

IPhO 2022

Teorik sorular ve çözümler · İsviçre (çevrim içi düzenlendi) · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/iph/2022/

Soru 1: Kalıcı mıknatıslar

Güçlü kalıcı mıknatıslar, çok geniş bir histerezis döngüsüne sahip olan NdFeB alaşımından yapılır; bu nedenle mıknatıslanma J , geniş bir uygulama aralığında sabit kabul edilebilir. Aşağıda $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$ olduğunu varsayacağız; burada $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ olup tüm kalıcı mıknatısların mıknatıslanması homojendir. *Mıknatıslanma, maddenin birim hacim başına manyetik dipol momenti olarak tanımlanır.*

İpucu 1. Aşağıdaki eşitlik yararlı olabilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

İpucu 2. Küresel bir mıknatısın oluşturduğu manyetik alan, bir noktasal dipolün alanıyla aynıdır. Başka şekillerdeki mıknatısların oluşturduğu manyetik alanlar, ancak çaplarından çok daha büyük uzaklıklarda bir noktasal dipolün alanına eşdeğer hâle gelir.

İpucu 3. Elektriksel ve manyetik noktasal dipollerin elektrik ve manyetik alanları, koordinatların ve ilgili dipol momentinin fonksiyonları olarak birbirine benzer; yani biri, diğeri sabit bir çarpınla çarpılarak elde edilebilir.

İpucu 4. Bir sınır koşulu nedeniyle indüklenen alanın yerine her zaman, verilen sınırların dışında yer alan uygun bir alan kaynakları düzeninin oluşturduğu alan konulabilir.

Kısım A. Mıknatısların etkileşimi (4.5 puan)

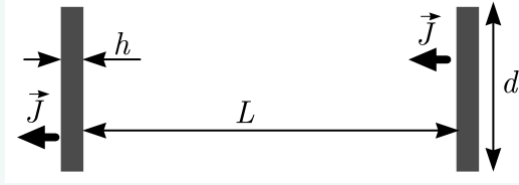
Bir mıknatısa olan uzaklık, mıknatısın boyutundan çok daha büyük olduğunda, oluşturduğu manyetik alan yaklaşık olarak dipol momenti $\vec{m}$ 'nin manyetik alanıyla ifade edilebilir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Burada $r = |\vec{r}|$ olup dipol momentini, dipolden gözlem noktasına çizilen $\vec{r}$ konum vektörüne paralel ve dik bileşenlerine ayırdık: $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$.

A.1 — 0.6 puan

Çapları $d = 20 \text{ mm}$ ve kalınlıkları $h = 2 \text{ mm}$ olan, eksenleri doğrultusunda mıknatıslanmış iki silindirik mıknatıs eş eksenli olarak yerleştirilmiştir. Mıknatısların merkezleri arasındaki uzaklık $L = 20 \text{ cm}$ ise aralarındaki etkileşim kuvvetinin büyüklüğünü bulunuz. $L \gg d, h$ olduğunu varsayabilirsiniz.



A.2 — 0.4 puan

$\frac{h}{2}$ 'den çok daha büyük uzaklıklarda, A.1 sorusundaki mıknatısın oluşturduğu alan, dairesel bir I akımının oluşturduğu alanla aynıdır. I 'yı bulunuz.

A.3 — 1.0 puan

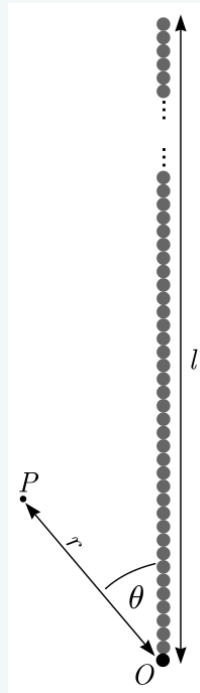
A.1 sorusundaki düzenekte uzaklık bunun yerine $L = 5 \text{ mm}$ olduğunda mıknatıslar arasındaki etkileşim kuvvetini bulunuz. $d \gg L \gg h$ olduğunu varsayabilirsiniz.

A.4 — 1.0 puan

Çapları $\delta = 5 \text{ mm}$ olan özdeş küresel mıknatıslar, manyetik çekimle birbirine bağlanarak bir zincir oluşturur. En üstteki mıknatıstan aşağıya doğru asıldığında kendi ağırlığı altında kopmayan böyle bir zincirin en büyük l uzunluğu nedir? NdFeB mıknatısların yoğunluğu $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ 'tür.

A.5 — 1.5 puan

A.4 kısmındaki zinciri ele alınız. Zincirin uç noktalarından biri olan O 'ya uzaklığı r olan ve OP doğrusu ile zincir arasındaki açının θ olduğu bir P noktasında (aşağıdaki şekle bakınız) manyetik B alanının büyüklüğü için bir ifade elde ediniz. $l \gg r$ ve $r \sin \theta \gg \delta$ olduğunu varsayınız.



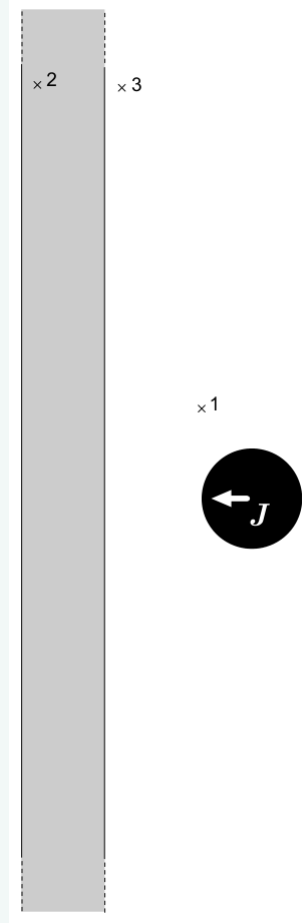
Kısım B. Ferromıknatıslarla etkileşim (3.5 puan)

Şimdi kalıcı mıknatıslara ek olarak, transformator çekirdeklerinde kullanılanlara benzer bir ferromanyetik malzemeden yapılmış levhalarımızın da olduğunu varsayıyoruz. Ele aldığımız durumlarda bu malzemenin sabit fakat çok büyük bir bağıl manyetik geçirgenliğe, $\mu_r \sim 10^5$, sahip olduğu kabul edilebilir.

İpucu 5. Büyük geçirgenlik, bu malzemeden yapılmış bir cismin dış yüzeyine yakın manyetik alan çizgilerinin yüzeye neredeyse dik olması anlamına gelir. Bu, bir iletkenin dış yüzeyine yakın elektrik alan çizgilerinin davranışına benzer.

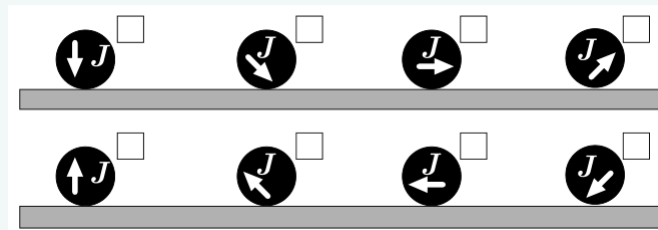
B.1 — 1.0 puan

A.4 kısmındaki küresel mıknatıslardan biri, kalın ve sonsuz bir ferromanyetik levhadan $s = \delta$ uzaklıktadır (cevap kâğıdına bakınız). Kürenin mıknatıslanması levhaya dik doğrultudadır. Cevap kâğıdında gösterilen kesitte alan çizgilerini kabaca çiziniz. Bu şekilde üç nokta (1, 2 ve 3 olarak belirtilmiş) işaretlenmiştir; bu noktaların her birinden geçen alan çizgilerini tüm uzunlukları boyunca, yani şekle sığdıkları kadarıyla göstermeniz gerekir.



B.2 — 1.0 puan

Şimdi küresel mıknatıs levhayla doğrudan temas ettiriliyor. Kararlı dengede küresel mıknatısın mıknatıslanma vektörü hangi yöne yönelir ve levha ile mıknatıs arasındaki normal kuvvet nedir? Cevap kâğıdındaki ilgili kutucuğa bir onay işareti koyarak doğru yönü veya yönleri belirtiniz. Yanlış işaretlemeler puanınızı düşürecektir.



B.3 — 1.5 puan

Şimdi A.1 kısmındaki mıknatıslardan biri, çapları $D = 2d$ olan iki kalın dairesel ferromanyetik levhanın arasına, mıknatısın düz yüzleri levhalara bastırılmış ve üç disk de eş eksenli olacak şekilde yerleştiriliyor. Her bir levhaya etki eden manyetik F kuvvetini bulunuz. *İpucu: Hem ferromanyetik levhaların dışında hem de aralarındaki boşluğun dışında manyetik alanı ihmal edebilirsiniz.*

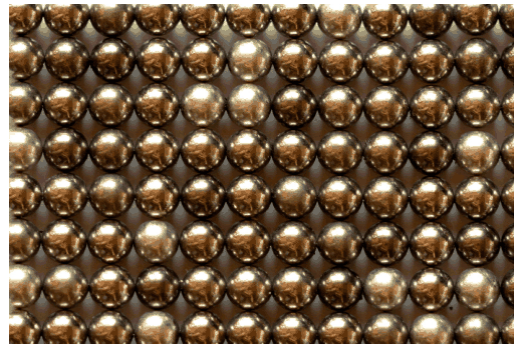
Kısım C. (Anti)ferromanyetik düzen (2 puan)

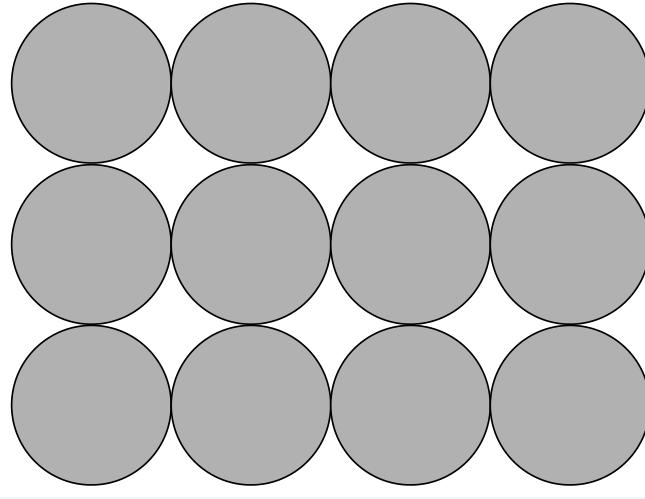
Malzemelerin manyetik özellikleri, elektronların ve atom çekirdeklerinin manyetik dipol momentlerinden kaynaklanır. Dipol momentleri birbirlerine paralel yönelirse oluşturdıkları alan güçlenir; bunlar ferromanyetik malzemelerdir. Öte yandan, her dipol momentinin yakınında ona antiparalel başka bir dipol momenti varsa alanlar birbirini yok eder; bunlar antiferromanyetik malzemelerdir.

Aşağıda, A.4 kısmındaki küresel mıknatıslardan çok sayıda alıp iki boyutlu bir örgünün düğüm noktalarına yerleştirdiğimiz bir düzeni ele alıyoruz; **kararlı denge düzenlerinin gerçek fotoğrafları için aşağıya bakınız**. Tüm mıknatıslanma vektörlerinin şeklin düzleminde olduğunu varsayınız. Hesaplamalarınızda yalnızca en yakın komşular arasındaki etkileşimleri dikkate alınız (C.1'in şeklinde her mıknatısın dört, C.2'nin şeklinde ise altı en yakın komşusu vardır).

C.1 — 0.8 puan

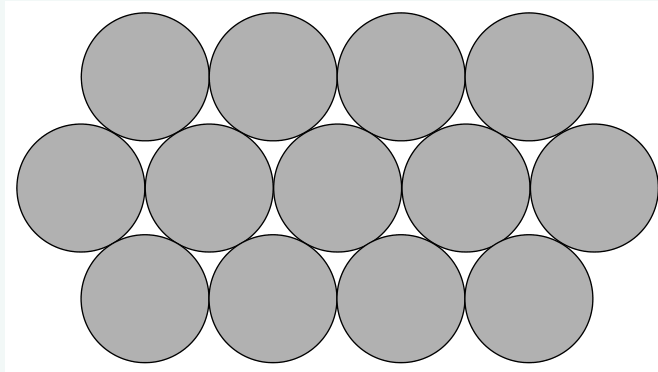
Aşağıdaki şekilde mıknatısların mıknatıslanma yönlerini gösteriniz. Önerdiğiniz düzenin tek olasılık olduğunu kanıtlamanız gerekmiyor. Ancak önerdiğiniz düzenin gerçekten kararlı olduğunu gerekçelendirmeniz gerekiyor. Diğer mıknatısların sabit tutulduğunu varsayarak, örgünün ortalarında bir yerde bulunan bir mıknatısı bu örgüden çekip çıkarmak için gereken enerjiyi bulunuz. Bu düzen, ferromanyetik malzemelerin düzenine mi yoksa antiferromanyetik malzemelerin düzenine mi karşılık gelir?





C.2 — 1.2 puan

Aşağıdaki şekilde gösterilen düzen için C.1 sorusundaki soruları cevaplayınız.



Fiziksel Sabitler

Aşağıda, soru metninde verilen niceliklere ek olarak çözümünüzde kullanabileceğiniz fiziksel sabitler listelenmiştir.

Fiziksel sabit	Gösterim	Sayısal değer
Işığın boşluktaki hızı	c	299 792 458 m/s
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ Vs/Am}]$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektrik sabiti)	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ As/Vm}]$
Temel yük	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $[1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$

Fiziksel sabit	Gösterim	Sayısal değer
Elektronun durgun kütlesi	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protonun durgun kütlesi	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Nötronun durgun kütlesi	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atomik kütle birimi	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Kütleçekim sabiti	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Avogadro sabiti	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molar gaz sabiti	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
Boltzmann sabiti	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan–Boltzmann sabiti	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Planck sabiti	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Aşağıdaki tüm kuvvet değerleri büyüklük olarak verilmiştir.

- **A.1:**

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4} \simeq 2.1 \times 10^{-4} \text{ N}$$

Gösterilen yönler için kuvvet çekicidir.

- **A.2:** Çapı d olan dairesel bir akım:

$$I = Jh \simeq 2.4 \times 10^3 \text{ A}.$$

- **A.3:**

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L} \simeq 14 \text{ N}$$

Kuvvet çekicidir.

- **A.4:** Uzun zincir yaklaşımında,

$$l_{\text{max}} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g} \simeq 6.6 \text{ m}.$$

- **A.5:**

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24r^2}$$

Belirtilen yaklaşımlar çerçevesinde bu büyüklük θ 'dan bağımsızdır.

- **B.1:** Dış bölgedeki alan, gerçek dipol ile aynı yöne yönelmiş, eşit büyüklükte bir görüntü dipolünün birlikte oluşturduğu alandır. Alan çizgileri levhayla dik olarak kesişir. **1**'den geçen çizgi havada kısa bir dönüş halkası oluşturur; **2** ve **3**'ten geçen çizgiler, levhanın içinden akı taşıyan daha büyük halkalara aittir. Bunların ayrıntılı yönleri Çözüm bölümünde açıklanmıştır.
- **B.2: Her sıradaki ilk çizimi** işaretleyiniz: mıknatıslanma levhaya diktir ve levhaya doğru ya da levhadan dışarı doğru yönelmiştir.

$$F = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \simeq 5.9 \text{ N}$$

Manyetik kuvvet çekicidir.

- **B.3:** Her levha, mıknatısa ve diğer levhaya doğru şu büyüklükte bir kuvvetle çekilir:

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ N}.$$

- **C.1:** Yatay bir sıradaki tüm momentler aynı yöne yönelir; ardışık sıralar zıt yönere yönelir. Bu, **antiferromanyetik düzendir**.

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

- **C.2:** Tüm momentler aynı yatay yöne yönelir. Bu, aşağıda açıklanan tek mıknatısın dönmesine karşı kararlılık sınavasını geçen **ferromanyetik düzendir**.

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Bu yalnızca tek bir mıknatısın dönmesine karşı kararlılığı gösterir; yalnızca en yakın komşu etkileşimlerini içeren modelde, çok sayıda mıknatısın bazı kolektif dönmeleri enerjiyi düşürür.

Çözüm

Mıknatıslanma ve ilgili iki dipol momenti şöyledir:

$$J = \frac{1.5}{\mu_0} = 1.19366 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$m_c = J \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.750 \text{ A m}^2, \quad m_s = J \frac{\pi \delta^3}{6} = 0.078125 \text{ A m}^2.$$

İki kalıcı dipolün etkileşim enerjisi

$$U_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})].$$

Eşdeğer olarak, $U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$ yazılabilir. Kuvvetler, kalıcı momentler sabit tutularak bu enerjinin konuma göre türevi alınarak bulunur.

A.1

$L \gg d, h$ olduğundan, her iki silindirin yerine noktasal dipoller konulabilir. Momentleri birbirine ve ortak eksenlerine paraleldir; dolayısıyla

$$U(L) = -\frac{\mu_0 m_c^2}{2\pi L^3}.$$

Kuvvet, L 'yi azaltma eğilimindedir ve büyüklüğü

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{3\mu_0 m_c^2}{2\pi L^4}.$$

$m_c = J\pi d^2 h/4$ yerine konulduğunda,

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4}.$$

$L = 0.20$ m için,

$$F = 2.109375 \times 10^{-4} \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^{-4} \text{ N}}.$$

A.2

Düzgün mıknatıslanmış bir cisim, bağlı akımlarla temsil edilebilir. Bağlı yüzey akımı yoğunluğu

$$\vec{K}_b = \vec{J} \times \hat{n}.$$

Eksen boyuncası mıknatıslanmış bir silindirde bu akım, eğri yan yüzeyin çevresinde akar ve büyüklüğü $K_b = J$ 'dir. Silindirin kalınlığı boyunca integral alınması, eşdeğer bir dairesel akım verir:

$$\boxed{I = Jh}.$$

Kalınlığa kıyasla büyük uzaklıklarda, ince silindirik akım tabakasının yerine çapı d olan tek bir halka konulabilir.

Aynı sonuç, manyetik momentler eşitlenerek de elde edilir:

$$I \frac{\pi d^2}{4} = J \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Sayısal olarak,

$$I = (1.19366 \times 10^6)(2.0 \times 10^{-3}) = 2.3873 \times 10^3 \text{ A} \simeq \boxed{2.4 \text{ kA}}.$$

Akımın dolanım yönü, belirtilen mıknatıslanma yönünü oluşturacak şekilde sağ el kuralıyla seçilir.

A.3

$L \gg h$ koşulu, A.2'deki akım halkası temsiline kullanılabilecek bir şekilde $L \ll d$ olduğundan, iki halkanın birbirine yakın karşılıklı parçaları, aralarındaki uzaklık L olan paralel düz teller olarak ele alınabilir.

Paralel akımlar arasındaki birim uzunluk başına çekim kuvveti

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L}.$$

En düşük mertebeli yaklaşımda bu kuvvet ortak eksen boyunca etki eder. Çevre uzunluğu πd ile çarpıldığında

$$F \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L}.$$

Böylece

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L}.$$

$L = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ için,

$$F \simeq 14.3239 \text{ N} \simeq \boxed{14 \text{ N}}.$$

Bu, belirtilen $d \gg L \gg h$ büyüklük sıralaması altında en düşük mertebeli sonuçtur.

A.4

Küreler, momentleri zincir boyunca ve hepsi aynı yöne bakacak şekilde hizalanır. Her kürenin kütlesi

$$M = \rho \frac{\pi \delta^3}{6}.$$

Merkezleri arasındaki uzaklık $n\delta$ olan iki küre, birbirini şu kuvvetle çeker:

$$F_n = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(n\delta)^4} = \frac{F_1}{n^4},$$

burada

$$F_1 = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}.$$

N küreden oluşan bir zincirde, tutulan en üstteki küre diğer $N - 1$ küreyi taşımalıdır. Tüm küreler birbirine temas hâlindeyken bunlara uygulayabileceği en büyük yukarı yönlü manyetik kuvvet

$$F_{\text{top}} = F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Dolayısıyla,

$$(N - 1)Mg \leq F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Sınırlayıcı olan, en üstteki bağlantıdır: daha aşağıdaki bir kesit daha az ağırlık taşıırken, bu kesitin iki tarafı arasındaki manyetik çekim, en üstteki bağlantının iki tarafı arasında bulunan her uzaklık için en az bir çift içerir.

Uzun bir zincir için,

$$F_{\text{top}} \simeq F_1 \frac{\pi^4}{90}.$$

Ayrıca, $1/N$ cinsinden en düşük mertebede, asılı ağırlık

$$Mg \frac{l}{\delta} = \frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l.$$

Bu ağırlık, sınır manyetik kuvvetine eşitlendiğinde,

$$\frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l_{\text{max}} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \frac{\pi^4}{90}.$$

Böylece,

$$l_{\text{max}} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g}.$$

Küre çapı sadeleşir: hem manyetik tutma kuvveti hem de zincirin birim uzunluk başına kütlesi δ^2 ile orantılıdır.

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ alınırsa,

$$F_1 = 5.8594 \text{ N}, \quad F_{\text{top}} \simeq 6.3417 \text{ N},$$

$$l_{\text{max}} \simeq 6.5848 \text{ m} \simeq \boxed{6.6 \text{ m}}.$$

Tutulan en üstteki kürenin de sayılması ve küre sayısının tam sayıya yuvarlanması, uzunluğu yalnızca δ mertebesinde değiştirir.

A.5

$r \sin \theta \gg \delta$ olduğundan, kesikli zincirin yerine sürekli bir dipol çizgisi konulabilir. Birim uzunluk başına dipol momenti

$$\lambda_m = \frac{m_s}{\delta} = \frac{\pi J \delta^2}{6}.$$

O 'yu başlangıç noktasına yerleştirelim ve zincir $+z$ doğrultusunda, 0 'dan l 'ye uzansın. Tüm momentleri $+z$ yönünde seçelim. Dış bölgede manyetik skaler potansiyeli şöyle tanımlayalım:

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi.$$

Çizginin potansiyeli

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \int_0^l \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3} dz'.$$

Şu eşitlik geçerli olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} = \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3},$$

integral alınmasıyla

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - l\hat{z}|} - \frac{1}{r} \right).$$

Dolayısıyla dış bölgedeki alan, uç noktalarda bulunan zıt işaretli iki etkin manyetik kutbun alanına eşdeğerdir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi} \left[\frac{\vec{r} - l\hat{z}}{|\vec{r} - l\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

$l \gg r$ için uzak uç noktanın katkısı ihmal edilebilir ve geriye

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Böylece

$$\boxed{B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}}.$$

Alan, yakındaki uç noktaya göre radyaldır; bu nedenle büyüklüğü θ 'dan bağımsızdır. Tüm momentlerin yönü ters çevrilirse alanın yönü de tersine döner.

B.1

Levha, yüzeyi $x = 0$ 'da olacak şekilde $x < 0$ bölgesini kaplasın ve kürenin merkezi $x = a > 0$ 'da bulunsun. Cevap kâğıdındaki çizimde,

$$\vec{m} = -m_s \hat{x}.$$

Geçirgenliği yüksek bir levhanın dışındaki teğetsel alan, neredeyse sıfır olmalıdır. Bu sınır koşulu, $x = -a$ 'ya **aynı normal yönde** bir görüntü dipolü yerleştirilerek sağlanır:

$$\vec{m}_{\text{image}} \simeq -m_s \hat{x}.$$

Daha kesin olarak, büyüklüğü şu çarpanla çarpılır:

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \simeq 1.$$

Yüzeyde iki dipol alanının teğetsel bileşenleri birbirini yok eder. y , kürenin merkezinden yukarıya doğru yüksekliği gösteriyorsa geriye kalan normal bileşen

$$B_x(0, y) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{y^2 - 2a^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Dolayısıyla akı, kürenin ekseninin yakınında, $|y| < \sqrt{2}a$ olan bölgede levhaya girer ve daha uzakta, $|y| > \sqrt{2}a$ olan bölgede levhadan çıkar.

İstenen çizim şöyle tarif edilebilir:

- Kürenin **sol tarafı kuzey kutbu tarafıdır**, sağ tarafı ise güney kutbu tarafıdır. Dışarıdaki oklar, eğri dönüş yolları boyunca sol taraftan sağ tarafa yönelir. Kürenin içinde oklar yaklaşık olarak sağdan sola yönelir.
- **1 noktasından geçen çizgi:** levhanın dışında, bütünüyle havada kalan kısa bir üst dönüş halkası çiziniz. Çizgi, kürenin sol üst yüzeyinden çıkar, 1 noktasından geçerek yükselir, sağa doğru kıvrılır ve kürenin sağ üst yüzeyine girer.
- **2 noktasından geçen çizgi:** levhanın içinden yukarıya doğru akı taşıyan daha büyük bir halka çiziniz. Çizgi, 2 noktasında ağırlıklı olarak yukarıya ve bir miktar yüzeye doğru yönelir. Sağa doğru bükülür ve kürenin güney kutbu tarafına geri kıvrılmadan önce, 3 noktasının üstünde yüzeye dik olarak levhadan çıkar. Ters yönde izlendiğinde, levhanın içindeki parçası aşağıya iner ve miknatısa daha yakın bir yerden levhaya giren akıya bağlanır.
- **3 noktasından geçen çizgi:** levhadan yaklaşık yatay olarak sağa doğru çıkan bir çizgi çiziniz. Bu çizgi daha sonra aşağıya ve sağa doğru kıvrılarak kürenin güney kutbu tarafına yönelir. Çizgiyi levhanın içinde geriye doğru, kürenin kuzey kutbu tarafından gelen akıyla beslenen daha alçak bir giriş noktasına dönen eğri bir yol olarak sürdürünüz.
- Alt yarıdaki desen, üst yarıdaki desenin kürenin merkezinden geçen yatay doğruya göre yansımasıdır. Her çizgi, kapalı bir manyetik alan çizgisi oluşturacak şekilde malzemenin ve miknatısın içinden devam eder.

İdeal yarı uzay sınırında, levhanın içindeki alan, gerçek dipolün tek başına orada oluşturacağı alanın yaklaşık iki katıdır. Bu, 2 noktasından geçen eğri devam parçalarını ve bunların yönlerini belirler.

B.2

$\hat{n}$, levhadan dışarıya doğru normal yönde olsun ve kürenin momentini şöyle bileşenlerine ayıralım:

$$\vec{m} = m_n \hat{n} + \vec{m}_t.$$

Görüntüsünün momenti

$$\vec{m}' = m_n \hat{n} - \vec{m}_t.$$

Kürenin merkezi levhadan a uzaklıktaysa görüntüsü kendisinden $2a$ uzaklıktadır. Görüntünün gerçek dipolün bulunduğu yerdeki alanı

$$\vec{B}_{\text{image}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2a)^3} (2m_n \hat{n} + \vec{m}_t).$$

Levhanın mıknatıslanması indüklendiğinden etkileşim enerjisi

$$U = -\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{image}}.$$

$\vec{m}$ ile levha normali arasındaki açıyı θ ile gösterirsek,

$$U(a, \theta) = -\frac{\mu_0 m_s^2}{8\pi(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Bu ifade şu açılarda en küçük değerini alır:

$$\theta = 0 \quad \text{veya} \quad \theta = \pi.$$

Dolayısıyla levhaya dik her iki yön de karardır: levhaya doğru ve levhadan dışarı doğru. Bunlar, üst ve alt sıralardaki ilk çizimlerdir.

Her iki kararlı yönelimde de çekim kuvvetinin büyüklüğü

$$F = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(2a)^4}.$$

Temas durumunda $a = \delta/2$ olduğundan,

$$F = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \boxed{\frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}}.$$

Sayısal olarak,

$$F = 5.8594 \text{ N} \simeq \boxed{5.9 \text{ N}}.$$

B.3

Mıknatısın yüzey alanı

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

ve her bir levhanın alanı

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = 4A$$

olsun.

Levhaların geçirgenliği çok büyük olduğundan içlerindeki H alanı ihmal edilebilir. Bu nedenle her levha, manyetik skaler potansiyel için yaklaşık olarak bir eşpotansiyel yüzeydir. Kenar etkileri ihmal edildiğinde, eksenel H alanı mıknatısın içinde ve onu çevreleyen halka biçimli hava aralığında aynı değere sahiptir.

Mıknatısın içindeki işaretli eksenel alan B_m , halka biçimli aralıktaki ise B_a olsun. Mıknatıslanma sabit olduğundan,

$$B_m = \mu_0(H + J), \quad B_a = \mu_0 H.$$

Böylece

$$B_m - B_a = \mu_0 J.$$

Dışarıdaki akı ihmal edildiğinden, mıknatıstan geçen tüm akı halka biçimli aralıktan geri dönmelidir. Dolayısıyla,

$$AB_m + (A_p - A)B_a = 0.$$

Çözüldüğünde,

$$B_m = \mu_0 J \left(1 - \frac{A}{A_p}\right), \quad B_a = -\mu_0 J \frac{A}{A_p}.$$

$A_p = 4A$ için,

$$B_m = \frac{3}{4}\mu_0 J = 1.125 \text{ T}, \quad B_a = -\frac{1}{4}\mu_0 J = -0.375 \text{ T}.$$

Geçirgenliği yüksek bir yüzeye dik manyetik alan, çekici bir basınç oluşturur:

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Mıknatıs ile levhanın temasında bu basınç, sonsuz küçük bir vakum aralığı düşünülerek hesaplanabilir: B 'nin normal bileşeni bu aralık boyunca sürekli. Hem merkezdeki bölge hem de dönüş akısının geçtiği halka biçimli bölge, alan yönleri zıt olmasına rağmen levhayı içeriye doğru çeker.

Böylece

$$F = \frac{AB_m^2 + (A_p - A)B_a^2}{2\mu_0}.$$

Yerine koyarak

$$F = \frac{\mu_0 J^2 A}{2} \left(1 - \frac{A}{A_p}\right).$$

$A_p = 4A$ için,

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32}.$$

Sayısal olarak, her bir levha üzerindeki kuvvet

$$F = 210.9375 \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ N}}$$

olur.

C.1

En yakın komşular arasındaki dipol etkileşiminin enerji ölçeğini şöyle tanımlayalım:

$$\varepsilon_d = \frac{\mu_0 m_s^2}{4\pi\delta^3} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{144} = 4.8828125 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

Momentleri yatay sıralar boyunca seçelim ve ardışık sıralarda yönlerini ters çevirelim. Cevap kâğıdında üst sıra sağa, orta sıra sola, alt sıra ise sağa yönelebilir:

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{array}$$

Ortada bulunan ve sağa yönelmiş bir mıknatısı ele alalım.

Yatay doğrultudaki iki komşusu da sağa yönelmiştir ve dipol eksenini üzerinde bulunur. Her biri şu etkileşim enerjisi katkısını verir:

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Düşey doğrultudaki iki komşusu sola yönelmiştir ve momentine dik doğrultuda bulunur. Her birinin katkısı

$$U_{\text{vertical}} = -\varepsilon_d.$$

Dolayısıyla ortadaki mıknatısının komşularıyla toplam etkileşim enerjisi

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 2(-\varepsilon_d) = -6\varepsilon_d.$$

Dört komşunun tamamı, ortadaki momente paralel alanlar oluşturur ve toplam alanın büyüklüğü

$$B_{\text{nn}} = \frac{6\varepsilon_d}{m_s}.$$

Komşuları sabit tutulurken bu mıknatısının α açısı kadar döndürülmesi, enerjiyi şu kadar artırır:

$$\Delta U = 6\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Dolayısıyla mıknatısa geri çağırıcı bir tork etki eder.

Kare örgüdeki konumlar sabit tutulduğunda bu desen, en yakın komşular arasındaki toplam yönelim enerjisini de en aza indirir. Bunu görmek için birim momenti (u_i, v_i) olarak yazalım. O hâlde

$$\frac{U}{\varepsilon_d} = \sum_{\langle ij \rangle_x} (-2u_i u_j + v_i v_j) + \sum_{\langle ij \rangle_y} (u_i u_j - 2v_i v_j) \geq -3 \sum_i (u_i^2 + v_i^2) = -3N.$$

Bu eşitsizlik $2|ab| \leq a^2 + b^2$ bağıntısından elde edilir ve önerilen şerit deseni örgünün iç bölgesinde bu sınıra ulaşır.

Ortadaki mıknatısının sonsuza götürülmesi, dört bağıni ortadan kaldırır; dolayısıyla gereken iş

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 6\varepsilon_d.$$

$1/2$ çarpanı yoktur: çıkarılan mıknatısı içeren her bağ bir kez sayılır. Böylece,

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Ardışık sıraların mıknatıslanmaları zıt olduğundan **antiferromanyetik düzen** oluşur.

C.2

Cevap kâğıdındaki şemada bulunan tüm küreler dâhil olmak üzere, tüm momentleri yatay ve sağa yönelmiş olarak seçelim.

Ortadaki bir kürenin yatay doğrultuda iki komşusu ve yer değiştirme vektörleri momentlerle 60° veya 120° açı yapan dört çapraz komşusu vardır.

Yatay doğrultudaki her çiftin katkısı

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Aralarındaki yer değiştirme doğrultusuyla β açısı yapan paralel momentler için,

$$U_{\text{pair}} = \varepsilon_d(1 - 3 \cos^2 \beta).$$

Dolayısıyla her çapraz komşunun katkısı

$$U_{\text{diagonal}} = \varepsilon_d \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4} \varepsilon_d.$$

Altı bağıın katkıları toplandıığında,

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 4 \left(\frac{1}{4} \varepsilon_d \right) = -3\varepsilon_d.$$

Komşuların alanlarının enine bileşenleri birbirini yok eder. Geriye kalan alan, ortadaki momentin yönündedir ve büyüklüğü

$$B_{\text{nn}} = \frac{3\varepsilon_d}{m_s}.$$

Sonuç olarak, tüm komşuları sabit tutulurken bir mıknatısın α kadar döndürülmesi şu kadar enerji gerektirir:

$$\Delta U = 3\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Bu, tek bir mıknatısın dönmesine karşı geri çağırıcı bir tork olduğunu gösterir. Ancak bu, kolektif dönmelere karşı kararlılığı kanıtlamaz: Yalnızca en yakın komşu etkileşimlerini içeren modelde, altı bağ doğrultusundan ardışık ikisi arasında 60° açı bulunduğundan tüm momentlerin birlikte aynı açıyla dönmesi enerjiyi değıştirmez; bazı düzgün olmayan kolektif dönmeler ise enerjiyi düşürür.

Ortakdaki mıknatısı çıkarmak için gereken iş

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 3\varepsilon_d,$$

dolayısıyla

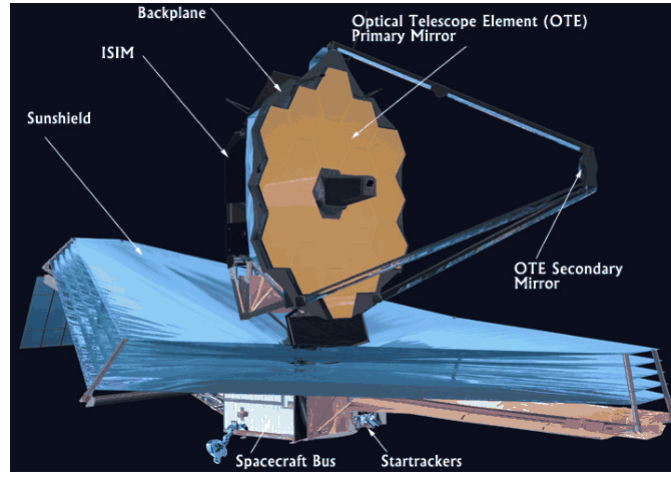
$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Tüm momentler aynı yöne yöneldiğinden bu yapı **ferromanyetik düzene** sahiptir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: James Webb Uzay Teleskobu

Bu soru, James Webb Uzay Teleskobu'nun fiziğıyle ilgilidir. Bir yıldızdan gelen ışık, alanı $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ olan birincil aynaya çarpar ve ikincil bir aynadan yansır. Sistemin odak uzaklığı $f = 130 \text{ m}$ 'dir. Işık, CCD (yük bağlaşımlı aygıt) kameralarını içeren ISIM'e (Entegre Bilimsel Aygıt Modülü) odaklanır.



Görsel kaynağı: NASA

Bölüm A. Bir Yıldızın Görüntülenmesi (1.8 puan)

En yakın kırmızı dev 89 ışık yılı uzaklıktadır; sıcaklığı $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ ve çapı $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$ 'dir.

A.1 — 0.4 puan

Yıldızın CCD kameranın görüntüleme yüzeyi üzerinde odaklanan görüntüsünün çapını hesaplayınız.

A.2 — 0.4 puan

CCD kameranın görüntüleme yüzeyi üzerindeki kırınım merkezî maksimumunun çapını tahmin ediniz. Kırmızı dev yıldızdan gelen ışığın şiddetinin en yüksek olduğu dalga boyunu $\lambda = 800 \text{ nm}$ kabul ediniz.

A.3 — 1.0 puan

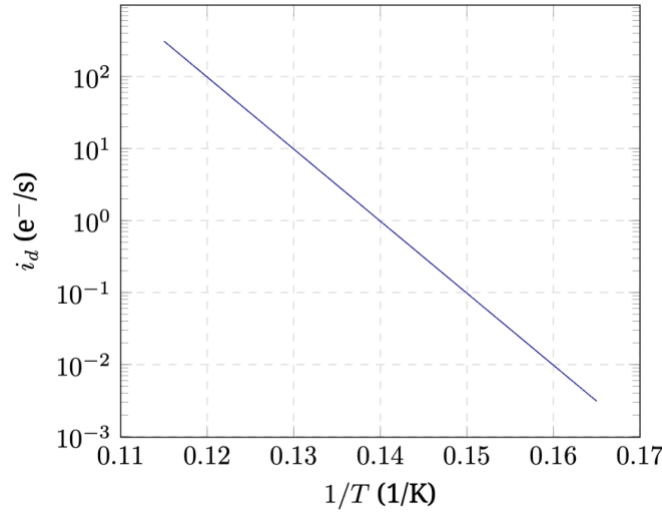
CCD soğutulmuyorsa ve yalnızca görüntüleme yüzeyinin üst tarafından ışınlım yoluyla ısı kaybedebiliyorsa, kırmızı dev yıldızın görüntüsünün olduğu konumda CCD'nin denge sıcaklığı ne olur? CCD yüzeyini siyah cisim kabul ediniz. Bir formül ve sayısal bir tahmin veriniz.

Bölüm B. Fotonların Sayılması (1.8 puan)

CCD kamera tarafından bir fotonun soğurulması, aygıt içinde bir elektronun açığa çıkmasına yol açar. Bu, yalnızca fotonun bir elektronu ΔE_g enerji aralığını aşacak şekilde uyarmaya yetecek enerjisi varsa gerçekleşir. Yeterli enerjiye sahip her fotonun bunu başardığını varsayınız. Ayrıca CCD kameranın sıcaklığından kaynaklanan, enerji aralığı üzerinden bir elektron sızıntısı da vardır; bu, karanlık akım i_d 'dir ve saniyedeki elektron sayısı cinsinden ölçülür. Sıcaklığa bağımlılığı şu şekildedir:

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}. \quad (1)$$

Burada i_0 bir sabittir.



Grafik, karanlık akımın sıcaklıkla nasıl değiştiğini göstermektedir. Karanlık akımın birimi olan e^-/s , saniyedeki elektron sayısının sayılması olarak düşünülmelidir.

B.1 — 0.4 puan

Karanlık akım grafiğinden yararlanarak, pikseldeki bir elektronu ancak uyarabilecek ısıf fotonlar yayan uzak bir kaynağın sıcaklığı için bir büyüklük mertebesi tahmini veriniz.

Elektronlar bir kondansatörde toplanır ve τ pozlama süresinden sonra sayılır. Bu süreçte üç temel belirsizlik kaynağı vardır: sayma işlemindeki, okuma gürültüsü adı verilen sabit bir belirsizlik; karanlık akımla ilişkili bir Poisson dağılımı hatası ve algılanan gelen fotonlarla ilişkili bir Poisson dağılımı hatası. Poisson dağılımı hataları, ilgili sürece ait sayımın kareköküne eşittir. Ölçülen foton sayısı, kondansatördeki elektron sayısından karanlık akıma karşılık gelen elektron sayısının çıkarılmasına eşittir.

B.2 — 0.4 puan

Okuma gürültüsü σ_r , karanlık akım i_d , gelen foton hızı p ve pozlama süresi τ ise toplam sayım belirsizliği σ_t için bir ifade yazınız.

Bu bölümün kalan sorularında pozlama süresini $\tau = 10^4$ s ve okuma gürültüsünü sabit bir $\sigma_r = 14$ değeri olarak kabul ediniz.

B.3 — 0.5 puan

Çalışma sıcaklığını $T_p = 7.5$ K kabul ediniz. Foton sayısının sayım belirsizliğinin on katı olması için gereken minimum foton hızı p' 'yi hesaplayınız.

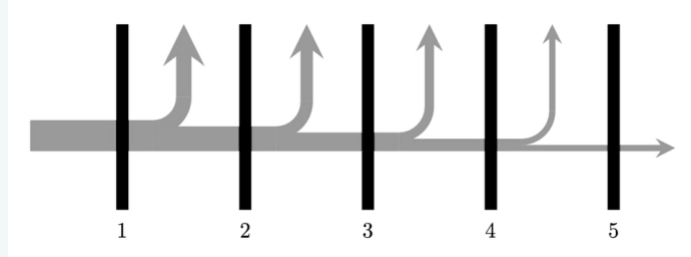
B.4 — 0.5 puan

Tüm fotonların bir elektronu bant aralığını aşacak şekilde uyarmaya ancak yetecek enerjiye sahip olduğunu varsayarsak, B.3'te bulunan foton kaynağının birincil ayna üzerindeki ışınım şiddeti nedir? Cevabınızı W/m^2 cinsinden ifade ediniz.

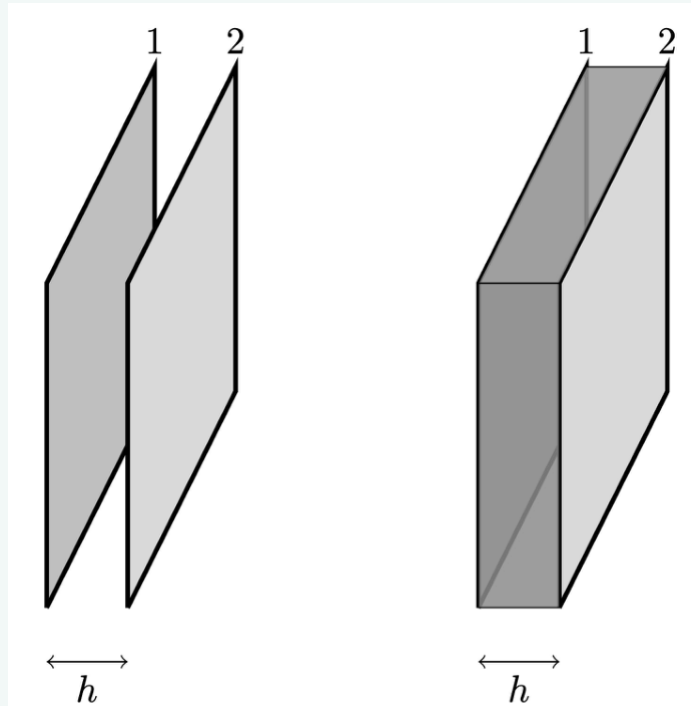
Bölüm C. Pasif Soğutma (4.4 puan)

Bir kızılötesi CCD kamera düşük sıcaklıkta tutulmalıdır. Bunun için kullanılan ilk araç, Güneş ışınımından koruyan bir kalkandır.

Güneş kalkanı, ince levhalar hâlindeki birbirinden ayrı beş yansıtıcı katmandan (siyah) oluşur; Güneş'ten gelen ışınım enerjisi (gri), soldaki ilk levhaya düşer ve her levha çifti arasından bir miktar enerji dışarı kaçar.



Enerji akışının şeması: düşey çizgiler (siyah) levhaları gösterir; enerji akışı (gri) soldan sağa doğrudur, ancak levhaların arasında bir miktar enerji yukarı doğru akarak uzaya kaçar.



Solda, aralarında h uzaklığı bulunan komşu 1 ve 2 levhalarının basit bir modeli gösterilmiştir. Levhalar birbirine bağlı değildir ve çevreleri uzaya açıktır. Levhaları paralel kabul ediniz. Levhalar arasında ısı ışınım alışverişi olabilir ve ısı ışınım çevre boşluğundan kaçabilir. Sağda, görselleştirmeyi kolaylaştırmak için çevre boşluğu gölgelendirilmiştir.

Aşağıdaki basitleştirmeleri kabul ediniz:

- Levhalar karedir ve her birinin alanı $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$ 'dir.
- Levhalar paraleldir ve çevre boyunca aralarında $h = 25 \text{ cm}$ uzaklık vardır.
- Levhaların yayma katsayısı sabittir ve $\epsilon \ll 1$ 'dir. Levha yüzeylerinden tüm yansımaların dağınık olduğunu varsayınız.
- Levhalar incedir; ön ve arka yüzeylerindeki sıcaklıklar eşittir ve yüzey boyunca düzgündür.
- Bir levhanın yaydığı ışınım akısının komşu levha tarafından soğurulan oranı $\alpha \leq 1$ 'dir. Bu, yukarıdaki şekilde levha 1'in levha 2'ye doğru Q_1 miktarında ısı yayması durumunda, levha 2'nin levha 1'den αQ_1 miktarında ısı soğuracağı anlamına gelir.

- İki levha arasındaki çevre boşluğundan dışarı çıkan ışıma akısı, βQ_{12} olarak yaklaşık hesaplanır; burada αQ_{12} , iki levha arasındaki net akıdır. $\beta < 1$ oranı geçerlidir. Bu, iki levha arasından uzaya olan ısı kaybının, levhalar arasındaki net ısı alışverişiyle orantılı olduğunu söylemekle eşdeğerdir. Bu soru için kaba bir yaklaşımdır.
- Uzayın arka plan sıcaklığı ihmal edilebilir.

C.1 — 2.4 puan

Gelen Güneş ışımasının şiddeti I_0 , α ve β sabitleri ve gerekli fiziksel sabitler cinsinden, birinci ve beşinci levhaların denge sıcaklıkları için ifadeler türetiniz. İfadenizi basitleştirmek için α , β vb. cinsinden ek sabitler tanımlayabilirsiniz.

C.2 — 1.6 puan

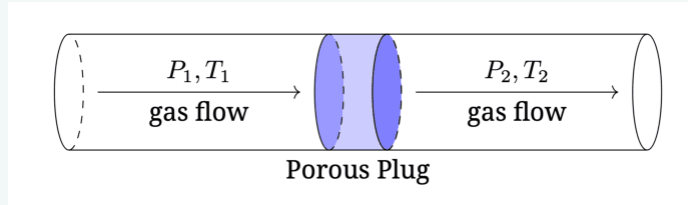
Yayma katsayısını $\epsilon = 0.05$ kabul ederek, levha geometrisi hakkındaki bilgilerden α ve β için sayısal tahminler elde ediniz. Yukarıdaki levhaların, çevre alanının ışıma enerjisi için etkin olarak kusursuz bir soğurucu gibi davrandığı dikdörtgenler prizması modelini göz önünde bulundurmanız önerilir.

C.3 — 0.4 puan

Levha 1 ve levha 5'in sıcaklıklarını sayısal olarak belirleyiniz. Güneş ışımasının şiddeti $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$ 'dir.

Bölüm D. Kriyojenik Soğutucu (4 puan)

Soğutma sisteminin son aşaması, CCD kamerayı doğrudan soğutur. Kapalı çevrimli bir soğutma sisteminde, sabit P_1 basıncında helyum gazı besleyen bir boru hattı bulunur; gaz, sünger benzeri gözenekli bir tıkaçtan geçerek sabit P_2 basıncındaki bir boruya girer. Boru, CCD'yi soğutmak üzere gazı taşır. Helyum gazı daha sonra besleme hattına dönmeye önce bir pompadan geçer.



Soldan, iyi tanımlanmış P_1 basıncında ve T_1 sıcaklığında beslenen helyum gazı, tıkaçtan geçirilerek iyi tanımlanmış P_2 basıncına ve T_2 sıcaklığına getirilir ve sağdan uzaklaştırılır.

Gaz gözenekli tıkaçtan geçerken, süngerdeki kanalların dar duvarlarıyla arasındaki viskoz sürtünme önemli bir etki hâline gelir; ancak süreç boyunca gaza veya gazdan dışarıya ısı aktarılmaz. Gazın 2 bölgesindeki makroskopik akış hızı, 1 bölgesindeki makroskopik akış hızından yalnızca biraz daha büyüktür.

Helyum ideal bir gaz değildir, ancak bu süreç boyunca gaz hâlinde kalır.

D.1 — 1.0 puan

Tıkaçtan soldan sağa geçen bir mol gazı ele alınız. Cevap kâğıdınızdaki tabloyu, daha büyük olması gereken niceliği belirtmek için '>' veya '<', eşit olması gereken nicelikleri belirtmek için '=' ya da daha fazla bilgi olmadan hangisinin daha büyük veya eşit olduğunu bilmek mümkün değilse '?' yazarak tamamlayınız.

Quantity Name	State 1	Compare using ">", "<", "=", or "?"	State 2
Internal Energy	U_1		U_2
Temperature	T_1		T_2
Entropy	S_1		S_2
Pressure	P_1		P_2
Volume	V_1		V_2

D.2 — 0.6 puan

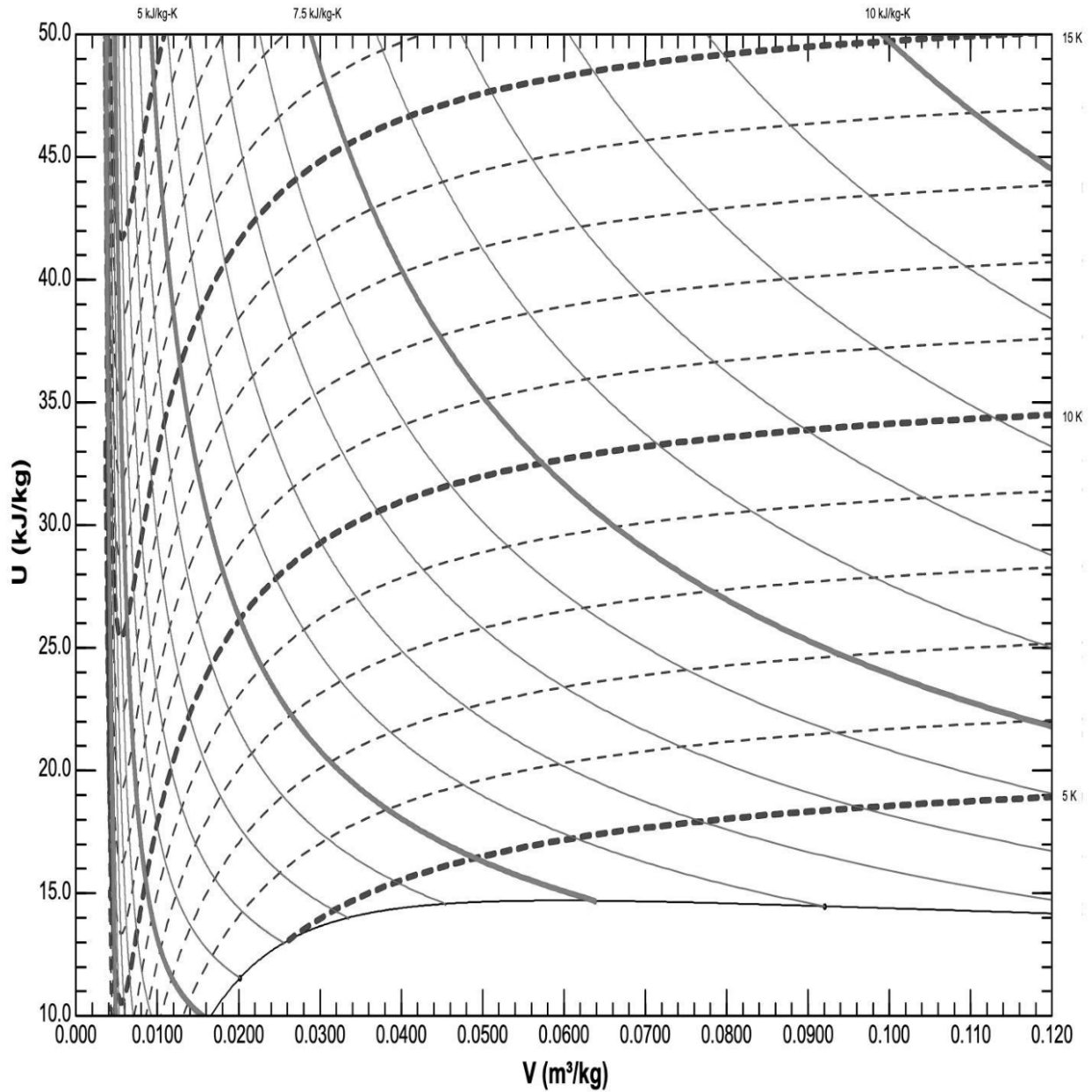
Bir mol gaz tıkaçtan geçerken U (iç enerji), P (basınç) ve V (hacim) kullanılarak oluşturulan korunan bir nicelik belirleyiniz; bu korunan niceliği nasıl türettiğinizi gösteriniz.

Cevap kâğıtlarınızda helyum için birim kütle başına iç enerjinin birim kütle başına hacme göre grafikleri, izotermeler ve sabit entropi eğrileriyle birlikte verilmiştir.

D.3 — 1.4 puan

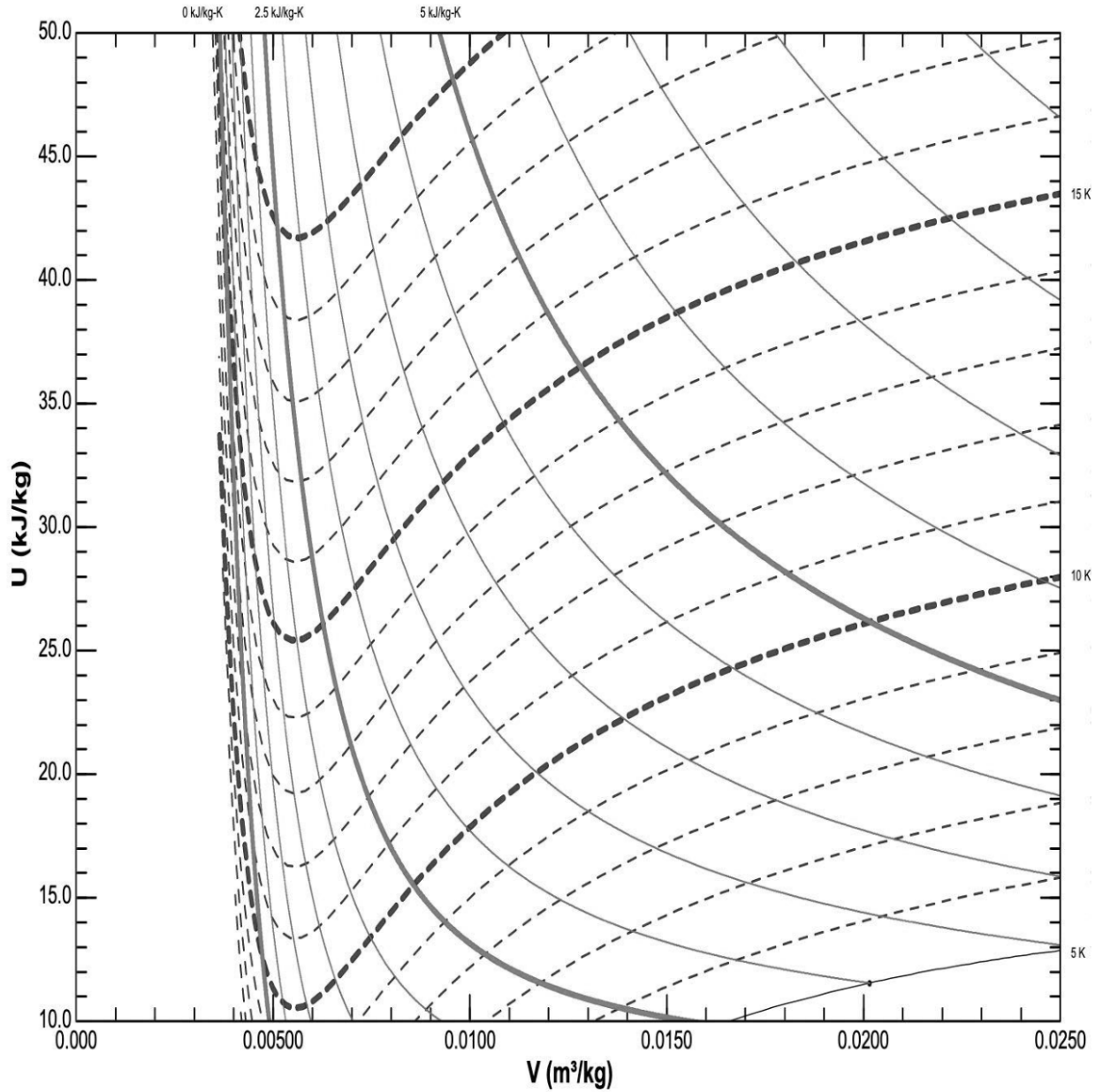
$V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ ve $T_2 = 7.5 \text{ K}$ olduğunu varsayarak, Bölüm D.2'de bulduğunuz korunan niceliğin sayısal değerini grafikten yararlanarak bulunuz. Çiziminizi grafik üzerinde gösteriniz!

Solid curves (trending down with increasing volume) are constant entropy S ; values for the bold curves are on top.
Dashed curves (trending up with increasing volume) are constant temperature T ; values for the bold curves are on right.
Internal energy (per kg) U is on vertical axis; volume (per kg) V is on horizontal axis



D.4 — 0.8 puan

T_1 için mümkün olan maksimum sıcaklığı bulunuz. Çiziminizi grafik üzerinde gösteriniz!



D.5 — 0.2 puan

D.4'te bulduğunuz maksimum T_1 değerini kabul ederek P_1 için sayısal bir değer bulunuz.

Fiziksel Sabitler

Aşağıda, soru metninde verilen niceliklere ek olarak çözümünüzde kullanabileceğiniz fiziksel sabitlerin listesi verilmiştir.

Fiziksel sabit	Gösterim	Sayısal değer
Işığın boşluktaki hızı	c	299 792 458 m/s
Boşluğun manyetik geçirgenliği (manyetik sabit)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ V s}/(\text{A m})]$
Boşluğun elektriksel geçirgenliği (elektrik sabiti)	ε_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ A s}/(\text{V m})]$

Fiziksel sabit	Gösterim	Sayısal değer
Temel yük	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $[1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$
Elektronun durgun kütlesi	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protonun durgun kütlesi	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Nötronun durgun kütlesi	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atomik kütle birimi	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Kütleçekim sabiti	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Avogadro sabiti	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molar gaz sabiti	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
Boltzmann sabiti	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan–Boltzmann sabiti	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Planck sabiti	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
İndirgenmiş Planck sabiti	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A.1:** $d_{\text{image}} \simeq 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}$.
- **A.2:** Eşdeğer bir dairesel açıklık kullanıldığında $d_{\text{diff}} \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}$.
- **A.3:** L uzaklığı ve düzgün biçimde ısıtılan bir kırınım lekesi için,

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4} \simeq 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

- **B.1:** Karakteristik enerjiye dayalı tahmin $T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}$ 'dir; çünkü $|\Delta E_g|/k_B \simeq 1.4 \times 10^3 \text{ K}$ 'dir. Bunun yerine dalga boyu tepesine dayalı bir ölçüt yaklaşık $2.8 \times 10^2 \text{ K}$ verir.
- **B.2:** $\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p \tau}$.
- **B.3:** $p_{\text{min}} \simeq 0.22 \text{ s}^{-1}$.
- **B.4:** $I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$.
- **C.1:** Şu tanımları yapalım:

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \quad K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha}.$$

Bu durumda

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}, \quad T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}.$$

- **C.2:** $\alpha \simeq 0.293$, $\beta \simeq 0.414$.
- **C.3:** $T_1 \simeq 360 \text{ K}$, $T_5 \simeq 120 \text{ K}$.
- **D.1:** Tablodaki sırayla: ?, ?, <, >, <.
- **D.2:** Makroskopik kinetik enerjideki küçük değişim ihmal edildiğinde $H = U + PV$.

- **D.3:** $H/m \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}$; helyum için yaklaşık 160 J/mol 'e eşdeğerdir.
- **D.4:** $T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}$.
- **D.5:** $P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Çözüm

A.1

Yıldızın uzaklığı L olsun. 1 ışık yılı $\simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$ kullanılarak,

$$L \simeq 89(9.46 \times 10^{15}) = 8.42 \times 10^{17} \text{ m}.$$

$L \gg f$ olduğundan görüntü hemen hemen odak düzleminde oluşur. Açısal çapı d_o/L olduğundan

$$d_{\text{image}} = f \frac{d_o}{L} = \frac{130(1.7 \times 10^{11})}{8.42 \times 10^{17}} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Böylece

$$\boxed{d_{\text{image}} \simeq 26 \mu\text{m}.$$

A.2

Birincil aynayı, aynı alana sahip dairesel bir açıklıkla yaklaşık olarak temsil edelim:

$$D = 2\sqrt{\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi}} = 5.64 \text{ m}.$$

Dairesel bir açıklık için ilk kırınım minimumunun açısal yarıçapı $1.22\lambda/D$ 'dir. Dolayısıyla merkezî maksimumun çapı

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{\lambda f}{D}.$$

Sayısal olarak,

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{(800 \times 10^{-9})(130)}{5.64} = 4.50 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{d_{\text{diff}} \simeq 45 \mu\text{m}.$$

Kırınım çapı, geometrik görüntü çapından büyüktür.

A.3

Yıldızı siyah cisim olarak ele alalım ve optik kayıpları ihmal edelim. Işınım gücü

$$P_{\text{star}} = 4\pi \left(\frac{d_o}{2} \right)^2 \sigma T_{\text{star}}^4.$$

Dolayısıyla aynanın topladığı güç

$$P_{\text{collected}} = A_{\text{mirror}} \frac{P_{\text{star}}}{4\pi L^2} = A_{\text{mirror}} \sigma T_{\text{star}}^4 \frac{d_o^2}{4L^2} \simeq 2.43 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

İstenen tahmin için aydınlatılan lekenin çapını, geometrik çap ile kırınım çapının büyüğü olarak alalım:

$$d_{\text{spot}} \simeq d_{\text{diff}}, \quad A_{\text{spot}} \simeq \frac{\pi d_{\text{diff}}^2}{4}.$$

Isınmanın bu leke üzerinde düzgün olduğunu varsayalım. Yalnızca üst yüzey ışınlam yaptığından denge koşulu

$$P_{\text{collected}} = \sigma A_{\text{spot}} T_{\text{image}}^4.$$

Böylece

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4}$$

ve

$$T_{\text{image}} \simeq 405 \text{ K} \approx 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

Bu tahmin, ayrıntılı kırınım profilini ve dış halkalardaki enerjiyi ihmal eder. Geometrik optik limitinde, bunun yerine $d_{\text{spot}} = f d_o / L$ yazılması şu sonucu verirdi:

$$T_{\text{image,geom}} = T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi f^2} \right)^{1/4} \simeq 530 \text{ K}.$$

B.1

Karanlık akım yasasının logaritması alındığında

$$\ln i_d = \ln i_0 - \frac{|\Delta E_g|}{6k_B} \frac{1}{T}.$$

Grafiğe göre $1/T$ 'nin 0.12 K^{-1} 'den 0.16 K^{-1} 'e artması, akımı 10^2 'den 10^{-2} s^{-1} 'e düşürür. Dolayısıyla

$$\frac{\Delta \ln i_d}{\Delta(1/T)} = \frac{\ln(10^{-4})}{0.04 \text{ K}^{-1}} = -100 \ln 10 \text{ K}.$$

Buradan

$$\frac{|\Delta E_g|}{k_B} = 600 \ln 10 \text{ K} \simeq 1.38 \times 10^3 \text{ K},$$

veya

$$|\Delta E_g| \simeq 1.91 \times 10^{-20} \text{ J} \simeq 0.119 \text{ eV}.$$

Karakteristik ısı enerji tahmini $E_\gamma \sim k_B T$ kullanılarak,

$$T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}.$$

Burada kullanılan tanıma bağlı bir sayısal çarpan vardır. Eşik dalga boyu

$$\lambda_g = \frac{hc}{|\Delta E_g|} \simeq 10.4 \mu\text{m}.$$

"Ancak uyarabilecek" ifadesi, ısı spektrumun dalga boyuna göre tepesinin bu eşığa ulaşması anlamına geliyorsa, Wien ölçeklemesi ve yıldızın verilen tepe dalga boyu şu sonucu verir:

$$T_{\text{source}} \simeq 3600 \text{ K} \frac{0.800 \mu\text{m}}{10.4 \mu\text{m}} \simeq 2.8 \times 10^2 \text{ K}.$$

Her iki hesaplama da ilgili ısı ölçeği belirler; bir ısı spektrumunda foton enerjisi için keskin bir üst sınır yoktur.

B.2

Ortalama foton sayısı $p\tau$, ortalama karanlık sayım ise $i_d\tau$ 'dur. Bunların Poisson varyansları kendi ortalamalarına eşittir.

Gürültü kaynaklarının bağımsız olduğu varsayılırsa varyanslar toplanır:

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau.$$

Dolayısıyla,

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau}.$$

Bilinen ortalama karanlık sayımın çıkarılması, bunun ortalama katkısını ortadan kaldırır, ancak istatistiksel dalgalanmaları kalır.

B.3

Grafikteki doğru yaklaşık olarak şu bağıntıya karşılık gelir:

$$i_d(T) = 10^{14-100\text{ K}/T} \text{ s}^{-1}.$$

$T_p = 7.5 \text{ K}$ için,

$$i_d = 10^{14-100/7.5} = 10^{2/3} \simeq 4.64 \text{ s}^{-1}.$$

Beklenen foton sayısını $N = p\tau$ olarak yazalım. Sınır koşulu

$$N = 10\sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + N}.$$

Karesi alınıp elde edilen ikinci dereceden denklem çözüldüğünde pozitif kök

$$N = 50 + \sqrt{2500 + 100(\sigma_r^2 + i_d\tau)}.$$

$\sigma_r = 14$ ve $\tau = 10^4 \text{ s}$ için,

$$N \simeq 2.21 \times 10^3.$$

Böylece

$$p_{\min} = \frac{N}{\tau} \simeq 0.221 \text{ s}^{-1} \approx 0.22 \text{ s}^{-1}.$$

B.4

Her eşik fotonunun enerjisi $|\Delta E_g|$ 'dir. Algılama verimi bir ve ışığın toplanması kayıpsız olduğunda, aynada gereken güç $p|\Delta E_g|$ 'dir. Dolayısıyla

$$I = \frac{p|\Delta E_g|}{A_{\text{mirror}}}.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$I = \frac{(0.221)(1.91 \times 10^{-20})}{25} \simeq 1.69 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

Dolayısıyla,

$$I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

C.1

$A = A_{\text{sheet}}$ olsun ve i levhasının bir yüzünden yayılan gücü şöyle tanımlayalım:

$$q_i = \epsilon \sigma A T_i^4.$$

Kirchhoff yasasına göre sabit yayma katsayısı aynı zamanda soğurma katsayısını da verir; dolayısıyla levha 1'in soğurduğu Güneş ışınımı gücü

$$P_{\odot} = \epsilon I_0 A.$$

Verilen soldan sağa kaçış modeline uyarak, $i + 1$ levhasının önceki boşluktan aldığı net gücü şöyle tanımlayalım:

$$F_i = \alpha(q_i - q_{i+1}).$$

Buna eşlik eden ve o boşluktan kaçan güç

$$L_i = \beta(q_i - q_{i+1}) = \frac{\beta}{\alpha} F_i.$$

Böylece bir boşluğa daha sıcak tarafından giren toplam güç

$$F_i + L_i = r F_i, \quad r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Her ara levha için denge koşulu

$$F_{i-1} = r F_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

Son levha, uzaya açık yüzünden q_5 gücünde ışıınım yayar; dolayısıyla

$$F_4 = q_5.$$

Boşluklar boyunca geriye doğru ilerleyerek,

$$F_3 = r q_5, \quad F_2 = r^2 q_5, \quad F_1 = r^3 q_5.$$

Sıcaklık farkları şu bağıntıyı sağlar:

$$q_i - q_{i+1} = \frac{F_i}{\alpha}.$$

Dört farkın tamamı toplandığında

$$q_1 - q_5 = \frac{q_5}{\alpha} (1 + r + r^2 + r^3).$$

Şu tanımı yapalım:

$$K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha};$$

bu durumda $q_1 = K q_5$.

Son olarak, birinci levha Güneş'e bakan yüzeyinden q_1 , ilk boşluğa ise $r F_1$ gücünü kaybeder:

$$\epsilon I_0 A = q_1 + r F_1 = (K + r^4) q_5.$$

$q_5 = \epsilon \sigma A T_5^4$ kullanılarak

$$T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}$$

ve $T_1^4 = K T_5^4$ olduğundan,

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}.$$

Açıkça görünen ϵA çarpanları sadeleşir; yayma katsayısı yine de α ve β 'yi etkiler.

C.2

Bir levhanın kenar uzunluğu

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ m.}$$

Çevre açıklığının alanı

$$A_{\text{gap}} = 4ah = 4(14.14)(0.25) = 14.14 \text{ m}^2.$$

Levhaların yansıtıcılığı yüksek ve yansımalar dağınık olduğundan, tekrarlanan yansımaların ardından kutu içindeki ışınımın iyice karıştığını varsayalım. Bu durumda soğurulma olasılıkları, soğurucu alanla orantılıdır.

Her levhanın etkin soğurucu alanı ϵA iken açıklık, etkin alanı A_{gap} olan bir siyah soğurucu gibi davranır. Dolayısıyla toplam etkin soğurucu alan

$$2\epsilon A + A_{\text{gap}}.$$

Sonunda diğer levha tarafından soğurulan oran yaklaşık olarak

$$\alpha \simeq \frac{\epsilon A}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

Kaçan oran yaklaşık olarak

$$\beta \simeq \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

$\epsilon A = 0.05(200) = 10 \text{ m}^2$ için,

$$\alpha \simeq \frac{10}{20 + 14.14} = 0.293,$$

$$\beta \simeq \frac{14.14}{20 + 14.14} = 0.414.$$

Geriye kalan yaklaşık α oranındaki kısım, ışınımı yayan levhaya geri dönerek onun tarafından soğurulur; dolayısıyla bu tahminde $2\alpha + \beta = 1$ 'dir.

C.3

Önceki tahminler şu değerleri verir:

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2.414,$$

$$r^4 \simeq 33.97, \quad K \simeq 80.60, \quad K + r^4 \simeq 114.57.$$

Dolayısıyla,

$$T_5 = \left[\frac{1360}{(5.670374419 \times 10^{-8})(114.57)} \right]^{1/4} \simeq 120.3 \text{ K,}$$

ve

$$T_1 = K^{1/4} T_5 \simeq 360.4 \text{ K}.$$

Böylece

$$T_1 \simeq 360 \text{ K}, \quad T_5 \simeq 120 \text{ K}.$$

D.1

İstenen girdiler şunlardır:

Nicelik	Karşılaştırma
İç enerji	$U_1 ? U_2$
Sıcaklık	$T_1 ? T_2$
Entropi	$S_1 < S_2$
Basınç	$P_1 > P_2$
Hacim	$V_1 < V_2$

Akışa direnç gösteren tıkaçtan geçen akışı bir basınç düşüşü sağlar; dolayısıyla $P_1 > P_2$ 'dir. Viskoz enerji kaybı, adyabatik süreci tersinmez kılar ve $S_2 > S_1$ sonucunu verir.

Şekilde gösterilen eşit boru kesitleri kullanıldığında, kararlı akışta kütle korunumu

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2,$$

bağıntısını verir; burada w , makroskopik akış hızıdır. $w_2 > w_1$ olduğundan yoğunluk azalır ve bir molün kapladığı hacim artar.

Gerçek bir gaz için kısılma sırasında ne iç enerjinin ne de sıcaklığın evrensel bir değişim yönü vardır. Bunları karşılaştırmak için durumlar hakkında daha fazla bilgi gerekir.

D.2

Bir mol gazı tıkaç boyunca izleyelim. Akışın üst tarafındaki gaz bu mol üzerinde $P_1 V_1$ işi yaparken, bu mol de akışın alt tarafındaki gaz üzerinde $P_2 V_2$ işi yapar.

Isı aktarımı yoktur. Makroskopik kinetik enerjideki küçük değişim ihmal edildiğinde, birinci yasa şu bağıntıyı verir:

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2.$$

Yeniden düzenlenirse,

$$U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.$$

Dolayısıyla korunan nicelik entalpidir:

$$H = U + PV.$$

Daha kesin olarak, kararlı adyabatik akışta birim kütle başına $h + w^2/2$ korunur. Belirtilen yaklaşım, kinetik enerji farkının ihmal edilmesine izin verir.

D.3

Açıklık için, grafiklerde U ve V olarak etiketlenmiş olan özgül iç enerji ve özgül hacmi u ve v ile gösterelim.

Termodinamik özdeşlik

$$du = T ds - P dv.$$

Sabit entropi eğrisi boyunca,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -P.$$

Dolayısıyla bir izentropun (v, u) noktasındaki teğetinin denklemi

$$u_{\text{tan}}(x) = u - P(x - v) = (u + Pv) - Px.$$

Bu teğetin düşey eksenini kestiği değer, tam olarak özgül entalpidir:

$$h = u + Pv.$$

Görsel 9 üzerinde yapılması gereken çizim şöyledir:

1. $v_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ değerini bulunuz.
2. Ara değerlendirme yaparak 7.5 K izotermi bulunuz.
3. Bu durumda, o noktadan geçen sabit entropi eğrisine teğet çiziniz.
4. Bu teğeti $v = 0$ 'a kadar uzatınız; düşey eksenini kestiği değeri okuyunuz.

Bu durumda yaklaşık olarak

$$u_2 \simeq 26 \text{ kJ/kg}.$$

Teğetin eğimi yaklaşık olarak

$$-P_2 \simeq -140 \text{ kPa}.$$

Bunun sonucunda,

$$h_2 = u_2 + P_2 v_2 \simeq 26 + (140)(0.100) = 40 \text{ kJ/kg}.$$

Böylece

$$h_1 = h_2 \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

Molar kütlesi yaklaşık $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ olan helyum için bu değer şuna karşılık gelir:

$$H_{\text{molar}} \simeq 160 \text{ J/mol}.$$

D.4

İzin verilen tüm giriş durumları aynı $h_0 \simeq 40 \text{ kJ/kg}$ özgül entalpisine sahip olmalıdır.

Görsel 10 üzerindeki grafiksel çizim şöyledir:

1. Düşey eksen üzerinde $(0, h_0)$ noktasını işaretleyiniz.
2. Bu noktadan, kesintisiz çizilmiş birkaç sabit entropi eğrisine teğetler çiziniz.
3. Teğet noktalarını işaretleyiniz. Bu noktaların her biri $u + Pv = h_0$ koşulunu sağlar; dolayısıyla bu noktalar sabit entalpi eğrisini oluşturur.
4. Bu eğrinin ulaştığı en yüksek sıcaklıklı kesikli izotermi bulunuz. Maksimum sıcaklıkta sabit entalpi eğrisi bu izoterme teğet olur.

Sınırdaki temas noktası 11 K izotermine yakındır ve grafikten okunan değerler yaklaşık olarak

$$v_1 \sim 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}, \quad u_1 \sim 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

Grafik, yaklaşık $10.5\text{--}11 \text{ K}$ aralığında bir maksimumu destekler; dolayısıyla

$$T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}.$$

D.5

Basınç, seçilen giriş durumunda izentropik teğetin eğiminin büyüklüğüdür. Eşdeğer olarak,

$$P_1 = \frac{h_0 - u_1}{v_1}.$$

Grafikten elde edilen yaklaşık koordinatlar kullanılarak,

$$P_1 \simeq \frac{(40 - 21) \times 10^3}{1.0 \times 10^{-2}} = 1.9 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

Grafiğin izin verdiği hassasiyetle,

$$P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

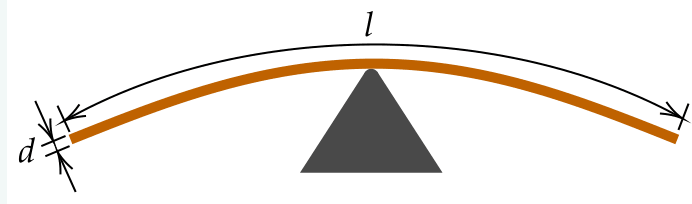
Soru 3: Ölçekleme yasaları

Ölçekleme yasaları, geniş bir aralıkta birbiriyle ölçeklenen iki fiziksel nicelik arasındaki fonksiyonel ilişkiyi tanımlar. Bu fonksiyonel ilişki bir kuvvet yasası olabilir, ancak başka olasılıklar da vardır. Çoğu zaman kesin ifadeler elde edilemese de ölçekleme yasaları yine de türetilir.

Bölüm A. Spagetti çubuğu (2.0 puan)

A.1 2.0 puan

Çapı d olan bir spagetti çubuğu, ortasından desteklenerek yatay dengede tutulmaktadır. $d = 1 \text{ mm}$ olduğunda çubuk, uzunluğu $l = 50 \text{ cm}$ değerine ulaştığında kendi ağırlığı altında kırılır. Çapı $d' = 1 \text{ cm}$ olan çubuğun kendi ağırlığı altında kırılmadan ulaşabileceği en büyük uzunluk l' nedir?



Bölüm B. Kumdan kale (2.0 puan)

B.1 2.0 puan

İri taneli kumun ortalama tane hacmi, ince taneli kumunkinin 10 katıdır. Islak ince taneli kum ve ıslak iri taneli kumun her ikisi de en uygun su içeriğine sahiptir (yani bunlardan yapılan yapıların en yüksek dayanıma sahip olduğu varsayılmaktadır) ve bunlar, şekilleri ve boyutları tamamen aynı iki silindirik yapmak için kullanılır. Her bir silindirin dayanımı, iki paralel plaka arasında sıkıştırılarak sınanır. İri taneli kumdan yapılan silindir, plakaları birbirine bastırmak için uygulanan kuvvet $F_c = 10 \text{ N}$ değerine ulaştığında parçalanır. İnce taneli kumdan yapılan silindiri parçalamak için gereken F_f kuvveti ne kadardır? Yer çekiminin etkilerini ihmal edebilirsiniz.

Bölüm C. Yıldızlararası yolculuk (2.0 puan)

C.1 2.0 puan

Yıldızlararası bir keşif seferinin uzay gemisi, büyüklüğü sabit ve $g = 10 \text{ m/s}^2$ olan bir öz ivmeyle yol almaktadır; yani bu, uzay gemisinin anlık olarak durgun olduğu eylemsiz referans sistemindeki ivmesidir. Yolcular, beklenen kalan ömürleri olan 50 yıl içinde Dünya'ya dönebilmelidir. Uzay gemisinin Dünya'dan ulaşabildiği en büyük uzaklık d' 'dir. İvme $g' = 15 \text{ m/s}^2$ değerine çıkarılırsa uzay gemisi daha büyük bir d' uzaklığına ulaşabilir. d'/d oranı nedir?

İpucu 1. Görelî hız toplama formülünü kullanmak isteyebilirsiniz; ancak başka yaklaşımlar da vardır.

İpucu 2. Aşağıdaki gibi tanımlanan hiperbolik fonksiyonlarla işlem yapmanız gerekebilir:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

İpucu 3. Yaklaşımınıza bağlı olarak aşağıdaki integrallerden birine veya birkaçına ihtiyaç duyabilirsiniz:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = a \tanh x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = a \sinh x + C, \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

burada $a \sinh x$ ve $a \tanh x$, ilgili hiperbolik fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır.

Bölüm D. Batma hissi (2.0 puan)

D.1 2.0 puan

Yarıçapı r_0 olan içi dolu bir tahta küre suda yüzmektedir. Sürtünme etkileri ihmal edilseydi küçük salınımların frekansı ω_0 olurdu; ancak viskoz sürtünme nedeniyle, düşey doğrultuda yerinden uzaklaştırıldıktan sonra yaptığı sönümlü salınımların frekansı gerçekte $0.99 \omega_0$ 'dır. Suda yüzen ve denge konumundan uzaklaştırıldığında küçük salınımlar yapan bir tahta kürenin en küçük yarıçapı $r_{\min}$ nedir? *İpucu:* Belirli bir cisme etki eden viskoz sürüklenme kuvveti, cismin akışkanın ana kütleğine göre süratıyla ve içinde hareket ettiği akışkanın η viskozitesiyle orantılıdır. Viskozitenin birimi $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ 'dir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A.1:** $l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}} = 0.50 \sqrt{10} \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$
- **B.1:** $F_f = 10^{1/3} F_c = 10^{4/3} \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$
- **C.1:** Yolcuların ölçtüğü süre $T = 50$ yıl olmak üzere,

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1} \approx 4.8 \times 10^2.$$

- **D.1:** $r_{\min} = (1 - 0.99^2)^{1/3} r_0 \approx 0.27 r_0.$ Bu kritik yarıçaptır; salınım için $r > r_{\min}$ gerekir.

Çözüm

A.1

Spagettinin her iki çapta da aynı yoğunluğa ve kırılma gerilmesine sahip olduğunu varsayalım ve ince kiriş yaklaşımını kullanalım. Kesit alanı $A \propto d^2$ şeklinde ölçeklendiğinden, birim uzunluk başına ağırlığı

$$q = \rho g_E A \propto d^2,$$

olur; burada g_E yer çekimi ivmesidir.

Çubuğun bir yarısını ele alalım. Ağırlığı $ql/2$ olup ortadaki destekten $l/4$ uzaklıkta etki eder. Dolayısıyla ortada oluşan en büyük eğilme momenti

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8} \propto d^2 l^2$$

olur.

Kiriş eğilmesinde en büyük boyuna gerilme

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}(d/2)}{I},$$

ile verilir; burada alanın ikinci momenti $I \propto d^4$ bağıntısını sağlar. Sonuç olarak,

$$\sigma_{\max} \propto \frac{l^2}{d}.$$

Kırılma, malzemede aynı gerilme değerinde gerçekleştiğinden,

$$\frac{l'^2}{d'} = \frac{l^2}{d}, \quad l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}}.$$

$d'/d = 10$ olduğundan,

$$l' = 0.50\sqrt{10} \text{ m} = 1.581 \dots \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$$

B.1

Islak kum, taneler arasındaki su köprülerinden kaynaklanan kılcal kuvvetlerle bir arada tutulur. a karakteristik tane boyutu, γ ise suyun yüzey gerilimi olsun. Tanelerin şekillerinin, paketlenme düzenlerinin ve ıslanma özelliklerinin benzer olduğunu varsayalım. En uygun su içeriğinde köprü geometrisi a ile ölçeklenir.

Bir temas noktasındaki kılcal kuvvet

$$f_{\text{cap}} \propto \gamma a$$

şeklinde ölçeklenir. Bu sonuç, ya uzunluğu a ile orantılı bir temas çizgisi boyunca etki eden yüzey geriliminden ya da a^2 mertebesinde bir alana etki eden γ/a mertebesindeki kılcal basınçtan elde edilir.

Sabit bir makroskopik S alanı boyunca kuvvet ileten temasların sayısı S/a^2 ile ölçeklenir. Dolayısıyla karakteristik kohezyon gerilmesi

$$\sigma_{\text{coh}} \propto \frac{f_{\text{cap}}}{a^2} \propto \frac{\gamma}{a}$$

şeklinde ölçeklenir. Aynı şekil ve boyuttaki silindirler için basınç altında parçalanmaya yol açan yük de aynı şekilde ölçeklenir:

$$F_{\text{break}} \propto \frac{1}{a}.$$

Tane hacmi a^3 ile orantılı olduğundan,

$$\frac{a_c}{a_f} = \left(\frac{V_c}{V_f} \right)^{1/3} = 10^{1/3}.$$

Bu nedenle,

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{a_c}{a_f} = 10^{1/3},$$

ve buradan

$$F_f = 10 \cdot 10^{1/3} \text{ N} = 21.54 \dots \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$$

elde edilir.

C.1

Dünya'yı eylemsiz bir referans sistemi olarak alalım, kütle çekim alanlarını ihmal edelim ve Dünya'ya göre durgun hâlde başlayıp durgun hâlde biten doğrusal bir yolculuğu ele alalım. Kullanılabilecek 50 yıl, yolcuların **öz zamanı** olup T ile gösterilir. İvmenin yön değiştirmeleri anlık kabul edilerek idealleştirilir.

Önce sabit öz ivme altındaki yer değiştirmeyi türetelim. Rapiditeyi

$$\theta = \text{atanh}(v/c)$$

olarak tanımlayalım. Bir $d\tau$ öz zaman aralığında, anlık durgunluk sistemindeki hız değişimi $g d\tau$ 'dur.

Görelî hız toplama bağıntısı, birinci mertebede,

$$dv = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) d\tau,$$

ve dolayısıyla

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{g}{c}$$

sonucunu verir.

Durgun hâlden başladığında,

$$\theta = \frac{g\tau}{c}, \quad v = c \tanh \theta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta.$$

Buradan

$$\frac{dx}{d\tau} = v \frac{dt}{d\tau} = c \sinh \left(\frac{g\tau}{c} \right)$$

elde edilir. İntegral alındığında,

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh \left(\frac{g\tau}{c} \right) - 1 \right].$$

Gidiş etabına durgun hâlde başlayıp bu etabı durgun hâlde bitirirken, verilen bir öz zamanda ulaşılan uzaklığı en büyük yapmak için gemi bu sürenin yarısı boyunca Dünya'dan uzaklaşarak hızlanır, diğer yarısı boyunca yavaşlar. Gerçekten de öz zaman cinsinden süresi L olan bir gidiş etabında rapiditesi şu sınırı aşamaz:

$$\theta(\tau) \leq \frac{g}{c} \min(\tau, L - \tau).$$

Önce hızlanıp sonra yavaşlanan yörünge bu sınıra ulaşır ve $dx/d\tau = c \sinh \theta$, θ ile arttığından yer değiştirmeyi en büyük yapar.

Aynı uzaklığın kat edildiği dönüş yolculuğu da aynı minimum öz zamanı gerektirir. Dolayısıyla en uygun gidiş-dönüş yolculuğu dört eşit zaman aralığından oluşur:

1. Dünya'dan uzaklaşarak hızlanma.
2. En büyük uzaklıkta durgun hâle gelene kadar yavaşlama.
3. Dünya'ya doğru hızlanma.
4. Dünya'da durgun hâle gelene kadar yavaşlama.

Her bir aralık $T/4 = 12.5$ yıl sürer. Gidişteki iki aralıkta eşit uzaklıklar kat edildiğinden,

$$d(g) = \frac{2c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right].$$

Böylece

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1}.$$

$c \simeq 3.00 \times 10^8$ m/s ve 1 yıl $\simeq 3.156 \times 10^7$ s kullanıldığında,

$$\frac{gT}{4c} \simeq 13.15, \quad \frac{g'T}{4c} \simeq 19.72.$$

Her iki argüman da büyük olduğundan $\cosh x - 1 \simeq e^x/2$ olur. Dolayısıyla

$$\frac{d'}{d} \simeq \frac{g}{g'} \exp\left(\frac{(g' - g)T}{4c}\right) \simeq \frac{2}{3} e^{6.575}.$$

Sonuç

$$\frac{d'}{d} \approx 4.8 \times 10^2.$$

olur.

D.1

Tüm kürelerin aynı tahtadan yapıldığını, denge durumundaki batma miktarlarını kaldırma kuvvetinin belirlediğini ve belirtilen doğrusal viskoz sürükleme modelinin geçerli olduğunu varsayalım.

Aşağı yöndeki küçük bir z yer değiştirmesi için suya batan ek hacim $A_w z$ 'dir; burada A_w , kürenin su yüzeyindeki kesit alanıdır. Ek kaldırma kuvveti, bir geri çağırıcı kuvvet sağlar:

$$F_{\text{rest}} = -kz, \quad k = \rho_w g_E A_w.$$

Dengede suya batan hacim oranı, tahtanın yoğunluğunun suyun yoğunluğuna oranıyla belirlenir. Bu nedenle yüzme durumları geometrik olarak benzerdir ve

$$A_w \propto r^2, \quad k \propto r^2, \quad m \propto r^3$$

bağıntıları elde edilir. Dolayısıyla sönümsüz açısal frekans

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \propto r^{-1}$$

bağıntısını sağlar.

Viskoz kuvveti

$$F_{\text{visc}} = -b\dot{z}$$

olarak yazalım. Viskozite ve hızla orantılı olduğundan, geometrik olarak benzer cisimler için boyut analizi

$$b = C\eta r \propto r,$$

sonucunu verir; burada C boyutsuz bir geometrik katsayıdır.

Hareket denklemi

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0$$

olur. Sönüm hızını

$$\beta = \frac{b}{2m} \propto r^{-2}$$

olarak tanımlayalım. Az sönümlü rejimde salınım frekansı

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}$$

olur.

r_0 yarıçapında, verilen frekanslardan

$$(0.99\omega_0)^2 = \omega_0^2 - \beta_0^2,$$

dolayısıyla

$$\frac{\beta_0^2}{\omega_0^2} = 1 - 0.99^2 = 0.0199$$

elde edilir.

Yarıçapa bağlı ölçekleme bağıntıları birleştirildiğinde,

$$\frac{\beta^2(r)}{\Omega^2(r)} = 0.0199 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3.$$

Bu oran birden küçük olduğunda salınım gerçekleşir. Bu nedenle kritik yarıçap

$$0.0199 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} \right)^3 = 1,$$

bağıntısını sağlar ve buradan

$$r_{\min} = (0.0199)^{1/3} r_0 = 0.27099 \dots r_0 \approx 0.27r_0.$$

elde edilir.

Eşitlik durumunda hareket kritik sönümlüdür ve salınım yapmaz. Dolayısıyla $r_{\min}$, en küçük yarıçapın sınır değeridir; salınımlı hareket $r > r_{\min}$ için gerçekleşir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.