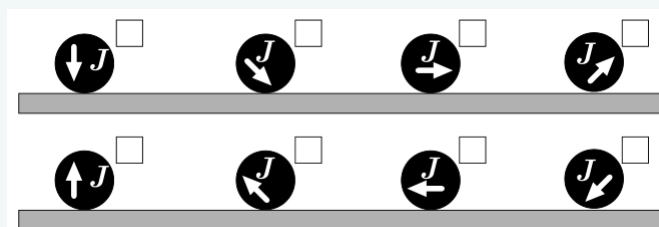
B.1 — 1.0 分

A.4 部分中的一个球形磁体与一块无限大厚铁磁板的距离为 $s = \delta$ （见答题纸）。球体的磁化方向垂直于板。在答题纸所示的截面内画出磁感线的示意图。图中标出了三个点（分别标记为 1、2 和 3）；你需要画出通过这三个点的各条磁感线的完整路径，即尽可能画出图中容得下的全部部分。



B.2 — 1.0 分

现在使球形磁体与板直接接触。在稳定平衡时，球形磁体的磁化强度矢量沿什么方向？板与磁体之间的法向力是多少？在答题纸上相应的方框中打勾，标出正确的方向。勾选错误会扣分。



B.3 — 1.5 分

现在将 A.1 部分中的一个磁体放在两块直径为 $D = 2d$ 的圆形厚铁磁板之间，使磁体的两个平面端面紧贴两块板，且三个圆盘同轴。求作用在每块板上的磁力 F 。提示：可以忽略铁磁板外部以及两板间隙外部的磁场。

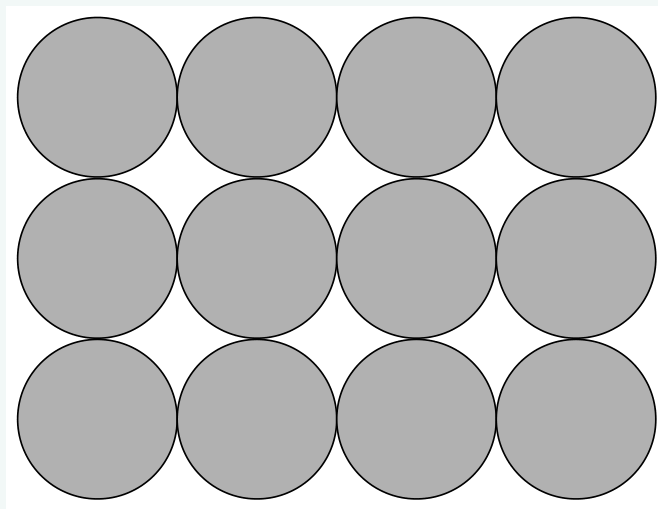
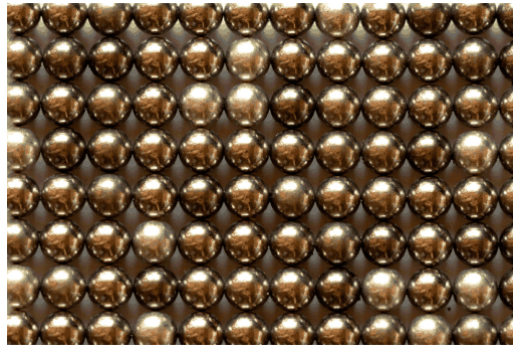
部分 C. (反) 铁磁有序 (2 分)

材料的磁性源于电子和原子核的磁偶极矩。如果这些偶极矩彼此平行排列，它们产生的磁场就会增强——这样的材料是铁磁材料。另一方面，如果每个偶极矩附近都有另一个与之反平行的偶极矩，磁场就会相互抵消——这样的材料是反铁磁材料。

下文中，我们考虑大量 A.4 部分中的球形磁体，将它们排列在二维晶格的格点上；**稳定平衡构型的实物照片见下图**。假设所有磁化强度矢量都位于图面内。计算时只考虑最近邻相互作用（在 C.1 的图中，每个磁体有四个最近邻；在 C.2 的图中则有六个）。

C.1 — 0.8 分

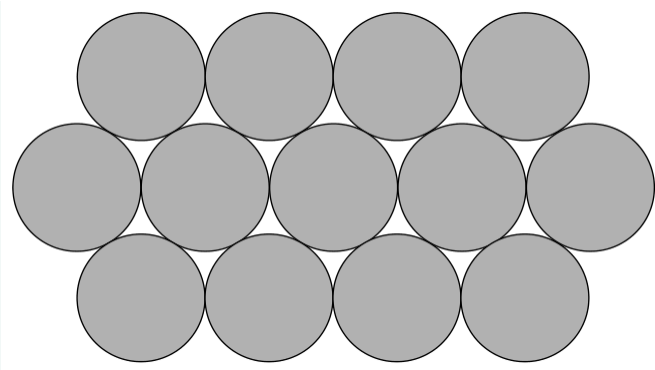
在下图中标出各磁体的磁化方向。无需证明你提出的构型是唯一可能的构型，但仍需说明它确实是稳定的。假设其他磁体保持不动，求从晶格中部某处将一个磁体拉出晶格所需的能量。这种构型对应于铁磁材料还是反铁磁材料的有序排列？



C.2 — 1.2 分

对于下图所示的构型，回答与 C.1 相同的问题。





物理常量

以下列出了解题时除题目给出的量之外还可能用到的物理常量。

物理常量	符号	数值
真空中的光速	c	299 792 458 m/s
真空磁导率 (磁常量)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ Vs/Am}]$
真空介电常数 (电常量)	ε_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ As/Vm}]$
元电荷	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $[1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$
电子静止质量	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
质子静止质量	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
中子静止质量	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
原子质量单位	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
万有引力常量	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
摩尔气体常量	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
玻尔兹曼常量	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
斯特藩-玻尔兹曼常量	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
普朗克常量	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
约化普朗克常量	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

题目译自官方英文原文。

答案

以下所有力的数值均为大小。

- A.1:

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4} \simeq 2.1 \times 10^{-4} \text{ N}$$

对于图示方向，作用力为吸引力。

- A.2: 直径为 d 的环形电流，其电流为

$$I = Jh \simeq 2.4 \times 10^3 \text{ A}.$$

- A.3:

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L} \simeq 14 \text{ N}$$

作用力为吸引力。

- A.4: 在长链近似下,

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g} \simeq 6.6 \text{ m}.$$

- A.5:

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}$$

在所述近似下, 该大小与 θ 无关。

- B.1: 外部磁场等于真实偶极子与一个强度相等、指向相同的镜像偶极子共同产生的磁场。磁感线垂直于板面。通过 1 的磁感线在空气中形成一条短的回返弧线; 通过 2 和 3 的磁感线属于更大的闭合回路, 其磁通穿过板。它们的具体方向在解答中说明。
- B.2: 勾选**每行的第一幅图**: 磁化方向垂直于板, 既可朝向板, 也可背离板。

$$F = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24} \simeq 5.9 \text{ N}$$

磁力为吸引力。

- B.3: 每块板都受到朝向磁体和另一块板的拉力, 其大小为

$$F = \frac{3\pi \mu_0 J^2 d^2}{32} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ N}.$$

- C.1: 每一水平行内的所有磁矩都指向同一方向; 相邻两行的磁矩方向相反。这是**反铁磁有序**。

$$W = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

- C.2: 所有磁矩都沿同一水平方向。这是**铁磁有序**, 满足下文所述的单个磁体转动稳定性检验。

$$W = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

这说明了对于单个磁体转动的稳定性; 在只考虑最近邻相互作用的模型中, 许多磁体的某些集体转动会降低能量。

解答

磁化强度和两个相关的偶极矩为

$$J = \frac{1.5}{\mu_0} = 1.19366 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$m_c = J \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.750 \text{ A m}^2, \quad m_s = J \frac{\pi \delta^3}{6} = 0.078125 \text{ A m}^2.$$

两个永久偶极子之间的相互作用能为

$$U_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})].$$

等价地, $U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$ 。保持永久磁矩不变, 对该能量关于位置求导, 即可得到力。

A.1

由于 $L \gg d, h$, 两个圆柱体都可以用点偶极子替代。它们的磁矩彼此平行, 并平行于共同轴线, 因此

$$U(L) = -\frac{\mu_0 m_c^2}{2\pi L^3}.$$

该力趋向于减小 L , 其大小为

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{3\mu_0 m_c^2}{2\pi L^4}.$$

代入 $m_c = J\pi d^2 h/4$,

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4}.$$

取 $L = 0.20 \text{ m}$,

$$F = 2.109375 \times 10^{-4} \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^{-4} \text{ N}}.$$

A.2

均匀磁化的物体可以用束缚电流来表示。其束缚面电流密度为

$$\vec{K}_b = \vec{J} \times \hat{n}.$$

对于沿轴向磁化的圆柱体, 该电流沿曲面侧壁环向流动, 大小为 $K_b = J$ 。沿圆柱体的厚度积分, 得到等效环形电流

$$\boxed{I = Jh}.$$

在距离远大于厚度时, 可以用一个直径为 d 的单匝线圈替代这个薄的圆柱面电流层。

令两者的磁矩相等, 也能得到同样的结果:

$$I \frac{\pi d^2}{4} = J \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

数值上,

$$I = (1.19366 \times 10^6)(2.0 \times 10^{-3}) = 2.3873 \times 10^3 \text{ A} \simeq \boxed{2.4 \text{ kA}}.$$

其环流方向按照右手定则选取, 使之产生指定的磁化方向。

A.3

条件 $L \gg h$ 允许使用 A.2 中的电流环表示。由于 $L \ll d$, 两个电流环上彼此靠近的对应部分可以视为间距为 L 的平行直导线。

平行电流之间单位长度的吸引力为

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L}.$$

在最低阶近似下, 该力沿共同轴线方向。乘以周长 πd , 得到

$$F \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L}.$$

因此

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L}.$$

对于 $L = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$,

$$F \simeq 14.3239 \text{ N} \simeq \boxed{14 \text{ N}}.$$

这是在给定尺度关系 $d \gg L \gg h$ 下的最低阶结果。

A.4

各球体的磁矩沿链排列，且全部指向同一方向。每个球体的质量为

$$M = \rho \frac{\pi \delta^3}{6}.$$

中心间距为 $n\delta$ 的两个球体之间的吸引力为

$$F_n = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(n\delta)^4} = \frac{F_1}{n^4},$$

其中

$$F_1 = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}.$$

对于含有 N 个球体的链，被固定的顶部球体必须支撑其余 $N - 1$ 个球体。在所有球体仍保持接触时，它能够对其余球体施加的最大向上磁力为

$$F_{\text{top}} = F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

因此，

$$(N - 1)Mg \leq F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

最上方的接合处决定承重极限：在更下方的任意截断处，其下悬挂的重量更小，而跨越该截断处的磁吸引作用，对于最上方接合处两侧出现的每一种球心间距，都至少包含一对具有该间距的球体。

对于长链，

$$F_{\text{top}} \simeq F_1 \frac{\pi^4}{90}.$$

此外，在 $1/N$ 的最低阶近似下，悬挂部分的重量为

$$Mg \frac{l}{\delta} = \frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l.$$

令其等于极限磁力，

$$\frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l_{\text{max}} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \frac{\pi^4}{90}.$$

因此，

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g}.$$

球体直径消去了：磁力的承重能力和链的单位长度质量都正比于 δ^2 。

取 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,

$$F_1 = 5.8594 \text{ N}, \quad F_{\text{top}} \simeq 6.3417 \text{ N},$$

$$l_{\max} \simeq 6.5848 \text{ m} \simeq \boxed{6.6 \text{ m}}.$$

计入被支撑的顶部球体，并将球体数取整，只会使长度改变一个 δ 量级的量。

A.5

由于 $r \sin \theta \gg \delta$ ，可以用连续的偶极子线替代离散的链。其单位长度的偶极矩为

$$\lambda_m = \frac{m_s}{\delta} = \frac{\pi J \delta^2}{6}.$$

将 O 置于原点，让链沿 $+z$ 方向从 0 延伸至 l 。取所有磁矩均沿 $+z$ 方向。在外部区域，定义磁标势，使得

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi.$$

该偶极子线的势为

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \int_0^l \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3} dz'.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} = \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3},$$

积分得到

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - l\hat{z}|} - \frac{1}{r} \right).$$

因此，外部磁场等效于位于两端的两个异号等效磁极所产生的磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi} \left[\frac{\vec{r} - l\hat{z}}{|\vec{r} - l\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

当 $l \gg r$ 时，远端的贡献可以忽略，剩下

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

于是

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}.$$

磁场相对于近端沿径向分布，因此其大小与 θ 无关。将所有磁矩反向，磁场方向也随之反向。

B.1

设板占据 $x < 0$ 的区域，表面位于 $x = 0$ ，球心位于 $x = a > 0$ 。在答题纸的图中，

$$\vec{m} = -m_s \hat{x}.$$

对于高磁导率板，外部磁场的切向分量必须近乎为零。在 $x = -a$ 处放置一个具有**相同法向取向**的镜像偶极子，即可满足这一边界条件：

$$\vec{m}_{\text{image}} \simeq -m_s \hat{x}.$$

更准确地说，其大小还应乘以

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \simeq 1.$$

在表面处，两个偶极子磁场的切向分量相互抵消。若用 y 表示相对于球心的高度，则剩余的**法向分量**为

$$B_x(0, y) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{y^2 - 2a^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}.$$

因此，在球体轴线附近，即 $|y| < \sqrt{2}a$ 的区域，磁通进入板；在更远处，即 $|y| > \sqrt{2}a$ 的区域，磁通从板中穿出。

所要求的示意图可描述如下：

- 球体的**左侧是北极一侧**，右侧是南极一侧。外部箭头沿弯曲的回返路径从左侧指向右侧。在球体内部，箭头大致从右指向左。
- **通过点 1**：画一条短的上方回返弧线，完全位于板外的空气中。它从球体左上方表面出发，上升并经过点 1，向右弯曲，然后进入球体右上方表面。
- **通过点 2**：画一条较大的闭合回路，其磁通在板内向上传递。在点 2 处，磁感线主要朝上，并略微朝向板面。它向右弯曲，在点 3 上方垂直于表面穿出，然后弯回球体的南极一侧。沿反方向追踪时，其位于板内的部分向下延伸，与更靠近磁体处进入板的磁通相连。
- **通过点 3**：画一条从板中近乎水平向右穿出的磁感线。它随后向右下方弯曲，通向球体的南极一侧。沿反方向将它延伸到板内，画成一条弯曲路径，返回较低处的入射点，该处的磁通来自球体的北极一侧。
- 下半部分的图样是上半部分关于通过球心的水平线的镜像。每条磁感线都继续穿过材料和磁体，形成闭合的磁感线。

在理想半空间极限下，板内磁场约为真实偶极子单独在该处产生的磁场的两倍。这确定了通过点 2 的磁感线的弯曲延伸路径及其方向。

B.2

令 $\hat{n}$ 沿板的外法线方向，并将球体的磁矩分解为

$$\vec{m} = m_n \hat{n} + \vec{m}_t.$$

其镜像的磁矩为

$$\vec{m}' = m_n \hat{n} - \vec{m}_t.$$

若球心距板为 a ，则镜像与它的距离为 $2a$ 。镜像在真实偶极子处产生的磁场为

$$\vec{B}_{\text{image}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2a)^3} (2m_n \hat{n} + \vec{m}_t).$$

由于板的磁化是感应产生的，相互作用能为

$$U = -\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{image}}.$$

用 θ 表示 $\vec{m}$ 与板法线的夹角，则

$$U(a, \theta) = -\frac{\mu_0 m_s^2}{8\pi(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

它在下列情形取最小值：

$$\theta = 0 \quad \text{或} \quad \theta = \pi.$$

因此，垂直于板的两个方向都是稳定的：朝向板和背离板。它们分别对应上、下两行中的第一幅图。

在任一稳定取向，吸引力的大小为

$$F = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(2a)^4}.$$

接触时， $a = \delta/2$ ，因此

$$F = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \boxed{\frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}}.$$

数值上，

$$F = 5.8594 \text{ N} \simeq \boxed{5.9 \text{ N}}.$$

B.3

令

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

为磁体的端面面积，而

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = 4A$$

为每块板的面积。

板的磁导率很大，因此其内部的磁场强度 H 可以忽略。所以，每块板近似为磁标势的等势面。忽略边缘效应时，磁体内和周围环形空气隙内的轴向磁场强度 H 相同。

令 B_m 为磁体内带符号的轴向磁感应强度， B_a 为环形间隙内带符号的轴向磁感应强度。由于磁化强度固定，

$$B_m = \mu_0(H + J), \quad B_a = \mu_0 H.$$

于是

$$B_m - B_a = \mu_0 J.$$

由于忽略了外部磁通，所有穿过磁体的磁通都必须经环形间隙返回。因此，

$$AB_m + (A_p - A)B_a = 0.$$

解得，

$$B_m = \mu_0 J \left(1 - \frac{A}{A_p}\right), \quad B_a = -\mu_0 J \frac{A}{A_p}.$$

对于 $A_p = 4A$ ，

$$B_m = \frac{3}{4}\mu_0 J = 1.125 \text{ T}, \quad B_a = -\frac{1}{4}\mu_0 J = -0.375 \text{ T}.$$

垂直于高磁导率表面的磁场会产生吸引性的磁压力

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

在磁体与板的接触处，可以设想存在一条无限薄的真空狭缝来计算该压力：法向 B 跨过狭缝时连续。中央区域和环形回流磁通区域都将板向内拉，尽管两处磁场方向相反。

因此

$$F = \frac{AB_m^2 + (A_p - A)B_a^2}{2\mu_0}.$$

代入得

$$F = \frac{\mu_0 J^2 A}{2} \left(1 - \frac{A}{A_p}\right).$$

取 $A_p = 4A$,

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32}.$$

数值上，

$$F = 210.9375 \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ N}}$$

为每块板所受的力。

C.1

定义最近邻偶极相互作用的能量尺度

$$\varepsilon_d = \frac{\mu_0 m_s^2}{4\pi\delta^3} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{144} = 4.8828125 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

取磁矩沿水平排列，相邻两行方向相反。在答题纸上，可以使顶行指向右，中间行指向左，底行指向右：

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{array}$$

考虑一个磁矩指向右的中央磁体。

它的两个水平方向的邻居也指向右，且位于其偶极轴线上。每个邻居贡献的相互作用能为

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

它的两个竖直方向的邻居指向左，且位于与其磁矩垂直的方向上。每个邻居贡献

$$U_{\text{vertical}} = -\varepsilon_d.$$

因此，中央磁体与其邻居的总相互作用能为

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 2(-\varepsilon_d) = -6\varepsilon_d.$$

四个邻居产生的磁场都与中央磁矩平行，总大小为

$$B_{\text{nn}} = \frac{6\varepsilon_d}{m_s}.$$

保持邻居不动，将该磁体转过角度 α ，能量增加

$$\Delta U = 6\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

因此，它受到回复力矩。

对于固定的正方晶格格点，该排列也使全部最近邻取向相互作用能最小。为说明这一点，将单位磁矩写为 (u_i, v_i) 。则

$$\frac{U}{\varepsilon_d} = \sum_{\langle ij \rangle_x} (-2u_i u_j + v_i v_j) + \sum_{\langle ij \rangle_y} (u_i u_j - 2v_i v_j) \geq -3 \sum_i (u_i^2 + v_i^2) = -3N.$$

该不等式由 $2|ab| \leq a^2 + b^2$ 得出，而所提出的条纹排列在晶格内部达到这一下界。

将中央磁体移至无穷远，会消除它的四条相互作用键，因此所需的功为

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 6\varepsilon_d.$$

这里没有 $1/2$ 因子：每条涉及被移走磁体的相互作用键都只计数一次。因此，

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

相邻两行的磁化方向相反，形成**反铁磁有序**。

C.2

取所有磁矩均沿水平方向指向右，包括答题纸图中的每个球体。

中央球体有两个水平方向的邻居和四个斜向邻居，后者的位移矢量与磁矩成 60° 或 120° 角。

每一对水平方向的磁体贡献

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

对于与两者连线成 β 角的平行磁矩，

$$U_{\text{pair}} = \varepsilon_d(1 - 3\cos^2 \beta).$$

因此，每个斜向邻居贡献

$$U_{\text{diagonal}} = \varepsilon_d \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_d.$$

将六条相互作用键求和，

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 4\left(\frac{1}{4}\varepsilon_d\right) = -3\varepsilon_d.$$

各邻居磁场的横向分量相互抵消。剩余磁场沿中央磁矩方向，大小为

$$B_{\text{nn}} = \frac{3\varepsilon_d}{m_s}.$$

因此，保持所有邻居不动，将一个磁体转过 α ，所需的能量为

$$\Delta U = 3\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

这说明针对单个磁体的转动存在回复力矩。但这并不能证明对集体转动的稳定性：在只考虑最近邻相互作用的模型中，由于六条键的方向依次相隔 60° ，所有磁矩一起转过同一角度时能量不变；而某些非均匀的集体转动会降低能量。

移走中央磁体所需的功为

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 3\varepsilon_d,$$

所以

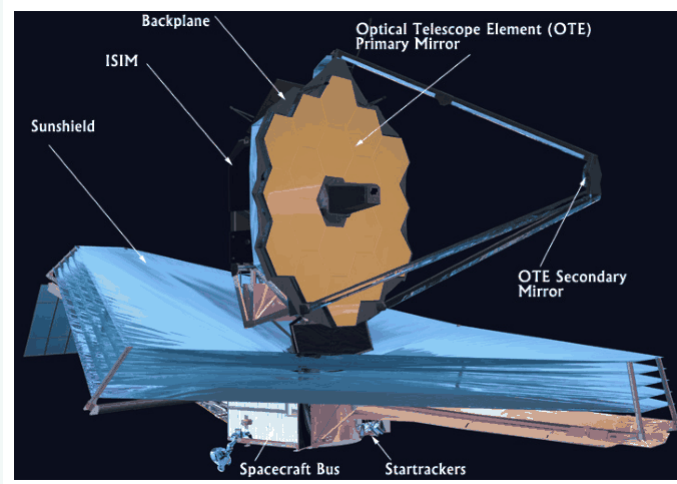
$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

所有磁矩都指向同一方向，因此该构型具有**铁磁有序**。

解答已与官方解答核对。

题目 2：詹姆斯·韦布空间望远镜

本题讨论詹姆斯·韦布空间望远镜的物理原理。恒星发出的光照射到面积为 $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ 的主镜上，再经次镜反射。该系统的焦距为 $f = 130 \text{ m}$ 。光被会聚到 ISIM（综合科学仪器舱）内，其中装有 CCD（电荷耦合器件）相机。



图片来源：NASA

部分 A. 恒星成像 (1.8 分)

最近的红巨星距离我们 89 光年，温度为 $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ ，直径为 $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

A.1 — 0.4 分

计算该恒星在 CCD 相机成像面上所成清晰像的直径。

A.2 — 0.4 分

估算 CCD 相机成像面上衍射中央主极大的直径。假设波长为 $\lambda = 800 \text{ nm}$ ，这是该红巨星辐射强度最大的波长。

A.3 — 1.0 分

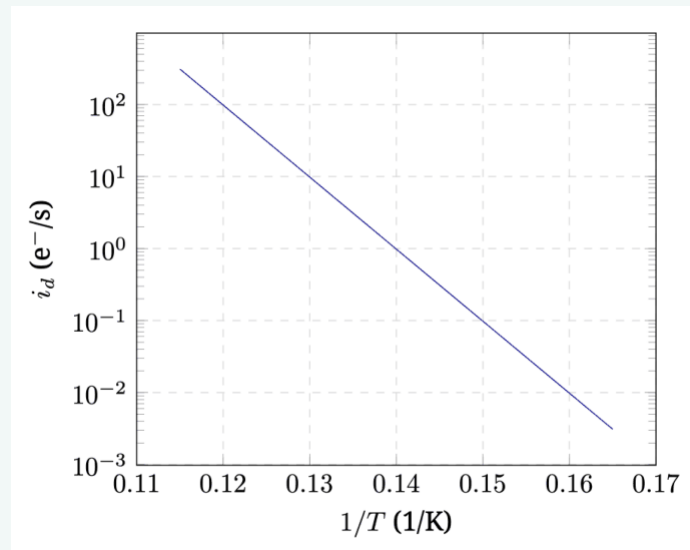
如果 CCD 不进行冷却，并且只能通过成像面的上表面辐射散热，那么 CCD 上红巨星像所在位置的平衡温度是多少？假设 CCD 表面为黑体。给出公式和数值估计。

部分 B. 光子计数 (1.8 分)

CCD 相机吸收一个光子后，会在器件内部释放一个电子。只有当光子具有足够的能量，能够激发电子跨越能隙 ΔE_g 时，这一过程才会发生。假设每个能量足够的光子都能成功激发电子。此外，CCD 相机的温度也会导致电子跨越能隙而产生漏电流；这就是暗电流 i_d ，以每秒的电子数计量。它与温度的关系为

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}. \quad (1)$$

其中 i_0 为常数。



图中显示了暗电流随温度的变化。暗电流的单位 e^-/s 应理解为每秒计数的电子数。

B.1 — 0.4 分

根据暗电流图，估算一个遥远热辐射光源的温度数量级，使其发出的光子刚好能够在像素上激发电子。

电子收集在电容器中，经过曝光时间 τ 后，对电子进行计数。该过程中有三种主要的不确定度来源：计数过程中称为读出噪声的固定不确定度、与暗电流有关的泊松分布误差，以及与探测到的入射光子有关的泊松分布误差。泊松分布误差等于相应过程计数值的平方根。测得的光子数等于电容器中的电子数减去暗电流产生的电子数。

B.2 — 0.4 分

若读出噪声为 σ_r 、暗电流为 i_d 、入射光子速率为 p 、曝光时间为 τ ，写出总计数不确定度 σ_t 的表达式。

在本部分余下的问题中，假设曝光时间为 $\tau = 10^4 s$ ，读出噪声固定为 $\sigma_r = 14$ 。

B.3 — 0.5 分

假设工作温度为 $T_p = 7.5 K$ 。计算使光子计数达到计数不确定度十倍的最小光子速率 p 。

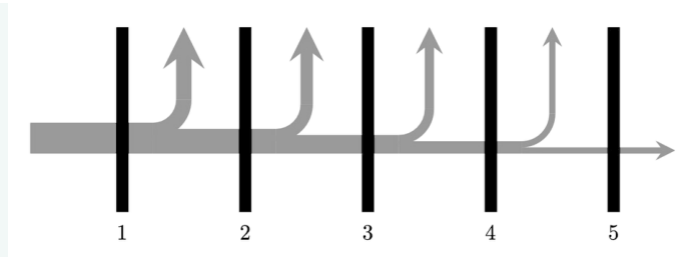
B.4 — 0.5 分

假设所有光子都刚好能够激发电子跨越带隙，那么 B.3 中求得的光源在主镜处的辐射强度是多少？用 W/m^2 表示答案。

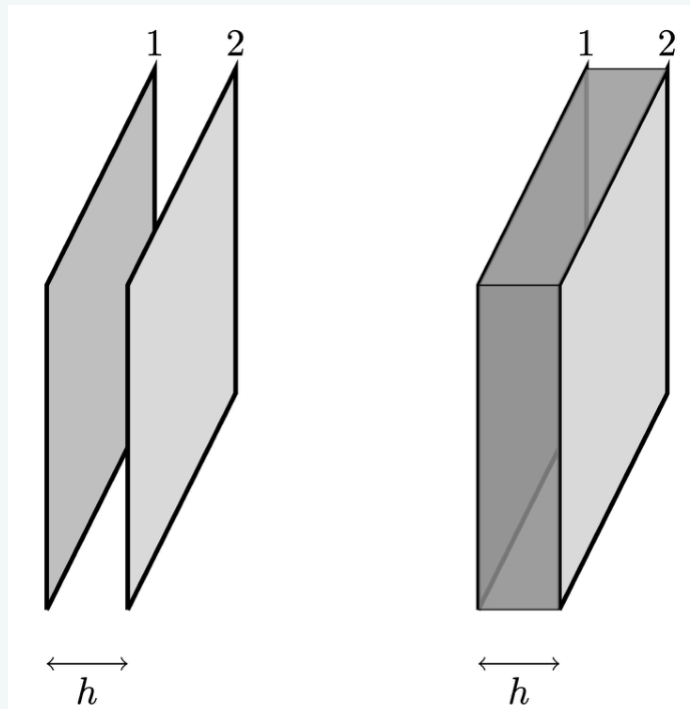
部分 C. 被动冷却 (4.4 分)

红外 CCD 相机必须保持在低温下。首先采用的措施是用遮阳板屏蔽太阳辐射。

遮阳板由五层彼此分离的反射薄膜（黑色）组成；来自太阳的辐射能（灰色）入射到左侧第一层薄膜上，每对相邻薄膜之间都有部分能量逸出。



能量流动示意图：竖直线（黑色）表示薄膜，能量（灰色）从左向右流动，但在薄膜之间，有部分能量向上流动并逸入太空。



左图是相距 h 的两层相邻薄膜 1 和 2 的简单模型。薄膜彼此不连接，周边向太空敞开。假设薄膜相互平行。薄膜之间可以交换热辐射，热辐射也可以通过周边间隙逸出。右图将周边间隙涂成阴影，以便直观展示。

作如下简化假设：

- 薄膜为正方形，每层面积均为 $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$ 。
- 薄膜相互平行，沿周边的间距为 $h = 25 \text{ cm}$ 。
- 薄膜具有恒定的发射率 $\epsilon \ll 1$ 。假设薄膜表面上的所有反射均为漫反射。
- 薄膜很薄，正反两面的温度相等且均匀。
- 一层薄膜发出的辐射通量中，被相邻薄膜吸收的比例为 $\alpha \leq 1$ 。这意味着，如果上图中的薄膜 1 朝薄膜 2 发出热量 Q_1 ，则薄膜 2 将从薄膜 1 吸收热量 αQ_1 。
- 从两层薄膜之间的周边间隙逸出的辐射通量近似为 βQ_{12} ，其中 αQ_{12} 为两层薄膜之间的净通量。比例 $\beta < 1$ 。这等效于假设两层薄膜之间向太空散失的热量与薄膜之间的净热交换量成正比。这是本题采用的粗略近似。
- 太空的背景温度可忽略不计。

C.1 — 2.4 分

推导第一层和第五层薄膜平衡温度的表达式，用入射太阳辐射强度 I_0 、常数 α 和 β 以及任何必要的物理常数表示。为简化表达式，可以用 α 和 β 等定义其他常数。

C.2 — 1.6 分

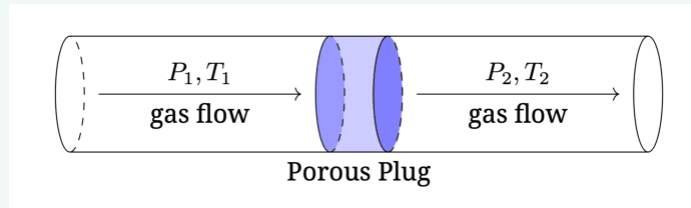
根据薄膜的几何信息，假设发射率 $\epsilon = 0.05$ ，推导 α 和 β 的数值估计。建议考虑上述薄膜构成的长方体模型，其中周边开口面积实际上起到完全吸收辐射能的作用。

C.3 — 0.4 分

求出薄膜 1 和薄膜 5 的温度数值。太阳辐射强度为 $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$ 。

部分 D. 低温制冷机 (4 分)

冷却系统的最后一级直接冷却 CCD 相机。一个闭式循环制冷系统通过供气管道，以恒定压强 P_1 输送氦气，使其流经海绵状多孔塞，进入压强恒为 P_2 的管道。该管道将气体输送至 CCD 以对其进行冷却。随后，氦气经过泵，返回供气管道。



左侧供应的氦气具有确定的压强 P_1 和温度 T_1 ，被迫通过多孔塞后，达到确定的压强 P_2 和温度 T_2 ，然后从右侧流走。

气体流经多孔塞时，与海绵中狭窄通道壁之间的黏滞摩擦产生显著影响；不过，在这一过程中，气体与外界没有热量交换。区域 2 中气体的宏观流速仅略大于区域 1 中的宏观流速。

氦气并非理想气体，但在整个过程中始终保持气态。

D.1 — 1.0 分

考虑从左向右通过多孔塞的一摩尔气体。在答题纸的表格中填写“>”或“<”，表示哪个量必定较大；填写“=”，表示两个量必定相等；若没有更多信息就无法判断大小或是否相等，则填写“?”。

Quantity Name	State 1	Compare using ">", "<", "=", or "?"	State 2
Internal Energy	U_1		U_2
Temperature	T_1		T_2
Entropy	S_1		S_2
Pressure	P_1		P_2
Volume	V_1		V_2

D.2 — 0.6 分

找出由 U （内能）、 P （压强）和 V （体积）构成的一个量，使其在一摩尔气体流经多孔塞时守恒；写出推导这一守恒量的过程。

答题纸上给出了氦气的单位质量内能随单位质量体积变化的图，其中标有等温线和等熵线。

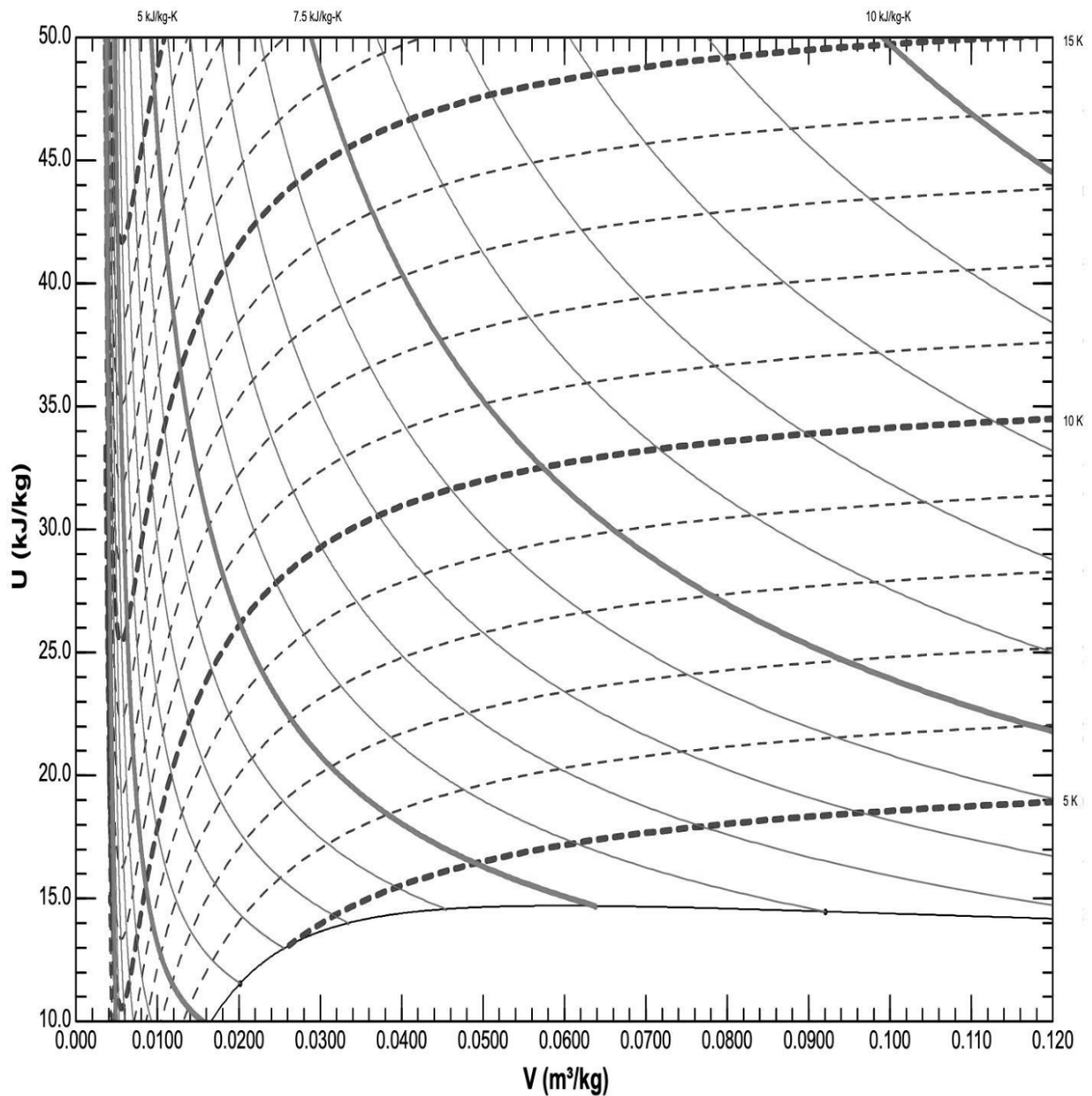
D.3 — 1.4 分

假设 $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ 且 $T_2 = 7.5 \text{ K}$ ，利用图像求出部分 D.2 中所找到的守恒量的数值。在图中画出作图过程！

Solid curves (trending down with increasing volume) are constant entropy S ; values for the bold curves are on top.

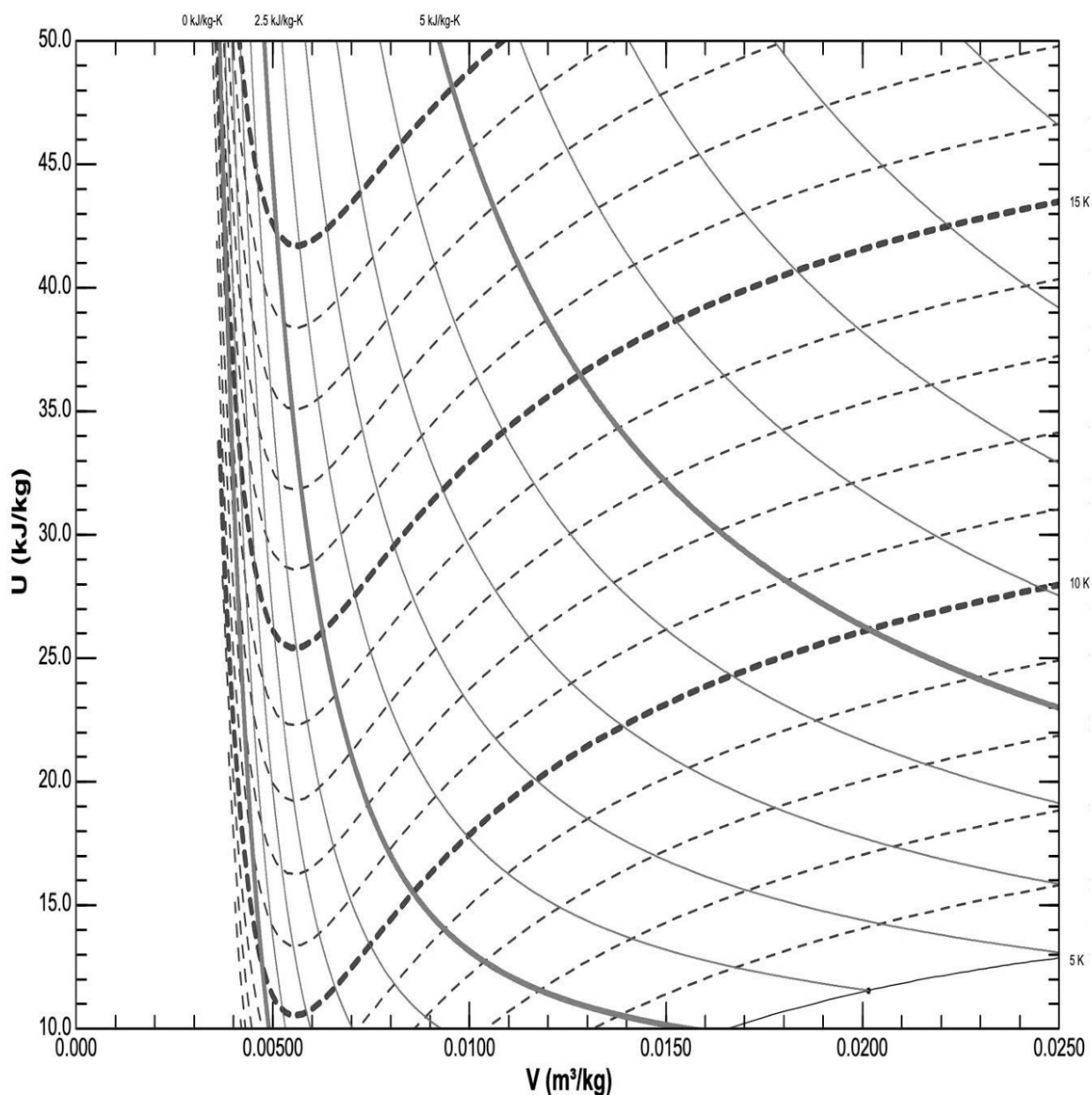
Dashed curves (trending up with increasing volume) are constant temperature T ; values for the bold curves are on right.

Internal energy (per kg) U is on vertical axis; volume (per kg) V is on horizontal axis



D.4 — 0.8 分

求 T_1 可能的最大值。在图中画出作图过程！



D.5 — 0.2 分

假设 T_1 取 D.4 中求得的最大值，求出 P_1 的数值。

物理常数

除题目正文中给出的量外，下面列出了在解答中可能用到的物理常数。

物理常数	符号	数值
真空中的光速	c	299 792 458 m/s
真空磁导率 (磁常数)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ V s/(A m)}]$
真空介电常数 (电常数)	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ A s/(V m)}]$
元电荷	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $[1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$
电子静止质量	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
质子静止质量	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
中子静止质量	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

物理常数	符号	数值
原子质量单位	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
万有引力常数	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
摩尔气体常数	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
玻尔兹曼常数	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
斯特藩-玻尔兹曼常数	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
普朗克常数	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
约化普朗克常数	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

题目译自官方英文原文。

答案

- **A.1:** $d_{\text{image}} \simeq 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}$ 。
- **A.2:** $d_{\text{diff}} \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}$ ，采用等效圆孔径。
- **A.3:** 设距离为 L ，并假设衍射光斑受热均匀，则

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4} \simeq 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

- **B.1:** 按特征能量估算， $T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}$ ，因为 $|\Delta E_g|/k_B \simeq 1.4 \times 10^3 \text{ K}$ 。若改用波长峰值判据，则得到约 $2.8 \times 10^2 \text{ K}$ 。
- **B.2:** $\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p \tau}$ 。
- **B.3:** $p_{\text{min}} \simeq 0.22 \text{ s}^{-1}$ 。
- **B.4:** $I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$ 。
- **C.1:** 定义

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \quad K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha}.$$

则

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}, \quad T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}.$$

- **C.2:** $\alpha \simeq 0.293$, $\beta \simeq 0.414$ 。
- **C.3:** $T_1 \simeq 360 \text{ K}$, $T_5 \simeq 120 \text{ K}$ 。
- **D.1:** 按表格顺序: ?, ?, <, >, <。
- **D.2:** $H = U + PV$ ，忽略宏观动能的微小变化。
- **D.3:** $H/m \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}$ ，对于氦气，相当于约 160 J/mol 。
- **D.4:** $T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}$ 。
- **D.5:** $P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}$ 。

解答

A.1

设恒星的距离为 L 。利用 $1 \text{ 光年} \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$,

$$L \simeq 89(9.46 \times 10^{15}) = 8.42 \times 10^{17} \text{ m}.$$

由于 $L \gg f$, 像基本上位于焦平面内。恒星的角直径为 d_o/L , 因此

$$d_{\text{image}} = f \frac{d_o}{L} = \frac{130(1.7 \times 10^{11})}{8.42 \times 10^{17}} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

于是

$$d_{\text{image}} \simeq 26 \mu\text{m}.$$

A.2

将主镜近似为面积相同的圆孔径:

$$D = 2\sqrt{\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi}} = 5.64 \text{ m}.$$

对于圆孔径, 第一衍射极小的角半径为 $1.22\lambda/D$ 。因此, 中央主极大的直径为

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{\lambda f}{D}.$$

代入数值得

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{(800 \times 10^{-9})(130)}{5.64} = 4.50 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

因此,

$$d_{\text{diff}} \simeq 45 \mu\text{m}.$$

衍射直径大于几何成像直径。

A.3

将恒星视为黑体, 并忽略光学损耗。其光度为

$$P_{\text{star}} = 4\pi \left(\frac{d_o}{2} \right)^2 \sigma T_{\text{star}}^4.$$

因此, 主镜收集的功率为

$$P_{\text{collected}} = A_{\text{mirror}} \frac{P_{\text{star}}}{4\pi L^2} = A_{\text{mirror}} \sigma T_{\text{star}}^4 \frac{d_o^2}{4L^2} \simeq 2.43 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

为完成所要求的估算, 取几何成像直径和衍射直径中较大者作为受照光斑的直径:

$$d_{\text{spot}} \simeq d_{\text{diff}}, \quad A_{\text{spot}} \simeq \frac{\pi d_{\text{diff}}^2}{4}.$$

近似认为整个光斑受热均匀。由于只有上表面辐射散热, 平衡条件为

$$P_{\text{collected}} = \sigma A_{\text{spot}} T_{\text{image}}^4.$$

于是

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4}$$

并且

$$T_{\text{image}} \simeq 405 \text{ K} \approx 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

这一估算忽略了衍射强度分布的具体形状及其外侧各环中的能量。在几何光学极限下，代入 $d_{\text{spot}} = f d_o / L$ 则会得到

$$T_{\text{image,geom}} = T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi f^2} \right)^{1/4} \simeq 530 \text{ K}.$$

B.1

对暗电流定律取对数，得

$$\ln i_d = \ln i_0 - \frac{|\Delta E_g|}{6k_B} \frac{1}{T}.$$

由图可知，当 $1/T$ 从 0.12 K^{-1} 增加到 0.16 K^{-1} 时，暗电流从 10^2 减小到 10^{-2} s^{-1} 。因此

$$\frac{\Delta \ln i_d}{\Delta(1/T)} = \frac{\ln(10^{-4})}{0.04 \text{ K}^{-1}} = -100 \ln 10 \text{ K}.$$

由此可得

$$\frac{|\Delta E_g|}{k_B} = 600 \ln 10 \text{ K} \simeq 1.38 \times 10^3 \text{ K},$$

即

$$|\Delta E_g| \simeq 1.91 \times 10^{-20} \text{ J} \simeq 0.119 \text{ eV}.$$

利用特征热能估算 $E_\gamma \sim k_B T$,

$$T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}.$$

这里存在一个取决于所用约定的数值因子。阈值波长为

$$\lambda_g = \frac{hc}{|\Delta E_g|} \simeq 10.4 \mu\text{m}.$$

如果“刚好能够”是指热辐射光谱的波长峰值达到这一阈值，则由维恩位移定律及题目给出的恒星辐射峰值可得

$$T_{\text{source}} \simeq 3600 \text{ K} \frac{0.800 \mu\text{m}}{10.4 \mu\text{m}} \simeq 2.8 \times 10^2 \text{ K}.$$

两种计算都给出了相关的热学尺度；热辐射光谱并不存在严格的光子能量上限。

B.2

平均光子计数为 $p\tau$ ，平均暗计数为 $i_d\tau$ 。它们的泊松方差分别等于各自的均值。

假设各噪声源相互独立，则方差相加：

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau.$$

因此，

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p \tau}.$$

减去已知的平均暗计数可以消除其平均贡献，但其统计涨落仍然存在。

B.3

图中的直线近似对应于

$$i_d(T) = 10^{14-100 \text{ K}/T} \text{ s}^{-1}.$$

在 $T_p = 7.5 \text{ K}$ 时，

$$i_d = 10^{14-100/7.5} = 10^{2/3} \simeq 4.64 \text{ s}^{-1}.$$

用 $N = p \tau$ 表示期望光子计数。临界条件为

$$N = 10 \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + N}.$$

两边平方并求解所得二次方程，得到正根

$$N = 50 + \sqrt{2500 + 100(\sigma_r^2 + i_d \tau)}.$$

取 $\sigma_r = 14$ 和 $\tau = 10^4 \text{ s}$ ，得

$$N \simeq 2.21 \times 10^3.$$

于是

$$p_{\min} = \frac{N}{\tau} \simeq 0.221 \text{ s}^{-1} \approx 0.22 \text{ s}^{-1}.$$

B.4

每个处于阈值的光子具有能量 $|\Delta E_g|$ 。当探测效率为一旦收集过程无损耗时，主镜处所需的功率为 $p|\Delta E_g|$ 。因此

$$I = \frac{p|\Delta E_g|}{A_{\text{mirror}}}.$$

代入得

$$I = \frac{(0.221)(1.91 \times 10^{-20})}{25} \simeq 1.69 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

因此，

$$I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

C.1

令 $A = A_{\text{sheet}}$ ，并将薄膜 i 单面发出的功率定义为

$$q_i = \epsilon \sigma A T_i^4.$$

根据基尔霍夫定律，恒定的发射率也等于吸收率，因此薄膜 1 吸收的太阳辐射功率为

$$P_{\odot} = \epsilon I_0 A.$$

按照题目规定的从左向右的能量逸出模型，将薄膜 $i + 1$ 从其前方间隙接收的净功率定义为

$$F_i = \alpha(q_i - q_{i+1}).$$

同时通过该间隙逸出的功率为

$$L_i = \beta(q_i - q_{i+1}) = \frac{\beta}{\alpha} F_i.$$

因此，从较热一侧进入间隙的总功率为

$$F_i + L_i = rF_i, \quad r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}.$$

对每层中间薄膜，平衡条件为

$$F_{i-1} = rF_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

最后一层薄膜从其暴露于太空的一面辐射功率 q_5 ，因此

$$F_4 = q_5.$$

沿各间隙向前反推，得

$$F_3 = rq_5, \quad F_2 = r^2q_5, \quad F_1 = r^3q_5.$$

各层之间的温差满足

$$q_i - q_{i+1} = \frac{F_i}{\alpha}.$$

将全部四个差值相加，得

$$q_1 - q_5 = \frac{q_5}{\alpha}(1 + r + r^2 + r^3).$$

定义

$$K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha};$$

则 $q_1 = Kq_5$ 。

最后，第一层薄膜通过朝向太阳的表面散失功率 q_1 ，并向第一个间隙输出功率 rF_1 ：

$$\epsilon I_0 A = q_1 + rF_1 = (K + r^4)q_5.$$

利用 $q_5 = \epsilon \sigma A T_5^4$ ，可得

$$T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}$$

又因为 $T_1^4 = KT_5^4$ ，所以

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}.$$

显式出现的因子 ϵA 相互抵消；发射率仍会影响 α 和 β 。

C.2

薄膜的边长为

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ m}.$$

周边开口的面积为

$$A_{\text{gap}} = 4ah = 4(14.14)(0.25) = 14.14 \text{ m}^2.$$

由于薄膜的反射率很高，且反射为漫反射，可近似认为箱内辐射经过多次反射后已充分混合。于是，吸收概率与吸收面积成正比。

每层薄膜的有效吸收面积为 ϵA ，而开口相当于一个有效面积为 A_{gap} 的黑体吸收面。因此，总有效吸收面积为

$$2\epsilon A + A_{\text{gap}}.$$

最终被另一层薄膜吸收的比例近似为

$$\alpha \simeq \frac{\epsilon A}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

逸出的比例近似为

$$\beta \simeq \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

对于 $\epsilon A = 0.05(200) = 10 \text{ m}^2$,

$$\alpha \simeq \frac{10}{20 + 14.14} = 0.293,$$

$$\beta \simeq \frac{14.14}{20 + 14.14} = 0.414.$$

剩余部分的比例约为 α ，它返回发射薄膜并被其吸收；因此，在这一估算中， $2\alpha + \beta = 1$ 。

C.3

由前面的估算可得

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2.414,$$

$$r^4 \simeq 33.97, \quad K \simeq 80.60, \quad K + r^4 \simeq 114.57.$$

因此，

$$T_5 = \left[\frac{1360}{(5.670374419 \times 10^{-8})(114.57)} \right]^{1/4} \simeq 120.3 \text{ K},$$

并且

$$T_1 = K^{1/4} T_5 \simeq 360.4 \text{ K}.$$

于是

$$T_1 \simeq 360 \text{ K}, \quad T_5 \simeq 120 \text{ K}.$$

D.1

所需填写的内容如下：

物理量	比较关系
内能	$U_1 ? U_2$
温度	$T_1 ? T_2$
熵	$S_1 < S_2$
压强	$P_1 > P_2$
体积	$V_1 < V_2$

压强降驱动气体流经具有阻力的多孔塞，因此 $P_1 > P_2$ 。黏滞耗散使这一绝热过程不可逆，从而有 $S_2 > S_1$ 。

利用图示中管道两侧横截面积相等这一条件，稳态质量守恒给出

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2,$$

其中 w 为宏观流速。由于 $w_2 > w_1$ ，密度减小，一摩尔气体所占的体积增大。

对于实际气体，在节流过程中，内能和温度都没有普遍适用的变化方向。要比较它们的大小，需要更多有关状态的信息。

D.2

跟踪一摩尔气体通过多孔塞的过程。上游气体对这一摩尔气体做功 $P_1 V_1$ ，而它对下游气体做功 $P_2 V_2$ 。

过程中没有热量传递。忽略宏观动能的微小变化，热力学第一定律给出

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2.$$

整理得

$$\boxed{U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.}$$

因此，守恒量为焓，

$$\boxed{H = U + PV.}$$

更准确地说，稳态绝热流动中，单位质量的 $h + w^2/2$ 守恒。题目给出的近似条件允许忽略动能之差。

D.3

为清楚起见，用 u 和 v 分别表示图中标为 U 和 V 的比内能与比体积。

热力学恒等式为

$$du = T ds - P dv.$$

沿等熵线，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -P.$$

因此，等熵线在 (v, u) 处的切线方程为

$$u_{\text{tan}}(x) = u - P(x - v) = (u + Pv) - Px.$$

其在纵轴上的截距恰好是比焓：

$$\boxed{h = u + Pv.}$$

在图 9 上所需的作图步骤为：

1. 找到 $v_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ 的位置。
2. 通过插值确定 7.5 K 等温线上的对应点。
3. 在该状态点处，作通过该点的等熵线的切线。
4. 将该切线延伸到 $v = 0$ ，读出其纵轴截距。

该状态的比内能约为

$$u_2 \simeq 26 \text{ kJ/kg}.$$

切线斜率约为

$$-P_2 \simeq -140 \text{ kPa}.$$

因此,

$$h_2 = u_2 + P_2 v_2 \simeq 26 + (140)(0.100) = 40 \text{ kJ/kg}.$$

于是

$$h_1 = h_2 \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

对于摩尔质量约为 $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 的氦气, 这对应于

$$H_{\text{molar}} \simeq 160 \text{ J/mol}.$$

D.4

所有允许的入口状态都必须具有相同的比焓 $h_0 \simeq 40 \text{ kJ/kg}$ 。

图 10 上的作图步骤为:

1. 在纵轴上标出点 $(0, h_0)$ 。
2. 从该点向若干条实线表示的等熵线作切线。
3. 标出各切点。每个这样的点都满足 $u + Pv = h_0$, 因此这些点描出一条等焓线。
4. 找出该曲线所能达到的、温度最高的虚线等温线。在最高温度处, 等焓线与该等温线相切。

极限相切位置接近 11 K 等温线, 图上读数约为

$$v_1 \sim 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}, \quad u_1 \sim 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

由图可判断最高温度约为 10.5–11 K, 因此

$$T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}.$$

D.5

压强等于所选入口状态处等熵线切线斜率的绝对值。等价地,

$$P_1 = \frac{h_0 - u_1}{v_1}.$$

利用从图上读出的近似坐标, 得

$$P_1 \simeq \frac{(40 - 21) \times 10^3}{1.0 \times 10^{-2}} = 1.9 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

按图像所能支持的精度,

$$P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

解答已与官方解答核对。

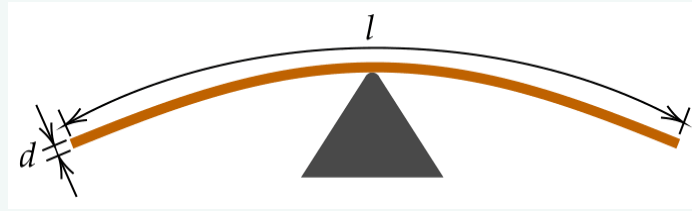
题目 3: 标度律

标度律描述了两个物理量在相当大的取值区间内随彼此变化的函数关系。这种函数关系可以是幂律, 但也有其他可能。很多时候, 虽然无法得到精确的表达式, 仍然可以推导出标度律。

部分 A. 一根意大利面条 (2.0 分)

A.1 2.0 分

一根直径为 d 的意大利面条由其中点支撑，保持水平平衡。当 $d = 1 \text{ mm}$ 时，面条的长度一旦达到 $l = 50 \text{ cm}$ ，就会在自身重力作用下折断。对于直径为 $d' = 1 \text{ cm}$ 的面条，在自身重力作用下折断之前的最大长度 l' 是多少？



部分 B. 沙堡 (2.0 分)

B.1 2.0 分

粗沙的平均沙粒体积是细沙的 10 倍。湿细沙和湿粗沙均具有最佳含水量（即假定用它们堆成的结构具有最大的强度），用它们分别堆成两个形状和大小完全相同的圆柱体。将每个圆柱体放在两块平行板之间挤压，以测试其强度。当施加于平行板的压力达到 $F_c = 10 \text{ N}$ 时，粗沙制成的圆柱体被压坏。压坏细沙制成的圆柱体所需的力 F_f 是多少？可以忽略重力的影响。

部分 C. 星际旅行 (2.0 分)

C.1 2.0 分

一艘进行星际探险的飞船以大小恒定的固有加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 飞行，即飞船在其瞬时静止的惯性参考系中的加速度为此值。乘客必须能够在其剩余的 50 年预期寿命内返回地球。飞船能够到达的距地球最远距离为 d 。若将加速度增大至 $g' = 15 \text{ m/s}^2$ ，飞船就可以到达更远的距离 d' 。比值 d'/d 是多少？

提示 1. 可以考虑使用相对论速度叠加公式，不过也有其他方法。

提示 2. 可能需要用到如下定义的双曲函数：

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

提示 3. 根据所用的方法，可能需要用到以下一个或多个积分：

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = a \tanh x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = a \sinh x + C, \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

其中 $a \sinh x$ 和 $a \tanh x$ 分别是相应双曲函数的反函数。

部分 D. 下沉的感觉 (2.0 分)

D.1 2.0 分

一个半径为 r_0 的实心木球漂浮在水中。若忽略摩擦效应，其小振动的频率应为 ω_0 ，但由于黏性摩擦，将其沿竖直方向移离平衡位置后，衰减振动的实际频率为 $0.99 \omega_0$ 。漂浮在水中的木球被移离平衡位置后能够发生小振动的最小半径 $r_{\min}$ 是多少？提示：作用于给定物体的黏性阻力与它相对于流体主体的速率成正比，也与它所处流体的黏度 η 成正比。黏度的单位为 $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1: $l' = l\sqrt{\frac{d'}{d}} = 0.50\sqrt{10}\text{ m} \approx 1.6\text{ m}.$
- B.1: $F_f = 10^{1/3}F_c = 10^{4/3}\text{ N} \approx 22\text{ N}.$
- C.1: 以乘客测得的 $T = 50$ 年为准,

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1} \approx 4.8 \times 10^2.$$

- D.1: $r_{\min} = (1 - 0.99^2)^{1/3}r_0 \approx 0.27r_0$. 这是临界半径; 发生振动要求 $r > r_{\min}$.

解答

A.1

假设两种直径的意大利面条具有相同的密度和断裂应力, 并采用细长梁近似。其横截面积满足标度关系 $A \propto d^2$, 因此其单位长度的重力为

$$q = \rho g_E A \propto d^2,$$

其中 g_E 为重力加速度。

考虑面条的一半。其重力为 $ql/2$, 作用点距中央支点 $l/4$ 。因此, 出现在中点处的最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8} \propto d^2 l^2.$$

梁发生弯曲时, 最大纵向应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}(d/2)}{I},$$

其中截面二次矩满足 $I \propto d^4$ 。因此,

$$\sigma_{\max} \propto \frac{l^2}{d}.$$

材料在相同的应力下断裂, 因此

$$\frac{l'^2}{d'} = \frac{l^2}{d}, \quad l' = l\sqrt{\frac{d'}{d}}.$$

由于 $d'/d = 10$,

$$l' = 0.50\sqrt{10}\text{ m} = 1.581\dots\text{ m} \approx 1.6\text{ m}.$$

B.1

湿沙依靠沙粒之间液桥产生的毛细力凝聚在一起。设 a 为沙粒的特征尺寸, γ 为水的表面张力系数。假设沙粒形状、堆积方式和润湿性质相似。在最佳含水量下, 液桥的几何尺寸随 a 成比例变化。

一个接触点处的毛细力满足标度关系

$$f_{\text{cap}} \propto \gamma a.$$

这一关系既可以由作用在长度与 a 成正比的接触线上的表面张力得到, 也可以由量级为 γ/a 的毛细压强作用在量级为 a^2 的面积上得到。

穿过固定宏观面积 S 传递力的接触点数量与 S/a^2 成正比。因此，特征黏聚应力满足标度关系

$$\sigma_{\text{coh}} \propto \frac{f_{\text{cap}}}{a^2} \propto \frac{\gamma}{a}.$$

对于形状和大小相同的圆柱体，压缩破坏载荷具有相同的标度关系：

$$F_{\text{break}} \propto \frac{1}{a}.$$

由于沙粒体积与 a^3 成正比，

$$\frac{a_c}{a_f} = \left(\frac{V_c}{V_f} \right)^{1/3} = 10^{1/3}.$$

因此，

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{a_c}{a_f} = 10^{1/3},$$

从而得到

$$F_f = 10 \cdot 10^{1/3} \text{ N} = 21.54 \dots \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$$

C.1

将地球视为惯性参考系，忽略引力场，并考虑一段在起点和终点均相对于地球静止的直线旅程。可用的 50 年是乘客的**固有时间**，记为 T 。将加速度方向的反转理想化为瞬间完成。

首先推导恒定固有加速度下的位移。定义快度

$$\theta = a \tanh(v/c).$$

在固有时间间隔 $d\tau$ 内，瞬时静止参考系中的速度变化为 $g d\tau$ 。由相对论速度叠加公式，保留至一阶可得

$$dv = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) d\tau,$$

因此

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{g}{c}.$$

从静止出发，

$$\theta = \frac{g\tau}{c}, \quad v = c \tanh \theta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta.$$

由此可得

$$\frac{dx}{d\tau} = v \frac{dt}{d\tau} = c \sinh \left(\frac{g\tau}{c} \right).$$

积分得

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh \left(\frac{g\tau}{c} \right) - 1 \right].$$

为了在给定固有时间内使去程距离最大，同时保证去程开始和结束时均处于静止状态，飞船在前一半时间内向外加速，在后一半时间内减速。事实上，对于固有时长为 L 的去程，其快度不能超过

$$\theta(\tau) \leq \frac{g}{c} \min(\tau, L - \tau).$$

先加速后减速的运动轨迹达到了这一上界；由于 $dx/d\tau = c \sinh \theta$ 随 θ 增大而增大，这一轨迹使位移最大。

返回相同距离所需的最短固有时间与去程相同。因此，最优往返旅程由四个等长时间段组成：

1. 加速远离地球。
2. 减速，在最远处停下。
3. 向地球加速。
4. 减速，在地球处停下。

每个时间段持续 $T/4 = 12.5$ 年。去程的两个时间段经过的距离相同，因此

$$d(g) = \frac{2c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right].$$

于是

$$\boxed{\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1}.}$$

使用 $c \simeq 3.00 \times 10^8$ m/s 和 1 年 $\simeq 3.156 \times 10^7$ s,

$$\frac{gT}{4c} \simeq 13.15, \quad \frac{g'T}{4c} \simeq 19.72.$$

两个自变量都很大，因此 $\cosh x - 1 \simeq e^x/2$ 。于是

$$\frac{d'}{d} \simeq \frac{g}{g'} \exp\left(\frac{(g' - g)T}{4c}\right) \simeq \frac{2}{3} e^{6.575}.$$

结果为

$$\boxed{\frac{d'}{d} \approx 4.8 \times 10^2.}$$

D.1

假设所有球均由相同的木材制成，其平衡浸没状态由浮力决定，并且题述的线性黏性阻力模型适用。

对于向下的小位移 z ，新增的浸没体积为 $A_w z$ ，其中 A_w 是球体在水面处的横截面积。新增的浮力提供回复力

$$F_{\text{rest}} = -kz, \quad k = \rho_w g_E A_w.$$

平衡时浸没体积所占的比例由木材与水的密度比决定。因此，各球的漂浮构型在几何上相似，从而有

$$A_w \propto r^2, \quad k \propto r^2, \quad m \propto r^3.$$

因此，无阻尼角频率满足

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \propto r^{-1}.$$

将黏性力写为

$$F_{\text{visc}} = -b\dot{z}.$$

由于它与黏度和速度成正比，对几何相似的物体进行量纲分析可得

$$b = C\eta r \propto r,$$

其中 C 为无量纲几何因子。

运动方程为

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0.$$

定义阻尼衰减率

$$\beta = \frac{b}{2m} \propto r^{-2}.$$

在欠阻尼情形下，振动频率为

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}.$$

在半径为 r_0 时，由给定的频率可得

$$(0.99\omega_0)^2 = \omega_0^2 - \beta_0^2,$$

因此

$$\frac{\beta_0^2}{\omega_0^2} = 1 - 0.99^2 = 0.0199.$$

结合关于半径的标度关系，

$$\frac{\beta^2(r)}{\Omega^2(r)} = 0.0199 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3.$$

当此比值小于一时，才会发生振动。因此，临界半径满足

$$0.0199 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} \right)^3 = 1,$$

由此得到

$$r_{\min} = (0.0199)^{1/3} r_0 = 0.27099 \dots r_0 \approx 0.27 r_0.$$

取等号时，运动处于临界阻尼状态，不发生振动。因此， $r_{\min}$ 是极限意义下的最小半径，只有当 $r > r_{\min}$ 时才会发生振动。

解答已与官方解答核对。