

IPhO 2022

Problemas teóricos y soluciones · Suiza (celebrada en línea) · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2022/

Problema 1: Imanes permanentes

Los imanes permanentes potentes se fabrican con una aleación de NdFeB que presenta un ciclo de histéresis muy ancho, de modo que la magnetización J puede considerarse constante en una amplia variedad de aplicaciones; en lo que sigue, suponemos que $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$, donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, y que la magnetización de todos los imanes permanentes es homogénea. *La magnetización se define como la densidad volumétrica del momento dipolar magnético de la materia.*

Indicación 1. La siguiente igualdad puede resultar útil:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Indicación 2. El campo magnético creado por un imán esférico es idéntico al de un dipolo puntual. Los campos magnéticos creados por imanes de otras formas solo se vuelven equivalentes a los de un dipolo puntual a distancias mucho mayores que su diámetro.

Indicación 3. Los campos eléctrico y magnético de dipolos puntuales eléctricos y magnéticos, como funciones de las coordenadas y del momento dipolar correspondiente, son semejantes; es decir, uno puede obtenerse a partir del otro multiplicándolo por un factor constante.

Indicación 4. El campo inducido debido a una condición de contorno siempre puede sustituirse por alguna configuración de fuentes de campo situadas fuera de los límites dados.

Parte A. Interacción entre imanes (4.5 puntos)

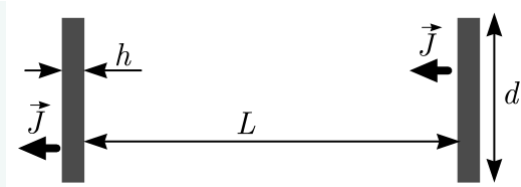
Cuando la distancia a un imán es mucho mayor que su tamaño, el campo magnético que crea puede aproximarse mediante el campo magnético de su momento dipolar $\vec{m}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Aquí $r = |\vec{r}|$, y hemos descompuesto el momento dipolar en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición $\vec{r}$ trazado desde el dipolo hasta el punto de observación, $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$.

A.1 — 0.6pt

Halle el módulo de la fuerza de interacción entre dos imanes cilíndricos colocados coaxialmente, de diámetro $d = 20 \text{ mm}$ y espesor $h = 2 \text{ mm}$, magnetizados paralelamente a su eje, si la distancia entre los centros de los imanes es $L = 20 \text{ cm}$. Puede suponer que $L \gg d, h$.



A.2 — 0.4pt

A distancias mucho mayores que $\frac{h}{2}$, el campo creado por el imán del apartado A.1 es el mismo que el creado por una corriente circular I . Halle I .

A.3 — 1.0pt

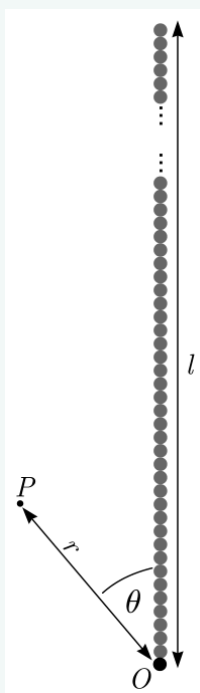
Halle la fuerza de interacción entre los imanes para la disposición del apartado A.1 si, en cambio, $L = 5 \text{ mm}$. Puede suponer que $d \gg L \gg h$.

A.4 — 1.0pt

Unos imanes esféricos idénticos de diámetro $\delta = 5 \text{ mm}$, unidos por atracción magnética, forman una cadena. ¿Cuál es la longitud máxima l de una cadena de este tipo que no se rompe bajo su propio peso cuando cuelga del imán situado en el extremo superior? La densidad de los imanes de NdFeB es $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$.

A.5 — 1.5pt

Considere la cadena del apartado A.4. Obtenga una expresión para el módulo del campo magnético B en un punto P situado a una distancia r de uno de los extremos O de la cadena, siendo θ el ángulo entre la cadena y la recta OP (véase la figura siguiente), suponiendo que $l \gg r$ y $r \sin \theta \gg \delta$



Parte B. Interacción con materiales ferromagnéticos (3.5 puntos)

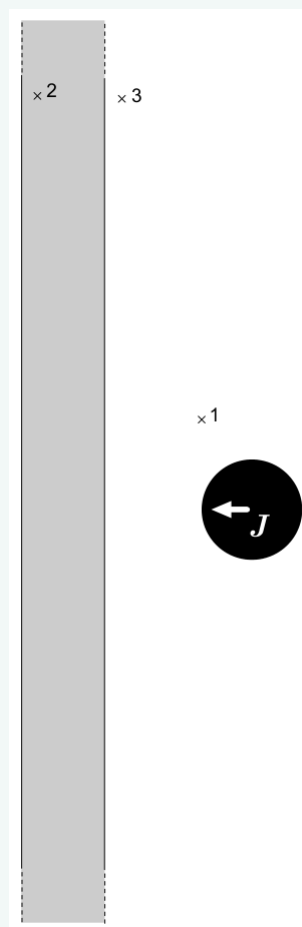
Ahora suponemos que, además de los imanes permanentes, disponemos de placas de un material ferromagnético similar al que se utiliza en los núcleos de los transformadores. En las situaciones que nos interesan, puede considerarse que tiene una permeabilidad relativa constante pero muy

grande, $\mu_r \sim 10^5$.

Indicación 5. Una permeabilidad grande implica que las líneas de campo magnético cerca de la superficie exterior de un objeto fabricado con ese material son casi perpendiculares a la superficie. Esto es similar al comportamiento de las líneas de campo eléctrico cerca de la superficie exterior de un conductor.

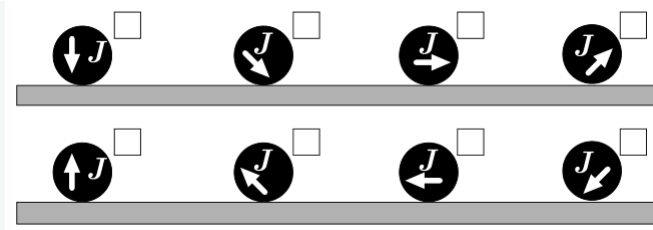
B.1 — 1.0pt

Un imán esférico del apartado A.4 se encuentra a una distancia $s = \delta$ de una placa ferromagnética gruesa e infinita (véase la hoja de respuestas). La magnetización de la esfera está orientada perpendicularmente a la placa. Dibuje esquemáticamente las líneas de campo en la sección transversal mostrada en la hoja de respuestas. En esa figura se señalan tres puntos (indicados como 1, 2 y 3); debe mostrar las líneas de campo que pasan por cada uno de esos puntos en toda su longitud, es decir, hasta donde quepan en la figura.



B.2 — 1.0pt

Ahora se pone el imán esférico en contacto directo con la placa. ¿Qué dirección adopta el vector de magnetización del imán esférico en un equilibrio estable y cuál es la fuerza normal entre la placa y el imán? Marque la dirección o las direcciones correctas con una marca de verificación en la casilla correspondiente de la hoja de respuestas. Las marcas incorrectas reducirán su puntuación.



B.3 — 1.5pt

Ahora se coloca un imán del apartado A.1 entre dos placas ferromagnéticas circulares gruesas de diámetro $D = 2d$, de modo que las caras planas del imán quedan presionadas contra las placas y los tres discos son coaxiales. Halle la fuerza magnética F que actúa sobre cada placa. *Indicación:* Puede despreciar el campo magnético **tanto** fuera de las placas ferromagnéticas como fuera del espacio entre ellas.

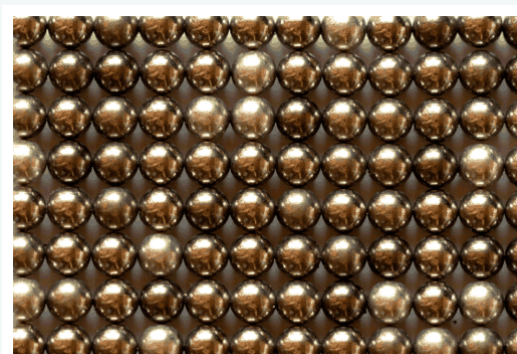
Parte C. Orden (anti)ferromagnético (2 puntos)

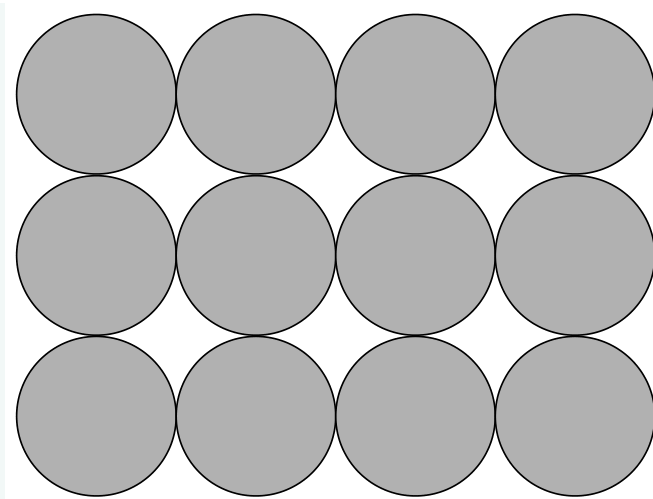
Las propiedades magnéticas de los materiales se deben a los momentos dipolares magnéticos de los electrones y los núcleos atómicos. Si los momentos dipolares se orientan paralelamente entre sí, el campo que crean se intensifica: estos son los materiales ferromagnéticos. Por otro lado, si para cada momento dipolar hay otro momento dipolar antiparalelo cerca, los campos se cancelan: estos son los materiales antiferromagnéticos.

En lo que sigue, consideramos un número muy grande de imanes esféricos del apartado A.4, dispuestos en los nodos de una red bidimensional; **véanse a continuación fotografías reales de configuraciones de equilibrio estable**. Suponga que todos los vectores de magnetización se encuentran en el plano de la figura. Considere en sus cálculos únicamente las interacciones entre vecinos más próximos (en la figura de C.1, cada imán tiene cuatro vecinos más próximos, y en la figura de C.2, seis).

C.1 — 0.8pt

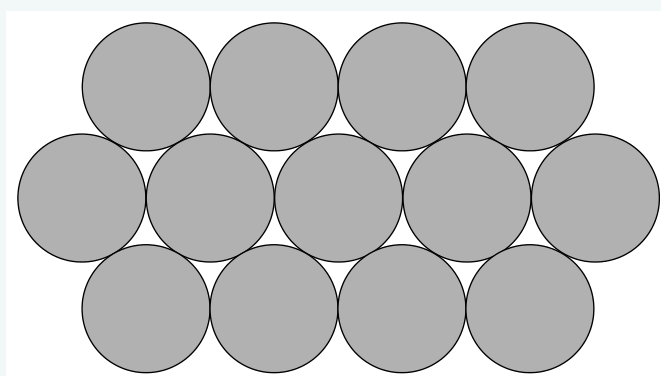
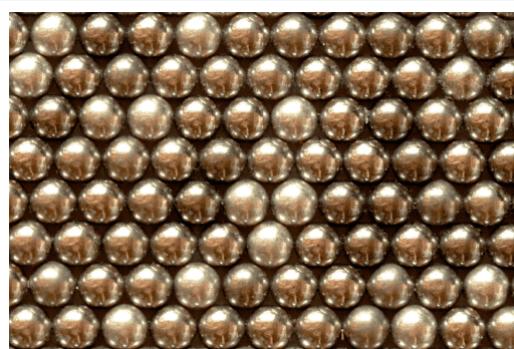
Indique las direcciones de magnetización de los imanes en la figura siguiente. No es necesario demostrar que la configuración que propone es la única posibilidad. Sin embargo, debe justificar que la configuración propuesta es realmente estable. Halle la energía necesaria para extraer un imán de algún lugar de la zona central de esta red, suponiendo que los demás imanes se mantienen inmóviles. ¿Corresponde esta configuración al orden de los materiales ferromagnéticos o al de los antiferromagnéticos?





C.2 — 1.2pt

Responda a las mismas preguntas que en el apartado C.1 para la configuración mostrada en la figura siguiente.



Constantes físicas

A continuación se presenta la lista de constantes físicas que puede utilizar en su solución, además de las magnitudes dadas en el enunciado del problema.

Constante física	Notación	Valor numérico
Velocidad de la luz en el vacío	c	299 792 458 m/s
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ Vs/Am}]$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ε_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; [1 F/m = 1 As/Vm]

Constante física	Notación	Valor numérico
Carga elemental	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}; [1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$
Masa en reposo del electrón	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa en reposo del protón	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa en reposo del neutrón	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Unidad de masa atómica	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de gravitación universal	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Constante de Avogadro	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molar de los gases	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Stefan–Boltzmann	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Constante de Planck	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Planck reducida	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Todos los valores de fuerza que se indican a continuación son módulos.

- **A.1:**

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4} \simeq 2.1 \times 10^{-4} \text{ N}$$

La fuerza es atractiva para las direcciones mostradas.

- **A.2:** Una corriente circular de diámetro d , con

$$I = Jh \simeq 2.4 \times 10^3 \text{ A}.$$

- **A.3:**

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L} \simeq 14 \text{ N}$$

La fuerza es atractiva.

- **A.4:** En la aproximación de cadena larga,

$$l_{\text{max}} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g} \simeq 6.6 \text{ m}.$$

- **A.5:**

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24r^2}$$

Este módulo es independiente de θ dentro de las aproximaciones indicadas.

- **B.1:** El campo exterior es el del dipolo real junto con un dipolo imagen de igual intensidad que apunta en la misma dirección. Las líneas de campo inciden perpendicularmente en la placa. La línea que pasa por **1** forma un lazo corto de retorno en el aire; las líneas que pasan por **2** y **3** pertenecen a lazos mayores que transportan flujo a través de la placa. Sus direcciones se describen en detalle en la Solución.
- **B.2:** Marque el **primer dibujo de cada fila**: magnetización perpendicular a la placa, ya sea hacia ella o en sentido opuesto.

$$F = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \simeq 5.9 \text{ N}$$

La fuerza magnética es atractiva.

- **B.3:** Cada placa es atraída hacia el imán y la otra placa, con

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ N}.$$

- **C.1:** Todos los momentos de una fila horizontal apuntan en la misma dirección; las filas sucesivas apuntan en sentidos opuestos. Esto es **orden antiferromagnético**.

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

- **C.2:** Todos los momentos apuntan en la misma dirección horizontal. Esto es **orden ferromagnético**, que satisface la prueba de estabilidad frente a la rotación de un solo imán descrita más adelante.

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Esto solo muestra la estabilidad frente a la rotación de un único imán; en el modelo de vecinos más próximos, algunas rotaciones colectivas de muchos imanes reducen la energía.

Solución

La magnetización y los dos momentos dipolares pertinentes son

$$J = \frac{1.5}{\mu_0} = 1.19366 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$m_c = J \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.750 \text{ A m}^2, \quad m_s = J \frac{\pi \delta^3}{6} = 0.078125 \text{ A m}^2.$$

Para dos dipolos permanentes, la energía de interacción es

$$U_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})].$$

De forma equivalente, $U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$. Las fuerzas se obtienen derivando esta energía respecto a la posición, manteniendo fijos los momentos permanentes.

A.1

Como $L \gg d, h$, ambos cilindros pueden sustituirse por dipolos puntuales. Sus momentos son paralelos entre sí y a su eje común, por lo que

$$U(L) = -\frac{\mu_0 m_c^2}{2\pi L^3}.$$

La fuerza tiende a disminuir L , y su módulo es

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{3\mu_0 m_c^2}{2\pi L^4}.$$

Sustituyendo $m_c = J\pi d^2 h/4$,

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4}.$$

Con $L = 0.20 \text{ m}$,

$$F = 2.109375 \times 10^{-4} \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^{-4} \text{ N}}.$$

A.2

Un cuerpo uniformemente magnetizado puede representarse mediante corrientes ligadas. Su densidad superficial de corriente ligada es

$$\vec{K}_b = \vec{J} \times \hat{n}.$$

Para un cilindro magnetizado axialmente, esta corriente circula por la superficie lateral curva, con módulo $K_b = J$. Al integrar sobre el espesor del cilindro se obtiene una corriente circular equivalente

$$\boxed{I = Jh}.$$

A distancias grandes en comparación con el espesor, la delgada lámina cilíndrica de corriente puede sustituirse por una sola espira de diámetro d .

El mismo resultado se obtiene igualando los momentos magnéticos:

$$I \frac{\pi d^2}{4} = J \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Numéricamente,

$$I = (1.19366 \times 10^6)(2.0 \times 10^{-3}) = 2.3873 \times 10^3 \text{ A} \simeq \boxed{2.4 \text{ kA}}.$$

Su sentido de circulación se elige mediante la regla de la mano derecha para producir la dirección de magnetización especificada.

A.3

La condición $L \gg h$ permite utilizar la representación mediante espiras de corriente de A.2. Como $L \ll d$, los tramos correspondientes próximos de las dos espiras pueden tratarse como hilos rectilíneos paralelos separados una distancia L .

La fuerza atractiva por unidad de longitud entre corrientes paralelas es

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L}.$$

En el orden dominante, esta fuerza actúa a lo largo del eje común. Al multiplicar por la longitud de la circunferencia πd , se obtiene

$$F \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L}.$$

Por tanto,

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L}.$$

Para $L = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$,

$$F \simeq 14.3239 \text{ N} \simeq \boxed{14 \text{ N}}.$$

Este es el resultado de orden dominante bajo la jerarquía indicada $d \gg L \gg h$.

A.4

Las esferas se alinean con sus momentos a lo largo de la cadena, todos apuntando en el mismo sentido. Cada esfera tiene una masa

$$M = \rho \frac{\pi \delta^3}{6}.$$

Dos esferas cuyos centros están separados una distancia $n\delta$ se atraen con una fuerza

$$F_n = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi (n\delta)^4} = \frac{F_1}{n^4},$$

donde

$$F_1 = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi \delta^4} = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24}.$$

Para una cadena que contiene N esferas, la esfera superior, que se mantiene sujeta, debe sostener las otras $N - 1$ esferas. La mayor fuerza magnética hacia arriba que puede ejercer sobre ellas, mientras todas las esferas permanecen en contacto, es

$$F_{\text{top}} = F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Por consiguiente,

$$(N - 1)Mg \leq F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

La unión superior es la que impone el límite: un corte más abajo sostiene menos peso, mientras que su atracción magnética incluye al menos un par a cada una de las separaciones presentes a través de la unión superior.

Para una cadena larga,

$$F_{\text{top}} \simeq F_1 \frac{\pi^4}{90}.$$

Además, en el orden dominante en $1/N$, el peso suspendido es

$$Mg \frac{l}{\delta} = \frac{\rho \pi \delta^2 g}{6} l.$$

Igualándolo a la fuerza magnética límite,

$$\frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l_{\max} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \frac{\pi^4}{90}.$$

Por lo tanto,

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g}.$$

El diámetro de las esferas se cancela: tanto la fuerza magnética de sujeción como la masa por unidad de longitud de la cadena son proporcionales a δ^2 .

Tomando $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,

$$F_1 = 5.8594 \text{ N}, \quad F_{\text{top}} \simeq 6.3417 \text{ N},$$

$$l_{\max} \simeq 6.5848 \text{ m} \simeq \boxed{6.6 \text{ m}}.$$

Contar la esfera superior sujeta y redondear a un número entero de esferas solo cambia la longitud en una cantidad del orden de δ .

A.5

Como $r \sin \theta \gg \delta$, la cadena discreta puede sustituirse por una línea continua de dipolos. Su momento dipolar por unidad de longitud es

$$\lambda_m = \frac{m_s}{\delta} = \frac{\pi J \delta^2}{6}.$$

Situemos O en el origen y hagamos que la cadena se extienda a lo largo de $+z$, desde 0 hasta l .

Elijamos todos los momentos en la dirección $+z$. En la región exterior, definimos un potencial escalar magnético mediante

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi.$$

El potencial de la línea es

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \int_0^l \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3} dz'.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} = \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3},$$

la integración da

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - l\hat{z}|} - \frac{1}{r} \right).$$

Así, el campo exterior es equivalente al de dos polos magnéticos efectivos opuestos situados en los extremos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi} \left[\frac{\vec{r} - l\hat{z}}{|\vec{r} - l\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

Para $l \gg r$, la contribución del extremo lejano es despreciable, de modo que queda

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Por tanto,

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}.$$

El campo es radial respecto al extremo cercano, por lo que su módulo es independiente de θ . Invertir todos los momentos invierte el sentido del campo.

B.1

Sea la placa la región $x < 0$, con su superficie en $x = 0$, y sea $x = a > 0$ la posición del centro de la esfera. En el dibujo de la hoja de respuestas,

$$\vec{m} = -m_s \hat{x}.$$

Para una placa de gran permeabilidad, la componente tangencial del campo exterior debe ser casi nula. Esta condición de contorno se reproduce colocando un dipolo imagen en $x = -a$, con la **misma orientación normal**:

$$\vec{m}_{\text{image}} \simeq -m_s \hat{x}.$$

Más precisamente, su módulo se multiplica por

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \simeq 1.$$

En la superficie, las componentes tangenciales de los campos de los dos dipolos se cancelan. Si y denota la altura sobre el centro de la esfera, la componente normal restante es

$$B_x(0, y) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{y^2 - 2a^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Así, el flujo entra en la placa cerca del eje de la esfera, donde $|y| < \sqrt{2} a$, y sale más lejos, donde $|y| > \sqrt{2} a$.

El esquema solicitado se describe de la siguiente manera:

- El **lado izquierdo de la esfera es su lado norte**, y el derecho es su lado sur. Las flechas exteriores van desde el lado izquierdo hacia el derecho a lo largo de trayectorias curvas de retorno. Dentro de la esfera, las flechas van aproximadamente de derecha a izquierda.
- **Por el punto 1:** dibuje un lazo corto de retorno por la parte superior, enteramente en el aire fuera de la placa. Sale de la superficie superior izquierda de la esfera, asciende pasando por el punto 1, se curva hacia la derecha y entra en la superficie superior derecha de la esfera.
- **Por el punto 2:** dibuje un lazo mayor que transporte flujo hacia arriba a través de la placa. En el punto 2 apunta principalmente hacia arriba y ligeramente hacia la superficie. Se curva hacia la derecha y sale de la superficie por encima del punto 3, perpendicularmente a ella, antes de curvarse de vuelta hacia el lado sur de la esfera. Si se sigue en sentido inverso, su tramo dentro de la placa desciende y conecta con el flujo que entra en la placa más cerca del imán.
- **Por el punto 3:** dibuje una línea que salga de la placa aproximadamente en horizontal hacia la derecha. Después se curva hacia abajo y hacia la derecha, en dirección al lado sur de la esfera. Prolónguese en sentido inverso por el interior de la placa como una trayectoria curva que regresa a un punto de entrada más bajo, alimentado por el flujo procedente del lado norte de la esfera.
- El patrón de la mitad inferior es el reflejo del de la mitad superior respecto a la recta horizontal que pasa por el centro de la esfera. Cada línea continúa a través del material y del imán para

formar una línea cerrada de campo magnético.

En el límite ideal de un semiespacio, el campo dentro de la placa es aproximadamente el doble del campo que el dipolo real por sí solo crearía allí. Esto determina las prolongaciones curvas que pasan por el punto 2, así como sus sentidos.

B.2

Sea $\hat{n}$ la normal a la placa dirigida hacia fuera, y descompongamos el momento de la esfera como

$$\vec{m} = m_n \hat{n} + \vec{m}_t.$$

Su imagen tiene un momento

$$\vec{m}' = m_n \hat{n} - \vec{m}_t.$$

Si el centro de la esfera se encuentra a una distancia a de la placa, la imagen está a una distancia $2a$. Su campo en el dipolo real es

$$\vec{B}_{\text{image}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2a)^3} (2m_n \hat{n} + \vec{m}_t).$$

Como la magnetización de la placa es inducida, la energía de interacción es

$$U = -\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{image}}.$$

Denotando por θ el ángulo entre $\vec{m}$ y la normal a la placa,

$$U(a, \theta) = -\frac{\mu_0 m_s^2}{8\pi(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Esta energía se minimiza en

$$\theta = 0 \quad \text{o} \quad \theta = \pi.$$

Por tanto, las dos orientaciones perpendiculares a la placa son estables: hacia la placa y en sentido opuesto. Corresponden a los primeros dibujos de las filas superior e inferior.

En cualquiera de las dos orientaciones estables, la fuerza atractiva tiene un módulo

$$F = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(2a)^4}.$$

En contacto, $a = \delta/2$, por lo que

$$F = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \boxed{\frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}}.$$

Numéricamente,

$$F = 5.8594 \text{ N} \simeq \boxed{5.9 \text{ N}}.$$

B.3

Sea

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

el área de una cara del imán, y

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = 4A$$

el área de cada placa.

La permeabilidad de las placas es muy grande, por lo que su campo H interno es despreciable. Cada placa es, por tanto, aproximadamente una superficie equipotencial del potencial escalar magnético. Despreciando los efectos de borde, el campo axial H tiene el mismo valor en el imán y en el espacio anular de aire que lo rodea.

Sea B_m el campo axial con signo en el imán y B_a el del espacio anular. Como la magnetización es fija,

$$B_m = \mu_0(H + J), \quad B_a = \mu_0 H.$$

Por tanto,

$$B_m - B_a = \mu_0 J.$$

Todo el flujo que atraviesa el imán debe regresar por el espacio anular, porque se desprecia el flujo exterior. Por consiguiente,

$$AB_m + (A_p - A)B_a = 0.$$

Resolviendo,

$$B_m = \mu_0 J \left(1 - \frac{A}{A_p} \right), \quad B_a = -\mu_0 J \frac{A}{A_p}.$$

Para $A_p = 4A$,

$$B_m = \frac{3}{4}\mu_0 J = 1.125 \text{ T}, \quad B_a = -\frac{1}{4}\mu_0 J = -0.375 \text{ T}.$$

Un campo magnético normal a una superficie de gran permeabilidad produce una presión atractiva

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

En el contacto entre el imán y la placa, esta puede evaluarse imaginando una rendija de vacío infinitesimal: la componente normal de B es continua a través de ella. Tanto la región central como la región anular de flujo de retorno atraen la placa hacia dentro, independientemente de que sus campos tengan sentidos opuestos.

Así,

$$F = \frac{AB_m^2 + (A_p - A)B_a^2}{2\mu_0}.$$

La sustitución da

$$F = \frac{\mu_0 J^2 A}{2} \left(1 - \frac{A}{A_p} \right).$$

Con $A_p = 4A$,

$$\boxed{F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32}}.$$

Numéricamente,

$$F = 210.9375 \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ N}}$$

sobre cada placa.

C.1

Definimos la escala de energía dipolar entre vecinos más próximos

$$\varepsilon_d = \frac{\mu_0 m_s^2}{4\pi\delta^3} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{144} = 4.8828125 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

Elijamos momentos orientados a lo largo de las filas horizontales, invirtiendo su sentido en filas sucesivas. En la hoja de respuestas, la fila superior puede apuntar hacia la derecha, la fila central hacia la izquierda y la fila inferior hacia la derecha:

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{array}$$

Consideremos un imán central que apunta hacia la derecha.

Sus dos vecinos horizontales también apuntan hacia la derecha y se encuentran sobre su eje dipolar.

Cada uno aporta una energía de interacción

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Sus dos vecinos verticales apuntan hacia la izquierda y se encuentran en la dirección perpendicular a su momento. Cada uno aporta

$$U_{\text{vertical}} = -\varepsilon_d.$$

La energía total de interacción del imán central con sus vecinos es, por tanto,

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 2(-\varepsilon_d) = -6\varepsilon_d.$$

Los cuatro vecinos producen campos paralelos al momento central, con un módulo total

$$B_{\text{nn}} = \frac{6\varepsilon_d}{m_s}.$$

Girar ese imán un ángulo α , manteniendo fijos sus vecinos, aumenta la energía en

$$\Delta U = 6\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Por tanto, experimenta un par de restitución.

Para posiciones fijas en la red cuadrada, el patrón también minimiza la energía orientacional total entre vecinos más próximos. Para verlo, escribamos un momento unitario como (u_i, v_i) . Entonces

$$\frac{U}{\varepsilon_d} = \sum_{\langle ij \rangle_x} (-2u_i u_j + v_i v_j) + \sum_{\langle ij \rangle_y} (u_i u_j - 2v_i v_j) \geq -3 \sum_i (u_i^2 + v_i^2) = -3N.$$

La desigualdad se deduce de $2|ab| \leq a^2 + b^2$, y el patrón de franjas propuesto alcanza la cota en el interior de la red.

Extraer el imán central hasta el infinito elimina sus cuatro enlaces, por lo que el trabajo necesario es

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 6\varepsilon_d.$$

No hay un factor de $1/2$: cada enlace que incluye al imán extraído se cuenta una sola vez. Por tanto,

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Las filas sucesivas tienen magnetizaciones opuestas, lo que da lugar a un **orden antiferromagnético**.

C.2

Elijamos todos los momentos horizontales y apuntando hacia la derecha, incluidos los de todas las esferas del diagrama de la hoja de respuestas.

Una esfera central tiene dos vecinos horizontales y cuatro vecinos diagonales cuyos vectores de desplazamiento forman ángulos de 60° o 120° con los momentos.

Cada par horizontal aporta

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Para momentos paralelos que forman un ángulo β con la dirección que los separa,

$$U_{\text{pair}} = \varepsilon_d(1 - 3\cos^2 \beta).$$

Así, cada vecino diagonal aporta

$$U_{\text{diagonal}} = \varepsilon_d \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_d.$$

Sumando los seis enlaces,

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 4\left(\frac{1}{4}\varepsilon_d\right) = -3\varepsilon_d.$$

Las componentes transversales de los campos de los vecinos se cancelan. El campo restante apunta en la dirección del momento central y tiene un módulo

$$B_{\text{nn}} = \frac{3\varepsilon_d}{m_s}.$$

Por consiguiente, girar un imán un ángulo α manteniendo fijos todos sus vecinos requiere una energía

$$\Delta U = 3\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Esto demuestra la existencia de un par de restitución frente a una rotación individual. Sin embargo, no demuestra la estabilidad frente a rotaciones colectivas: en el modelo de vecinos más próximos, girar todos los momentos a la vez el mismo ángulo deja la energía invariable, porque las seis direcciones de enlace están separadas 60° entre sí, y algunas rotaciones colectivas no uniformes reducen la energía.

El trabajo necesario para extraer el imán central es

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 3\varepsilon_d,$$

por lo que

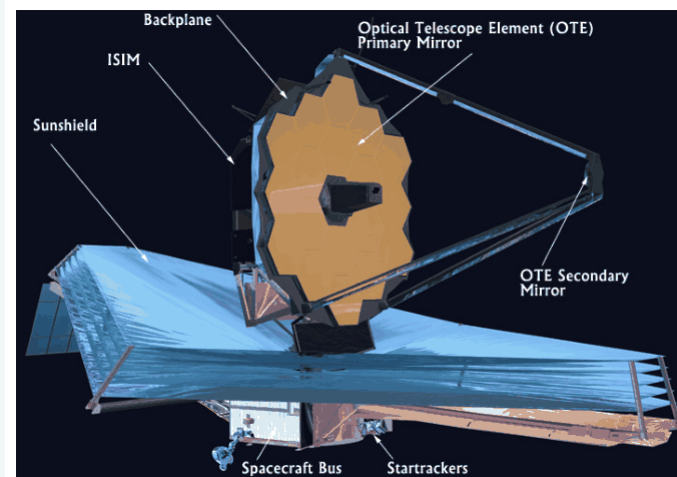
$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Todos los momentos apuntan en la misma dirección, por lo que esta configuración presenta **orden ferromagnético**.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Telescopio espacial James Webb

Esta es una pregunta sobre la física del telescopio espacial James Webb. La luz de una estrella incide sobre el espejo primario, de área $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$, y se refleja en un espejo secundario. La distancia focal del sistema es $f = 130 \text{ m}$. La luz se enfoca en el ISIM (módulo integrado de instrumentos científicos), que contiene las cámaras CCD (dispositivos de carga acoplada).



Crédito de la imagen: NASA

Parte A. Formación de la imagen de una estrella (1.8 puntos)

La gigante roja más cercana se encuentra a 89 años luz, tiene una temperatura de $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ y un diámetro de $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

A.1 — 0.4pt

Calcule el diámetro de la imagen enfocada de la estrella sobre la superficie de formación de imágenes de la cámara CCD.

A.2 — 0.4pt

Estime el diámetro del máximo central de difracción sobre la superficie de formación de imágenes de la cámara CCD. Suponga una longitud de onda de $\lambda = 800 \text{ nm}$, que es la longitud de onda de máxima intensidad de la estrella gigante roja.

A.3 — 1.0pt

Si el CCD no se refrigera y solo puede perder calor por radiación desde la cara superior de la superficie de formación de imágenes, ¿cuál sería su temperatura de equilibrio en la posición de la imagen de la estrella gigante roja? Suponga que la superficie del CCD es un cuerpo negro. Proporcione una fórmula y una estimación numérica.

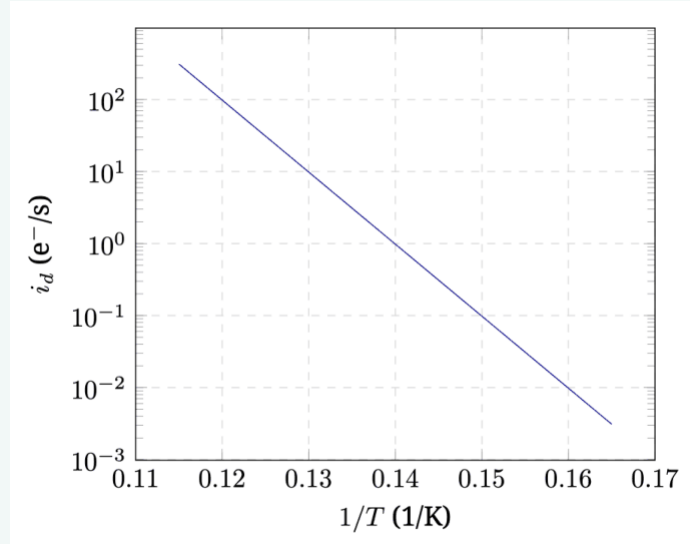
Parte B. Recuento de fotones (1.8 puntos)

La absorción de un fotón por la cámara CCD provoca la emisión de un electrón dentro del aparato. Esto ocurre únicamente si el fotón tiene suficiente energía para excitar un electrón a través de una brecha de energía ΔE_g . Suponga que todo fotón con suficiente energía lo consigue. También hay

una fuga de electrones a través de la brecha causada por la temperatura de la cámara CCD; esta es la corriente de oscuridad i_d y se mide en número de electrones por segundo. Depende de la temperatura según

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}. \quad (1)$$

donde i_0 es una constante.



La gráfica muestra cómo varía la corriente de oscuridad con la temperatura. Las unidades de la corriente de oscuridad, e⁻/s, deben interpretarse como un recuento del número de electrones por segundo.

B.1 — 0.4pt

A partir de la gráfica de la corriente de oscuridad, proporcione una estimación del orden de magnitud de la temperatura de una fuente lejana de fotones térmicos que sea justo capaz de excitar un electrón en el píxel.

Los electrones se acumulan en un condensador y, tras un tiempo de exposición τ , se cuentan. Hay tres fuentes principales de incertidumbre en el proceso: una incertidumbre fija en el proceso de recuento, llamada ruido de lectura; un error de distribución de Poisson asociado a la corriente de oscuridad, y un error de distribución de Poisson asociado a los fotones incidentes detectados. Los errores de distribución de Poisson son iguales a la raíz cuadrada del número de cuentas asociado a un proceso. El recuento de fotones medido es igual al número de electrones en el condensador menos el número de electrones asociado a la corriente de oscuridad.

B.2 — 0.4pt

Escriba una expresión para la incertidumbre total del recuento σ_t , si hay un ruido de lectura σ_r , una corriente de oscuridad i_d , una tasa de fotones incidentes p y un tiempo de exposición τ .

Para las preguntas restantes de esta parte, suponga que el tiempo de exposición es $\tau = 10^4$ s y que el ruido de lectura tiene un valor fijo de $\sigma_r = 14$.

B.3 — 0.5pt

Suponga una temperatura de funcionamiento de $T_p = 7.5$ K. Calcule la tasa mínima de fotones p para que el recuento de fotones sea diez veces la incertidumbre del recuento.

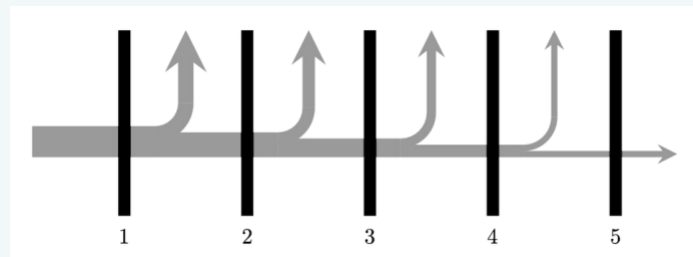
B.4 — 0.5pt

Suponiendo que todos los fotones sean justo capaces de excitar un electrón a través de la banda prohibida, ¿cuál es la intensidad sobre el espejo primario de la fuente de fotones hallada en B.3? Exprese su respuesta en W/m^2

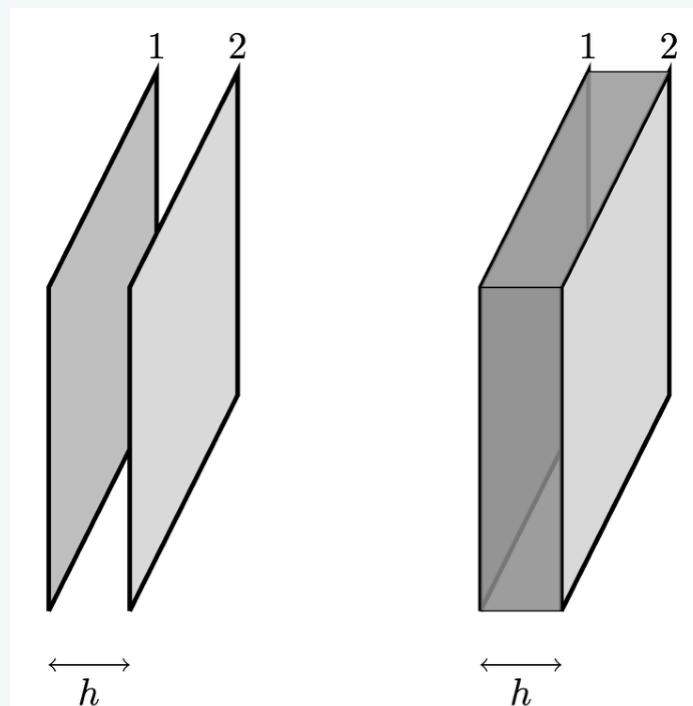
Parte C. Enfriamiento pasivo (4.4 puntos)

Una cámara CCD infrarroja debe mantenerse a baja temperatura. El primer recurso es una pantalla que la proteja de la radiación solar.

La pantalla solar consta de cinco capas reflectantes separadas en forma de láminas delgadas (negras); la energía radiante (gris) procedente del Sol incide sobre la primera lámina de la izquierda, y parte de la energía escapa entre cada par de láminas.



Esquema del flujo de energía: las líneas verticales (negras) son las láminas; el flujo de energía (gris) va de izquierda a derecha, aunque, entre las láminas, parte de la energía fluye hacia arriba y sale al espacio.



A la izquierda se muestra un modelo sencillo de dos láminas adyacentes 1 y 2 separadas por una distancia h . Las láminas no están conectadas y el perímetro está abierto al espacio. Suponga que las láminas son paralelas. Las láminas pueden intercambiar radiación térmica, y esta puede escapar por la abertura perimetral. A la derecha, se ha sombreado la abertura perimetral para facilitar su visualización.

Suponga las siguientes simplificaciones:

- Las láminas son cuadradas, cada una con un área $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$.
- Las láminas son paralelas y están separadas por $h = 25 \text{ cm}$ a lo largo del perímetro.
- Las láminas tienen una emisividad constante $\epsilon \ll 1$. Suponga que todas las reflexiones en las superficies de las láminas son difusas.
- Las láminas son delgadas y la temperatura de sus superficies anterior y posterior es igual y uniforme.
- La fracción del flujo radiante emitido por una lámina que es absorbida por la lámina adyacente es $\alpha \leq 1$. Esto significa que, si la lámina 1 de la figura anterior emite una cantidad de calor Q_1 hacia la lámina 2, la lámina 2 absorberá una cantidad αQ_1 procedente de la lámina 1.
- La cantidad de flujo radiante que sale por la abertura perimetral entre dos láminas se aproxima como βQ_{12} , donde αQ_{12} es el flujo neto entre ambas láminas. La fracción $\beta < 1$. Esto equivale a decir que la pérdida de calor hacia el espacio entre dos láminas es proporcional al intercambio neto de calor entre ellas. Se trata de una aproximación burda para este problema.
- La temperatura de fondo del espacio es despreciable.

C.1 — 2.4pt

Deduzca expresiones para las temperaturas de equilibrio de la primera y la quinta lámina en función de la intensidad de la radiación solar incidente I_0 , las constantes α y β , y las constantes físicas necesarias. Para simplificar su expresión, puede definir constantes adicionales en función de α y β , etc.

C.2 — 1.6pt

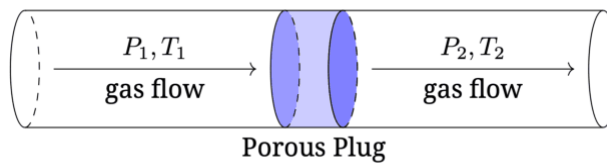
Obtenga estimaciones numéricas de α y β a partir de la información sobre la geometría de las láminas, suponiendo una emisividad $\epsilon = 0.05$. Se recomienda considerar el modelo de caja rectangular de las láminas mostrado anteriormente, en el que el área perimetral actúa de hecho como un absorbente perfecto de energía radiante.

C.3 — 0.4pt

Determine numéricamente las temperaturas de las láminas 1 y 5. La intensidad solar es $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$.

Parte D. Refrigerador criogénico (4 puntos)

La última etapa del sistema de refrigeración enfría directamente la cámara CCD. Un sistema de refrigeración de ciclo cerrado dispone de una tubería de alimentación que suministra helio gaseoso a presión constante P_1 , el cual atraviesa un tapón poroso similar a una esponja y entra en una tubería a presión constante P_2 . La tubería transporta el gas para enfriar el CCD. A continuación, el helio gaseoso pasa por una bomba antes de regresar a la tubería de alimentación.



El helio gaseoso suministrado por la izquierda a una presión P_1 y una temperatura T_1 bien definidas se fuerza a atravesar el tapón hasta alcanzar una presión P_2 y una temperatura T_2 bien definidas, tras lo cual se evacua por la derecha.

Al atravesar el gas el tapón poroso, el rozamiento viscoso con las paredes estrechas de los canales de la esponja se convierte en un efecto importante; sin embargo, no se transfiere calor al gas ni desde él durante el proceso. La rapidez macroscópica del gas en la región 2 es solo ligeramente mayor que en la región 1.

El helio no es un gas ideal, pero permanece en estado gaseoso durante todo este proceso.

D.1 — 1.0pt

Considere un mol de gas que atraviesa el tapón de izquierda a derecha. Complete la tabla de su hoja de respuestas escribiendo '>' o '<' para identificar la magnitud que debe ser mayor, '=' para identificar magnitudes que deben ser iguales, o '?' si no es posible saber cuál es mayor o si son iguales sin más información.

Quantity Name	State 1	Compare using ">", "<", "=", or "?"	State 2
Internal Energy	U_1		U_2
Temperature	T_1		T_2
Entropy	S_1		S_2
Pressure	P_1		P_2
Volume	V_1		V_2

D.2 — 0.6pt

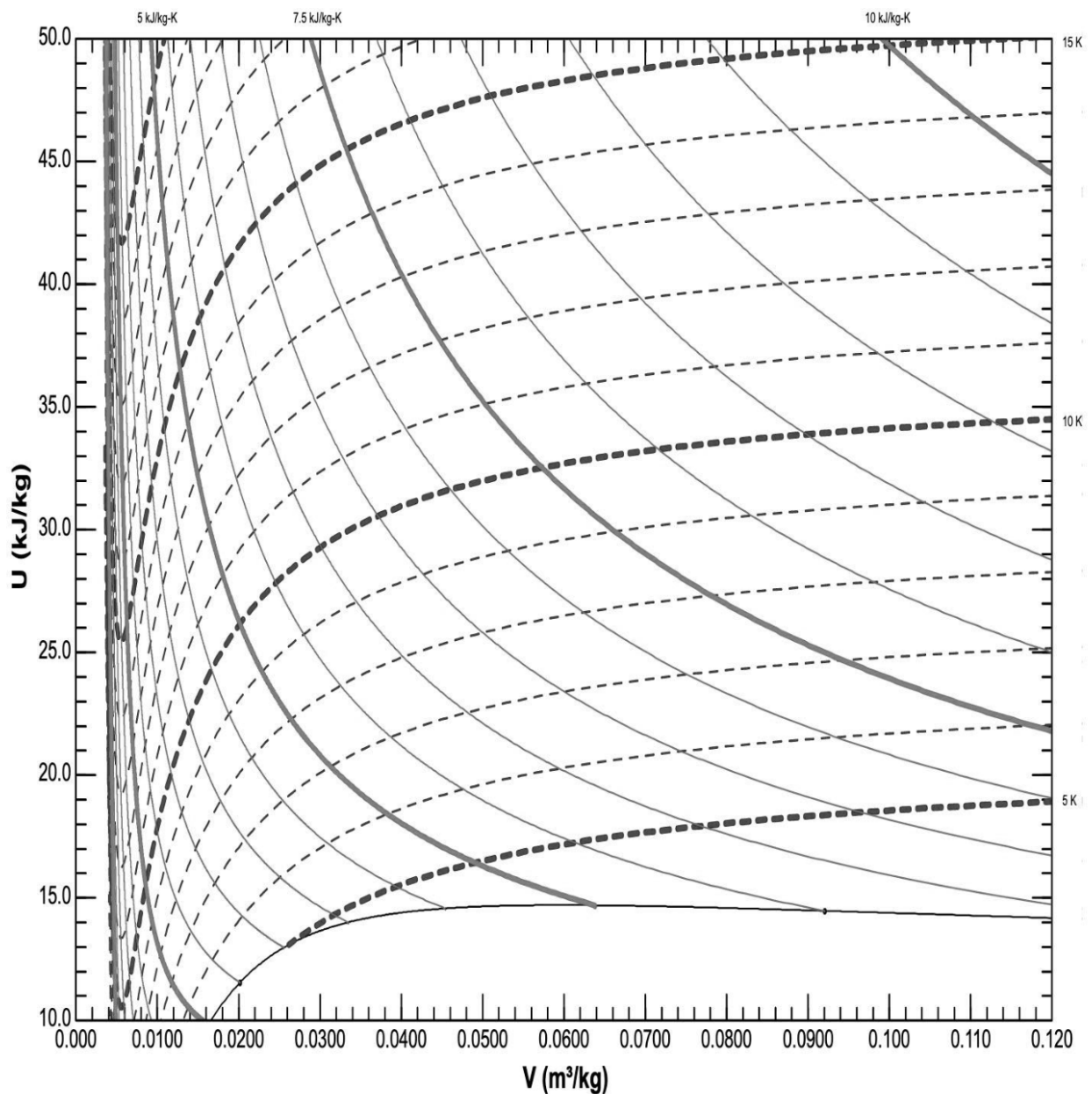
Identifique una magnitud conservada construida a partir de U (energía interna), P (presión) y V (volumen) cuando un mol de gas atraviesa el tapón; muestre los pasos mediante los que ha deducido esta magnitud conservada.

Sus hojas de respuestas contienen gráficas de la energía interna por unidad de masa frente al volumen por unidad de masa para el helio, con isothermas y líneas de entropía constante.

D.3 — 1.4pt

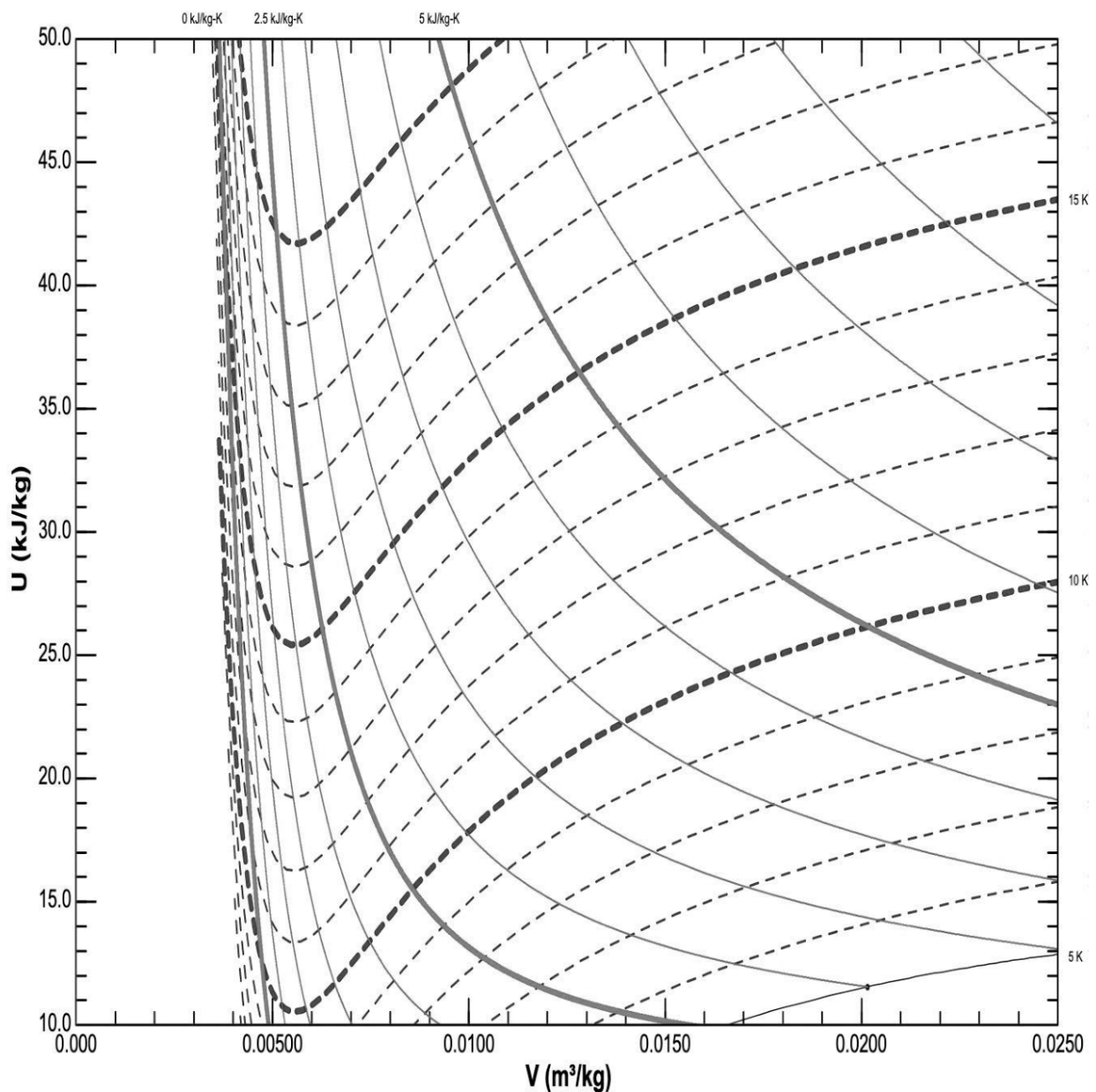
Suponiendo que $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ y $T_2 = 7.5 \text{ K}$, utilice la gráfica para hallar un valor numérico de la magnitud conservada que encontró en la Parte D.2. ¡Muestre la construcción en la gráfica!

Solid curves (trending down with increasing volume) are constant entropy S ; values for the bold curves are on top.
Dashed curves (trending up with increasing volume) are constant temperature T ; values for the bold curves are on right.
Internal energy (per kg) U is on vertical axis; volume (per kg) V is on horizontal axis



D.4 — 0.8pt

Halle la temperatura máxima posible de T_1 . ¡Muestre la construcción en la gráfica!



D.5 — 0.2pt

Suponiendo el valor máximo de T_1 hallado en D.4, encuentre un valor numérico de P_1 .

Constantes físicas

A continuación se presenta la lista de constantes físicas que puede utilizar en su solución, además de las magnitudes dadas en el enunciado del problema.

Constante física	Notación	Valor numérico
Velocidad de la luz en el vacío	c	299 792 458 m/s
Permeabilidad del vacío (constante magnética)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ V s}/(\text{A m})]$
Permitividad del vacío (constante eléctrica)	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ A s}/(\text{V m})]$
Carga elemental	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $[1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$

Constante física	Notación	Valor numérico
Masa en reposo del electrón	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa en reposo del protón	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa en reposo del neutrón	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Unidad de masa atómica	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de gravitación	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Constante de Avogadro	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante molar de los gases	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Stefan–Boltzmann	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Constante de Planck	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Planck reducida	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** $d_{\text{image}} \simeq 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}$.
- **A.2:** $d_{\text{diff}} \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}$, utilizando una abertura circular equivalente.
- **A.3:** Con una distancia L y una mancha de difracción calentada uniformemente,

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4} \simeq 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

- **B.1:** La estimación basada en la energía característica es $T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}$, puesto que $|\Delta E_g|/k_B \simeq 1.4 \times 10^3 \text{ K}$. Un criterio basado en la longitud de onda del máximo da, en cambio, aproximadamente $2.8 \times 10^2 \text{ K}$.
- **B.2:** $\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p \tau}$.
- **B.3:** $p_{\text{min}} \simeq 0.22 \text{ s}^{-1}$.
- **B.4:** $I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$.
- **C.1:** Definamos

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \quad K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha}.$$

Entonces

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}, \quad T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}.$$

- **C.2:** $\alpha \simeq 0.293$, $\beta \simeq 0.414$.
- **C.3:** $T_1 \simeq 360 \text{ K}$, $T_5 \simeq 120 \text{ K}$.
- **D.1:** En el orden de la tabla: ?, ?, <, >, <.
- **D.2:** $H = U + PV$, despreciando el pequeño cambio de energía cinética macroscópica.
- **D.3:** $H/m \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}$, equivalente a aproximadamente 160 J/mol para el helio.
- **D.4:** $T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}$.
- **D.5:** $P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Solución

A.1

Sea L la distancia a la estrella. Utilizando $1 \text{ año luz} \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$,

$$L \simeq 89(9.46 \times 10^{15}) = 8.42 \times 10^{17} \text{ m}.$$

Como $L \gg f$, la imagen se encuentra prácticamente en el plano focal. Su diámetro angular es d_o/L , por lo que

$$d_{\text{image}} = f \frac{d_o}{L} = \frac{130(1.7 \times 10^{11})}{8.42 \times 10^{17}} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Así,

$$d_{\text{image}} \simeq 26 \mu\text{m}.$$

A.2

Aproximamos el espejo primario mediante una abertura circular de la misma área:

$$D = 2\sqrt{\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi}} = 5.64 \text{ m}.$$

Para una abertura circular, el primer mínimo de difracción tiene un radio angular de $1.22\lambda/D$. En consecuencia, el máximo central tiene un diámetro

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{\lambda f}{D}.$$

Numéricamente,

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{(800 \times 10^{-9})(130)}{5.64} = 4.50 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Por tanto,

$$d_{\text{diff}} \simeq 45 \mu\text{m}.$$

El diámetro de difracción supera el diámetro de la imagen geométrica.

A.3

Tratamos la estrella como un cuerpo negro y despreciamos las pérdidas ópticas. Su luminosidad es

$$P_{\text{star}} = 4\pi \left(\frac{d_o}{2} \right)^2 \sigma T_{\text{star}}^4.$$

La potencia recogida por el espejo es, por tanto,

$$P_{\text{collected}} = A_{\text{mirror}} \frac{P_{\text{star}}}{4\pi L^2} = A_{\text{mirror}} \sigma T_{\text{star}}^4 \frac{d_o^2}{4L^2} \simeq 2.43 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

Para la estimación solicitada, tomamos como diámetro de la mancha iluminada el mayor de los diámetros geométrico y de difracción:

$$d_{\text{spot}} \simeq d_{\text{diff}}, \quad A_{\text{spot}} \simeq \frac{\pi d_{\text{diff}}^2}{4}.$$

Aproximamos el calentamiento como uniforme en toda esta mancha. Como solo radia la superficie superior, el equilibrio exige

$$P_{\text{collected}} = \sigma A_{\text{spot}} T_{\text{image}}^4.$$

Así,

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4}$$

y

$$T_{\text{image}} \simeq 405 \text{ K} \approx 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

Esta estimación desprecia el perfil detallado de difracción y la energía de sus anillos exteriores. En el límite de la óptica geométrica, sustituir $d_{\text{spot}} = f d_o / L$ daría, en cambio,

$$T_{\text{image,geom}} = T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi f^2} \right)^{1/4} \simeq 530 \text{ K}.$$

B.1

Tomando logaritmos en la ley de la corriente de oscuridad se obtiene

$$\ln i_d = \ln i_0 - \frac{|\Delta E_g|}{6k_B} \frac{1}{T}.$$

Según la gráfica, aumentar $1/T$ de 0.12 K^{-1} a 0.16 K^{-1} reduce la corriente de 10^2 a 10^{-2} s^{-1} . Por consiguiente,

$$\frac{\Delta \ln i_d}{\Delta(1/T)} = \frac{\ln(10^{-4})}{0.04 \text{ K}^{-1}} = -100 \ln 10 \text{ K}.$$

Se deduce que

$$\frac{|\Delta E_g|}{k_B} = 600 \ln 10 \text{ K} \simeq 1.38 \times 10^3 \text{ K},$$

o bien

$$|\Delta E_g| \simeq 1.91 \times 10^{-20} \text{ J} \simeq 0.119 \text{ eV}.$$

Utilizando la estimación de la energía térmica característica $E_\gamma \sim k_B T$,

$$T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}.$$

Aquí aparece un factor numérico que depende de la convención. La longitud de onda umbral es

$$\lambda_g = \frac{hc}{|\Delta E_g|} \simeq 10.4 \mu\text{m}.$$

Si «justo capaz» significa que el máximo del espectro térmico en función de la longitud de onda alcanza este umbral, la relación de escala de Wien y el máximo dado para la estrella proporcionan

$$T_{\text{source}} \simeq 3600 \text{ K} \frac{0.800 \mu\text{m}}{10.4 \mu\text{m}} \simeq 2.8 \times 10^2 \text{ K}.$$

Ambos cálculos identifican la escala térmica pertinente; un espectro térmico no tiene un límite superior abrupto para la energía de los fotones.

B.2

El recuento medio de fotones es $p\tau$, y el recuento medio de oscuridad es $i_d\tau$. Sus varianzas de Poisson son iguales a sus respectivas medias.

Suponiendo fuentes de ruido independientes, las varianzas se suman:

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau.$$

Por tanto,

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau}.$$

Restar el recuento medio de oscuridad conocido elimina su contribución media, pero conserva sus fluctuaciones estadísticas.

B.3

La recta de la gráfica corresponde aproximadamente a

$$i_d(T) = 10^{14-100 \text{ K}/T} \text{ s}^{-1}.$$

A $T_p = 7.5 \text{ K}$,

$$i_d = 10^{14-100/7.5} = 10^{2/3} \simeq 4.64 \text{ s}^{-1}.$$

Escribimos $N = p\tau$ para el recuento esperado de fotones. La condición límite es

$$N = 10\sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + N}.$$

Elevando al cuadrado y resolviendo la ecuación cuadrática resultante se obtiene la raíz positiva

$$N = 50 + \sqrt{2500 + 100(\sigma_r^2 + i_d\tau)}.$$

Con $\sigma_r = 14$ y $\tau = 10^4 \text{ s}$,

$$N \simeq 2.21 \times 10^3.$$

Así,

$$p_{\text{min}} = \frac{N}{\tau} \simeq 0.221 \text{ s}^{-1} \approx 0.22 \text{ s}^{-1}.$$

B.4

Cada fotón en el umbral tiene una energía $|\Delta E_g|$. Con una eficiencia de detección unitaria y una captación sin pérdidas, la potencia necesaria en el espejo es $p|\Delta E_g|$. Por consiguiente,

$$I = \frac{p|\Delta E_g|}{A_{\text{mirror}}}.$$

Al sustituir se obtiene

$$I = \frac{(0.221)(1.91 \times 10^{-20})}{25} \simeq 1.69 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

Por tanto,

$$I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

C.1

Sea $A = A_{\text{sheet}}$, y definamos la potencia emitida por una cara de la lámina i como

$$q_i = \epsilon \sigma A T_i^4.$$

Por la ley de Kirchhoff, la emisividad constante también determina la absorptividad, de modo que la lámina 1 absorbe una potencia solar

$$P_{\odot} = \epsilon I_0 A.$$

Siguiendo el modelo estipulado de escape de izquierda a derecha, definamos la potencia neta recibida por la lámina $i + 1$ desde el espacio anterior como

$$F_i = \alpha(q_i - q_{i+1}).$$

La potencia que escapa simultáneamente a través de ese espacio es

$$L_i = \beta(q_i - q_{i+1}) = \frac{\beta}{\alpha} F_i.$$

Así, la potencia total que entra en un espacio entre láminas desde su lado más caliente es

$$F_i + L_i = r F_i, \quad r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Para cada lámina intermedia, el equilibrio exige

$$F_{i-1} = r F_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

La última lámina radia q_5 desde su cara expuesta, por lo que

$$F_4 = q_5.$$

Retrocediendo a través de los espacios entre láminas,

$$F_3 = r q_5, \quad F_2 = r^2 q_5, \quad F_1 = r^3 q_5.$$

Las diferencias de temperatura satisfacen

$$q_i - q_{i+1} = \frac{F_i}{\alpha}.$$

Al sumar las cuatro diferencias se obtiene

$$q_1 - q_5 = \frac{q_5}{\alpha} (1 + r + r^2 + r^3).$$

Definamos

$$K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha};$$

entonces $q_1 = K q_5$.

Finalmente, la primera lámina pierde q_1 por su superficie orientada hacia el Sol y $r F_1$ hacia el primer espacio entre láminas:

$$\epsilon I_0 A = q_1 + r F_1 = (K + r^4) q_5.$$

Utilizando $q_5 = \epsilon \sigma A T_5^4$, obtenemos

$$T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}$$

y, como $T_1^4 = K T_5^4$,

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}.$$

Los factores explícitos de ϵA se cancelan; la emisividad sigue influyendo en α y β .

C.2

La longitud del lado de una lámina es

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ m.}$$

La abertura perimetral tiene un área

$$A_{\text{gap}} = 4ah = 4(14.14)(0.25) = 14.14 \text{ m}^2.$$

Como las láminas son muy reflectantes y las reflexiones son difusas, aproximamos la radiación dentro de la caja como bien mezclada tras sucesivas reflexiones. Las probabilidades de absorción son entonces proporcionales al área absorbente.

Cada lámina tiene un área absorbente efectiva ϵA , mientras que la abertura actúa como un absorbente negro de área efectiva A_{gap} . El área absorbente efectiva total es, por tanto,

$$2\epsilon A + A_{\text{gap}}.$$

La fracción finalmente absorbida por la otra lámina es aproximadamente

$$\alpha \simeq \frac{\epsilon A}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

La fracción que escapa es aproximadamente

$$\beta \simeq \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

Para $\epsilon A = 0.05(200) = 10 \text{ m}^2$,

$$\alpha \simeq \frac{10}{20 + 14.14} = 0.293,$$

$$\beta \simeq \frac{14.14}{20 + 14.14} = 0.414.$$

La fracción restante, aproximadamente α , regresa a la lámina emisora y es absorbida por ella; en consecuencia, $2\alpha + \beta = 1$ en esta estimación.

C.3

Las estimaciones anteriores dan

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2.414,$$

$$r^4 \simeq 33.97, \quad K \simeq 80.60, \quad K + r^4 \simeq 114.57.$$

Por tanto,

$$T_5 = \left[\frac{1360}{(5.670374419 \times 10^{-8})(114.57)} \right]^{1/4} \simeq 120.3 \text{ K},$$

y

$$T_1 = K^{1/4} T_5 \simeq 360.4 \text{ K}.$$

Así,

$$\boxed{T_1 \simeq 360 \text{ K}, \quad T_5 \simeq 120 \text{ K}.}$$

D.1

Las entradas requeridas son:

Magnitud	Comparación
Energía interna	$U_1 ? U_2$
Temperatura	$T_1 ? T_2$
Entropía	$S_1 < S_2$
Presión	$P_1 > P_2$
Volumen	$V_1 < V_2$

Una caída de presión impulsa el flujo a través del tapón que ofrece resistencia, por lo que $P_1 > P_2$. La disipación viscosa hace irreversible el proceso adiabático, lo que da $S_2 > S_1$.

Utilizando las secciones transversales iguales de las tuberías que se muestran, la conservación de la masa en régimen estacionario da

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2,$$

donde w es la rapidez macroscópica. Como $w_2 > w_1$, la densidad disminuye y el volumen ocupado por un mol aumenta.

Para un gas real, ni la energía interna ni la temperatura tienen un sentido universal de variación durante el estrangulamiento. Para compararlas se necesita más información sobre los estados.

D.2

Sigamos un mol a través del tapón. El gas situado aguas arriba realiza un trabajo $P_1 V_1$ sobre este mol, mientras que este realiza un trabajo $P_2 V_2$ sobre el gas situado aguas abajo.

No hay transferencia de calor. Despreciando el pequeño cambio de energía cinética macroscópica, el primer principio da

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2.$$

Reordenando,

$$\boxed{U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.}$$

Así, la magnitud conservada es la entalpía,

$$\boxed{H = U + PV.}$$

Más precisamente, un flujo adiabático estacionario conserva $h + w^2/2$ por unidad de masa. La aproximación indicada permite despreciar la diferencia de energía cinética.

D.3

Para mayor claridad, escribimos u y v para la energía interna específica y el volumen específico, designados como U y V en las gráficas.

La identidad termodinámica es

$$du = T ds - P dv.$$

A lo largo de una curva de entropía constante,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -P.$$

Por tanto, la tangente a una isentrópica en (v, u) tiene la ecuación

$$u_{\text{tan}}(x) = u - P(x - v) = (u + Pv) - Px.$$

Su ordenada en el origen es precisamente la entalpía específica:

$$\boxed{h = u + Pv.}$$

La construcción requerida en la imagen 9 es:

1. Localizar $v_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$.
2. Interpolar hasta la isoterma de 7.5 K .
3. En este estado, trazar la tangente a la curva de entropía constante que pasa por él.
4. Prolongar esa tangente hasta $v = 0$; leer su ordenada en el origen.

El estado tiene aproximadamente

$$u_2 \simeq 26 \text{ kJ/kg}.$$

La pendiente de la tangente es aproximadamente

$$-P_2 \simeq -140 \text{ kPa}.$$

En consecuencia,

$$h_2 = u_2 + P_2 v_2 \simeq 26 + (140)(0.100) = 40 \text{ kJ/kg}.$$

Así,

$$\boxed{h_1 = h_2 \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

Para el helio, cuya masa molar es aproximadamente $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$, esto corresponde a

$$H_{\text{molar}} \simeq 160 \text{ J/mol}.$$

D.4

Todos los estados de entrada admisibles deben tener la misma entalpía específica $h_0 \simeq 40 \text{ kJ/kg}$.

La construcción gráfica en la imagen 10 es:

1. Marcar el punto $(0, h_0)$ en el eje vertical.
2. Trazar tangentes desde este punto a varias curvas de entropía constante dibujadas con línea continua.

3. Marcar sus puntos de tangencia. Cada uno de estos puntos satisface $u + Pv = h_0$, de modo que estos puntos trazan la curva de entalpía constante.
4. Encontrar la isoterma de mayor temperatura, dibujada con línea discontinua, que alcanza esta curva. A la temperatura máxima, la curva de entalpía constante es tangente a esa isoterma.

El contacto límite está cerca de la isoterma de 11 K, con lecturas gráficas aproximadas

$$v_1 \sim 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}, \quad u_1 \sim 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

La gráfica permite estimar un máximo de aproximadamente 10.5–11 K, por lo que

$$T_{1,\max} \simeq 11 \text{ K}.$$

D.5

La presión es el valor absoluto de la pendiente de la tangente isentrópica en el estado de entrada seleccionado. De forma equivalente,

$$P_1 = \frac{h_0 - u_1}{v_1}.$$

Utilizando las coordenadas gráficas aproximadas,

$$P_1 \simeq \frac{(40 - 21) \times 10^3}{1.0 \times 10^{-2}} = 1.9 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

Con la precisión que permite la gráfica,

$$P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

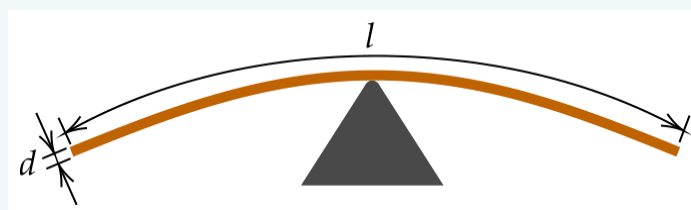
Problema 3: Leyes de escala

Las leyes de escala describen la relación funcional entre dos magnitudes físicas que varían conjuntamente a lo largo de un intervalo considerable. Esta relación funcional puede ser una ley de potencias, pero también hay otras posibilidades. A menudo no es posible obtener expresiones exactas, pero aun así pueden deducirse leyes de escala.

Parte A. Espagueti (2.0 puntos)

A.1 2.0 puntos

Un espagueti de diámetro d se mantiene en equilibrio horizontal apoyado en su punto medio. Si $d = 1 \text{ mm}$, el espagueti se rompe por su propio peso cuando su longitud alcanza $l = 50 \text{ cm}$. ¿Cuál es la longitud máxima l' del espagueti de diámetro $d' = 1 \text{ cm}$ antes de romperse por su propio peso?



Parte B. Castillo de arena (2.0 puntos)

B.1 2.0 puntos

El volumen medio de los granos de una arena de grano grueso es 10 veces el de los granos de una arena de grano fino. Tanto la arena húmeda de grano fino como la de grano grueso tienen un contenido óptimo de agua (es decir, se supone que las construcciones hechas con ellas tienen la máxima resistencia) y se utilizan para construir dos cilindros de exactamente la misma forma y tamaño. La resistencia de cada cilindro se comprueba comprimiéndolo entre dos placas paralelas. El cilindro de arena de grano grueso se destruye cuando la fuerza aplicada para comprimir las placas alcanza $F_c = 10 \text{ N}$. ¿Qué valor tiene la fuerza F_f necesaria para destruir el cilindro de arena de grano fino? Puede despreciar los efectos de la gravedad.

Parte C. Viaje interestelar (2.0 puntos)

C.1 2.0 puntos

La nave espacial de una expedición interestelar viaja con una aceleración propia de módulo constante $g = 10 \text{ m/s}^2$, es decir, esta es la aceleración de la nave en el sistema de referencia inercial en el que se encuentra instantáneamente en reposo. Los pasajeros deben poder regresar a la Tierra dentro de los 50 años que les quedan de esperanza de vida. La distancia máxima a la Tierra que alcanza la nave es d . Si la aceleración aumenta a $g' = 15 \text{ m/s}^2$, la nave puede alcanzar una distancia mayor d' . ¿Cuál es la razón d'/d ?

Pista 1. Puede resultar útil emplear la fórmula relativista de adición de velocidades, aunque también existen otros métodos.

Pista 2. Puede que necesite utilizar las funciones hiperbólicas definidas de la siguiente manera:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Pista 3. Según el método que utilice, puede que necesite una o varias de estas integrales:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C, \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

donde $\operatorname{asinh} x$ y $\operatorname{atanh} x$ son las funciones inversas de las respectivas funciones hiperbólicas.

Parte D. Esa sensación de hundirse (2.0 puntos)

D.1 2.0 puntos

Una esfera maciza de madera de radio r_0 flota en el agua. Si se despreciaran los efectos del rozamiento, la frecuencia de las pequeñas oscilaciones sería ω_0 , pero, debido al rozamiento viscoso, tras desplazarla verticalmente, la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas es en realidad $0.99 \omega_0$. ¿Cuál es el radio mínimo $r_{\min}$ de una esfera de madera que flota en el agua y experimenta pequeñas oscilaciones al desplazarla? *Pista:* la fuerza de resistencia viscosa que actúa sobre un cuerpo dado es proporcional a su velocidad respecto al conjunto del fluido y a la viscosidad η del fluido en el que se mueve. La unidad de viscosidad es $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** $l' = l\sqrt{\frac{d'}{d}} = 0.50\sqrt{10}\text{ m} \approx 1.6\text{ m}.$
- **B.1:** $F_f = 10^{1/3}F_c = 10^{4/3}\text{ N} \approx 22\text{ N}.$
- **C.1:** Con $T = 50$ años medidos por los pasajeros,

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1} \approx 4.8 \times 10^2.$$

- **D.1:** $r_{\min} = (1 - 0.99^2)^{1/3}r_0 \approx 0.27r_0.$ Este es el radio crítico; para que haya oscilaciones se requiere $r > r_{\min}.$

Solución

A.1

Supongamos que el espagueti tiene la misma densidad y tensión de rotura para ambos diámetros, y utilicemos la aproximación de viga esbelta. El área de su sección transversal varía según $A \propto d^2$, por lo que su peso por unidad de longitud es

$$q = \rho g_E A \propto d^2,$$

donde g_E es la aceleración gravitatoria.

Consideremos una mitad del espagueti. Su peso es $ql/2$ y actúa a una distancia $l/4$ del apoyo central. Por tanto, el momento flector máximo, que se produce en el punto medio, es

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8} \propto d^2 l^2.$$

En la flexión de una viga, la tensión longitudinal máxima es

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}(d/2)}{I},$$

donde el segundo momento de área satisface $I \propto d^4$. En consecuencia,

$$\sigma_{\max} \propto \frac{l^2}{d}.$$

La rotura se produce con la misma tensión en el material, de modo que

$$\frac{l'^2}{d'} = \frac{l^2}{d}, \quad l' = l\sqrt{\frac{d'}{d}}.$$

Como $d'/d = 10$,

$$l' = 0.50\sqrt{10}\text{ m} = 1.581\dots\text{ m} \approx 1.6\text{ m}.$$

B.1

La arena húmeda se mantiene cohesionada por las fuerzas capilares de los puentes de agua entre los granos. Sean a un tamaño característico del grano y γ la tensión superficial del agua. Supongamos que las formas de los granos, su empaquetamiento y sus propiedades de humectación son similares. Con el contenido óptimo de agua, la geometría de los puentes varía proporcionalmente a a .

La fuerza capilar en un contacto varía según

$$f_{\text{cap}} \propto \gamma a.$$

Esto se deduce tanto de la tensión superficial que actúa a lo largo de una línea de contacto de longitud proporcional a a , como de una presión capilar del orden de γ/a que actúa sobre un área del orden de a^2 .

El número de contactos que transmiten fuerza a través de un área macroscópica fija S varía según S/a^2 . Por tanto, la tensión cohesiva característica varía según

$$\sigma_{\text{coh}} \propto \frac{f_{\text{cap}}}{a^2} \propto \frac{\gamma}{a}.$$

Para cilindros de la misma forma y tamaño, la carga de rotura por compresión sigue la misma ley de escala:

$$F_{\text{break}} \propto \frac{1}{a}.$$

Como el volumen de los granos es proporcional a a^3 ,

$$\frac{a_c}{a_f} = \left(\frac{V_c}{V_f} \right)^{1/3} = 10^{1/3}.$$

Por tanto,

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{a_c}{a_f} = 10^{1/3},$$

lo que da

$$F_f = 10 \cdot 10^{1/3} \text{ N} = 21.54 \dots \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$$

C.1

Tratemos la Tierra como un sistema de referencia inercial, despreciemos los campos gravitatorios y consideremos un viaje rectilíneo que comienza y termina en reposo respecto a la Tierra. Los 50 años disponibles corresponden al **tiempo propio** de los pasajeros, que denotamos por T . Los cambios de sentido de la aceleración se idealizan como instantáneos.

Deducimos primero el desplazamiento con aceleración propia constante. Definimos la rapidez hiperbólica

$$\theta = \text{atanh}(v/c).$$

Durante un intervalo de tiempo propio $d\tau$, el cambio de velocidad en el sistema de referencia de reposo instantáneo es $g d\tau$. La adición relativista de velocidades da, a primer orden,

$$dv = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) d\tau,$$

y, por tanto,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{g}{c}.$$

Partiendo del reposo,

$$\theta = \frac{g\tau}{c}, \quad v = c \tanh \theta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta.$$

Se deduce que

$$\frac{dx}{d\tau} = v \frac{dt}{d\tau} = c \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right).$$

Integrando,

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) - 1 \right].$$

Para maximizar la distancia de ida en un tiempo propio dado, comenzando y terminando el trayecto de ida en reposo, la nave acelera alejándose de la Tierra durante la mitad de ese tiempo y desacelera durante la otra mitad. En efecto, para un trayecto de ida de duración propia L , su rapidez hiperbólica no puede superar

$$\theta(\tau) \leq \frac{g}{c} \min(\tau, L - \tau).$$

La trayectoria de aceleración seguida de desaceleración alcanza esta cota y maximiza el desplazamiento, porque $dx/d\tau = c \sinh \theta$ aumenta con θ .

El viaje de regreso sobre la misma distancia requiere el mismo tiempo propio mínimo. Por ello, el viaje óptimo de ida y vuelta consta de cuatro intervalos iguales:

1. Acelerar alejándose de la Tierra.
2. Desacelerar hasta quedar en reposo a la distancia máxima.
3. Acelerar hacia la Tierra.
4. Desacelerar hasta quedar en reposo en la Tierra.

Cada intervalo dura $T/4 = 12.5$ años. Los dos intervalos de ida cubren distancias iguales, de modo que

$$d(g) = \frac{2c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right].$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1}}.$$

Utilizando $c \simeq 3.00 \times 10^8$ m/s y 1 año $\simeq 3.156 \times 10^7$ s,

$$\frac{gT}{4c} \simeq 13.15, \quad \frac{g'T}{4c} \simeq 19.72.$$

Ambos argumentos son grandes, por lo que $\cosh x - 1 \simeq e^x/2$. Así,

$$\frac{d'}{d} \simeq \frac{g}{g'} \exp\left(\frac{(g' - g)T}{4c}\right) \simeq \frac{2}{3} e^{6.575}.$$

El resultado es

$$\boxed{\frac{d'}{d} \approx 4.8 \times 10^2}.$$

D.1

Supongamos que todas las esferas están hechas de la misma madera, que el empuje determina su inmersión de equilibrio y que es aplicable el modelo de resistencia viscosa lineal indicado.

Para un pequeño desplazamiento hacia abajo z , el volumen sumergido adicional es $A_w z$, donde A_w es el área de la sección transversal de la esfera en la superficie del agua. El empuje adicional proporciona una fuerza restauradora

$$F_{\text{rest}} = -kz, \quad k = \rho_w g_E A_w.$$

La fracción sumergida en equilibrio viene fijada por la razón entre las densidades de la madera y del agua. Por tanto, las configuraciones de flotación son geoméricamente semejantes, lo que da

$$A_w \propto r^2, \quad k \propto r^2, \quad m \propto r^3.$$

En consecuencia, la frecuencia angular sin amortiguamiento satisface

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \propto r^{-1}.$$

Escribamos la fuerza viscosa como

$$F_{\text{visc}} = -b\dot{z}.$$

Como es proporcional a la viscosidad y a la velocidad, el análisis dimensional para cuerpos geoméricamente semejantes da

$$b = C\eta r \propto r,$$

donde C es un factor geométrico adimensional.

La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0.$$

Definimos la tasa de amortiguamiento

$$\beta = \frac{b}{2m} \propto r^{-2}.$$

En el régimen subamortiguado, la frecuencia de oscilación es

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}.$$

Para el radio r_0 , las frecuencias dadas implican

$$(0.99\omega_0)^2 = \omega_0^2 - \beta_0^2,$$

de modo que

$$\frac{\beta_0^2}{\omega_0^2} = 1 - 0.99^2 = 0.0199.$$

Combinando las leyes de escala con el radio,

$$\frac{\beta^2(r)}{\Omega^2(r)} = 0.0199 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3.$$

Se producen oscilaciones cuando esta razón es menor que uno. Por tanto, el radio crítico satisface

$$0.0199 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} \right)^3 = 1,$$

lo que conduce a

$$r_{\min} = (0.0199)^{1/3} r_0 = 0.27099 \dots r_0 \approx 0.27 r_0.$$

En el caso de igualdad, el movimiento presenta amortiguamiento crítico y no oscila. Así, $r_{\min}$ es el radio mínimo límite, y el movimiento oscilatorio se produce para $r > r_{\min}$.

La solución se comprobó con la solución oficial.