

IPhO 2022

Theorieaufgaben und Lösungen · Schweiz (online ausgetragen) · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/2022/

Aufgabe 1: Permanentmagnete

Starke Permanentmagnete werden aus einer NdFeB-Legierung hergestellt, die eine sehr breite Hystereseschleife aufweist, sodass die Magnetisierung J in einem weiten Anwendungsbereich als konstant angenommen werden kann; im Folgenden nehmen wir $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$ an, wobei $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, und die Magnetisierung aller Permanentmagnete ist homogen. Die Magnetisierung ist als Volumendichte des magnetischen Dipolmoments der Materie definiert.

Hinweis 1. Die folgende Gleichung könnte hilfreich sein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Hinweis 2. Das von einem kugelförmigen Magneten erzeugte Magnetfeld ist identisch mit dem eines Punktdipols. Die von Magneten anderer Formen erzeugten Magnetfelder entsprechen erst in Abständen, die viel größer als ihr Durchmesser sind, dem Feld eines Punktdipols.

Hinweis 3. Die elektrischen und magnetischen Felder elektrischer bzw. magnetischer Punktdipole sind als Funktionen der Koordinaten und des jeweiligen Dipolmoments ähnlich, d. h., das eine lässt sich durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor aus dem anderen erhalten.

Hinweis 4. Das durch eine Randbedingung induzierte Feld kann stets durch eine geeignete Anordnung von Feldquellen außerhalb der vorgegebenen Grenzen ersetzt werden.

Teil A. Wechselwirkung zwischen Magneten (4.5 Punkte)

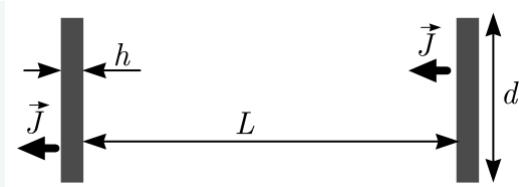
Wenn der Abstand zu einem Magneten viel größer als seine Größe ist, kann das von ihm erzeugte Magnetfeld durch das Magnetfeld seines Dipolmoments $\vec{m}$ angenähert werden,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Hierbei ist $r = |\vec{r}|$, und wir haben das Dipolmoment in Komponenten parallel und senkrecht zum Ortsvektor $\vec{r}$ zerlegt, der vom Dipol zum Beobachtungspunkt zeigt, $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$.

A.1 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie den Betrag der Wechselwirkungskraft zwischen zwei coaxial angeordneten zylindrischen Magneten mit dem Durchmesser $d = 20 \text{ mm}$ und der Dicke $h = 2 \text{ mm}$, die parallel zu ihrer Achse magnetisiert sind, wenn der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Magnete $L = 20 \text{ cm}$ beträgt. Sie dürfen $L \gg d, h$ annehmen.



A.2 — 0.4 Punkte

In Abständen, die viel größer als $\frac{h}{2}$ sind, ist das vom Magneten aus Aufgabe A.1 erzeugte Feld dasselbe wie das eines Kreisstroms I . Bestimmen Sie I .

A.3 — 1.0 Punkte

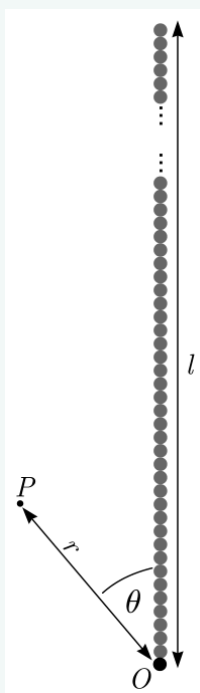
Bestimmen Sie die Wechselwirkungskraft zwischen den Magneten für die Anordnung aus Aufgabe A.1, wenn stattdessen $L = 5 \text{ mm}$ gilt. Sie dürfen $d \gg L \gg h$ annehmen.

A.4 — 1.0 Punkte

Identische kugelförmige Magnete mit dem Durchmesser $\delta = 5 \text{ mm}$, die durch magnetische Anziehung zusammengehalten werden, bilden eine Kette. Wie groß ist die maximale Länge l einer solchen Kette, die unter ihrem eigenen Gewicht nicht reißt, wenn sie am obersten Magneten hängt? Die Dichte der NdFeB-Magnete beträgt $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$.

A.5 — 1.5 Punkte

Betrachten Sie die Kette aus Teil A.4. Leiten Sie einen Ausdruck für den Betrag des magnetischen B -Feldes an einem Punkt P her, der sich im Abstand r von einem der Endpunkte O der Kette befindet, wobei der Winkel zwischen der Kette und der Geraden OP gleich θ ist (siehe Abbildung unten). Nehmen Sie dabei $l \gg r$ und $r \sin \theta \gg \delta$ an.



Teil B. Wechselwirkung mit Ferromagneten (3.5 Punkte)

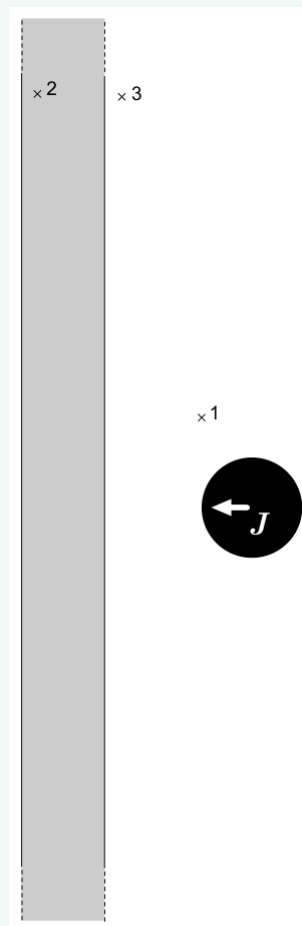
Wir nehmen nun an, dass uns neben den Permanentmagneten auch Platten aus einem ferromagnetischen Material zur Verfügung stehen, ähnlich dem Material, das in Transformatorkernen verwendet wird. In den hier betrachteten Situationen kann seine relative

Permeabilität als konstant, aber sehr groß angenommen werden, $\mu_r \sim 10^5$.

Hinweis 5. Eine große Permeabilität bedeutet, dass magnetische Feldlinien nahe der äußeren Oberfläche eines Körpers aus diesem Material nahezu senkrecht zur Oberfläche verlaufen. Dies ähnelt dem Verhalten elektrischer Feldlinien nahe der äußeren Oberfläche eines Leiters.

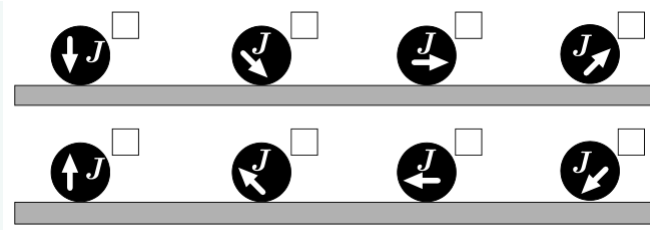
B.1 — 1.0 Punkte

Ein kugelförmiger Magnet aus Teil A.4 befindet sich im Abstand $s = \delta$ von einer dicken, unendlich ausgedehnten ferromagnetischen Platte (siehe Antwortbogen). Die Magnetisierung der Kugel ist senkrecht zur Platte ausgerichtet. Skizzieren Sie die Feldlinien in dem auf dem Antwortbogen dargestellten Querschnitt. In dieser Abbildung sind drei Punkte (mit 1, 2 und 3 bezeichnet) markiert; Sie sollen die Feldlinien durch jeden dieser Punkte über ihre gesamte Länge darstellen, d. h. so weit, wie es in die Abbildung passt.



B.2 — 1.0 Punkte

Nun wird der kugelförmige Magnet in direkten Kontakt mit der Platte gebracht. Welche Richtung nimmt der Magnetisierungsvektor des kugelförmigen Magneten im stabilen Gleichgewicht ein, und wie groß ist die Normalkraft zwischen der Platte und dem Magneten? Markieren Sie die richtige(n) Richtung(en) mit einem Häkchen im entsprechenden Kästchen auf dem Antwortbogen. Falsch gesetzte Häkchen führen zu Punktabzug.



B.3 — 1.5 Punkte

Nun wird ein Magnet aus Teil A.1 zwischen zwei dicke kreisförmige ferromagnetische Platten mit dem Durchmesser $D = 2d$ gelegt, sodass die ebenen Stirnflächen des Magneten an die Platten gedrückt werden und alle drei Scheiben koaxial sind. Bestimmen Sie die auf jede Platte wirkende magnetische Kraft F . *Hinweis:* Sie dürfen das Magnetfeld **sowohl** außerhalb der ferromagnetischen Platten **als auch** außerhalb des Spalts zwischen ihnen vernachlässigen.

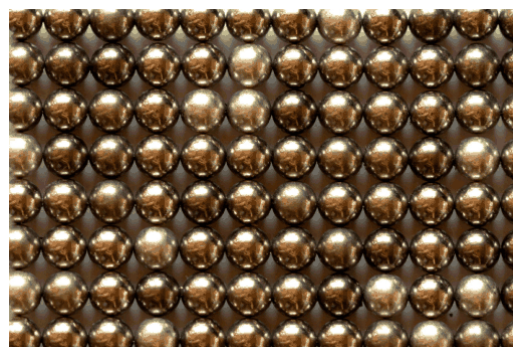
Teil C. (Anti)ferromagnetische Ordnung (2 Punkte)

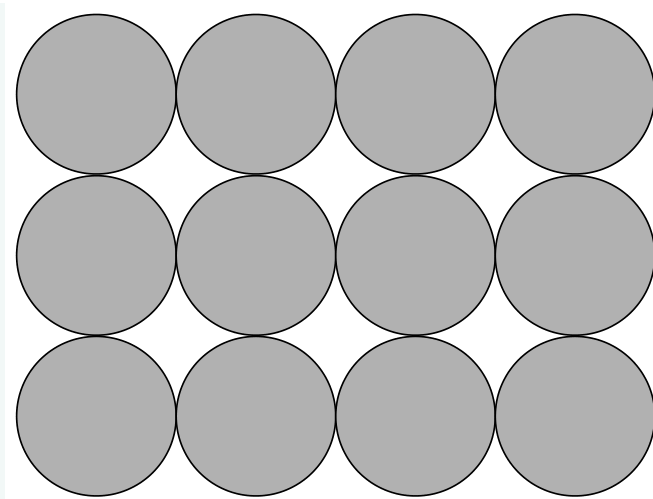
Die magnetischen Eigenschaften von Materialien beruhen auf den magnetischen Dipolmomenten der Elektronen und Atomkerne. Richten sich die Dipolmomente parallel zueinander aus, wird das von ihnen erzeugte Feld verstärkt — dies sind ferromagnetische Materialien. Gibt es hingegen zu jedem Dipolmoment ein weiteres, antiparalleles Dipolmoment in der Nähe, heben sich die Felder auf — dies sind antiferromagnetische Materialien.

Im Folgenden betrachten wir eine sehr große Anzahl kugelförmiger Magnete aus Teil A.4, die an den Gitterpunkten eines zweidimensionalen Gitters angeordnet sind; **siehe die untenstehenden realen Fotos stabiler Gleichgewichtsanordnungen**. Nehmen Sie an, dass alle Magnetisierungsvektoren in der Zeichenebene liegen. Berücksichtigen Sie in Ihren Berechnungen nur die Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn (in der Abbildung zu C.1 hat jeder Magnet vier nächste Nachbarn, in der Abbildung zu C.2 sechs).

C.1 — 0.8 Punkte

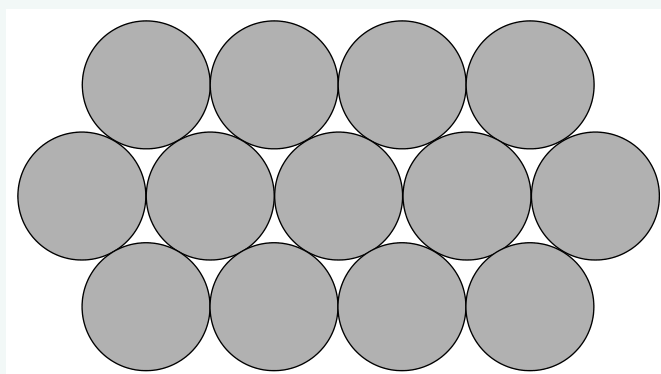
Zeichnen Sie die Magnetisierungsrichtungen der Magnete in die untenstehende Abbildung ein. Sie müssen nicht beweisen, dass die von Ihnen vorgeschlagene Anordnung die einzig mögliche ist. Sie müssen jedoch begründen, dass die von Ihnen vorgeschlagene Anordnung tatsächlich stabil ist. Bestimmen Sie die Energie, die benötigt wird, um einen Magneten aus dem Inneren dieses Gitters herauszuziehen, wobei die anderen Magnete festgehalten werden. Entspricht diese Anordnung der Ordnung ferromagnetischer oder antiferromagnetischer Materialien?





C.2 — 1.2 Punkte

Beantworten Sie für die in der untenstehenden Abbildung gezeigte Anordnung dieselben Fragen wie in Aufgabe C.1.



Physikalische Konstanten

Nachfolgend finden Sie eine Liste physikalischer Konstanten, die Sie zusätzlich zu den in der Aufgabenstellung angegebenen Größen für Ihre Lösung verwenden können.

Physikalische Konstante	Symbol	Zahlenwert
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	299 792 458 m/s
Vakuumpermeabilität (magnetische Feldkonstante)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ Vs/Am}]$
Vakuumpermittivität (elektrische Feldkonstante)	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ As/Vm}]$

Physikalische Konstante	Symbol	Zahlenwert
Elementarladung	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}; [1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atomare Masseneinheit	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molare Gaskonstante	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Planck-Konstante	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Alle nachfolgenden Kraftangaben sind Beträge.

- **A.1:**

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4} \simeq 2.1 \times 10^{-4} \text{ N}$$

Für die gezeigten Richtungen ist die Kraft anziehend.

- **A.2:** Ein Kreisstrom mit dem Durchmesser d und

$$I = Jh \simeq 2.4 \times 10^3 \text{ A}.$$

- **A.3:**

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L} \simeq 14 \text{ N}$$

Die Kraft ist anziehend.

- **A.4:** In der Näherung einer langen Kette gilt

$$l_{\text{max}} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g} \simeq 6.6 \text{ m}.$$

- **A.5:**

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24r^2}$$

Dieser Betrag ist im Rahmen der angegebenen Näherungen unabhängig von θ .

- **B.1:** Das äußere Feld entspricht dem Feld des realen Dipols zusammen mit einem gleich starken, gleichgerichteten Spiegeldipol. Die Feldlinien treffen senkrecht auf die Platte. Die Linie durch **1** bildet eine kurze Rücklaufschleife in der Luft; die Linien durch **2** und **3** gehören zu größeren Schleifen, die Fluss durch die Platte führen. Ihre genauen Richtungen werden in der Lösung beschrieben.
- **B.2:** Markieren Sie die **erste Zeichnung in jeder Zeile**: Magnetisierung senkrecht zur Platte, entweder auf sie zu oder von ihr weg.

$$F = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \simeq 5.9 \text{ N}$$

Die magnetische Kraft ist anziehend.

- **B.3:** Jede Platte wird zum Magneten und zur anderen Platte hingezogen, mit

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ N}.$$

- **C.1:** Alle Momente einer horizontalen Reihe zeigen in dieselbe Richtung; aufeinanderfolgende Reihen zeigen in entgegengesetzte Richtungen. Dies ist eine **antiferromagnetische Ordnung**.

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

- **C.2:** Alle Momente zeigen in dieselbe horizontale Richtung. Dies ist eine **ferromagnetische Ordnung**, die die unten beschriebene Stabilitätsprüfung gegenüber der Drehung eines einzelnen Magneten besteht.

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Dies zeigt nur die Stabilität gegenüber der Drehung eines einzelnen Magneten; im Modell mit Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn senken manche kollektiven Drehungen vieler Magnete die Energie.

Lösung

Die Magnetisierung und die beiden relevanten Dipolmomente sind

$$J = \frac{1.5}{\mu_0} = 1.19366 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$m_c = J \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.750 \text{ A m}^2, \quad m_s = J \frac{\pi \delta^3}{6} = 0.078125 \text{ A m}^2.$$

Für zwei permanente Dipole lautet die Wechselwirkungsenergie

$$U_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})].$$

Äquivalent gilt $U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$. Die Kräfte erhält man durch Ableiten dieser Energie nach dem Ort, wobei die permanenten Momente festgehalten werden.

A.1

Da $L \gg d, h$ gilt, können beide Zylinder durch Punktdipole ersetzt werden. Ihre Momente sind parallel zueinander und zu ihrer gemeinsamen Achse, sodass

$$U(L) = -\frac{\mu_0 m_c^2}{2\pi L^3}.$$

Die Kraft wirkt so, dass L abnimmt, und ihr Betrag ist

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{3\mu_0 m_c^2}{2\pi L^4}.$$

Einsetzen von $m_c = J\pi d^2 h/4$ ergibt

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4}.$$

Mit $L = 0.20 \text{ m}$ folgt

$$F = 2.109375 \times 10^{-4} \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^{-4} \text{ N}}.$$

A.2

Ein homogen magnetisierter Körper kann durch gebundene Ströme dargestellt werden. Seine gebundene Flächenstromdichte ist

$$\vec{K}_b = \vec{J} \times \hat{n}.$$

Bei einem axial magnetisierten Zylinder fließt dieser Strom um die Mantelfläche, mit dem Betrag $K_b = J$. Die Integration über die Zylinderdicke ergibt einen äquivalenten Kreisstrom

$$\boxed{I = Jh}.$$

In Abständen, die groß gegenüber der Dicke sind, kann die dünne zylindrische Stromschicht durch eine einzelne Stromschleife mit dem Durchmesser d ersetzt werden.

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Gleichsetzen der magnetischen Momente:

$$I \frac{\pi d^2}{4} = J \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

Numerisch ergibt sich

$$I = (1.19366 \times 10^6)(2.0 \times 10^{-3}) = 2.3873 \times 10^3 \text{ A} \simeq \boxed{2.4 \text{ kA}}.$$

Sein Umlaufsinn wird nach der Rechte-Hand-Regel so gewählt, dass er die vorgegebene Magnetisierungsrichtung erzeugt.

A.3

Die Bedingung $L \gg h$ erlaubt die Darstellung durch Stromschleifen aus A.2. Da $L \ll d$ gilt, können einander entsprechende, nahe beieinanderliegende Abschnitte der beiden Schleifen als parallele gerade Drähte im Abstand L behandelt werden.

Die anziehende Kraft pro Längeneinheit zwischen parallelen Strömen ist

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L}.$$

In führender Ordnung wirkt diese Kraft entlang der gemeinsamen Achse. Multiplikation mit dem Umfang πd ergibt

$$F \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L}.$$

Somit gilt

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L}.$$

Für $L = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ folgt

$$F \simeq 14.3239 \text{ N} \simeq \boxed{14 \text{ N}}.$$

Dies ist das Ergebnis in führender Ordnung unter der angegebenen Größenhierarchie $d \gg L \gg h$.

A.4

Die Kugeln richten sich mit ihren Momenten entlang der Kette aus, wobei alle in dieselbe Richtung zeigen. Jede Kugel hat die Masse

$$M = \rho \frac{\pi \delta^3}{6}.$$

Zwei Kugeln, deren Mittelpunkte den Abstand $n\delta$ haben, ziehen einander mit der Kraft

$$F_n = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi (n\delta)^4} = \frac{F_1}{n^4},$$

an, wobei

$$F_1 = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi \delta^4} = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24}.$$

Bei einer Kette aus N Kugeln muss die festgehaltene oberste Kugel die übrigen $N - 1$ Kugeln tragen. Die größte nach oben gerichtete magnetische Kraft, die sie auf diese ausüben kann, während alle Kugeln einander weiterhin berühren, ist

$$F_{\text{top}} = F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Folglich gilt

$$(N - 1)Mg \leq F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

Die oberste Verbindungsstelle ist maßgebend: Ein Querschnitt weiter unten trägt weniger Gewicht, während die magnetische Anziehung über diesen Querschnitt mindestens ein Paar für jeden Abstand umfasst, der auch über die oberste Verbindungsstelle hinweg vorkommt.

Für eine lange Kette gilt

$$F_{\text{top}} \simeq F_1 \frac{\pi^4}{90}.$$

Außerdem beträgt die Gewichtskraft des hängenden Teils in führender Ordnung in $1/N$

$$Mg \frac{l}{\delta} = \frac{\rho \pi \delta^2 g}{6} l.$$

Gleichsetzen mit der maximalen magnetischen Haltekraft ergibt

$$\frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l_{\max} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \frac{\pi^4}{90}.$$

Daher gilt

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g}.$$

Der Kugeldurchmesser kürzt sich heraus: Sowohl die magnetische Haltekraft als auch die Masse der Kette pro Längeneinheit skalieren mit δ^2 .

Mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ erhält man

$$F_1 = 5.8594 \text{ N}, \quad F_{\text{top}} \simeq 6.3417 \text{ N}, \\ l_{\max} \simeq 6.5848 \text{ m} \simeq \boxed{6.6 \text{ m}}.$$

Das Mitzählen der festgehaltenen obersten Kugel und das Runden auf eine ganze Anzahl von Kugeln ändern die Länge nur um einen Betrag der Größenordnung δ .

A.5

Da $r \sin \theta \gg \delta$ gilt, kann die diskrete Kette durch eine kontinuierliche Dipollinie ersetzt werden. Ihr Dipolmoment pro Längeneinheit beträgt

$$\lambda_m = \frac{m_s}{\delta} = \frac{\pi J \delta^2}{6}.$$

Wir legen O in den Ursprung und lassen die Kette entlang $+z$ von 0 bis l verlaufen. Alle Momente seien entlang $+z$ ausgerichtet. Im Außenraum definieren wir ein magnetisches Skalarpotential durch

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi.$$

Das Potential der Linie ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \int_0^l \frac{z - z'}{|\vec{r} - z' \hat{z}|^3} dz'.$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - z' \hat{z}|} = \frac{z - z'}{|\vec{r} - z' \hat{z}|^3},$$

ergibt die Integration

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - l \hat{z}|} - \frac{1}{r} \right).$$

Das äußere Feld entspricht somit dem zweier entgegengesetzter effektiver magnetischer Pole an den Endpunkten:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi} \left[\frac{\vec{r} - l \hat{z}}{|\vec{r} - l \hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

Für $l \gg r$ ist der Beitrag des entfernten Endpunkts vernachlässigbar, sodass

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Daraus folgt

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}.$$

Das Feld verläuft radial zum nahen Endpunkt, sein Betrag ist also unabhängig von θ . Eine Umkehr aller Momente kehrt die Feldrichtung um.

B.1

Die Platte nehme den Bereich $x < 0$ ein, ihre Oberfläche liege bei $x = 0$, und der Kugelmittelpunkt befinde sich bei $x = a > 0$. In der Zeichnung auf dem Antwortbogen gilt

$$\vec{m} = -m_s \hat{x}.$$

Bei einer hochpermeablen Platte muss die tangentiale Feldkomponente unmittelbar außerhalb nahezu verschwinden. Diese Randbedingung wird durch einen Spiegeldipol bei $x = -a$ mit **derselben Ausrichtung in Normalenrichtung** erfüllt:

$$\vec{m}_{\text{image}} \simeq -m_s \hat{x}.$$

Genauer wird sein Betrag mit folgendem Faktor multipliziert:

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \simeq 1.$$

An der Oberfläche heben sich die tangentialen Komponenten der beiden Dipolfelder auf. Bezeichnet y die Höhe über dem Kugelmittelpunkt, so ist die verbleibende Normalkomponente

$$B_x(0, y) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{y^2 - 2a^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Der Fluss tritt daher nahe der Kugelachse, wo $|y| < \sqrt{2}a$ gilt, in die Platte ein und weiter entfernt, wo $|y| > \sqrt{2}a$ gilt, wieder aus.

Die verlangte Skizze lässt sich wie folgt beschreiben:

- Die **linke Seite der Kugel ist ihre Nordpolseite**, die rechte Seite ihre Südpolseite. Außerhalb verlaufen die Pfeile von der linken Seite entlang gekrümmter Rückwege zur rechten Seite. Im Inneren der Kugel verlaufen die Pfeile ungefähr von rechts nach links.
- **Durch Punkt 1:** Zeichnen Sie eine kurze obere Rücklaufschleife, die vollständig in der Luft außerhalb der Platte liegt. Sie verlässt die Kugeloberfläche oben links, steigt durch Punkt 1 an, biegt nach rechts um und tritt oben rechts wieder in die Kugeloberfläche ein.
- **Durch Punkt 2:** Zeichnen Sie eine größere Schleife, die Fluss durch die Platte nach oben führt. An Punkt 2 zeigt sie hauptsächlich nach oben und etwas zur Oberfläche hin. Sie biegt nach rechts ab und tritt oberhalb von Punkt 3 senkrecht zur Oberfläche aus, bevor sie sich zur Südpolseite der Kugel zurückkrümmt. Verfolgt man sie rückwärts, so führt ihr Abschnitt innerhalb der Platte nach unten und schließt an Fluss an, der näher am Magneten in die Platte eintritt.
- **Durch Punkt 3:** Zeichnen Sie eine Linie, die ungefähr horizontal nach rechts aus der Platte austritt. Anschließend krümmt sie sich nach unten und rechts zur Südpolseite der Kugel. Setzen Sie sie rückwärts durch die Platte als gekrümmten Weg zu einer tiefer gelegenen Eintrittsstelle fort, die vom Fluss der Nordpolseite der Kugel gespeist wird.
- Das Muster in der unteren Hälfte ist die Spiegelung des Musters in der oberen Hälfte an der Horizontalen durch den Kugelmittelpunkt. Jede Linie setzt sich durch das Material und den

Magneten fort und bildet eine geschlossene Magnetfeldlinie.

Im idealen Halbraumgrenzfall ist das Feld innerhalb der Platte ungefähr doppelt so groß wie das Feld, das der reale Dipol allein dort erzeugen würde. Dadurch sind die gekrümmten Fortsetzungen durch Punkt 2 sowie ihre Richtungen festgelegt.

B.2

Der Vektor $\hat{n}$ zeige senkrecht aus der Platte heraus, und wir zerlegen das Moment der Kugel gemäß

$$\vec{m} = m_n \hat{n} + \vec{m}_t.$$

Ihr Spiegelbild hat das Moment

$$\vec{m}' = m_n \hat{n} - \vec{m}_t.$$

Liegt der Kugelmittelpunkt im Abstand a von der Platte, so ist das Spiegelbild $2a$ entfernt. Sein Feld am Ort des realen Dipols ist

$$\vec{B}_{\text{image}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2a)^3} (2m_n \hat{n} + \vec{m}_t).$$

Da die Magnetisierung der Platte induziert ist, beträgt die Wechselwirkungsenergie

$$U = -\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{image}}.$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen $\vec{m}$ und der Plattennormalen mit θ , so gilt

$$U(a, \theta) = -\frac{\mu_0 m_s^2}{8\pi(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

Diese Energie ist minimal bei

$$\theta = 0 \quad \text{oder} \quad \theta = \pi.$$

Daher sind beide Richtungen senkrecht zur Platte stabil: auf die Platte zu und von ihr weg. Dies sind die ersten Zeichnungen in der oberen und unteren Zeile.

Bei jeder der beiden stabilen Ausrichtungen beträgt der Betrag der anziehenden Kraft

$$F = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(2a)^4}.$$

Bei Berührung gilt $a = \delta/2$, also

$$F = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \boxed{\frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$F = 5.8594 \text{ N} \simeq \boxed{5.9 \text{ N}}.$$

B.3

Es sei

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

die Stirnfläche des Magneten und

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = 4A$$

die Fläche jeder Platte.

Die Permeabilität der Platten ist sehr groß, daher ist das H -Feld in ihrem Inneren vernachlässigbar. Jede Platte ist somit näherungsweise eine Äquipotentialfläche des magnetischen Skalarpotentials. Vernachlässigt man Randeffekte, so hat das axiale H -Feld im Magneten und im umgebenden ringförmigen Luftspalt denselben Wert.

Es bezeichne B_m das vorzeichenbehaftete axiale Feld im Magneten und B_a dasjenige im Ringspalt. Da die Magnetisierung fest ist, gilt

$$B_m = \mu_0(H + J), \quad B_a = \mu_0 H.$$

Daraus folgt

$$B_m - B_a = \mu_0 J.$$

Der gesamte Fluss durch den Magneten muss durch den Ringspalt zurückkehren, da der äußere Fluss vernachlässigt wird. Daher gilt

$$AB_m + (A_p - A)B_a = 0.$$

Die Lösung ergibt

$$B_m = \mu_0 J \left(1 - \frac{A}{A_p} \right), \quad B_a = -\mu_0 J \frac{A}{A_p}.$$

Für $A_p = 4A$ gilt

$$B_m = \frac{3}{4} \mu_0 J = 1.125 \text{ T}, \quad B_a = -\frac{1}{4} \mu_0 J = -0.375 \text{ T}.$$

Ein Magnetfeld senkrecht zu einer hochpermeablen Oberfläche erzeugt einen anziehenden Druck

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

An der Kontaktfläche zwischen Magnet und Platte lässt sich dieser berechnen, indem man sich einen infinitesimalen Vakuumpalt vorstellt: Die Normalkomponente von B ist über diesen hinweg stetig. Sowohl der zentrale Bereich als auch der ringförmige Bereich des Rückflusses ziehen die Platte nach innen, unabhängig von ihren entgegengesetzten Feldrichtungen.

Somit gilt

$$F = \frac{AB_m^2 + (A_p - A)B_a^2}{2\mu_0}.$$

Einsetzen ergibt

$$F = \frac{\mu_0 J^2 A}{2} \left(1 - \frac{A}{A_p} \right).$$

Mit $A_p = 4A$ folgt

$$\boxed{F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$F = 210.9375 \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ N}}$$

für jede Platte.

C.1

Wir definieren die Energieskala der Dipolwechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn als

$$\varepsilon_d = \frac{\mu_0 m_s^2}{4\pi\delta^3} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{144} = 4.8828125 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

Wir wählen die Momente entlang horizontaler Reihen und kehren ihre Richtung in aufeinanderfolgenden Reihen um. Auf dem Antwortbogen können die Momente der oberen Reihe nach rechts, die der mittleren Reihe nach links und die der unteren Reihe nach rechts zeigen:

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{array}$$

Betrachten wir einen zentralen Magneten, dessen Moment nach rechts zeigt.

Seine beiden horizontalen Nachbarn zeigen ebenfalls nach rechts und liegen auf seiner Dipolachse. Die Wechselwirkungsenergie mit jedem von ihnen beträgt

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Seine beiden vertikalen Nachbarn zeigen nach links und liegen senkrecht zu seinem Moment. Der Beitrag jedes dieser Nachbarn beträgt

$$U_{\text{vertical}} = -\varepsilon_d.$$

Die gesamte Wechselwirkungsenergie des zentralen Magneten mit seinen Nachbarn beträgt daher

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 2(-\varepsilon_d) = -6\varepsilon_d.$$

Alle vier Nachbarn erzeugen Felder parallel zum zentralen Moment, mit dem Gesamtbetrag

$$B_{\text{nn}} = \frac{6\varepsilon_d}{m_s}.$$

Eine Drehung dieses Magneten um den Winkel α bei festgehaltenen Nachbarn erhöht die Energie um

$$\Delta U = 6\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Er erfährt somit ein rücktreibendes Drehmoment.

Bei festen Plätzen auf dem Quadratgitter minimiert das Muster auch die gesamte orientierungsabhängige Energie der Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn. Um dies zu zeigen, schreiben wir ein Einheitsmoment als (u_i, v_i) . Dann gilt

$$\frac{U}{\varepsilon_d} = \sum_{\langle ij \rangle_x} (-2u_i u_j + v_i v_j) + \sum_{\langle ij \rangle_y} (u_i u_j - 2v_i v_j) \geq -3 \sum_i (u_i^2 + v_i^2) = -3N.$$

Die Ungleichung folgt aus $2|ab| \leq a^2 + b^2$, und das vorgeschlagene Streifenmuster erreicht diese Schranke im Gitterinneren.

Wird der zentrale Magnet ins Unendliche entfernt, entfallen seine vier Bindungen; die erforderliche Arbeit beträgt also

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 6\varepsilon_d.$$

Es tritt kein Faktor $1/2$ auf: Jede Bindung, an der der entfernte Magnet beteiligt ist, wird einmal gezählt. Daher gilt

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Aufeinanderfolgende Reihen haben entgegengesetzte Magnetisierungen, sodass eine **antiferromagnetische Ordnung** vorliegt.

C.2

Wir wählen alle Momente horizontal nach rechts gerichtet, einschließlich jeder Kugel in der Abbildung auf dem Antwortbogen.

Eine zentrale Kugel hat zwei horizontale Nachbarn und vier diagonale Nachbarn, deren Verbindungsvektoren mit den Momenten Winkel von 60° oder 120° bilden.

Der Beitrag jedes horizontalen Paares beträgt

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

Für parallele Momente, die mit ihrem Verbindungsvektor den Winkel β bilden, gilt

$$U_{\text{pair}} = \varepsilon_d(1 - 3\cos^2 \beta).$$

Somit beträgt der Beitrag jedes diagonalen Nachbarn

$$U_{\text{diagonal}} = \varepsilon_d \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_d.$$

Die Summe über die sechs Bindungen ergibt

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 4\left(\frac{1}{4}\varepsilon_d\right) = -3\varepsilon_d.$$

Die transversalen Komponenten der Felder der Nachbarn heben sich auf. Das verbleibende Feld zeigt entlang des zentralen Moments und hat den Betrag

$$B_{\text{nn}} = \frac{3\varepsilon_d}{m_s}.$$

Folglich erfordert die Drehung eines Magneten um α bei festgehaltenen Nachbarn die Energie

$$\Delta U = 3\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

Damit ist ein rücktreibendes Drehmoment gegenüber einer einzelnen Drehung nachgewiesen. Stabilität gegenüber kollektiven Drehungen ist damit nicht nachgewiesen: Im Modell mit Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn bleibt die Energie unverändert, wenn alle Momente gemeinsam um denselben Winkel gedreht werden, weil die sechs Bindungsrichtungen jeweils 60° auseinanderliegen, und manche nicht einheitlichen kollektiven Drehungen senken die Energie.

Die zum Entfernen des zentralen Magneten erforderliche Arbeit beträgt

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 3\varepsilon_d,$$

also

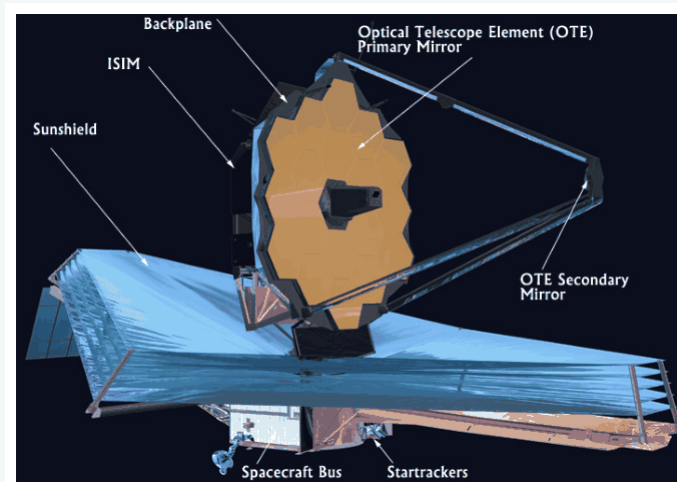
$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Alle Momente zeigen in dieselbe Richtung, daher weist diese Anordnung eine **ferromagnetische Ordnung** auf.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: James-Webb-Weltraumteleskop

In dieser Aufgabe geht es um die Physik des James-Webb-Weltraumteleskops. Das Licht eines Sterns trifft auf den Hauptspiegel mit einer Fläche von $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ und wird an einem Sekundärspiegel reflektiert. Die Brennweite des Systems beträgt $f = 130 \text{ m}$. Das Licht wird im ISIM (Integriertes Wissenschaftliches Instrumentenmodul) fokussiert, das die CCD-Kameras (ladungsgekoppelte Bauelemente) enthält.



Bildnachweis: NASA

Teil A. Abbildung eines Sterns (1.8 Punkte)

Der nächstgelegene Rote Riese ist 89 Lichtjahre entfernt, hat eine Temperatur von $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ und einen Durchmesser von $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

A.1 — 0.4 Punkte

Berechnen Sie den Durchmesser des scharf abgebildeten Sterns auf der Bildfläche der CCD-Kamera.

A.2 — 0.4 Punkte

Schätzen Sie den Durchmesser des zentralen Beugungsmaximums auf der Bildfläche der CCD-Kamera ab. Nehmen Sie eine Wellenlänge von $\lambda = 800 \text{ nm}$ an; bei dieser Wellenlänge ist die Intensität des Roten Riesen am größten.

A.3 — 1.0 Punkte

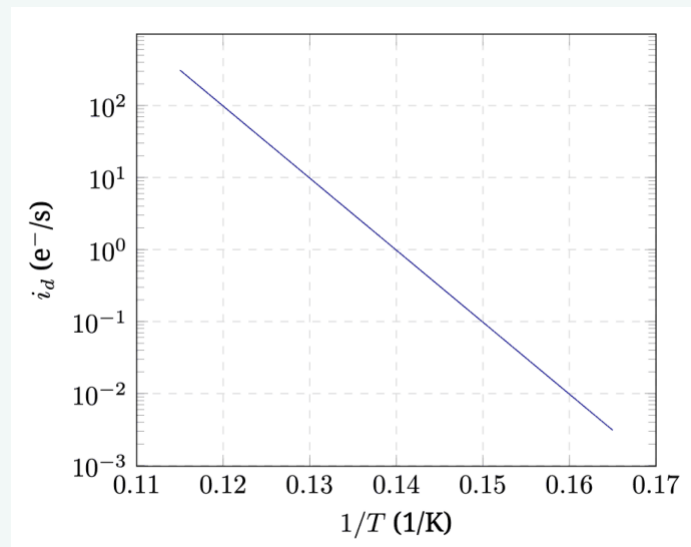
Wenn der CCD nicht gekühlt wird und Wärme nur durch Abstrahlung von der Oberseite der Bildfläche abgeben kann, welche Gleichgewichtstemperatur würde sich dann am Ort des Bildes des Roten Riesen auf dem CCD einstellen? Nehmen Sie an, dass die CCD-Oberfläche ein schwarzer Körper ist. Geben Sie eine Formel und eine numerische Abschätzung an.

Teil B. Zählen von Photonen (1.8 Punkte)

Die Absorption eines Photons durch die CCD-Kamera führt zur Freisetzung eines Elektrons innerhalb der Apparatur. Dies geschieht nur, wenn das Photon genügend Energie besitzt, um ein Elektron über eine Energielücke ΔE_g hinweg anzuregen. Nehmen Sie an, dass dies jedem Photon mit ausreichender Energie gelingt. Aufgrund der Temperatur der CCD-Kamera gelangen auch Elektronen als Leckstrom über die Energielücke; dies ist der Dunkelstrom i_d , der als Anzahl von Elektronen pro Sekunde gemessen wird. Er hängt gemäß

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}. \quad (1)$$

von der Temperatur ab, wobei i_0 eine Konstante ist.



Das Diagramm zeigt die Temperaturabhängigkeit des Dunkelstroms. Die Einheit des Dunkelstroms, e^-/s , ist als Anzahl von Elektronen pro Sekunde zu verstehen.

B.1 — 0.4 Punkte

Schätzen Sie anhand des Dunkelstromdiagramms die Größenordnung der Temperatur einer entfernten Quelle thermischer Photonen ab, die gerade noch ein Elektron im Pixel anregen könnten.

Die Elektronen werden in einem Kondensator gesammelt und nach einer Belichtungszeit τ gezählt. Bei diesem Vorgang gibt es drei wesentliche Unsicherheitsquellen: eine feste Unsicherheit beim Zählvorgang, die als Ausleserauschen bezeichnet wird; einen durch die Poisson-Verteilung beschriebenen Fehler des Dunkelstroms und einen durch die Poisson-Verteilung beschriebenen Fehler der nachgewiesenen einfallenden Photonen. Fehler gemäß der Poisson-Verteilung sind gleich der Quadratwurzel aus der Anzahl der zum jeweiligen Prozess gehörenden Zählereignisse. Die gemessene Photonenzahl ist gleich der Anzahl der Elektronen im Kondensator abzüglich der Anzahl der dem Dunkelstrom zuzuordnenden Elektronen.

B.2 — 0.4 Punkte

Geben Sie einen Ausdruck für die gesamte Zählunsicherheit σ_t an, wenn das Ausleserauschen σ_r , der Dunkelstrom i_d , die Rate einfallender Photonen p und die Belichtungszeit τ betragen.

Nehmen Sie für die verbleibenden Fragen dieses Teils eine Belichtungszeit von $\tau = 10^4$ s und ein festes Ausleserauschen von $\sigma_r = 14$ an.

B.3 — 0.5 Punkte

Nehmen Sie eine Betriebstemperatur von $T_p = 7.5 \text{ K}$ an. Berechnen Sie die minimale Photonenrate p , bei der die Photonenzahl das Zehnfache der Zählunsicherheit beträgt.

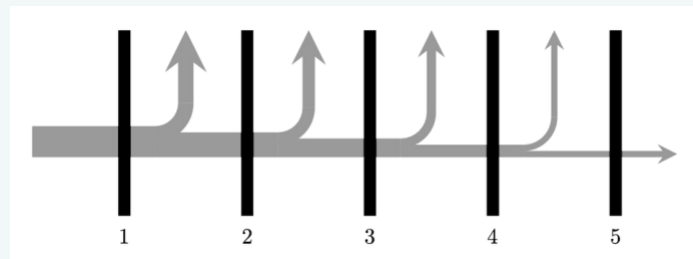
B.4 — 0.5 Punkte

Angenommen, alle Photonen können gerade noch ein Elektron über die Bandlücke hinweg anregen: Welche Intensität hat die in B.3 gefundene Photonenquelle am Hauptspiegel? Geben Sie Ihre Antwort in W/m^2 an.

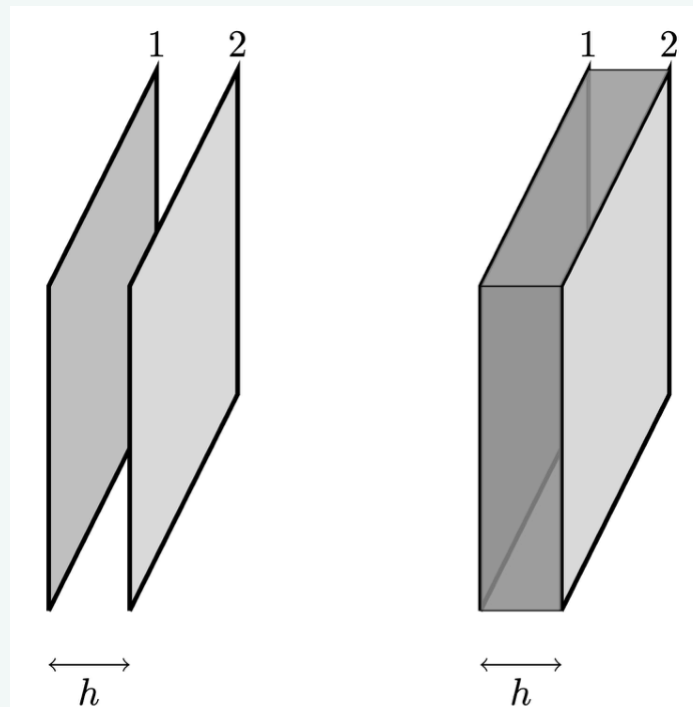
Teil C. Passive Kühlung (4.4 Punkte)

Eine Infrarot-CCD-Kamera muss auf einer niedrigen Temperatur gehalten werden. Das erste Hilfsmittel ist ein Schild zum Schutz vor der Sonnenstrahlung.

Der Sonnenschild besteht aus fünf voneinander getrennten reflektierenden Schichten aus dünnen Folien (schwarz); Strahlungsenergie (grau) von der Sonne fällt auf die erste Folie links, und zwischen jedem Folienpaar entweicht ein Teil der Energie.



Schematische Darstellung des Energieflusses: Die vertikalen Linien (schwarz) sind die Folien, der Energiefluss (grau) verläuft von links nach rechts; zwischen den Folien fließt jedoch ein Teil der Energie nach oben und hinaus ins Weltall.



Links ist ein einfaches Modell zweier benachbarter Folien 1 und 2 dargestellt, die durch einen Abstand h voneinander getrennt sind. Die Folien sind nicht miteinander verbunden, und der Rand ist zum Weltall hin offen. Nehmen Sie an, dass die Folien parallel sind. Zwischen den Folien kann Wärmestrahlung ausgetauscht werden, und durch den umlaufenden Randspalt kann Wärmestrahlung entweichen. Rechts ist der Randspalt zur Veranschaulichung schattiert dargestellt.

Nehmen Sie die folgenden Vereinfachungen an:

- Die Folien sind quadratisch und haben jeweils eine Fläche von $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$.
- Die Folien sind parallel und haben entlang des Randes einen Abstand von $h = 25 \text{ cm}$.
- Die Folien haben einen konstanten Emissionsgrad $\epsilon \ll 1$. Nehmen Sie an, dass alle Reflexionen an den Folienoberflächen diffus sind.
- Die Folien sind dünn, wobei die Temperatur auf Vorder- und Rückseite gleich und gleichmäßig ist.
- Der Anteil des von einer Folie emittierten Strahlungsflusses, der von der benachbarten Folie absorbiert wird, beträgt $\alpha \leq 1$. Das bedeutet: Wenn Folie 1 in der obigen Abbildung eine Wärmemenge Q_1 in Richtung von Folie 2 emittiert, absorbiert Folie 2 davon eine Menge αQ_1 .
- Der durch den Randspalt zwischen zwei Folien austretende Strahlungsfluss wird durch βQ_{12} angenähert, wobei αQ_{12} der Nettofluss zwischen den beiden Folien ist. Für den Anteil gilt $\beta < 1$. Dies entspricht der Aussage, dass der Wärmeverlust ins Weltall zwischen zwei Folien proportional zum Nettowärmeaustausch zwischen den Folien ist. Dies ist eine grobe Näherung für diese Aufgabe.
- Die Hintergrundtemperatur des Weltalls ist vernachlässigbar.

C.1 — 2.4 Punkte

Leiten Sie Ausdrücke für die Gleichgewichtstemperaturen der ersten und der fünften Folie in Abhängigkeit von der Intensität der einfallenden Sonnenstrahlung I_0 , den Konstanten α und β sowie gegebenenfalls benötigten physikalischen Konstanten her. Zur Vereinfachung Ihrer Ausdrücke dürfen Sie zusätzliche Konstanten in Abhängigkeit von α und β usw. definieren.

C.2 — 1.6 Punkte

Leiten Sie aus den Angaben zur Foliengeometrie unter Annahme eines Emissionsgrades von $\epsilon = 0.05$ numerische Abschätzungen für α und β her. Es empfiehlt sich, das oben dargestellte Quader-Modell der Folien zu betrachten, bei dem die umlaufende Seitenfläche effektiv als perfekter Absorber für Strahlungsenergie wirkt.

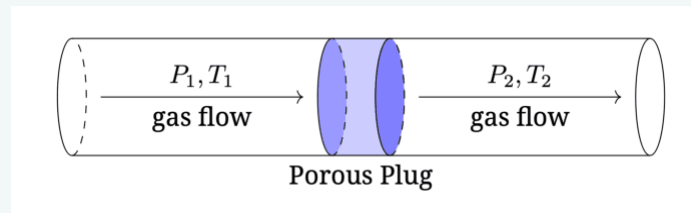
C.3 — 0.4 Punkte

Bestimmen Sie die Temperaturen von Folie 1 und Folie 5 numerisch. Die Intensität der Sonnenstrahlung beträgt $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$.

Teil D. Kryokühler (4 Punkte)

Die letzte Stufe des Kühlsystems kühlt die CCD-Kamera direkt. Ein Kältesystem mit geschlossenem Kreislauf besitzt eine Zuleitung, die Heliumgas bei konstantem Druck P_1 zuführt. Das Gas strömt durch einen schwammartigen porösen Pfropfen in ein Rohr mit konstantem Druck

P_2 . Das Rohr führt das Gas zur Kühlung des CCD weiter. Anschließend durchläuft das Heliumgas eine Pumpe, bevor es in die Zuleitung zurückkehrt.



Das links bei einem wohldefinierten Druck P_1 und einer wohldefinierten Temperatur T_1 zugeführte Heliumgas wird durch den Pfropfen auf einen wohldefinierten Druck P_2 und eine wohldefinierte Temperatur T_2 gebracht und rechts abgeführt.

Beim Durchströmen des porösen Pfropfens spielt die viskose Reibung an den Wänden der engen Kanäle im Schwamm eine wichtige Rolle; während dieses Vorgangs wird jedoch keine Wärme auf das Gas übertragen oder von ihm abgegeben. Die makroskopische Strömungsgeschwindigkeit des Gases in Bereich 2 ist nur geringfügig größer als diejenige in Bereich 1.

Helium ist kein ideales Gas, bleibt aber während des gesamten Vorgangs gasförmig.

D.1 — 1.0 Punkte

Betrachten Sie ein Mol Gas, das den Pfropfen von links nach rechts durchströmt. Vervollständigen Sie die Tabelle auf Ihrem Antwortbogen, indem Sie mit „>“ oder „<“ angeben, welche Größe größer sein muss, mit „=“ Größen kennzeichnen, die gleich sein müssen, oder „?“ eintragen, wenn sich ohne weitere Informationen nicht entscheiden lässt, welche Größe größer ist oder ob beide gleich sind.

Quantity Name	State 1	Compare using ">", "<", "=", or "?"	State 2
Internal Energy	U_1		U_2
Temperature	T_1		T_2
Entropy	S_1		S_2
Pressure	P_1		P_2
Volume	V_1		V_2

D.2 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie eine aus U (innerer Energie), P (Druck) und V (Volumen) zusammengesetzte Größe, die beim Durchströmen eines Mols Gas durch den Pfropfen erhalten bleibt; zeigen Sie Ihre Herleitung dieser Erhaltungsgröße.

Auf Ihren Antwortbögen befinden sich Diagramme der inneren Energie pro Masse in Abhängigkeit vom Volumen pro Masse für Helium mit Isothermen und Linien konstanter Entropie.

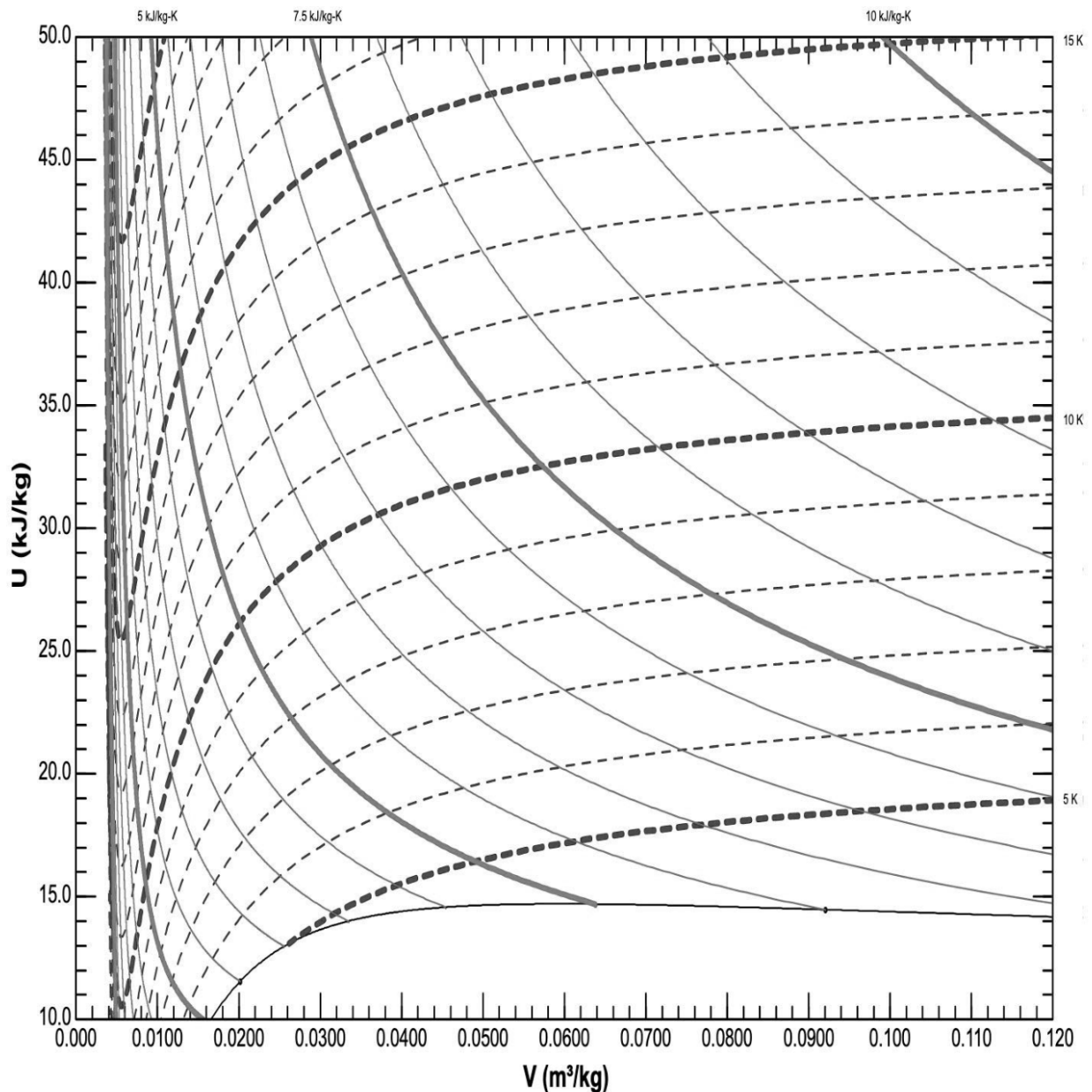
D.3 — 1.4 Punkte

Nehmen Sie $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ und $T_2 = 7.5 \text{ K}$ an und bestimmen Sie mithilfe des Diagramms einen Zahlenwert für die in Teil D.2 gefundene Erhaltungsgröße. Zeigen Sie die Konstruktion im Diagramm!

Solid curves (trending down with increasing volume) are constant entropy S ; values for the bold curves are on top.

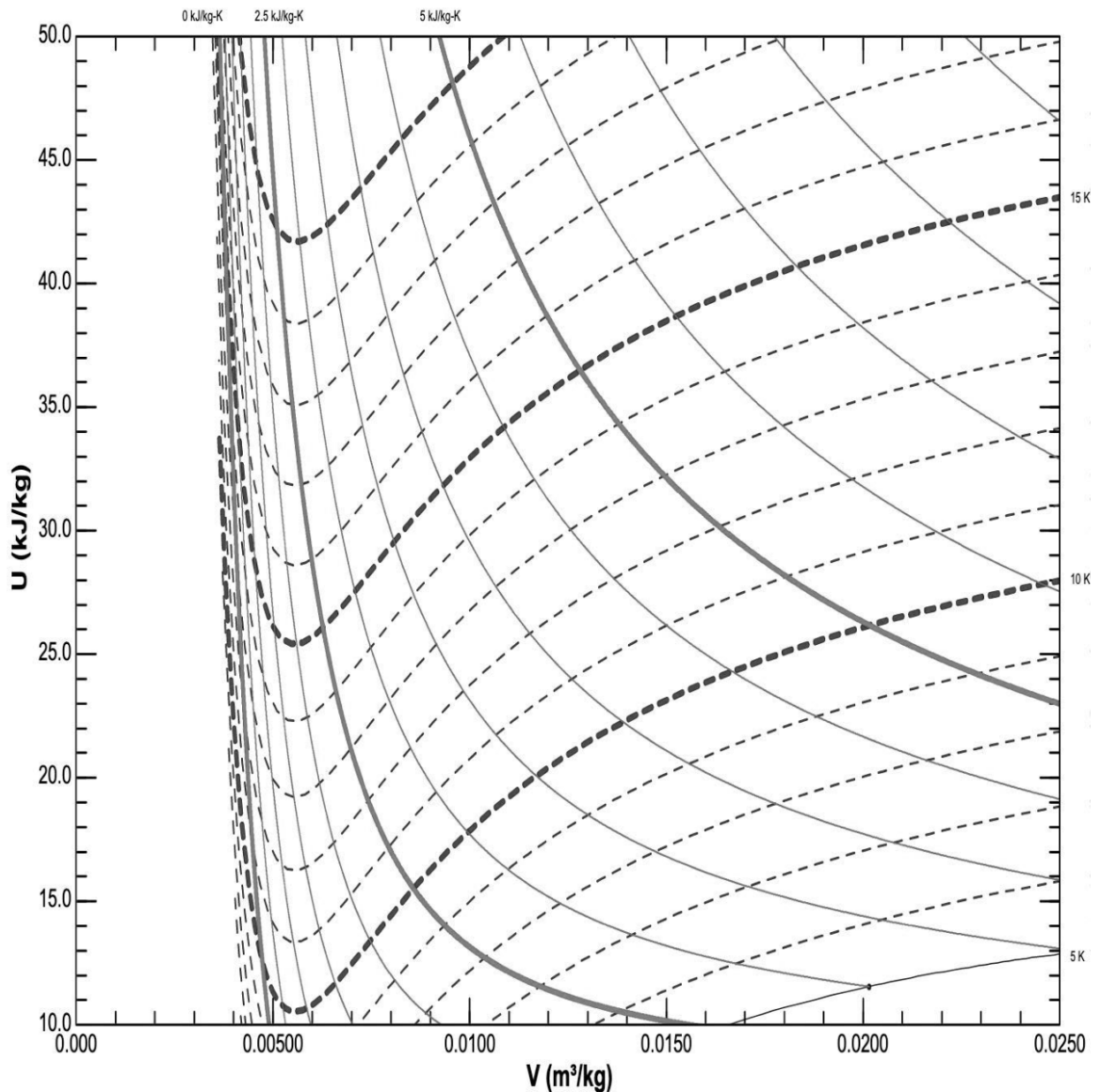
Dashed curves (trending up with increasing volume) are constant temperature T ; values for the bold curves are on right.

Internal energy (per kg) U is on vertical axis; volume (per kg) V is on horizontal axis



D.4 — 0.8 Punkte

Bestimmen Sie die maximal mögliche Temperatur für T_1 . Zeigen Sie die Konstruktion im Diagramm!



D.5 — 0.2 Punkte

Bestimmen Sie unter Annahme Ihres in D.4 gefundenen Wertes für das maximale T_1 einen Zahlenwert für P_1 .

Physikalische Konstanten

Nachfolgend finden Sie eine Liste physikalischer Konstanten, die Sie zusätzlich zu den im Aufgabentext angegebenen Größen für Ihre Lösung verwenden können.

Physikalische Konstante	Symbol	Zahlenwert
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	299 792 458 m/s
Vakuumpermeabilität (magnetische Feldkonstante)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ V s}/(\text{A m})]$

Physikalische Konstante	Symbol	Zahlenwert
Vakuumpermittivität (elektrische Feldkonstante)	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}; \quad [1 \text{ F/m} = 1 \text{ A s/(V m)}]$
Elementarladung	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad [1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atomare Masseneinheit	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Avogadro-Konstante	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Universelle Gaskonstante	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Planck-Konstante	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Reduzierte Planck-Konstante	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A.1:** $d_{\text{image}} \simeq 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}$.
- **A.2:** $d_{\text{diff}} \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}$, unter Verwendung einer äquivalenten kreisförmigen Apertur.
- **A.3:** Mit dem Abstand L und einem gleichmäßig erwärmten Beugungsfleck gilt

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4} \simeq 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

- **B.1:** Die Abschätzung anhand der charakteristischen Energie ergibt $T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}$, da $|\Delta E_g|/k_B \simeq 1.4 \times 10^3 \text{ K}$. Ein Kriterium anhand des Maximums der Wellenlängenverteilung ergibt stattdessen ungefähr $2.8 \times 10^2 \text{ K}$.
- **B.2:** $\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p \tau}$.
- **B.3:** $p_{\text{min}} \simeq 0.22 \text{ s}^{-1}$.
- **B.4:** $I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$.

- **C.1:** Wir definieren

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \quad K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha}.$$

Dann gilt

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}, \quad T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}.$$

- **C.2:** $\alpha \simeq 0.293$, $\beta \simeq 0.414$.
- **C.3:** $T_1 \simeq 360 \text{ K}$, $T_5 \simeq 120 \text{ K}$.
- **D.1:** In der Reihenfolge der Tabelle: ?, ?, <, >, <.
- **D.2:** $H = U + PV$, unter Vernachlässigung der kleinen Änderung der makroskopischen kinetischen Energie.
- **D.3:** $H/m \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}$, entsprechend ungefähr 160 J/mol für Helium.
- **D.4:** $T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}$.
- **D.5:** $P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Lösung

A.1

Der Abstand des Sterns sei L . Mit $1 \text{ Lichtjahr} \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$ ergibt sich

$$L \simeq 89(9.46 \times 10^{15}) = 8.42 \times 10^{17} \text{ m}.$$

Da $L \gg f$, liegt das Bild praktisch in der Brennebene. Sein Winkeldurchmesser beträgt d_o/L , sodass

$$d_{\text{image}} = f \frac{d_o}{L} = \frac{130(1.7 \times 10^{11})}{8.42 \times 10^{17}} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Damit folgt

$$d_{\text{image}} \simeq 26 \mu\text{m}.$$

A.2

Wir nähern den Hauptspiegel durch eine kreisförmige Apertur gleicher Fläche an:

$$D = 2\sqrt{\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi}} = 5.64 \text{ m}.$$

Bei einer kreisförmigen Apertur hat das erste Beugungsminimum einen Winkelradius von $1.22\lambda/D$. Folglich hat das zentrale Maximum den Durchmesser

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{\lambda f}{D}.$$

Numerisch ergibt sich

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{(800 \times 10^{-9})(130)}{5.64} = 4.50 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Also gilt

$$d_{\text{diff}} \simeq 45 \mu\text{m}.$$

Der Beugungsdurchmesser ist größer als der geometrische Bilddurchmesser.

A.3

Wir behandeln den Stern als schwarzen Körper und vernachlässigen optische Verluste. Seine Leuchtkraft beträgt

$$P_{\text{star}} = 4\pi \left(\frac{d_o}{2} \right)^2 \sigma T_{\text{star}}^4.$$

Die vom Spiegel gesammelte Leistung ist daher

$$P_{\text{collected}} = A_{\text{mirror}} \frac{P_{\text{star}}}{4\pi L^2} = A_{\text{mirror}} \sigma T_{\text{star}}^4 \frac{d_o^2}{4L^2} \simeq 2.43 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

Für die verlangte Abschätzung setzen wir den Durchmesser des beleuchteten Flecks gleich dem größeren der beiden Durchmesser, dem geometrischen Bilddurchmesser und dem Beugungsdurchmesser:

$$d_{\text{spot}} \simeq d_{\text{diff}}, \quad A_{\text{spot}} \simeq \frac{\pi d_{\text{diff}}^2}{4}.$$

Wir nehmen näherungsweise eine gleichmäßige Erwärmung über diesen Fleck an. Da nur die Oberseite abstrahlt, erfordert das Gleichgewicht

$$P_{\text{collected}} = \sigma A_{\text{spot}} T_{\text{image}}^4.$$

Damit folgt

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4}$$

und

$$T_{\text{image}} \simeq 405 \text{ K} \approx 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

Diese Abschätzung vernachlässigt das genaue Beugungsprofil und die Energie in dessen äußeren Ringen. Im Grenzfall der geometrischen Optik würde das Einsetzen von $d_{\text{spot}} = f d_o / L$ stattdessen Folgendes ergeben:

$$T_{\text{image,geom}} = T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi f^2} \right)^{1/4} \simeq 530 \text{ K}.$$

B.1

Durch Logarithmieren des Dunkelstromgesetzes ergibt sich

$$\ln i_d = \ln i_0 - \frac{|\Delta E_g|}{6k_B} \frac{1}{T}.$$

Aus dem Diagramm lässt sich ablesen, dass eine Erhöhung von $1/T$ von 0.12 K^{-1} auf 0.16 K^{-1} den Strom von 10^2 auf 10^{-2} s^{-1} verringert. Somit gilt

$$\frac{\Delta \ln i_d}{\Delta(1/T)} = \frac{\ln(10^{-4})}{0.04 \text{ K}^{-1}} = -100 \ln 10 \text{ K}.$$

Daraus folgt

$$\frac{|\Delta E_g|}{k_B} = 600 \ln 10 \text{ K} \simeq 1.38 \times 10^3 \text{ K},$$

oder

$$|\Delta E_g| \simeq 1.91 \times 10^{-20} \text{ J} \simeq 0.119 \text{ eV}.$$

Mit der Abschätzung für die charakteristische thermische Energie $E_\gamma \sim k_B T$ ergibt sich

$$T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}.$$

Hier tritt ein von der Konvention abhängiger Zahlenfaktor auf. Die Schwellenwellenlänge beträgt

$$\lambda_g = \frac{hc}{|\Delta E_g|} \simeq 10.4 \mu\text{m}.$$

Wenn „gerade noch“ bedeutet, dass das Maximum der Wellenlängenverteilung des thermischen Spektrums diese Schwelle erreicht, ergeben das Wiensche Verschiebungsgesetz und das angegebene Maximum des Sterns

$$T_{\text{source}} \simeq 3600 \text{ K} \frac{0.800 \mu\text{m}}{10.4 \mu\text{m}} \simeq 2.8 \times 10^2 \text{ K}.$$

Beide Rechnungen bestimmen die relevante thermische Skala; ein thermisches Spektrum besitzt keine scharfe obere Grenze der Photonenenergie.

B.2

Die mittlere Photonenzahl beträgt $p\tau$, und die mittlere Dunkelzählung beträgt $i_d\tau$. Ihre Poisson-Varianzen sind gleich den jeweiligen Mittelwerten.

Unter der Annahme unabhängiger Rauschquellen addieren sich die Varianzen:

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau.$$

Daher gilt

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + p\tau}.$$

Das Subtrahieren der bekannten mittleren Dunkelzählung entfernt deren mittleren Beitrag, lässt aber ihre statistischen Schwankungen bestehen.

B.3

Die Gerade im Diagramm entspricht näherungsweise

$$i_d(T) = 10^{14-100 \text{ K}/T} \text{ s}^{-1}.$$

Bei $T_p = 7.5 \text{ K}$ gilt

$$i_d = 10^{14-100/7.5} = 10^{2/3} \simeq 4.64 \text{ s}^{-1}.$$

Wir schreiben $N = p\tau$ für die erwartete Photonenzahl. Die Grenzbedingung lautet

$$N = 10\sqrt{\sigma_r^2 + i_d\tau + N}.$$

Quadrieren und Lösen der entstehenden quadratischen Gleichung liefert die positive Lösung

$$N = 50 + \sqrt{2500 + 100(\sigma_r^2 + i_d\tau)}.$$

Mit $\sigma_r = 14$ und $\tau = 10^4$ s ergibt sich

$$N \simeq 2.21 \times 10^3.$$

Damit folgt

$$p_{\min} = \frac{N}{\tau} \simeq 0.221 \text{ s}^{-1} \approx 0.22 \text{ s}^{-1}.$$

B.4

Jedes Photon an der Schwelle hat die Energie $|\Delta E_g|$. Bei einem Nachweiswirkungsgrad von eins und verlustfreier Sammlung beträgt die erforderliche Leistung am Spiegel $p|\Delta E_g|$. Somit gilt

$$I = \frac{p|\Delta E_g|}{A_{\text{mirror}}}.$$

Einsetzen liefert

$$I = \frac{(0.221)(1.91 \times 10^{-20})}{25} \simeq 1.69 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

Also gilt

$$I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

C.1

Es sei $A = A_{\text{sheet}}$, und wir definieren die von einer Seite der Folie i emittierte Leistung als

$$q_i = \epsilon \sigma A T_i^4.$$

Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz ist der konstante Emissionsgrad zugleich der Absorptionsgrad, sodass Folie 1 folgende Sonnenstrahlungsleistung absorbiert:

$$P_{\odot} = \epsilon I_0 A.$$

Gemäß dem vorgegebenen Modell für das Entweichen von Strahlung beim Energietransport von links nach rechts definieren wir die von Folie $i + 1$ aus dem vorangehenden Spalt empfangene Nettoleistung als

$$F_i = \alpha(q_i - q_{i+1}).$$

Die damit einhergehende, durch diesen Spalt entweichende Leistung beträgt

$$L_i = \beta(q_i - q_{i+1}) = \frac{\beta}{\alpha} F_i.$$

Somit beträgt die gesamte Leistung, die von der heißeren Seite in einen Spalt eintritt,

$$F_i + L_i = r F_i, \quad r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Für jede der dazwischenliegenden Folien erfordert das Gleichgewicht

$$F_{i-1} = r F_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

Die letzte Folie strahlt von ihrer freiliegenden Seite q_5 ab, sodass

$$F_4 = q_5.$$

Gehen wir die Spalte rückwärts durch, erhalten wir

$$F_3 = r q_5, \quad F_2 = r^2 q_5, \quad F_1 = r^3 q_5.$$

Für die Temperaturunterschiede gilt

$$q_i - q_{i+1} = \frac{F_i}{\alpha}.$$

Die Summe aller vier Differenzen ergibt

$$q_1 - q_5 = \frac{q_5}{\alpha} (1 + r + r^2 + r^3).$$

Wir definieren

$$K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha};$$

dann gilt $q_1 = Kq_5$.

Schließlich gibt die erste Folie über ihre der Sonne zugewandte Oberfläche q_1 und in den ersten Spalt rF_1 ab:

$$\epsilon I_0 A = q_1 + rF_1 = (K + r^4)q_5.$$

Mit $q_5 = \epsilon \sigma A T_5^4$ erhalten wir

$$T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}$$

und wegen $T_1^4 = KT_5^4$

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}.$$

Die expliziten Faktoren ϵA kürzen sich heraus; der Emissionsgrad beeinflusst jedoch weiterhin α und β .

C.2

Die Seitenlänge einer Folie beträgt

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ m.}$$

Die umlaufende Randöffnung hat die Fläche

$$A_{\text{gap}} = 4ah = 4(14.14)(0.25) = 14.14 \text{ m}^2.$$

Da die Folien stark reflektieren und die Reflexionen diffus sind, nehmen wir näherungsweise an, dass die Strahlung im Inneren des Quaders nach wiederholten Reflexionen gut durchmischt ist. Die Absorptionswahrscheinlichkeiten sind dann proportional zur absorbierenden Fläche.

Jede Folie besitzt eine effektive absorbierende Fläche von ϵA , während die Öffnung als schwarzer Absorber mit der effektiven Fläche A_{gap} wirkt. Die gesamte effektive absorbierende Fläche beträgt daher

$$2\epsilon A + A_{\text{gap}}.$$

Der schließlich von der anderen Folie absorbierte Anteil beträgt näherungsweise

$$\alpha \simeq \frac{\epsilon A}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

Der entweichende Anteil beträgt näherungsweise

$$\beta \simeq \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

Für $\epsilon A = 0.05(200) = 10 \text{ m}^2$ gilt

$$\alpha \simeq \frac{10}{20 + 14.14} = 0.293,$$

$$\beta \simeq \frac{14.14}{20 + 14.14} = 0.414.$$

Der verbleibende Anteil, ungefähr α , kehrt zur emittierenden Folie zurück und wird von ihr absorbiert; dementsprechend gilt in dieser Abschätzung $2\alpha + \beta = 1$.

C.3

Die vorangehenden Abschätzungen ergeben

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2.414,$$

$$r^4 \simeq 33.97, \quad K \simeq 80.60, \quad K + r^4 \simeq 114.57.$$

Daher gilt

$$T_5 = \left[\frac{1360}{(5.670374419 \times 10^{-8})(114.57)} \right]^{1/4} \simeq 120.3 \text{ K},$$

und

$$T_1 = K^{1/4} T_5 \simeq 360.4 \text{ K}.$$

Damit folgt

$$T_1 \simeq 360 \text{ K}, \quad T_5 \simeq 120 \text{ K}.$$

D.1

Die erforderlichen Einträge lauten:

Größe	Vergleich
Innere Energie	$U_1 ? U_2$
Temperatur	$T_1 ? T_2$
Entropie	$S_1 < S_2$
Druck	$P_1 > P_2$
Volumen	$V_1 < V_2$

Ein Druckabfall treibt die Strömung durch den Strömungswiderstand des Pfropfens an, sodass $P_1 > P_2$. Viskose Dissipation macht den adiabatischen Prozess irreversibel, woraus $S_2 > S_1$ folgt.

Für die dargestellten gleichen Rohrquerschnitte liefert die Massenerhaltung bei stationärer Strömung

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2,$$

wobei w die makroskopische Strömungsgeschwindigkeit ist. Da $w_2 > w_1$, nimmt die Dichte ab und das von einem Mol eingenommene Volumen zu.

Bei einem realen Gas gibt es während der Drosselung weder für die innere Energie noch für die Temperatur eine allgemeingültige Änderungsrichtung. Für ihren Vergleich sind weitere Informationen über die Zustände erforderlich.

D.2

Wir verfolgen ein Mol durch den Pfropfen. Das stromaufwärts befindliche Gas verrichtet an diesem Mol die Arbeit $P_1 V_1$, während dieses Mol am stromabwärts befindlichen Gas die Arbeit $P_2 V_2$ verrichtet.

Es findet kein Wärmeaustausch statt. Unter Vernachlässigung der kleinen Änderung der makroskopischen kinetischen Energie liefert der erste Hauptsatz

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2.$$

Umstellen ergibt

$$\boxed{U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.}$$

Die Erhaltungsgröße ist somit die Enthalpie,

$$\boxed{H = U + PV.}$$

Genauer bleibt bei stationärer adiabatischer Strömung $h + w^2/2$ pro Masseneinheit erhalten. Die angegebene Näherung erlaubt es, den Unterschied der kinetischen Energie zu vernachlässigen.

D.3

Der Übersichtlichkeit halber bezeichnen wir die spezifische innere Energie und das spezifische Volumen, die in den Diagrammen mit U und V beschriftet sind, mit u und v .

Die thermodynamische Identität lautet

$$du = T ds - P dv.$$

Entlang einer Kurve konstanter Entropie gilt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -P.$$

Daher hat die Tangente an eine Isentrope im Punkt (v, u) die Gleichung

$$u_{\text{tan}}(x) = u - P(x - v) = (u + Pv) - Px.$$

Ihr Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse ist genau die spezifische Enthalpie:

$$\boxed{h = u + Pv.}$$

Die erforderliche Konstruktion in Abbildung 9 lautet:

1. Suchen Sie $v_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$.
2. Interpolieren Sie zur Isotherme bei 7.5 K .
3. Zeichnen Sie in diesem Zustand die Tangente an die durch ihn verlaufende Kurve konstanter Entropie.
4. Verlängern Sie diese Tangente bis $v = 0$ und lesen Sie ihren Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse ab.

Für diesen Zustand gilt näherungsweise

$$u_2 \simeq 26 \text{ kJ/kg}.$$

Die Tangentensteigung beträgt näherungsweise

$$-P_2 \simeq -140 \text{ kPa.}$$

Folglich gilt

$$h_2 = u_2 + P_2 v_2 \simeq 26 + (140)(0.100) = 40 \text{ kJ/kg.}$$

Damit folgt

$$h_1 = h_2 \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg.}$$

Für Helium mit einer molaren Masse von ungefähr $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ entspricht dies

$$H_{\text{molar}} \simeq 160 \text{ J/mol.}$$

D.4

Alle zulässigen Eintrittszustände müssen dieselbe spezifische Enthalpie $h_0 \simeq 40 \text{ kJ/kg}$ besitzen.

Die grafische Konstruktion in Abbildung 10 lautet:

1. Markieren Sie den Punkt $(0, h_0)$ auf der vertikalen Achse.
2. Zeichnen Sie von diesem Punkt aus Tangenten an mehrere durchgezogene Kurven konstanter Entropie.
3. Markieren Sie deren Berührungspunkte. Für jeden solchen Punkt gilt $u + Pv = h_0$, sodass diese Punkte die Kurve konstanter Enthalpie nachzeichnen.
4. Bestimmen Sie die gestrichelte Isotherme mit der höchsten Temperatur, die diese Kurve erreicht. Bei der maximalen Temperatur berührt die Kurve konstanter Enthalpie diese Isotherme.

Die Berührung im Grenzfall liegt nahe der Isotherme bei 11 K; die grafisch abgelesenen Werte betragen näherungsweise

$$v_1 \sim 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}, \quad u_1 \sim 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg.}$$

Das Diagramm lässt auf ein Maximum von ungefähr 10.5–11 K schließen, sodass

$$T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K.}$$

D.5

Der Druck ist der Betrag der Steigung der Tangente an die Isentrope im gewählten Eintrittszustand. Gleichwertig gilt

$$P_1 = \frac{h_0 - u_1}{v_1}.$$

Mit den näherungsweise aus dem Diagramm abgelesenen Koordinaten ergibt sich

$$P_1 \simeq \frac{(40 - 21) \times 10^3}{1.0 \times 10^{-2}} = 1.9 \times 10^6 \text{ Pa.}$$

Mit der durch das Diagramm gerechtfertigten Genauigkeit gilt

$$P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa.}$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

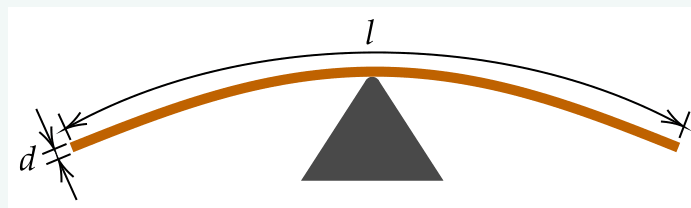
Aufgabe 3: Skalierungsgesetze

Skalierungsgesetze beschreiben den funktionalen Zusammenhang zwischen zwei physikalischen Größen, die über einen beträchtlichen Bereich miteinander skalieren. Dieser funktionale Zusammenhang kann ein Potenzgesetz sein, es gibt jedoch auch andere Möglichkeiten. Oft lassen sich keine exakten Ausdrücke bestimmen, aber dennoch Skalierungsgesetze herleiten.

Teil A. Spaghetti (2.0 Punkte)

A.1 2.0 Punkte

Ein Spaghetti mit dem Durchmesser d wird in seiner Mitte so unterstützt, dass er waagerecht im Gleichgewicht ist. Bei $d = 1 \text{ mm}$ bricht er unter seinem Eigengewicht, sobald seine Länge $l = 50 \text{ cm}$ erreicht. Wie groß ist die maximale Länge l' eines Spaghetti mit dem Durchmesser $d' = 1 \text{ cm}$, bevor er unter seinem Eigengewicht bricht?



Teil B. Sandburg (2.0 Punkte)

B.1 2.0 Punkte

Das mittlere Kornvolumen von grobkörnigem Sand ist 10-mal so groß wie das von feinkörnigem Sand. Feuchter feinkörniger Sand und feuchter grobkörniger Sand haben beide einen optimalen Wassergehalt (d. h., es wird die maximale Festigkeit der daraus errichteten Gebilde angenommen) und werden verwendet, um zwei Zylinder von genau gleicher Form und Größe zu bauen. Die Festigkeit jedes Zylinders wird geprüft, indem er zwischen zwei parallelen Platten zusammengedrückt wird. Der Zylinder aus grobkörnigem Sand wird zerstört, sobald die zum Zusammendrücken der Platten aufgebrachte Kraft $F_c = 10 \text{ N}$ erreicht. Wie groß ist die Kraft F_f , die benötigt wird, um den Zylinder aus feinkörnigem Sand zu zerstören? Die Auswirkungen der Schwerkraft dürfen vernachlässigt werden.

Teil C. Interstellare Reise (2.0 Punkte)

C.1 2.0 Punkte

Das Raumschiff einer interstellaren Expedition bewegt sich mit einem konstanten Betrag der Eigenbeschleunigung $g = 10 \text{ m/s}^2$, d. h., dies ist die Beschleunigung des Raumschiffs in dem Inertialsystem, in dem es momentan ruht. Die Passagiere müssen innerhalb ihrer verbleibenden erwarteten Lebenszeit von 50 Jahren zur Erde zurückkehren können. Die maximale Entfernung von der Erde, die das Raumschiff erreicht, beträgt d . Wird die Beschleunigung auf $g' = 15 \text{ m/s}^2$ erhöht, kann das Raumschiff eine größere Entfernung d' erreichen. Wie groß ist das Verhältnis d'/d ?

Hinweis 1. Es kann hilfreich sein, das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem zu verwenden; es gibt jedoch auch andere Ansätze.

Hinweis 2. Möglicherweise müssen Sie mit den folgenden Hyperbelfunktionen arbeiten:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hinweis 3. Je nach Ansatz benötigen Sie möglicherweise eines oder mehrere der folgenden Integrale:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = a \tanh x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = a \sinh x + C, \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

wobei $a \sinh x$ und $a \tanh x$ die Umkehrfunktionen der jeweiligen Hyperbelfunktionen sind.

Teil D. Ein Gefühl des Versinkens (2.0 Punkte)

D.1 2.0 Punkte

Eine massive Holzkugel mit dem Radius r_0 schwimmt im Wasser. Ohne Berücksichtigung von Reibungseffekten wäre die Frequenz kleiner Schwingungen ω_0 , doch aufgrund der viskosen Reibung beträgt die Frequenz der abklingenden Schwingungen nach einer vertikalen Auslenkung tatsächlich $0.99 \omega_0$. Wie groß ist der minimale Radius $r_{\min}$ einer im Wasser schwimmenden Holzkugel, die nach einer Auslenkung kleine Schwingungen ausführt? *Hinweis:* Die auf einen gegebenen Körper wirkende viskose Widerstandskraft ist proportional zu seiner Geschwindigkeit relativ zum umgebenden Fluid sowie zur Viskosität η des Fluids, in dem er sich bewegt. Die Einheit der Viskosität ist $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A.1:** $l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}} = 0.50 \sqrt{10} \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$
- **B.1:** $F_f = 10^{1/3} F_c = 10^{4/3} \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$
- **C.1:** Mit der von den Passagieren gemessenen Zeit $T = 50$ Jahre,

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1} \approx 4.8 \times 10^2.$$

- **D.1:** $r_{\min} = (1 - 0.99^2)^{1/3} r_0 \approx 0.27 r_0$. Dies ist der kritische Radius; Schwingungen erfordern $r > r_{\min}$.

Lösung

A.1

Wir nehmen an, dass die Spaghetti bei beiden Durchmessern dieselbe Dichte und Bruchspannung haben, und verwenden die Näherung eines schlanken Balkens. Die Querschnittsfläche skaliert gemäß $A \propto d^2$, sodass die Gewichtskraft pro Längeneinheit

$$q = \rho g_E A \propto d^2,$$

beträgt, wobei g_E die Erdbeschleunigung ist.

Betrachten wir eine Hälfte des Spaghetti. Ihre Gewichtskraft beträgt $ql/2$ und greift im Abstand $l/4$ von der mittigen Auflage an. Somit ist das größte Biegemoment, das in der Mitte auftritt,

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8} \propto d^2 l^2.$$

Bei der Balkenbiegung beträgt die maximale Längsspannung

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}(d/2)}{I},$$

wobei für das Flächenträgheitsmoment $I \propto d^4$ gilt. Folglich ist

$$\sigma_{\max} \propto \frac{l^2}{d}.$$

Der Bruch tritt bei derselben Materialspannung ein, also gilt

$$\frac{l'^2}{d'} = \frac{l^2}{d}, \quad l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}}.$$

Da $d'/d = 10$, ergibt sich

$$l' = 0.50\sqrt{10} \text{ m} = 1.581 \dots \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$$

B.1

Feuchter Sand wird durch Kapillarkräfte zusammengehalten, die von Wasserbrücken zwischen den Körnern ausgehen. Es sei a eine charakteristische Korngröße und γ die Oberflächenspannung des Wassers. Wir nehmen ähnliche Kornformen, Packungen und Benetzungseigenschaften an. Bei optimalem Wassergehalt skaliert die Geometrie der Wasserbrücken mit a .

Die Kapillarkraft an einer Kontaktstelle skaliert gemäß

$$f_{\text{cap}} \propto \gamma a.$$

Dies folgt entweder aus der Oberflächenspannung, die entlang einer Kontaktlinie mit einer zu a proportionalen Länge wirkt, oder aus einem Kapillardruck der Größenordnung γ/a , der auf eine Fläche der Größenordnung a^2 wirkt.

Die Anzahl der Kontaktstellen, die Kraft durch eine feste makroskopische Fläche S übertragen, skaliert wie S/a^2 . Daher skaliert die charakteristische Kohäsionsspannung gemäß

$$\sigma_{\text{coh}} \propto \frac{f_{\text{cap}}}{a^2} \propto \frac{\gamma}{a}.$$

Für Zylinder gleicher Form und Größe gilt dieselbe Skalierung für die Druckkraft, bei der sie versagen:

$$F_{\text{break}} \propto \frac{1}{a}.$$

Da das Kornvolumen proportional zu a^3 ist, gilt

$$\frac{a_c}{a_f} = \left(\frac{V_c}{V_f} \right)^{1/3} = 10^{1/3}.$$

Somit ist

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{a_c}{a_f} = 10^{1/3},$$

woraus sich folgendes Ergebnis ergibt:

$$F_f = 10 \cdot 10^{1/3} \text{ N} = 21.54 \dots \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$$

C.1

Wir behandeln die Erde als Inertialsystem, vernachlässigen Gravitationsfelder und betrachten eine geradlinige Reise, die in Ruhe relativ zur Erde beginnt und endet. Die verfügbaren 50 Jahre sind die **Eigenzeit** der Passagiere, die wir mit T bezeichnen. Umkehrungen der Beschleunigungsrichtung werden idealisiert als augenblicklich angenommen.

Zunächst leiten wir die Ortsänderung bei konstanter Eigenbeschleunigung her. Wir definieren die Rapidität

$$\theta = a \tanh(v/c).$$

Während eines Eigenzeitintervalls $d\tau$ beträgt die Geschwindigkeitsänderung im momentanen Ruhesystem $g d\tau$. Das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem ergibt in erster Ordnung

$$dv = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) d\tau,$$

und daher

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{g}{c}.$$

Bei einem Start aus der Ruhe gilt

$$\theta = \frac{g\tau}{c}, \quad v = c \tanh \theta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta.$$

Daraus folgt

$$\frac{dx}{d\tau} = v \frac{dt}{d\tau} = c \sinh \left(\frac{g\tau}{c} \right).$$

Integration ergibt

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh \left(\frac{g\tau}{c} \right) - 1 \right].$$

Um bei vorgegebener Eigenzeit die Entfernung auf der Hinreise zu maximieren, wobei das Schiff zu Beginn und am Ende der Hinreise ruht, beschleunigt es während der Hälfte dieser Zeit von der Erde weg und bremst während der anderen Hälfte ab. Tatsächlich kann seine Rapidität bei einer Hinreise mit der Eigenzeitdauer L die folgende Schranke nicht überschreiten:

$$\theta(\tau) \leq \frac{g}{c} \min(\tau, L - \tau).$$

Die Bahn mit zunächst beschleunigter und anschließend abgebremster Bewegung erreicht diese Schranke und maximiert die Ortsänderung, da $dx/d\tau = c \sinh \theta$ mit θ zunimmt.

Die Rückreise über dieselbe Entfernung erfordert dieselbe minimale Eigenzeit. Somit besteht die optimale Hin- und Rückreise aus vier gleich langen Zeitintervallen:

1. Von der Erde weg beschleunigen.
2. Bis zum Stillstand in der größten Entfernung abbremsen.
3. Zur Erde hin beschleunigen.

4. Bis zum Stillstand an der Erde abbremsen.

Jedes Intervall dauert $T/4 = 12.5$ Jahre. In den beiden Intervallen der Hinreise werden gleiche Strecken zurückgelegt, also gilt

$$d(g) = \frac{2c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right].$$

Daher ist

$$\boxed{\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1}}.$$

Mit $c \simeq 3.00 \times 10^8$ m/s und 1 Jahr $\simeq 3.156 \times 10^7$ s erhalten wir

$$\frac{gT}{4c} \simeq 13.15, \quad \frac{g'T}{4c} \simeq 19.72.$$

Beide Argumente sind groß, sodass $\cosh x - 1 \simeq e^x/2$ gilt. Somit ist

$$\frac{d'}{d} \simeq \frac{g}{g'} \exp\left(\frac{(g' - g)T}{4c}\right) \simeq \frac{2}{3} e^{6.575}.$$

Das Ergebnis lautet

$$\boxed{\frac{d'}{d} \approx 4.8 \times 10^2}.$$

D.1

Wir nehmen an, dass alle Kugeln aus demselben Holz bestehen, dass der Auftrieb ihre Eintauchtiefe im Gleichgewicht bestimmt und dass das angegebene Modell einer linearen viskosen Widerstandskraft gilt.

Bei einer kleinen Auslenkung z nach unten beträgt das zusätzlich eingetauchte Volumen $A_w z$, wobei A_w die Querschnittsfläche der Kugel auf Höhe der Wasseroberfläche ist. Der zusätzliche Auftrieb liefert eine rücktreibende Kraft

$$F_{\text{rest}} = -kz, \quad k = \rho_w g_E A_w.$$

Der im Gleichgewicht eingetauchte Volumenanteil ist durch das Verhältnis der Dichte des Holzes zur Dichte des Wassers festgelegt. Die Schwimmlagen sind daher geometrisch ähnlich, sodass gilt:

$$A_w \propto r^2, \quad k \propto r^2, \quad m \propto r^3.$$

Für die ungedämpfte Kreisfrequenz folgt somit

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \propto r^{-1}.$$

Wir schreiben die viskose Kraft als

$$F_{\text{visc}} = -b\dot{z}.$$

Da sie proportional zur Viskosität und zur Geschwindigkeit ist, ergibt die Dimensionsanalyse für geometrisch ähnliche Körper

$$b = C\eta r \propto r,$$

wobei C ein dimensionsloser geometrischer Faktor ist.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0.$$

Wir definieren die Abklingkonstante

$$\beta = \frac{b}{2m} \propto r^{-2}.$$

Im unterkritisch gedämpften Fall beträgt die Schwingungsfrequenz

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}.$$

Für den Radius r_0 folgt aus den gegebenen Frequenzen

$$(0.99\omega_0)^2 = \omega_0^2 - \beta_0^2,$$

also

$$\frac{\beta_0^2}{\omega_0^2} = 1 - 0.99^2 = 0.0199.$$

Durch Kombination der Skalierungen mit dem Radius erhalten wir

$$\frac{\beta^2(r)}{\Omega^2(r)} = 0.0199 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3.$$

Schwingungen treten auf, wenn dieses Verhältnis kleiner als eins ist. Der kritische Radius erfüllt daher

$$0.0199 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} \right)^3 = 1,$$

woraus sich folgendes Ergebnis ergibt:

$$r_{\min} = (0.0199)^{1/3} r_0 = 0.27099 \dots r_0 \approx 0.27 r_0.$$

Bei Gleichheit ist die Bewegung kritisch gedämpft und schwingt nicht. Somit ist $r_{\min}$ der untere Grenzwert des Radius; eine Schwingungsbewegung tritt für $r > r_{\min}$ auf.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.