

# IPhO 2022

Теоретические задачи и решения · Швейцария (в онлайн-формате) · 3 теоретические задачи с полными решениями

[eulersolve.org/ipho/2022/](https://eulersolve.org/ipho/2022/)

## Задача 1: Постоянные магниты

Сильные постоянные магниты изготавливают из сплава NdFeB, обладающего очень широкой петлёй гистерезиса, поэтому в широком диапазоне условий применения намагниченность  $J$  можно считать постоянной; далее мы полагаем, что  $J \equiv 1.5 \text{ Т}/\mu_0$ , где  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ , а намагниченность всех постоянных магнитов однородна. Намагниченность определяется как объёмная плотность магнитного дипольного момента вещества.

Подсказка 1. Может оказаться полезным следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Подсказка 2. Магнитное поле, создаваемое шарообразным магнитом, совпадает с полем точечного диполя. Магнитные поля, создаваемые магнитами другой формы, становятся эквивалентными полям точечных диполей лишь на расстояниях, значительно превышающих их диаметр.

Подсказка 3. Электрическое и магнитное поля точечных электрического и магнитного диполей имеют одинаковую зависимость от координат и соответствующего дипольного момента, то есть одно из них можно получить из другого умножением на постоянный коэффициент.

Подсказка 4. Индуцированное поле, обусловленное граничным условием, всегда можно заменить полем некоторой конфигурации источников, расположенных за заданными границами.

### Часть А. Взаимодействие магнитов (4.5 балла)

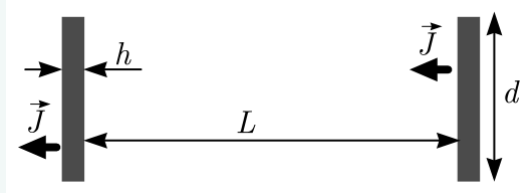
Когда расстояние до магнита значительно превышает его размеры, создаваемое им магнитное поле можно приближённо заменить магнитным полем его дипольного момента  $\vec{m}$ ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Здесь  $r = |\vec{r}|$ , а дипольный момент разложен на составляющие, параллельную и перпендикулярную радиус-вектору  $\vec{r}$ , проведённому от диполя к точке наблюдения:  $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$ .

**A.1 — 0.6 балла**

Найдите модуль силы взаимодействия между двумя соосно расположенными цилиндрическими магнитами диаметром  $d = 20 \text{ mm}$  и толщиной  $h = 2 \text{ mm}$ , намагниченными параллельно своей оси, если расстояние между центрами магнитов равно  $L = 20 \text{ cm}$ . Можно считать, что  $L \gg d, h$ .

**A.2 — 0.4 балла**

На расстояниях, значительно превышающих  $\frac{h}{2}$ , поле, создаваемое магнитом из задания A.1, совпадает с полем кругового тока  $I$ . Найдите  $I$ .

**A.3 — 1.0 балла**

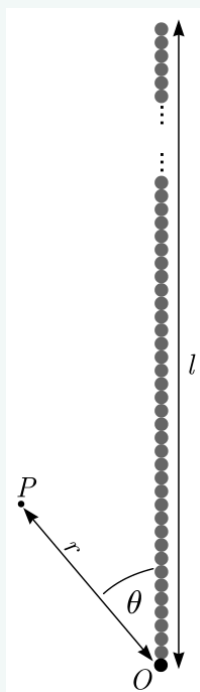
Найдите силу взаимодействия между магнитами в установке из задания A.1, если теперь  $L = 5 \text{ mm}$ . Можно считать, что  $d \gg L \gg h$ .

**A.4 — 1.0 балла**

Одинаковые шарообразные магниты диаметром  $\delta = 5 \text{ mm}$ , соединённые магнитным притяжением, образуют цепочку. Какова максимальная длина  $l$  такой цепочки, при которой она не разрывается под собственным весом, если подвесить её за самый верхний магнит? Плотность магнитов из NdFeB равна  $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ .

**A.5 — 1.5 балла**

Рассмотрите цепочку из части A.4. Получите выражение для модуля магнитной индукции  $B$  в точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $r$  от одного из концов цепочки  $O$ , если угол между цепочкой и прямой  $OP$  равен  $\theta$  (см. рисунок ниже), считая, что  $l \gg r$  и  $r \sin \theta \gg \delta$



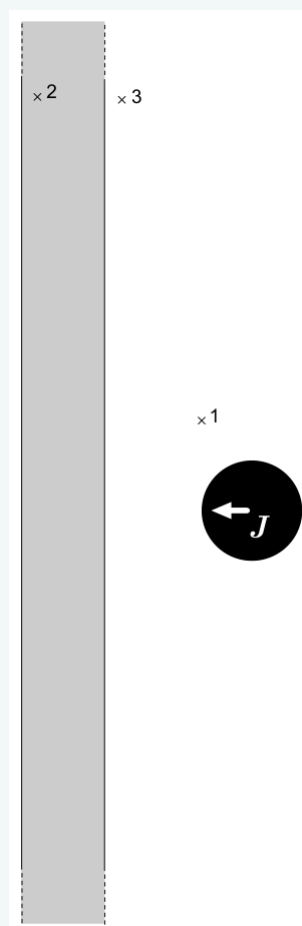
## Часть В. Взаимодействие с ферромагнетиками (3.5 балла)

Теперь предположим, что помимо постоянных магнитов у нас имеются пластины из ферромагнитного материала, подобного тому, который используется в сердечниках трансформаторов. В рассматриваемых условиях его относительную магнитную проницаемость можно считать постоянной и очень большой:  $\mu_r \sim 10^5$ .

*Подсказка 5.* Большая магнитная проницаемость означает, что линии магнитного поля вблизи внешней поверхности тела из этого материала почти перпендикулярны поверхности. Это похоже на поведение линий электрического поля вблизи внешней поверхности проводника.

### В.1 — 1.0 балла

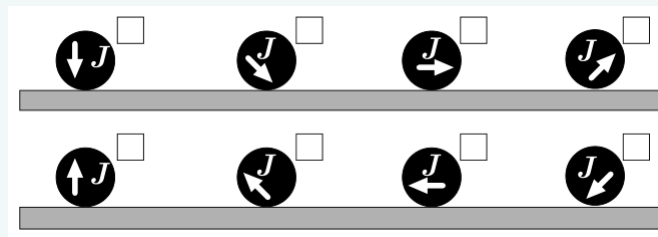
Шарообразный магнит из части А.4 находится на расстоянии  $s = \delta$  от толстой бесконечной ферромагнитной пластины (см. бланк ответов). Намагниченность шара направлена перпендикулярно пластине. Нарисуйте линии поля в сечении, показанном в бланке ответов. На этом рисунке отмечены три точки (обозначенные 1, 2 и 3); необходимо изобразить проходящие через каждую из них линии поля на всём их протяжении, то есть настолько, насколько позволяет рисунок.



### В.2 — 1.0 балла

Теперь шарообразный магнит приводят в непосредственное соприкосновение с пластиной. Как направлен вектор намагниченности шарообразного магнита в положении устойчивого равновесия и какова нормальная сила между пластиной и магнитом? Отметьте правильное

направление (направления) галочкой в соответствующей клетке бланка ответов. Неверно поставленные галочки приведут к снижению оценки.



### В.3 — 1.5 балла

Теперь магнит из части А.1 помещают между двумя толстыми круглыми ферромагнитными пластинами диаметром  $D = 2d$  так, что плоские грани магнита прижаты к пластинам, а все три диска соосны. Найдите магнитную силу  $F$ , действующую на каждую пластину.

*Подсказка:* Можно пренебречь магнитным полем **как** вне ферромагнитных пластин, **так и** вне зазора между ними.

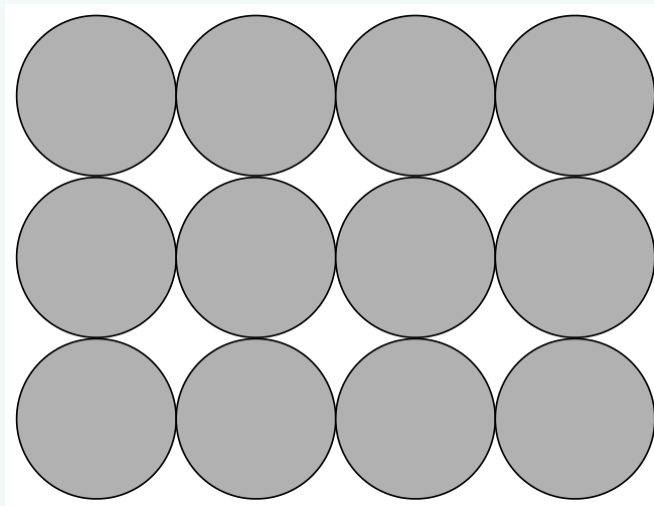
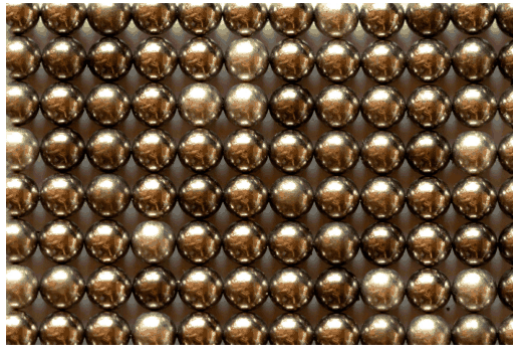
### Часть С. (Анти)ферромагнитный порядок (2 балла)

Магнитные свойства материалов обусловлены магнитными дипольными моментами электронов и атомных ядер. Если дипольные моменты ориентируются параллельно друг другу, создаваемое ими поле усиливается — такие материалы являются ферромагнитными. Если же вблизи каждого дипольного момента имеется другой, антипараллельный ему дипольный момент, поля компенсируются — такие материалы являются антиферромагнитными.

Далее мы рассматриваем очень большое число шарообразных магнитов из части А.4, расположенных в узлах двумерной решётки; **ниже приведены реальные фотографии конфигураций устойчивого равновесия**. Считайте, что все векторы намагниченности лежат в плоскости рисунка. В расчётах учитывайте только взаимодействия ближайших соседей (на рисунке к С.1 у каждого магнита четыре ближайших соседа, а на рисунке к С.2 — шесть).

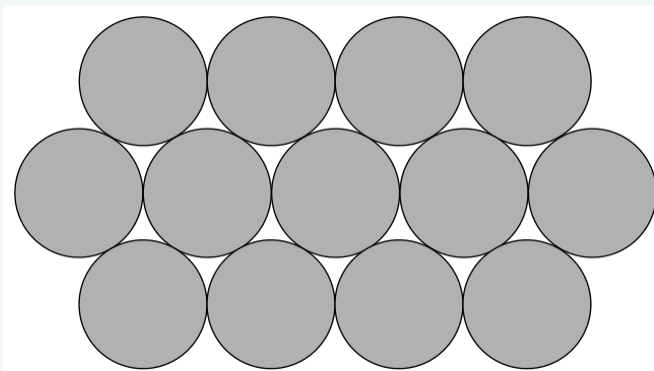
### С.1 — 0.8 балла

Покажите направления намагниченности магнитов на рисунке ниже. Доказывать, что предложенная вами конфигурация является единственно возможной, не требуется. Однако необходимо обосновать, что предложенная конфигурация действительно устойчива. Найдите энергию, необходимую для удаления одного магнита из этой решётки из некоторой точки в её середине, считая, что остальные магниты остаются неподвижными. Соответствует ли эта конфигурация порядку в ферромагнитных или антиферромагнитных материалах?



### С.2 — 1.2 балла

Ответьте на те же вопросы, что и в задании С.1, для конфигурации, показанной на рисунке ниже.



## Физические постоянные

Ниже приведён список физических постоянных, которые могут понадобиться при решении в дополнение к величинам, данным в условии задачи.

| Физическая постоянная                                            | Обозначение        | Численное значение                                                                     |
|------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| Скорость света в вакууме                                         | $c$                | 299 792 458 м/с                                                                        |
| Магнитная проницаемость вакуума (магнитная постоянная)           | $\mu_0$            | $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ ; $[1 \text{ Н/А}^2 = 1 \text{ Vs/Am}]$             |
| Диэлектрическая проницаемость вакуума (электрическая постоянная) | $\varepsilon_0$    | $8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;<br>$[1 \text{ Ф/м} = 1 \text{ As/Vm}]$ |
| Элементарный заряд                                               | $e$                | $1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ К}$ ; $[1 \text{ К} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}]$  |
| Масса покоя электрона                                            | $m_e$              | $9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ кг}$                                           |
| Масса покоя протона                                              | $m_p$              | $1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                          |
| Масса покоя нейтрона                                             | $m_n$              | $1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                          |
| Атомная единица массы                                            | $m_{\text{amu}}$   | $1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$                                          |
| Гравитационная постоянная                                        | $G$                | $6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$                  |
| Постоянная Авогадро                                              | $N_A$              | $6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ мол}^{-1}$                                            |
| Универсальная газовая постоянная                                 | $R$                | $8.31446261815324 \dots \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{мол})$                        |
| Постоянная Больцмана                                             | $k_B$              | $1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$                                                 |
| Постоянная Стефана — Больцмана                                   | $\sigma$           | $5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$             |
| Постоянная Планка                                                | $h$                | $6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$                                  |
| Приведённая постоянная Планка                                    | $\hbar = h/(2\pi)$ | $1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$                          |

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

Все приведённые ниже значения сил являются их модулями.

- **A.1:**

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4} \simeq 2.1 \times 10^{-4} \text{ Н}$$

При показанных направлениях сила является силой притяжения.

- **A.2:** Круговой ток диаметром  $d$ , равный

$$I = Jh \simeq 2.4 \times 10^3 \text{ А}.$$

- **A.3:**

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L} \simeq 14 \text{ Н}$$

Сила является силой притяжения.

- **A.4:** В приближении длинной цепочки

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g} \simeq 6.6 \text{ м}.$$

- **A.5:**

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}$$

В рамках указанных приближений этот модуль не зависит от  $\theta$ .

- **B.1:** Внешнее поле совпадает с полем реального диполя вместе с зеркальным диполем той же величины, направленным в ту же сторону. Линии поля подходят к пластине перпендикулярно. Линия, проходящая через **1**, образует короткую возвратную петлю в воздухе; линии, проходящие через **2** и **3**, принадлежат более крупным петлям, поток которых проходит через пластину. Их направления подробно описаны в решении.
- **B.2:** Отметьте галочкой **первый рисунок в каждом ряду**: намагниченность перпендикулярна пластине и направлена либо к ней, либо от неё.

$$F = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24} \simeq 5.9 \text{ Н}$$

Магнитная сила является силой притяжения.

- **B.3:** Каждая пластина притягивается к магниту и другой пластине с силой

$$F = \frac{3\pi \mu_0 J^2 d^2}{32} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ Н}.$$

- **C.1:** Все моменты в одном горизонтальном ряду направлены одинаково; в соседних рядах направления противоположны. Это **антиферромагнитный порядок**.

$$W = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ Дж}.$$

- **C.2:** Все моменты направлены в одну и ту же сторону по горизонтали. Это **ферромагнитный порядок**, удовлетворяющий описанному ниже критерию устойчивости относительно поворота одного магнита.

$$W = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Это показывает устойчивость лишь относительно поворота одного магнита; в модели взаимодействия ближайших соседей некоторые коллективные повороты многих магнитов понижают энергию.

## Решение

Намагниченность и два используемых далее дипольных момента равны

$$J = \frac{1.5}{\mu_0} = 1.19366 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$m_c = J \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.750 \text{ A m}^2, \quad m_s = J \frac{\pi \delta^3}{6} = 0.078125 \text{ A m}^2.$$

Энергия взаимодействия двух постоянных диполей равна

$$U_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})].$$

Эквивалентная запись:  $U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$ . Силы определяются дифференцированием этой энергии по координатам при неизменных постоянных моментах.

### A.1

Поскольку  $L \gg d, h$ , оба цилиндра можно заменить точечными диполями. Их моменты параллельны друг другу и общей оси, поэтому

$$U(L) = -\frac{\mu_0 m_c^2}{2\pi L^3}.$$

Сила стремится уменьшить  $L$ , а её модуль равен

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{3\mu_0 m_c^2}{2\pi L^4}.$$

Подставляя  $m_c = J\pi d^2 h/4$ , получаем

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4}.$$

При  $L = 0.20 \text{ m}$

$$F = 2.109375 \times 10^{-4} \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^{-4} \text{ N}}.$$

### A.2

Однородно намагниченное тело можно представить с помощью связанных токов. Плотность его связанного поверхностного тока равна

$$\vec{K}_b = \vec{J} \times \hat{n}.$$

У цилиндра, намагниченного вдоль оси, этот ток течёт по окружности боковой поверхности, а его плотность имеет модуль  $K_b = J$ . Интегрирование по толщине цилиндра даёт эквивалентный круговой ток

$$\boxed{I = Jh}.$$

На расстояниях, больших по сравнению с толщиной, тонкий цилиндрический слой тока можно заменить одним витком диаметром  $d$ .

Тот же результат получается приравниванием магнитных моментов:

$$I \frac{\pi d^2}{4} = J \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Численно

$$I = (1.19366 \times 10^6)(2.0 \times 10^{-3}) = 2.3873 \times 10^3 \text{ A} \simeq \boxed{2.4 \text{ kA}}.$$

Направление обхода тока выбирается по правилу правой руки так, чтобы получить заданное направление намагниченности.

### A.3

Условие  $L \gg h$  позволяет использовать представление круговым током из A.2. Поскольку  $L \ll d$ , соответствующие близкие участки двух витков можно рассматривать как параллельные прямые проводники, разделённые расстоянием  $L$ .

Сила притяжения параллельных токов на единицу длины равна

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L}.$$

В главном порядке эта сила действует вдоль общей оси. Умножая на длину окружности  $\pi d$ , получаем

$$F \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L}.$$

Таким образом,

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L}.$$

При  $L = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$F \simeq 14.3239 \text{ N} \simeq \boxed{14 \text{ N}}.$$

Это результат в главном порядке при заданном соотношении масштабов  $d \gg L \gg h$ .

### A.4

Моменты шаров ориентируются вдоль цепочки и направлены в одну сторону. Масса каждого шара равна

$$M = \rho \frac{\pi \delta^3}{6}.$$

Два шара, расстояние между центрами которых равно  $n\delta$ , притягиваются с силой

$$F_n = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi (n\delta)^4} = \frac{F_1}{n^4},$$

где

$$F_1 = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi \delta^4} = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24}.$$

В цепочке из  $N$  шаров закреплённый верхний шар должен удерживать остальные  $N - 1$  шаров. Максимальная направленная вверх магнитная сила, с которой он может действовать на них, пока все шары соприкасаются, равна

$$F_{\text{top}} = F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Следовательно,

$$(N - 1)Mg \leq F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Предельным является самое верхнее соединение: любое сечение ниже него удерживает меньший вес, тогда как магнитное притяжение через это сечение включает хотя бы одну пару с каждым из расстояний, встречающихся между парами по разные стороны верхнего соединения.

Для длинной цепочки

$$F_{\text{top}} \simeq F_1 \frac{\pi^4}{90}.$$

Кроме того, в главном порядке по  $1/N$  вес подвешенной части равен

$$Mg \frac{l}{\delta} = \frac{\rho \pi \delta^2 g}{6} l.$$

Приравнявая его предельной магнитной силе, получаем

$$\frac{\rho \pi \delta^2 g}{6} l_{\text{max}} = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24} \frac{\pi^4}{90}.$$

Следовательно,

$$l_{\text{max}} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g}.$$

Диаметр шара сокращается: и удерживающая магнитная сила, и масса цепочки на единицу длины пропорциональны  $\delta^2$ .

Принимая  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , получаем

$$F_1 = 5.8594 \text{ N}, \quad F_{\text{top}} \simeq 6.3417 \text{ N}, \\ l_{\text{max}} \simeq 6.5848 \text{ m} \simeq \boxed{6.6 \text{ m}}.$$

Учёт закреплённого верхнего шара и округление до целого числа шаров изменяют длину лишь на величину порядка  $\delta$ .

## A.5

Поскольку  $r \sin \theta \gg \delta$ , дискретную цепочку можно заменить непрерывной линией диполей. Её дипольный момент на единицу длины равен

$$\lambda_m = \frac{m_s}{\delta} = \frac{\pi J \delta^2}{6}.$$

Поместим  $O$  в начало координат и направим цепочку вдоль  $+z$ , от 0 до  $l$ . Выберем все моменты направленными вдоль  $+z$ . Во внешней области определим магнитный скалярный потенциал соотношением

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi.$$

Потенциал линии равен

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \int_0^l \frac{z - z'}{|\vec{r} - z' \hat{z}|^3} dz'.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - z' \hat{z}|} = \frac{z - z'}{|\vec{r} - z' \hat{z}|^3},$$

интегрирование даёт

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \left( \frac{1}{|\vec{r} - l \hat{z}|} - \frac{1}{r} \right).$$

Таким образом, внешнее поле эквивалентно полю двух противоположных эффективных магнитных полюсов на концах цепочки:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi} \left[ \frac{\vec{r} - l \hat{z}}{|\vec{r} - l \hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

При  $l \gg r$  вклад далёкого конца пренебрежимо мал, и остаётся

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Отсюда

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}.$$

Поле радиально относительно ближайшего конца, поэтому его модуль не зависит от  $\theta$ . Изменение направления всех моментов на противоположное меняет направление поля на противоположное.

## В.1

Пусть пластина занимает область  $x < 0$ , её поверхность находится при  $x = 0$ , а центр шара — при  $x = a > 0$ . На рисунке в бланке ответов

$$\vec{m} = -m_s \hat{x}.$$

Для пластины с большой магнитной проницаемостью касательная составляющая внешнего поля должна быть почти нулевой. Это граничное условие обеспечивается зеркальным диполем, помещённым в точку  $x = -a$ , с **тем же направлением по нормали**:

$$\vec{m}_{\text{image}} \simeq -m_s \hat{x}.$$

Точнее, его величина умножается на

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \simeq 1.$$

На поверхности касательные составляющие полей двух диполей компенсируются. Если  $y$  обозначает высоту над центром шара, оставшаяся нормальная составляющая равна

$$B_x(0, y) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{y^2 - 2a^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Следовательно, поток входит в пластину вблизи оси шара, где  $|y| < \sqrt{2} a$ , и выходит из неё дальше от оси, где  $|y| > \sqrt{2} a$ .

Требуемый рисунок можно описать следующим образом:

- **Левая сторона шара — северная**, а правая — южная. Снаружи стрелки направлены от левой стороны к правой вдоль изогнутых возвратных линий. Внутри шара стрелки

направлены приблизительно справа налево.

- **Через точку 1:** проведите короткую верхнюю возвратную петлю, целиком лежащую в воздухе вне пластины. Она выходит из верхней левой части поверхности шара, поднимается через точку 1, изгибается вправо и входит в верхнюю правую часть поверхности шара.
- **Через точку 2:** проведите более крупную петлю, несущую поток вверх через пластину. В точке 2 она направлена преимущественно вверх и немного к поверхности. Она изгибается вправо и выходит из поверхности выше точки 3 перпендикулярно поверхности, после чего изгибается обратно к южной стороне шара. Если проследить её в обратном направлении, участок внутри пластины опускается и соединяется с потоком, входящим в пластину ближе к магниту.
- **Через точку 3:** проведите линию, выходящую из пластины приблизительно горизонтально вправо. Затем она изгибается вниз и вправо к южной стороне шара. Продолжите её в обратном направлении через пластину в виде кривой, возвращающейся к расположенной ниже точке входа, в которую поступает поток от северной стороны шара.
- Картина в нижней половине является отражением картины в верхней половине относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр шара. Каждая линия продолжается через материал и магнит, образуя замкнутую линию магнитного поля.

В идеальном пределе полупространства поле внутри пластины приблизительно вдвое больше поля, которое создал бы там один реальный диполь. Это определяет изогнутые продолжения через точку 2 и их направления.

## В.2

Пусть  $\hat{n}$  направлен по нормали наружу из пластины; разложим момент шара в виде

$$\vec{m} = m_n \hat{n} + \vec{m}_t.$$

Его изображение имеет момент

$$\vec{m}' = m_n \hat{n} - \vec{m}_t.$$

Если центр шара находится на расстоянии  $a$  от пластины, изображение удалено от него на  $2a$ . Поле изображения в месте расположения реального диполя равно

$$\vec{B}_{\text{image}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2a)^3} (2m_n \hat{n} + \vec{m}_t).$$

Поскольку намагниченность пластины индуцирована, энергия взаимодействия равна

$$U = -\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{image}}.$$

Обозначая через  $\theta$  угол между  $\vec{m}$  и нормалью к пластине, получаем

$$U(a, \theta) = -\frac{\mu_0 m_s^2}{8\pi(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Эта энергия минимальна при

$$\theta = 0 \quad \text{или} \quad \theta = \pi.$$

Следовательно, оба направления, перпендикулярные пластине, устойчивы: к пластине и от неё. Им соответствуют первые рисунки в верхнем и нижнем рядах.

При любой из устойчивых ориентаций модуль силы притяжения равен

$$F = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(2a)^4}.$$

При соприкосновении  $a = \delta/2$ , поэтому

$$F = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \boxed{\frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}}.$$

Численно

$$F = 5.8594 \text{ N} \simeq \boxed{5.9 \text{ N}}.$$

### В.3

Обозначим через

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

площадь грани магнита, а через

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = 4A$$

площадь каждой пластины.

Магнитная проницаемость пластин очень велика, поэтому напряжённостью поля  $H$  внутри них можно пренебречь. Следовательно, каждая пластина представляет собой приближённо эквипотенциальную поверхность магнитного скалярного потенциала. Пренебрегая краевыми эффектами, получаем, что осевая составляющая напряжённости поля  $H$  одинакова в магните и в окружающем его кольцевом воздушном зазоре.

Пусть  $B_m$  — осевая составляющая магнитной индукции в магните с учётом знака, а  $B_a$  — соответствующая составляющая в кольцевом зазоре. Поскольку намагниченность фиксирована,

$$B_m = \mu_0(H + J), \quad B_a = \mu_0 H.$$

Отсюда

$$B_m - B_a = \mu_0 J.$$

Весь поток, проходящий через магнит, должен возвращаться через кольцевой зазор, поскольку внешним потоком пренебрегаем. Поэтому

$$AB_m + (A_p - A)B_a = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$B_m = \mu_0 J \left(1 - \frac{A}{A_p}\right), \quad B_a = -\mu_0 J \frac{A}{A_p}.$$

При  $A_p = 4A$

$$B_m = \frac{3}{4}\mu_0 J = 1.125 \text{ T}, \quad B_a = -\frac{1}{4}\mu_0 J = -0.375 \text{ T}.$$

Магнитное поле, нормальное к поверхности с большой магнитной проницаемостью, создаёт притягивающее давление

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

В месте контакта магнита и пластины его можно вычислить, мысленно введя бесконечно тонкую вакуумную щель: нормальная составляющая  $B$  непрерывна при переходе через неё. И центральная область, и кольцевая область обратного потока притягивают пластину внутрь независимо от противоположных направлений поля в этих областях.

Таким образом,

$$F = \frac{AB_m^2 + (A_p - A)B_a^2}{2\mu_0}.$$

Подстановка даёт

$$F = \frac{\mu_0 J^2 A}{2} \left(1 - \frac{A}{A_p}\right).$$

При  $A_p = 4A$

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32}.$$

Численно

$$F = 210.9375 \text{ N} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ N}$$

для каждой пластины.

### С.1

Введём характерную энергию дипольного взаимодействия ближайших соседей

$$\varepsilon_d = \frac{\mu_0 m_s^2}{4\pi\delta^3} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{144} = 4.8828125 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

Выберем моменты направленными вдоль горизонтальных рядов, меняя их направление на противоположное в соседних рядах. В бланке ответов моменты верхнего ряда можно направить вправо, среднего — влево, а нижнего — вправо:

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{array}$$

Рассмотрим центральный магнит, момент которого направлен вправо.

Моменты его двух горизонтальных соседей также направлены вправо, а сами соседи лежат на оси его диполя. Каждый из них даёт вклад в энергию взаимодействия

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Моменты двух его вертикальных соседей направлены влево, а сами соседи расположены в направлении, перпендикулярном его моменту. Каждый даёт вклад

$$U_{\text{vertical}} = -\varepsilon_d.$$

Следовательно, полная энергия взаимодействия центрального магнита с его соседями равна

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 2(-\varepsilon_d) = -6\varepsilon_d.$$

Все четыре соседа создают поля, направленные параллельно моменту центрального магнита, с суммарным модулем

$$B_{\text{nn}} = \frac{6\varepsilon_d}{m_s}.$$

Поворот этого магнита на угол  $\alpha$  при неподвижных соседях увеличивает энергию на

$$\Delta U = 6\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Следовательно, на него действует возвращающий момент сил.

При фиксированных узлах квадратной решётки эта конфигурация также минимизирует полную ориентационную энергию взаимодействия ближайших соседей. Чтобы это показать, запишем единичный момент в виде  $(u_i, v_i)$ . Тогда

$$\frac{U}{\varepsilon_d} = \sum_{\langle ij \rangle_x} (-2u_i u_j + v_i v_j) + \sum_{\langle ij \rangle_y} (u_i u_j - 2v_i v_j) \geq -3 \sum_i (u_i^2 + v_i^2) = -3N.$$

Неравенство следует из  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ , а предложенная полосовая конфигурация достигает этой границы вдали от краёв решётки.

Удаление центрального магнита на бесконечность устраняет его четыре связи, поэтому требуемая работа равна

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 6\varepsilon_d.$$

Множитель  $1/2$  отсутствует: каждая связь с участием удаляемого магнита учитывается один раз. Следовательно,

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Соседние ряды имеют противоположную намагниченность, что даёт **антиферромагнитный порядок**.

## C.2

Выберем все моменты направленными горизонтально вправо, включая каждый шар на рисунке в бланке ответов.

У центрального шара есть два горизонтальных соседа и четыре диагональных соседа, векторы смещения к которым образуют с моментами углы  $60^\circ$  или  $120^\circ$ .

Каждая горизонтальная пара даёт вклад

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Для параллельных моментов, образующих угол  $\beta$  с направлением соединяющего их вектора,

$$U_{\text{pair}} = \varepsilon_d(1 - 3\cos^2 \beta).$$

Поэтому каждый диагональный сосед даёт вклад

$$U_{\text{diagonal}} = \varepsilon_d \left( 1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4} \varepsilon_d.$$

Суммируя по шести связям, получаем

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 4 \left( \frac{1}{4} \varepsilon_d \right) = -3\varepsilon_d.$$

Поперечные составляющие полей соседей компенсируются. Оставшееся поле направлено вдоль момента центрального магнита и имеет модуль

$$B_{nn} = \frac{3\varepsilon_d}{m_s}.$$

Следовательно, поворот одного магнита на угол  $\alpha$  при неподвижных соседях требует энергии

$$\Delta U = 3\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Это устанавливает наличие возвращающего момента сил при повороте отдельного магнита. Однако устойчивость относительно коллективных поворотов этим не доказана: в модели взаимодействия ближайших соседей одновременный поворот всех моментов на один и тот же угол не меняет энергию, поскольку шесть направлений связей отстоят друг от друга на  $60^\circ$ , а некоторые неоднородные коллективные повороты понижают энергию.

Работа, необходимая для удаления центрального магнита, равна

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 3\varepsilon_d,$$

поэтому

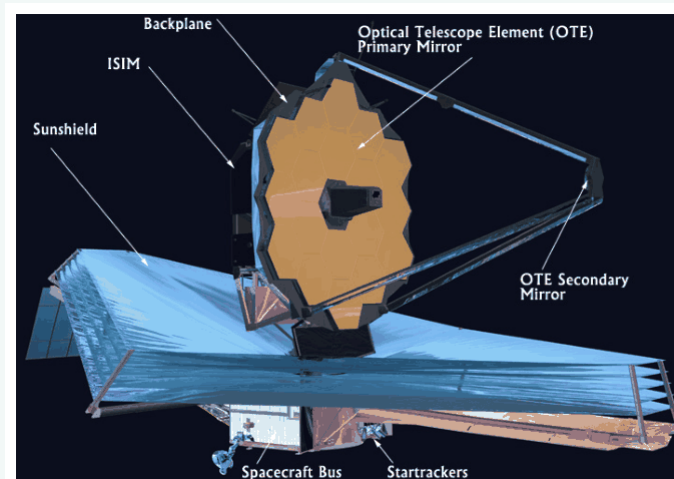
$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Все моменты направлены в одну сторону, поэтому эта конфигурация обладает **ферромагнитным порядком**.

Решение проверено по официальному решению.

## Задача 2: Космический телескоп «Джеймс Уэбб»

Эта задача посвящена физике космического телескопа «Джеймс Уэбб». Свет звезды падает на главное зеркало площадью  $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ , а затем отражается от вторичного зеркала. Фокусное расстояние системы составляет  $f = 130 \text{ m}$ . Свет фокусируется в ISIM (интегрированном модуле научных приборов), в котором находятся ПЗС-камеры (камеры на приборах с зарядовой связью).



Источник изображения: NASA

### Часть А. Изображение звезды (1.8 балла)

Ближайший красный гигант находится на расстоянии 89 световых лет, имеет температуру  $T_{\text{star}} = 3600 \text{ К}$  и диаметр  $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ м}$ .

#### А.1 — 0.4 балла

Вычислите диаметр сфокусированного изображения звезды на светочувствительной поверхности ПЗС-камеры.

#### А.2 — 0.4 балла

Оцените диаметр центрального дифракционного максимума на светочувствительной поверхности ПЗС-камеры. Примите длину волны равной  $\lambda = 800 \text{ нм}$ : на этой длине волны интенсивность излучения красного гиганта максимальна.

#### А.3 — 1.0 балла

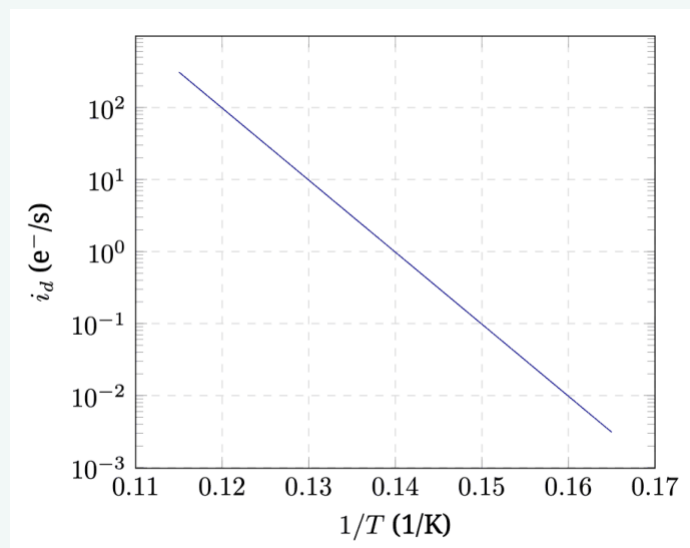
Если ПЗС не охлаждается и может отдавать тепло только за счёт излучения с верхней стороны светочувствительной поверхности, какой будет равновесная температура ПЗС в области изображения красного гиганта? Считайте поверхность ПЗС абсолютно чёрным телом. Приведите формулу и численную оценку.

### Часть В. Подсчёт фотонов (1.8 балла)

Поглощение фотона ПЗС-камерой приводит к высвобождению электрона внутри устройства. Это происходит только в том случае, если энергии фотона достаточно для возбуждения электрона через запрещённую зону шириной  $\Delta E_g$ . Считайте, что каждый фотон с достаточной энергией вызывает такой переход. Кроме того, электроны переходят через запрещённую зону вследствие теплового возбуждения в ПЗС-камере; это темновой ток  $i_d$ , измеряемый числом электронов в секунду. Его зависимость от температуры имеет вид

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}. \quad (1)$$

где  $i_0$  — постоянная.



На графике показана зависимость темнового тока от температуры. Единицы темнового тока  $\text{e}^-/\text{s}$  следует понимать как число электронов в секунду.

### В.1 — 0.4 балла

По графику темнового тока оцените порядок величины температуры удалённого источника тепловых фотонов, энергии которых едва достаточно для возбуждения электрона в пикселе.

Электроны накапливаются в конденсаторе, и по истечении времени экспозиции  $\tau$  производится их подсчёт. В этом процессе имеются три основных источника неопределённости: постоянная неопределённость подсчёта, называемая шумом считывания; пуассоновская погрешность, связанная с темновым током; и пуассоновская погрешность, связанная с регистрируемыми падающими фотонами. Пуассоновская погрешность равна квадратному корню из числа отсчётов, связанных с соответствующим процессом. Измеренное число фотонов равно числу электронов в конденсаторе за вычетом числа электронов, обусловленного темновым током.

### В.2 — 0.4 балла

Запишите выражение для полной неопределённости числа отсчётов  $\sigma_t$ , если шум считывания равен  $\sigma_r$ , темновой ток —  $i_d$ , число падающих фотонов в единицу времени —  $p$ , а время экспозиции —  $\tau$ .

В остальных вопросах этой части считайте время экспозиции равным  $\tau = 10^4$  s, а шум считывания — постоянным и равным  $\sigma_r = 14$ .

### В.3 — 0.5 балла

Примите рабочую температуру равной  $T_p = 7.5$  К. Вычислите минимальное число фотонов в единицу времени  $p$ , при котором число зарегистрированных фотонов в десять раз превышает неопределённость числа отсчётов.

### В.4 — 0.5 балла

Считая, что энергии каждого фотона едва достаточно для возбуждения электрона через запрещённую зону, определите интенсивность излучения найденного в В.3 источника фотонов на главном зеркале. Выразите ответ в  $\text{W}/\text{m}^2$

### Часть С. Пассивное охлаждение (4.4 балла)

Инфракрасную ПЗС-камеру необходимо поддерживать при низкой температуре. Первым средством для этого служит экран, защищающий от солнечного излучения.

Солнцезащитный экран состоит из пяти разнесённых отражающих слоёв в виде тонких листов (чёрные); лучистая энергия Солнца (серая) падает на первый лист слева, и часть энергии уходит через промежуток между каждой парой листов.

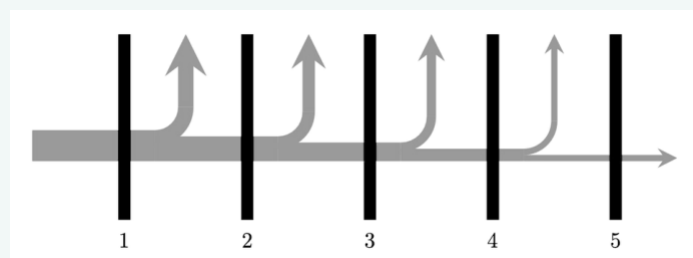
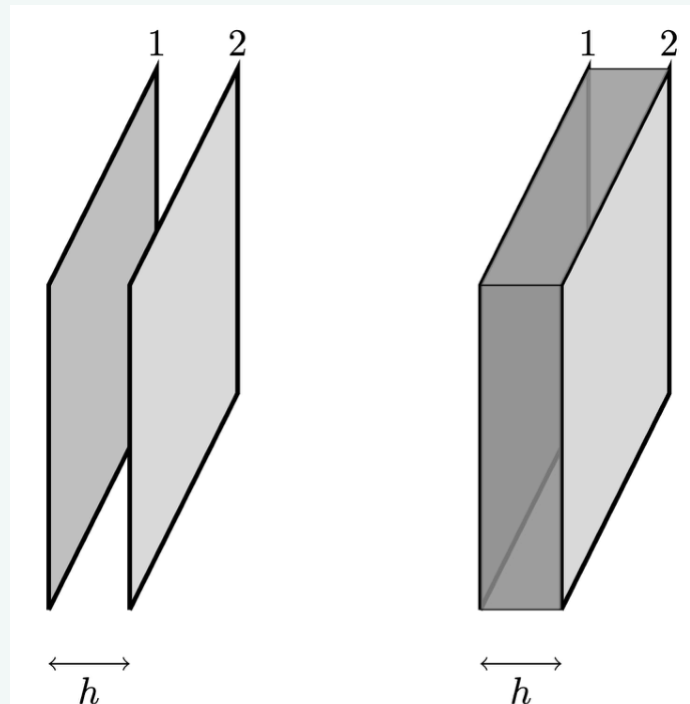


Схема потоков энергии: вертикальные линии (чёрные) — это листы, поток энергии (серый) направлен слева направо, однако между листами часть энергии уходит вверх, в космическое пространство.



Слева показана простая модель двух соседних листов 1 и 2, разделённых расстоянием  $h$ . Листы не соединены между собой, а зазор по периметру открыт в космическое пространство. Считайте листы параллельными. Листы могут обмениваться тепловым излучением, а через зазор по периметру тепловое излучение может уходить наружу. Справа зазор по периметру заштрихован для наглядности.

Примите следующие упрощения:

- Листы квадратные, площадь каждого равна  $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$ .
- Листы параллельны, расстояние между ними по периметру равно  $h = 25 \text{ cm}$ .
- Листы имеют постоянную степень черноты  $\epsilon \ll 1$ . Считайте все отражения от поверхностей листов диффузными.
- Листы тонкие; температура их передней и задней поверхностей одинакова и однородна.
- Доля потока излучения, испускаемого одним листом и поглощаемого соседним листом, равна  $\alpha \leq 1$ . Это означает, что если лист 1 на рисунке выше излучает количество теплоты  $Q_1$  в сторону листа 2, то лист 2 поглощает от листа 1 количество теплоты  $\alpha Q_1$ .
- Поток излучения, уходящий через зазор по периметру между двумя листами, приближённо равен  $\beta Q_{12}$ , где  $\alpha Q_{12}$  — результирующий поток между двумя листами. Доля  $\beta < 1$ . Иными словами, потери тепла в космическое пространство между двумя листами пропорциональны результирующему теплообмену между листами. Это грубое приближение, принятое в данной задаче.
- Фоновая температура космического пространства пренебрежимо мала.

### С.1 — 2.4 балла

Выведите выражения для равновесных температур первого и пятого листов через интенсивность падающего солнечного излучения  $I_0$ , постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  и необходимые физические постоянные. Для упрощения выражения можно ввести дополнительные постоянные через  $\alpha$ ,  $\beta$  и т. д.

### С.2 — 1.6 балла

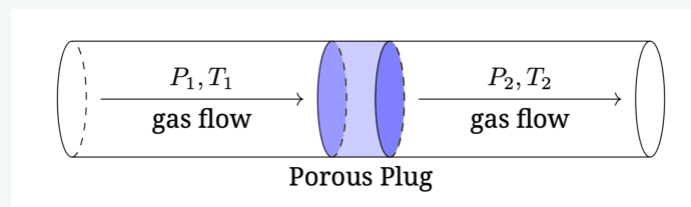
Получите численные оценки  $\alpha$  и  $\beta$  из данных о геометрии листов, считая степень черноты равной  $\epsilon = 0.05$ . Рекомендуется рассмотреть приведённую выше модель листов в виде прямоугольного ящика, в которой поверхность зазора по периметру фактически играет роль идеального поглотителя лучистой энергии.

### С.3 — 0.4 балла

Найдите численно температуры листов 1 и 5. Интенсивность солнечного излучения равна  $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$ .

### Часть D. Криогенный охладитель (4 балла)

Последняя ступень системы охлаждения непосредственно охлаждает ПЗС-камеру. В холодильной системе с замкнутым циклом по подающей трубе поступает газообразный гелий под постоянным давлением  $P_1$ , который проходит через губчатую пористую пробку в трубу с постоянным давлением  $P_2$ . По этой трубе газ направляется к ПЗС для её охлаждения. Затем газообразный гелий проходит через насос и возвращается в подающую трубу.



Газообразный гелий, поступающий слева при определённых давлении  $P_1$  и температуре  $T_1$ , продавливается через пробку в область с определёнными давлением  $P_2$  и температурой  $T_2$ , откуда отводится вправо.

При движении газа через пористую пробку существенную роль играет вязкое трение о стенки узких каналов в губке; однако в ходе процесса газ не получает и не отдаёт тепла. Скорость направленного движения газа в области 2 лишь немного превышает скорость направленного движения газа в области 1.

Гелий не является идеальным газом, но на протяжении всего процесса остаётся в газообразном состоянии.

### D.1 — 1.0 балла

Рассмотрите один моль газа, проходящий через пробку слева направо. Заполните таблицу в бланке ответов, поставив «>» или «<», чтобы указать, какая величина обязательно больше, «=», если величины обязательно равны, или «?», если без дополнительной информации нельзя определить, какая из величин больше или равны ли они.

| Quantity Name   | State 1 | Compare using ">", "<", "=", or "?" | State 2 |
|-----------------|---------|-------------------------------------|---------|
| Internal Energy | $U_1$   |                                     | $U_2$   |
| Temperature     | $T_1$   |                                     | $T_2$   |
| Entropy         | $S_1$   |                                     | $S_2$   |
| Pressure        | $P_1$   |                                     | $P_2$   |
| Volume          | $V_1$   |                                     | $V_2$   |

### D.2 — 0.6 балла

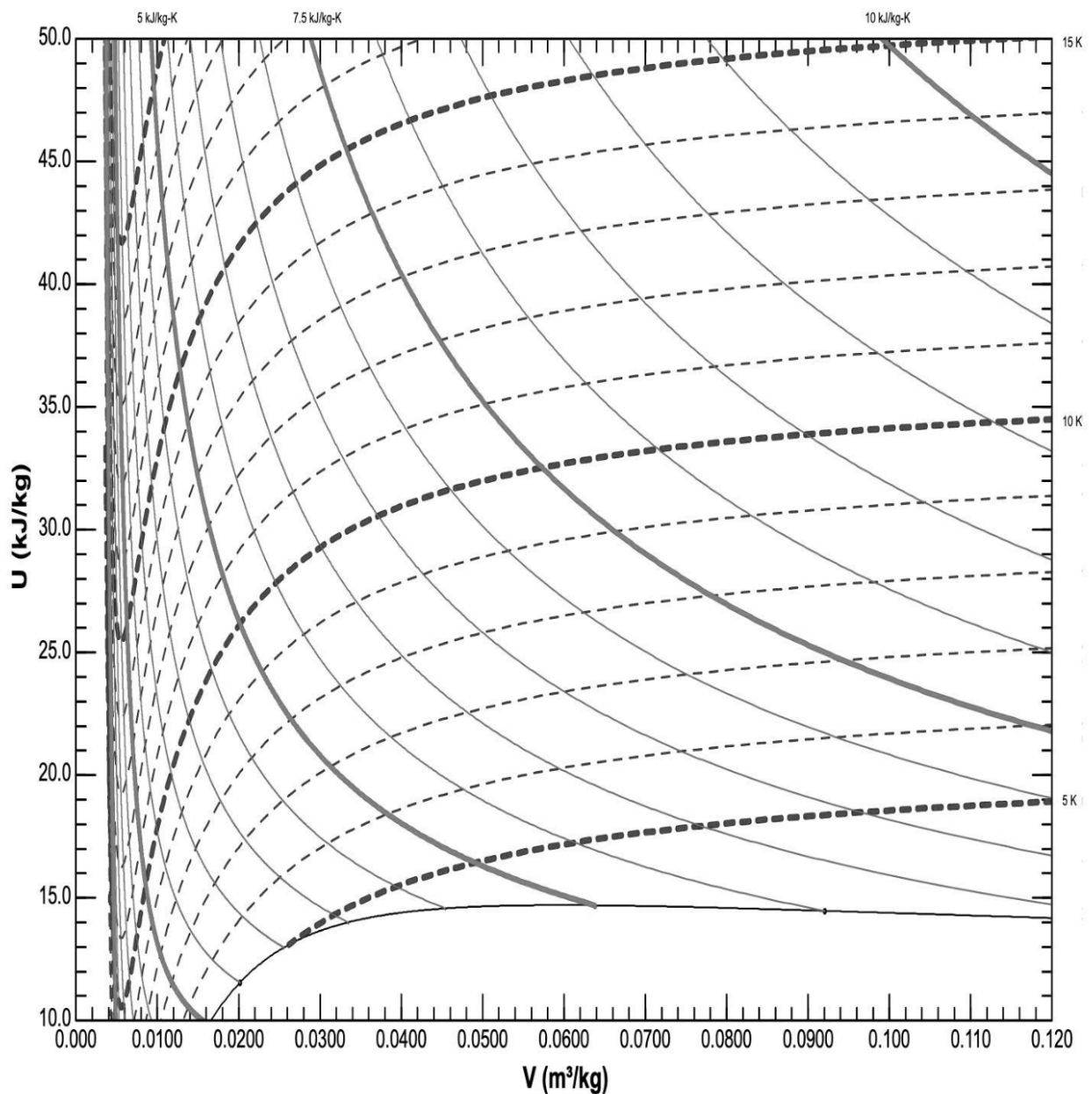
Найдите сохраняющуюся величину, составленную из  $U$  (внутренней энергии),  $P$  (давления) и  $V$  (объёма), при прохождении одного моля газа через пробку; покажите, как вы получили эту сохраняющуюся величину.

В бланках ответов приведены графики зависимости внутренней энергии единицы массы гелия от объёма единицы массы с изотермами и линиями постоянной энтропии.

### D.3 — 1.4 балла

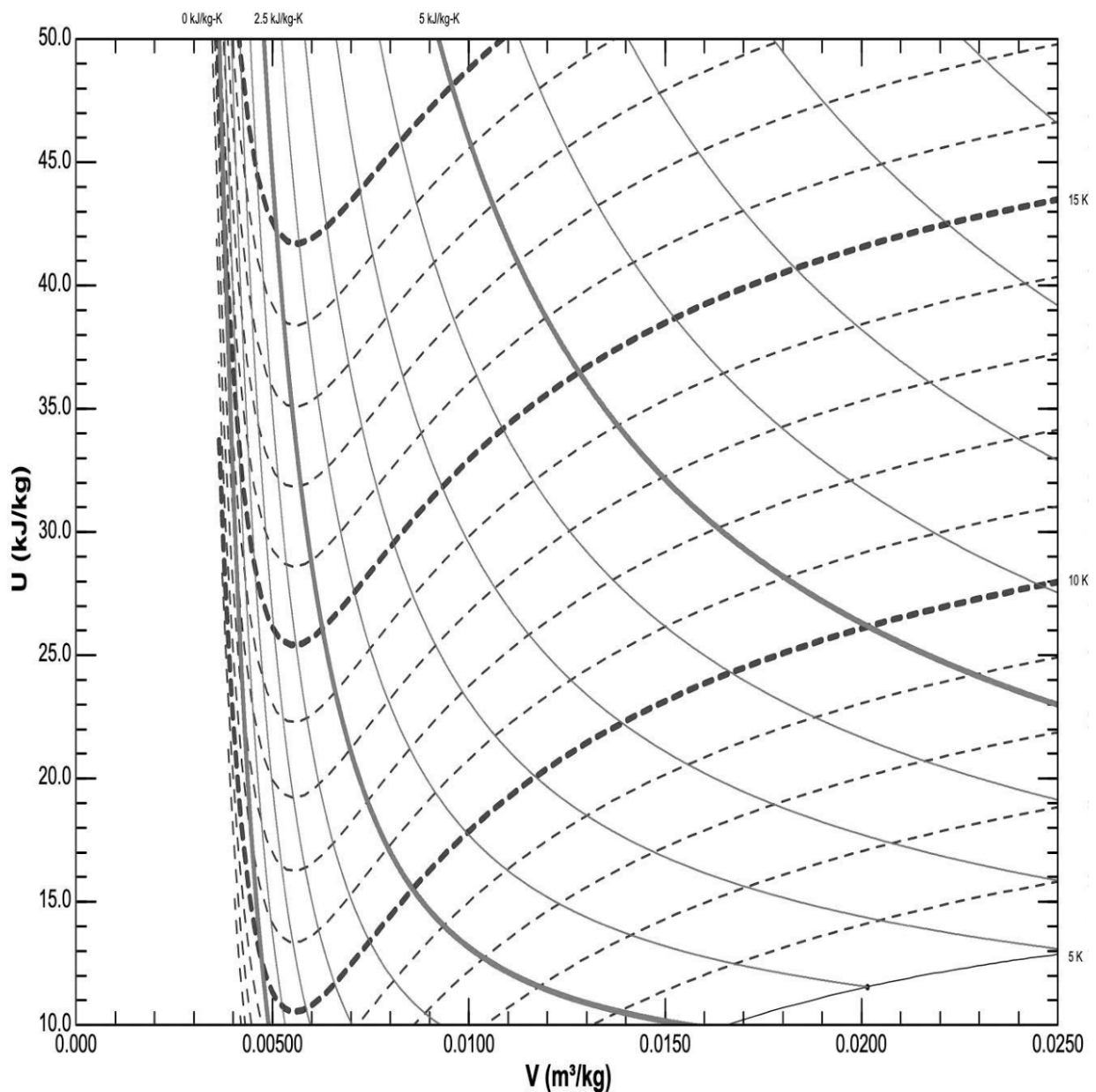
Считая, что  $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$  и  $T_2 = 7.5 \text{ K}$ , найдите по графику численное значение сохраняющейся величины, полученной в части D.2. Покажите построение на графике!

Solid curves (trending down with increasing volume) are constant entropy  $S$ ; values for the bold curves are on top.  
Dashed curves (trending up with increasing volume) are constant temperature  $T$ ; values for the bold curves are on right.  
Internal energy (per kg)  $U$  is on vertical axis; volume (per kg)  $V$  is on horizontal axis



#### D.4 — 0.8 балла

Найдите максимально возможную температуру  $T_1$ . Покажите построение на графике!



#### D.5 — 0.2 балла

Используя найденное в D.4 максимальное значение  $T_1$ , найдите численное значение  $P_1$ .

#### Физические постоянные

Ниже приведён список физических постоянных, которые могут понадобиться при решении наряду с величинами, указанными в условии задачи.

| Физическая постоянная    | Обозначение     | Численное значение                                                                      |
|--------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Скорость света в вакууме | $c$             | 299 792 458 m/s                                                                         |
| Магнитная постоянная     | $\mu_0$         | $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ V s/(A m)}]$          |
| Электрическая постоянная | $\varepsilon_0$ | $8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ A s/(V m)}]$ |

| Физическая постоянная            | Обозначение        | Численное значение                                                                       |
|----------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Элементарный заряд               | $e$                | $1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad [1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$ |
| Масса покоя электрона            | $m_e$              | $9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$                                             |
| Масса покоя протона              | $m_p$              | $1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$                                            |
| Масса покоя нейтрона             | $m_n$              | $1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$                                            |
| Атомная единица массы            | $m_{\text{amu}}$   | $1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$                                            |
| Гравитационная постоянная        | $G$                | $6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$                    |
| Постоянная Авогадро              | $N_A$              | $6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                                              |
| Универсальная газовая постоянная | $R$                | $8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$                           |
| Постоянная Больцмана             | $k_B$              | $1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$                                                    |
| Постоянная Стефана — Больцмана   | $\sigma$           | $5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$                |
| Постоянная Планка                | $h$                | $6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$                                     |
| Приведённая постоянная Планка    | $\hbar = h/(2\pi)$ | $1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$                             |

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- **A.1:**  $d_{\text{image}} \simeq 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}$ .
- **A.2:**  $d_{\text{diff}} \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}$ , при использовании эквивалентной круглой апертуры.
- **A.3:** При расстоянии  $L$  и равномерно нагретом дифракционном пятне

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left( \frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4} \simeq 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

- **B.1:** Оценка по характерной энергии даёт  $T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}$ , поскольку  $|\Delta E_g|/k_B \simeq 1.4 \times 10^3 \text{ K}$ . Критерий, основанный на длине волны максимума спектра, даёт вместо этого приблизительно  $2.8 \times 10^2 \text{ K}$ .
- **B.2:**  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p \tau}$ .
- **B.3:**  $p_{\text{min}} \simeq 0.22 \text{ s}^{-1}$ .
- **B.4:**  $I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$ .

- **C.1:** Введём

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \quad K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha}.$$

Тогда

$$T_1 = \left[ \frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}, \quad T_5 = \left[ \frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}.$$

- **C.2:**  $\alpha \simeq 0.293$ ,  $\beta \simeq 0.414$ .
- **C.3:**  $T_1 \simeq 360 \text{ K}$ ,  $T_5 \simeq 120 \text{ K}$ .
- **D.1:** В порядке строк таблицы: ?, ?, <, >, <.
- **D.2:**  $H = U + PV$ , если пренебречь малым изменением кинетической энергии направленного движения.
- **D.3:**  $H/m \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}$ , что для гелия эквивалентно приблизительно  $160 \text{ J/mol}$ .
- **D.4:**  $T_{1,\max} \simeq 11 \text{ K}$ .
- **D.5:**  $P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}$ .

## Решение

### A.1

Обозначим расстояние до звезды через  $L$ . Используя соотношение 1 световой год  $\simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$ , получаем

$$L \simeq 89(9.46 \times 10^{15}) = 8.42 \times 10^{17} \text{ m}.$$

Поскольку  $L \gg f$ , изображение находится практически в фокальной плоскости. Угловой диаметр звезды равен  $d_o/L$ , поэтому

$$d_{\text{image}} = f \frac{d_o}{L} = \frac{130(1.7 \times 10^{11})}{8.42 \times 10^{17}} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Таким образом,

$$d_{\text{image}} \simeq 26 \mu\text{m}.$$

### A.2

Заменим главное зеркало круглой апертурой той же площади:

$$D = 2\sqrt{\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi}} = 5.64 \text{ m}.$$

Для круглой апертуры угловой радиус первого дифракционного минимума равен  $1.22\lambda/D$ . Следовательно, диаметр центрального максимума равен

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{\lambda f}{D}.$$

Численно

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{(800 \times 10^{-9})(130)}{5.64} = 4.50 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Следовательно,

$$d_{\text{diff}} \simeq 45 \mu\text{m}.$$

Дифракционный диаметр превышает диаметр геометрического изображения.

### A.3

Будем считать звезду абсолютно чёрным телом и пренебрежём оптическими потерями. Её светимость равна

$$P_{\text{star}} = 4\pi \left( \frac{d_o}{2} \right)^2 \sigma T_{\text{star}}^4.$$

Поэтому мощность, собираемая зеркалом, составляет

$$P_{\text{collected}} = A_{\text{mirror}} \frac{P_{\text{star}}}{4\pi L^2} = A_{\text{mirror}} \sigma T_{\text{star}}^4 \frac{d_o^2}{4L^2} \simeq 2.43 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

Для требуемой оценки примем диаметр освещённого пятна равным большему из геометрического и дифракционного диаметров:

$$d_{\text{spot}} \simeq d_{\text{diff}}, \quad A_{\text{spot}} \simeq \frac{\pi d_{\text{diff}}^2}{4}.$$

Приближённно будем считать нагрев равномерным по всему пятну. Поскольку излучает только верхняя поверхность, условие равновесия имеет вид

$$P_{\text{collected}} = \sigma A_{\text{spot}} T_{\text{image}}^4.$$

Таким образом,

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left( \frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4}$$

и

$$T_{\text{image}} \simeq 405 \text{ K} \approx 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

Эта оценка не учитывает подробное распределение интенсивности в дифракционной картине и энергию в её внешних кольцах. В пределе геометрической оптики подстановка  $d_{\text{spot}} = f d_o / L$  дала бы вместо этого

$$T_{\text{image,geom}} = T_{\text{star}} \left( \frac{A_{\text{mirror}}}{\pi f^2} \right)^{1/4} \simeq 530 \text{ K}.$$

### B.1

Логарифмируя закон зависимости темнового тока, получаем

$$\ln i_d = \ln i_0 - \frac{|\Delta E_g|}{6k_B} \frac{1}{T}.$$

Из графика видно, что при увеличении  $1/T$  от  $0.12 \text{ K}^{-1}$  до  $0.16 \text{ K}^{-1}$  ток уменьшается от  $10^2$  до  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Поэтому

$$\frac{\Delta \ln i_d}{\Delta(1/T)} = \frac{\ln(10^{-4})}{0.04 \text{ K}^{-1}} = -100 \ln 10 \text{ K}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\Delta E_g|}{k_B} = 600 \ln 10 \text{ K} \simeq 1.38 \times 10^3 \text{ K},$$

или

$$|\Delta E_g| \simeq 1.91 \times 10^{-20} \text{ J} \simeq 0.119 \text{ eV}.$$

Используя оценку характерной тепловой энергии  $E_\gamma \sim k_B T$ , получаем

$$T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}.$$

Численный множитель здесь зависит от выбора критерия. Пороговая длина волны равна

$$\lambda_g = \frac{hc}{|\Delta E_g|} \simeq 10.4 \mu\text{m}.$$

Если под словами «едва достаточно» понимать достижение этого порога длиной волны максимума теплового спектра, то закон смещения Вина и заданное положение максимума спектра звезды дают

$$T_{\text{source}} \simeq 3600 \text{ K} \frac{0.800 \mu\text{m}}{10.4 \mu\text{m}} \simeq 2.8 \times 10^2 \text{ K}.$$

Оба расчёта определяют соответствующий температурный масштаб; у теплового спектра нет резкой верхней границы энергии фотонов.

## B.2

Среднее число зарегистрированных фотонов равно  $p\tau$ , а среднее число темновых отсчётов —  $i_d\tau$ . Их пуассоновские дисперсии равны соответствующим средним значениям.

При независимых источниках шума дисперсии складываются:

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau.$$

Следовательно,

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau}.$$

Вычитание известного среднего числа темновых отсчётов устраняет его средний вклад, но сохраняет статистические флуктуации.

## B.3

Прямая на графике приближённо соответствует зависимости

$$i_d(T) = 10^{14-100 \text{ K}/T} \text{ s}^{-1}.$$

При  $T_p = 7.5 \text{ K}$

$$i_d = 10^{14-100/7.5} = 10^{2/3} \simeq 4.64 \text{ s}^{-1}.$$

Обозначим ожидаемое число фотонов через  $N = p\tau$ . Предельное условие имеет вид

$$N = 10\sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + N}.$$

Возведя в квадрат и решив полученное квадратное уравнение, находим положительный корень

$$N = 50 + \sqrt{2500 + 100(\sigma_r^2 + i_d\tau)}.$$

При  $\sigma_r = 14$  и  $\tau = 10^4$  s

$$N \simeq 2.21 \times 10^3.$$

Таким образом,

$$p_{\min} = \frac{N}{\tau} \simeq 0.221 \text{ s}^{-1} \approx 0.22 \text{ s}^{-1}.$$

#### В.4

Каждый пороговый фотон имеет энергию  $|\Delta E_g|$ . При единичной эффективности регистрации и сборе света без потерь требуемая мощность на зеркале равна  $p|\Delta E_g|$ . Поэтому

$$I = \frac{p|\Delta E_g|}{A_{\text{mirror}}}.$$

Подстановка даёт

$$I = \frac{(0.221)(1.91 \times 10^{-20})}{25} \simeq 1.69 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

Следовательно,

$$I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

#### С.1

Пусть  $A = A_{\text{sheet}}$ ; обозначим мощность, излучаемую одной стороной листа  $i$ , через

$$q_i = \epsilon \sigma A T_i^4.$$

По закону Кирхгофа постоянная степень черноты равна также поглощательной способности, поэтому лист 1 поглощает солнечную мощность

$$P_{\odot} = \epsilon I_0 A.$$

Следуя заданной модели утечки энергии при её переносе слева направо, определим результирующую мощность, получаемую листом  $i + 1$  из предшествующего зазора, как

$$F_i = \alpha(q_i - q_{i+1}).$$

Сопутствующая мощность, уходящая через этот зазор наружу, равна

$$L_i = \beta(q_i - q_{i+1}) = \frac{\beta}{\alpha} F_i.$$

Таким образом, полная мощность, поступающая в зазор с его более горячей стороны, равна

$$F_i + L_i = r F_i, \quad r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Для каждого промежуточного листа условие равновесия имеет вид

$$F_{i-1} = r F_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

Последний лист излучает со своей внешней стороны мощность  $q_5$ , поэтому

$$F_4 = q_5.$$

Последовательно переходя к предыдущим зазорам, получаем

$$F_3 = r q_5, \quad F_2 = r^2 q_5, \quad F_1 = r^3 q_5.$$

Разностям температур соответствует соотношение

$$q_i - q_{i+1} = \frac{F_i}{\alpha}.$$

Сложив все четыре разности, получаем

$$q_1 - q_5 = \frac{q_5}{\alpha}(1 + r + r^2 + r^3).$$

Введём

$$K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha};$$

тогда  $q_1 = Kq_5$ .

Наконец, первый лист теряет мощность  $q_1$  через поверхность, обращённую к Солнцу, и  $rF_1$  в первый зазор:

$$\epsilon I_0 A = q_1 + rF_1 = (K + r^4)q_5.$$

Используя  $q_5 = \epsilon \sigma A T_5^4$ , получаем

$$T_5 = \left[ \frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}$$

и, поскольку  $T_1^4 = K T_5^4$ ,

$$T_1 = \left[ \frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}.$$

Явные множители  $\epsilon A$  сокращаются; степень черноты по-прежнему влияет на  $\alpha$  и  $\beta$ .

## C.2

Длина стороны листа равна

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ m}.$$

Площадь отверстия по периметру составляет

$$A_{\text{gap}} = 4ah = 4(14.14)(0.25) = 14.14 \text{ m}^2.$$

Поскольку листы обладают высокой отражательной способностью, а отражения диффузные, будем приближённо считать, что после многократных отражений излучение внутри ящика хорошо перемешано. Тогда вероятности поглощения пропорциональны поглощающей площади.

Эффективная поглощающая площадь каждого листа равна  $\epsilon A$ , а отверстие действует как абсолютно чёрный поглотитель с эффективной площадью  $A_{\text{gap}}$ . Поэтому полная эффективная поглощающая площадь равна

$$2\epsilon A + A_{\text{gap}}.$$

Доля излучения, в конечном счёте поглощаемая другим листом, приближённо равна

$$\alpha \simeq \frac{\epsilon A}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

Доля излучения, уходящая наружу, приближённо равна

$$\beta \simeq \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

При  $\epsilon A = 0.05(200) = 10 \text{ m}^2$

$$\alpha \simeq \frac{10}{20 + 14.14} = 0.293,$$

$$\beta \simeq \frac{14.14}{20 + 14.14} = 0.414.$$

Оставшаяся доля, приблизительно равная  $\alpha$ , возвращается к излучающему листу и поглощается им; соответственно, в этой оценке  $2\alpha + \beta = 1$ .

### C.3

Полученные выше оценки дают

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2.414,$$

$$r^4 \simeq 33.97, \quad K \simeq 80.60, \quad K + r^4 \simeq 114.57.$$

Следовательно,

$$T_5 = \left[ \frac{1360}{(5.670374419 \times 10^{-8})(114.57)} \right]^{1/4} \simeq 120.3 \text{ K},$$

и

$$T_1 = K^{1/4} T_5 \simeq 360.4 \text{ K}.$$

Таким образом,

$$T_1 \simeq 360 \text{ K}, \quad T_5 \simeq 120 \text{ K}.$$

### D.1

В таблицу следует внести:

| Величина           | Сравнение   |
|--------------------|-------------|
| Внутренняя энергия | $U_1 ? U_2$ |
| Температура        | $T_1 ? T_2$ |
| Энтропия           | $S_1 < S_2$ |
| Давление           | $P_1 > P_2$ |
| Объём              | $V_1 < V_2$ |

Перепад давления вызывает течение через оказывающую сопротивление пробку, поэтому  $P_1 > P_2$ . Вязкая диссипация делает адиабатический процесс необратимым, откуда  $S_2 > S_1$ .

При показанных одинаковых поперечных сечениях труб закон сохранения массы для установившегося течения даёт

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2,$$

где  $w$  — скорость направленного движения. Поскольку  $w_2 > w_1$ , плотность уменьшается, а объём, занимаемый одним молекул, увеличивается.

Для реального газа при дросселировании нет универсального направления изменения ни внутренней энергии, ни температуры. Для их сравнения необходима дополнительная информация о состояниях.

## D.2

Проследим за одним молекул, проходящим через пробку. Газ перед пробкой совершает над этим молекул работу  $P_1 V_1$ , а сам этот молекул совершает над газом за пробкой работу  $P_2 V_2$ .

Теплообмен отсутствует. Пренебрегая малым изменением кинетической энергии направленного движения, из первого начала термодинамики получаем

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2.$$

Перегруппировав слагаемые, находим

$$U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.$$

Таким образом, сохраняющейся величиной является энтальпия:

$$H = U + PV.$$

Точнее, при установившемся адиабатическом течении сохраняется величина  $h + w^2/2$  на единицу массы. Указанное приближение позволяет пренебречь разностью кинетических энергий.

## D.3

Для ясности обозначим через  $u$  и  $v$  удельную внутреннюю энергию и удельный объём, обозначенные на графиках через  $U$  и  $V$ .

Термодинамическое тождество имеет вид

$$du = T ds - P dv.$$

Вдоль линии постоянной энтропии

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -P.$$

Следовательно, касательная к изоэнтропе в точке  $(v, u)$  задаётся уравнением

$$u_{\text{tan}}(x) = u - P(x - v) = (u + Pv) - Px.$$

Её отрезок на вертикальной оси в точности равен удельной энтальпии:

$$h = u + Pv.$$

Требуемое построение на изображении 9:

1. Найдите  $v_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ .
2. С помощью интерполяции найдите точку на изотерме  $7.5 \text{ K}$ .
3. В этой точке состояния проведите касательную к проходящей через неё линии постоянной энтропии.
4. Продлите касательную до  $v = 0$ ; считайте её отрезок на вертикальной оси.

Для этого состояния приближённо

$$u_2 \simeq 26 \text{ kJ/kg}.$$

Наклон касательной приближённо равен

$$-P_2 \simeq -140 \text{ kPa}.$$

Следовательно,

$$h_2 = u_2 + P_2 v_2 \simeq 26 + (140)(0.100) = 40 \text{ kJ/kg}.$$

Таким образом,

$$h_1 = h_2 \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

Для гелия с молярной массой приблизительно  $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  это соответствует

$$H_{\text{molar}} \simeq 160 \text{ J/mol}.$$

#### D.4

Все допустимые состояния на входе должны иметь одну и ту же удельную энтальпию  $h_0 \simeq 40 \text{ kJ/kg}$ .

Графическое построение на изображении 10:

1. Отметьте точку  $(0, h_0)$  на вертикальной оси.
2. Проведите из этой точки касательные к нескольким сплошным линиям постоянной энтропии.
3. Отметьте точки касания. В каждой такой точке  $u + Pv = h_0$ , поэтому эти точки образуют линию постоянной энтальпии.
4. Найдите пунктирную изотерму с наибольшей температурой, которой достигает эта линия. При максимальной температуре линия постоянной энтальпии касается этой изотермы.

Предельное касание находится вблизи изотермы 11 K; приблизительные значения, считываемые с графика, равны

$$v_1 \sim 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}, \quad u_1 \sim 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

График позволяет оценить максимум примерно как 10.5–11 K, поэтому

$$T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}.$$

#### D.5

Давление равно модулю наклона касательной к изоэнтропе в выбранной точке состояния на входе. Эквивалентно,

$$P_1 = \frac{h_0 - u_1}{v_1}.$$

Используя приблизительные координаты, считанные с графика, получаем

$$P_1 \simeq \frac{(40 - 21) \times 10^3}{1.0 \times 10^{-2}} = 1.9 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

С точностью, которую позволяет график,

$$P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

---

Решение проверено по официальному решению.

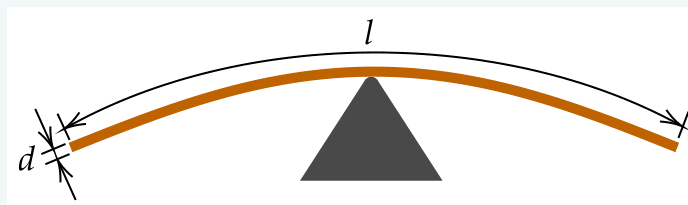
## Задача 3: Законы масштабирования

Законы масштабирования описывают функциональную зависимость между двумя физическими величинами, которые изменяются согласованно в широком диапазоне. Эта функциональная зависимость может быть степенной, но возможны и другие варианты. Часто получить точные выражения не удаётся, однако законы масштабирования всё же можно вывести.

### Часть А. Спагеттина (2.0 балла)

#### А.1 2.0 балла

Спагеттину диаметром  $d$  удерживают в горизонтальном равновесии, поддерживая её посередине. При  $d = 1 \text{ mm}$  спагеттина ломается под собственным весом, когда её длина достигает  $l = 50 \text{ cm}$ . Какова максимальная длина  $l'$  спагеттины диаметром  $d' = 1 \text{ cm}$ , при которой она ещё не ломается под собственным весом?



### Часть В. Замок из песка (2.0 балла)

#### В.1 2.0 балла

Средний объём песчинки крупнозернистого песка в 10 раз больше, чем мелкозернистого. Влажный мелкозернистый и влажный крупнозернистый песок имеют оптимальное содержание воды (то есть такое, при котором прочность сооружений из них максимальна) и используются для изготовления двух цилиндров совершенно одинаковой формы и размеров. Прочность каждого цилиндра проверяют, сжимая его между двумя параллельными пластинами. Цилиндр из крупнозернистого песка разрушается, когда сила, сжимающая пластины, достигает  $F_c = 10 \text{ N}$ . Какова сила  $F_f$ , необходимая для разрушения цилиндра из мелкозернистого песка? Влиянием силы тяжести можно пренебречь.

### Часть С. Межзвёздное путешествие (2.0 балла)

#### С.1 2.0 балла

Космический корабль межзвёздной экспедиции движется с постоянным по модулю собственным ускорением  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , то есть ускорением корабля в инерциальной системе отсчёта, в которой он в данный момент покоится. Пассажиры должны иметь возможность вернуться на Землю в течение оставшегося ожидаемого срока их жизни, составляющего 50 лет. Максимальное расстояние от Земли, которого достигает корабль, равно  $d$ . Если увеличить ускорение до  $g' = 15 \text{ m/s}^2$ , корабль сможет достичь большего расстояния  $d'$ . Чему равно отношение  $d'/d$ ?

*Подсказка 1.* Можно воспользоваться релятивистской формулой сложения скоростей, однако существуют и другие подходы.

Подсказка 2. Вам могут понадобиться гиперболические функции, определяемые следующим образом:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Подсказка 3. В зависимости от выбранного подхода вам могут понадобиться один или несколько из следующих интегралов:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = a \tanh x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = a \sinh x + C, \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

где  $a \sinh x$  и  $a \tanh x$  — функции, обратные соответствующим гиперболическим функциям.

## Часть D. Ощущение погружения (2.0 балла)

### D.1 2.0 балла

Сплошной деревянный шар радиуса  $r_0$  плавает в воде. Если бы трением можно было пренебречь, частота малых колебаний была бы равна  $\omega_0$ , но из-за вязкого трения частота затухающих колебаний после смещения шара по вертикали в действительности равна  $0.99 \omega_0$ . Каков минимальный радиус  $r_{\min}$  деревянного шара, плавающего в воде, который после смещения совершает малые колебания? Подсказка: сила вязкого сопротивления, действующая на данное тело, пропорциональна его скорости относительно основной массы жидкости и вязкости  $\eta$  жидкости, в которой оно движется. Единица измерения вязкости —  $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ .

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- **A.1:**  $l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}} = 0.50 \sqrt{10} \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$
- **B.1:**  $F_f = 10^{1/3} F_c = 10^{4/3} \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$
- **C.1:** При  $T = 50$  лет, измеренном по часам пассажиров,

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1} \approx 4.8 \times 10^2.$$

- **D.1:**  $r_{\min} = (1 - 0.99^2)^{1/3} r_0 \approx 0.27 r_0$ . Это критический радиус; для возникновения колебаний необходимо  $r > r_{\min}$ .

## Решение

### A.1

Предположим, что плотность и разрушающее напряжение спагеттин одинаковы при обоих диаметрах, и воспользуемся приближением тонкой балки. Площадь поперечного сечения изменяется по закону  $A \propto d^2$ , поэтому вес единицы длины равен

$$q = \rho g_E A \propto d^2,$$

где  $g_E$  — ускорение свободного падения.

Рассмотрим одну половину спагеттины. Её вес равен  $ql/2$  и приложен на расстоянии  $l/4$  от центральной опоры. Следовательно, наибольший изгибающий момент, возникающий посередине, равен

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8} \propto d^2 l^2.$$

При изгибе балки максимальное продольное напряжение равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}(d/2)}{I},$$

где момент инерции площади поперечного сечения удовлетворяет соотношению  $I \propto d^4$ . Следовательно,

$$\sigma_{\max} \propto \frac{l^2}{d}.$$

Разрушение происходит при одном и том же напряжении в материале, поэтому

$$\frac{l'^2}{d'} = \frac{l^2}{d}, \quad l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}}.$$

Поскольку  $d'/d = 10$ ,

$$l' = 0.50\sqrt{10} \text{ m} = 1.581 \dots \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$$

## В.1

Влажный песок удерживается вместе капиллярными силами, создаваемыми водяными перемычками между песчинками. Пусть  $a$  — характерный размер песчинки, а  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения воды. Предположим, что форма песчинок, их упаковка и свойства смачивания подобны. При оптимальном содержании воды геометрические размеры перемычек изменяются пропорционально  $a$ .

Капиллярная сила в месте контакта изменяется по закону

$$f_{\text{cap}} \propto \gamma a.$$

Это следует либо из рассмотрения силы поверхностного натяжения, действующей вдоль линии контакта, длина которой пропорциональна  $a$ , либо из рассмотрения капиллярного давления порядка  $\gamma/a$ , действующего на площадь порядка  $a^2$ .

Число контактов, передающих силу через фиксированную макроскопическую площадь  $S$ , изменяется по закону  $S/a^2$ . Поэтому характерное напряжение, обусловленное сцеплением, изменяется по закону

$$\sigma_{\text{coh}} \propto \frac{f_{\text{cap}}}{a^2} \propto \frac{\gamma}{a}.$$

Для цилиндров одинаковой формы и размеров разрушающая нагрузка при сжатии подчиняется тому же закону масштабирования:

$$F_{\text{break}} \propto \frac{1}{a}.$$

Поскольку объём песчинки пропорционален  $a^3$ ,

$$\frac{a_c}{a_f} = \left( \frac{V_c}{V_f} \right)^{1/3} = 10^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{a_c}{a_f} = 10^{1/3},$$

откуда

$$F_f = 10 \cdot 10^{1/3} \text{ N} = 21.54 \dots \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$$

### С.1

Будем считать систему отсчёта Земли инерциальной, пренебрежём гравитационными полями и рассмотрим прямолинейное путешествие, в начале и в конце которого корабль покоится относительно Земли. Доступные 50 лет — это **собственное время** пассажиров, обозначаемое  $T$ . Смену направления ускорения будем считать мгновенной.

Сначала выведем выражение для перемещения при постоянном собственном ускорении. Определим быстроту

$$\theta = \operatorname{atanh}(v/c).$$

За интервал собственного времени  $d\tau$  изменение скорости в мгновенной системе покоя равно  $g d\tau$ . Релятивистское сложение скоростей в первом порядке даёт

$$dv = g \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) d\tau,$$

и, следовательно,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{g}{c}.$$

При движении из состояния покоя

$$\theta = \frac{g\tau}{c}, \quad v = c \tanh \theta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{d\tau} = v \frac{dt}{d\tau} = c \sinh \left( \frac{g\tau}{c} \right).$$

Интегрируя, получаем

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[ \cosh \left( \frac{g\tau}{c} \right) - 1 \right].$$

Чтобы за заданное собственное время удалиться на максимальное расстояние, начиная и заканчивая путь от Земли в состоянии покоя, корабль должен первую половину этого времени разгоняться от Земли, а вторую половину — тормозить. Действительно, если собственная продолжительность пути от Земли равна  $L$ , быстрота корабля ограничена неравенством

$$\theta(\tau) \leq \frac{g}{c} \min(\tau, L - \tau).$$

При движении с разгоном и последующим торможением эта граница достигается, что обеспечивает максимальное перемещение, поскольку  $dx/d\tau = c \sinh \theta$  возрастает с  $\theta$ .

Обратный путь на то же расстояние требует такого же минимального собственного времени. Таким образом, оптимальное путешествие туда и обратно состоит из четырёх равных интервалов:

1. Разгон от Земли.
2. Торможение до остановки на максимальном расстоянии.
3. Разгон в сторону Земли.
4. Торможение до остановки у Земли.

Каждый интервал длится  $T/4 = 12.5$  лет. За два интервала пути от Земли корабль проходит одинаковые расстояния, поэтому

$$d(g) = \frac{2c^2}{g} \left[ \cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right].$$

Следовательно,

$$\boxed{\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1}}.$$

Используя  $c \simeq 3.00 \times 10^8$  м/с и 1 год  $\simeq 3.156 \times 10^7$  с, получаем

$$\frac{gT}{4c} \simeq 13.15, \quad \frac{g'T}{4c} \simeq 19.72.$$

Оба аргумента велики, поэтому  $\cosh x - 1 \simeq e^x/2$ . Таким образом,

$$\frac{d'}{d} \simeq \frac{g}{g'} \exp\left(\frac{(g' - g)T}{4c}\right) \simeq \frac{2}{3} e^{6.575}.$$

В результате получаем

$$\boxed{\frac{d'}{d} \approx 4.8 \times 10^2}.$$

## D.1

Предположим, что все шары изготовлены из одной и той же древесины, их равновесное погружение определяется выталкивающей силой и применима указанная модель линейного вязкого сопротивления.

При малом смещении вниз на  $z$  дополнительный погружённый объём равен  $A_w z$ , где  $A_w$  — площадь сечения шара на уровне поверхности воды. Приращение выталкивающей силы создаёт возвращающую силу

$$F_{\text{rest}} = -kz, \quad k = \rho_w g_E A_w.$$

Доля объёма, погружённая в равновесии, определяется отношением плотности древесины к плотности воды. Поэтому равновесные положения плавающих шаров геометрически подобны, откуда

$$A_w \propto r^2, \quad k \propto r^2, \quad m \propto r^3.$$

Следовательно, угловая частота незатухающих колебаний удовлетворяет соотношению

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \propto r^{-1}.$$

Запишем силу вязкого сопротивления в виде

$$F_{\text{visc}} = -b\dot{z}.$$

Поскольку она пропорциональна вязкости и скорости, анализ размерностей для геометрически подобных тел даёт

$$b = C\eta r \propto r,$$

где  $C$  — безразмерный геометрический коэффициент.

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0.$$

Определим коэффициент затухания

$$\beta = \frac{b}{2m} \propto r^{-2}.$$

В колебательном режиме частота колебаний равна

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}.$$

При радиусе  $r_0$  из заданных частот следует

$$(0.99\omega_0)^2 = \omega_0^2 - \beta_0^2,$$

поэтому

$$\frac{\beta_0^2}{\omega_0^2} = 1 - 0.99^2 = 0.0199.$$

Объединяя зависимости от радиуса, получаем

$$\frac{\beta^2(r)}{\Omega^2(r)} = 0.0199 \left( \frac{r_0}{r} \right)^3.$$

Колебания возникают, когда это отношение меньше единицы. Следовательно, критический радиус удовлетворяет уравнению

$$0.0199 \left( \frac{r_0}{r_{\min}} \right)^3 = 1,$$

откуда

$$r_{\min} = (0.0199)^{1/3} r_0 = 0.27099 \dots r_0 \approx 0.27r_0.$$

При равенстве имеет место критическое затухание, и движение не является колебательным.

Таким образом,  $r_{\min}$  — предельный минимальный радиус, а колебательное движение возникает при  $r > r_{\min}$ .

---

Решение проверено по официальному решению.