

المسألة 1: المغناطيس الدائمة

تُصنع المغناطيس الدائمة القوية من سبيكة NdFeB التي تتميز بحلقة تخلف مغناطيسي عريضة جداً، بحيث يمكن افتراض ثبات المغنطة J في نطاق واسع من التطبيقات؛ وفيما يلي، نفترض أن $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$ ، حيث $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ، وأن مغنطة جميع المغناطيس الدائمة متجانسة. تُعرّف المغنطة بأنها الكثافة الحجمية لعزم ثنائي القطب المغناطيسي للمادة.

تلميح 1. قد تكون المساواة الآتية مفيدة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

تلميح 2. المجال المغناطيسي الذي يولده مغناطيس كروي مطابق لمجال ثنائي قطب نقطي. أما المجالات المغناطيسية التي تولدها مغناطيس ذات أشكال أخرى فلا تصبح مكافئة لمجالات ثنائيات أقطاب نقطية إلا عند مسافات أكبر بكثير من أقطارها.

تلميح 3. تتشابه المجالات الكهربائية والمغناطيسية لثنائيات الأقطاب الكهربائية والمغناطيسية النقطية، بوصفها دوال في الإحداثيات وفي عزم ثنائي القطب الموافق؛ أي إنه يمكن الحصول على أحدها من الآخر بضربه في عامل ثابت.

تلميح 4. يمكن دائماً الاستعاضة عن المجال المستحث الناجم عن شرط حدّي بترتيب ما لمصادر المجال خارج الحدود المعطاة.

الجزء A. التآثر بين المغناطيس (4.5 نقاط)

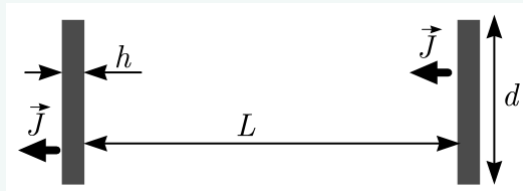
عندما تكون المسافة إلى مغناطيس أكبر بكثير من حجمه، يمكن تقريب المجال المغناطيسي الذي يولده بالمجال المغناطيسي لعزم ثنائي القطب الخاص به $\vec{m}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

هنا $r = |\vec{r}|$ ، وقد حللنا عزم ثنائي القطب إلى مركبتين موازية وعمودية على متجه الموضع $\vec{r}$ المرسوم من ثنائي القطب إلى نقطة الرصد، $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$.

0.6 — A.1 نقطة

أوجد مقدار قوة التآثر بين مغناطيسين أسطوانيين موضوعين على محور مشترك، قطر كل منهما $d = 20 \text{ mm}$ وسمكه $h = 2 \text{ mm}$ ، ومغنطتهما موازيتان لمحورهما، إذا كانت المسافة بين مركزي المغناطيسين $L = 20 \text{ cm}$. يمكنك افتراض أن $L \gg d, h$.



0.4 — A.2 نقطة

عند مسافات أكبر بكثير من $\frac{h}{2}$ ، يكون المجال الذي يولده المغناطيس في المهمة A.1 مماثلاً للمجال الذي يولده تيار دائري I . أوجد I .

1.0 — A.3 نقطة

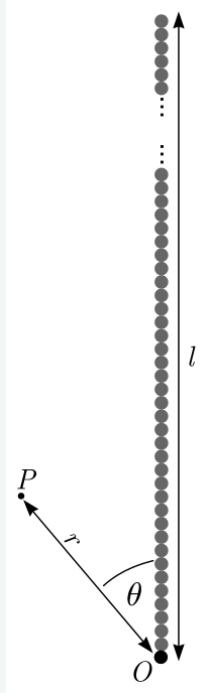
أوجد قوة التأثير بين المغناطيسين في ترتيب المهمة A.1 إذا كانت المسافة بدلاً من ذلك $L = 5 \text{ mm}$. يمكنك افتراض أن $d \gg L \gg h$.

1.0 — A.4 نقطة

تشكل مغناط كروية متماثلة، قطر كل منها $\delta = 5 \text{ mm}$ ، سلسلة تتماسك بفعل التجاذب المغناطيسي. ما الطول الأقصى l لمثل هذه السلسلة بحيث لا تنقطع تحت تأثير وزنها عند تعليقها من المغناطيس الأعلى؟ كثافة مغناط NdFeB هي $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$.

1.5 — A.5 نقطة

اعتبر السلسلة في الجزء A.4. استنتج تعبيراً لمقدار المجال المغناطيسي B عند نقطة P تبعد مسافة r عن أحد طرفي السلسلة O ، وتكون الزاوية بين السلسلة والمستقيم OP هي θ (انظر الشكل أدناه)، بافتراض أن $l \gg r$ و $r \sin \theta \gg \delta$.



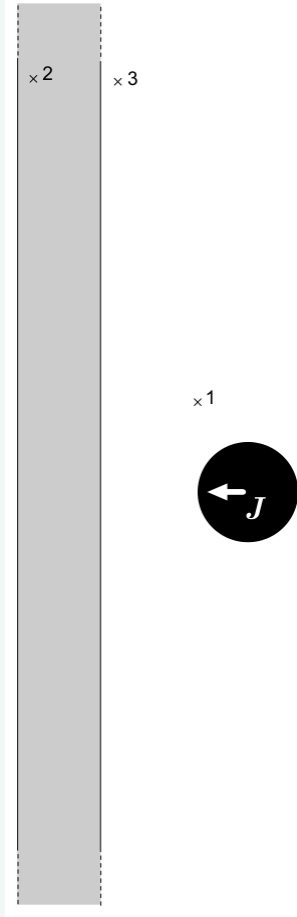
الجزء B. التأثير مع المواد الحديدية المغناطيسية (3.5 نقاط)

نفترض الآن أن لدينا، بالإضافة إلى المغناط الدائمة، صفائح مصنوعة من مادة حديدية مغناطيسية شبيهة بما يُستخدم في قلوب المحولات. وفي الحالات التي تعيننا، يمكن اعتبار نفاذيتها النسبية ثابتة وكبيرة جداً، $\mu_r \sim 10^5$.

تلميح 5. تعني النفاذية الكبيرة أن خطوط المجال المغناطيسي قرب السطح الخارجي لجسم مصنوع من هذه المادة تكون شبه عمودية على السطح. وهذا يشبه سلوك خطوط المجال الكهربائي قرب السطح الخارجي لموصل.

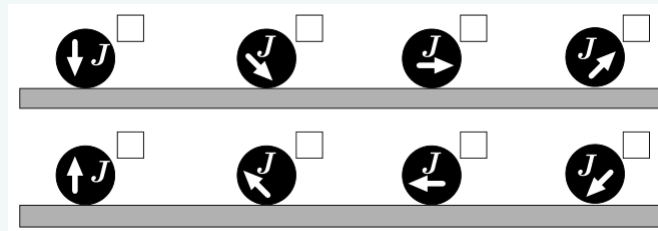
1.0 — B.1 نقطة

يوجد مغناطيس كروي من الجزء A.4 على مسافة $s = \delta$ من صفيحة حديدية مغناطيسية سميكة لا نهائية الامتداد (انظر ورقة الإجابة). تتجه مغنطة الكرة عمودياً على الصفيحة. ارسم خطوط المجال في المقطع الموضح في ورقة الإجابة. علّمت في ذلك الشكل ثلاث نقاط (مشار إليها بالأرقام 1 و 2 و 3)؛ عليك إظهار خطوط المجال المارة بكل من هذه النقاط على امتدادها الكامل، أي بالقدر الذي يتسع له الشكل.



1.0 — B.2 نقطة

يُجلب المغناطيس الكروي الآن إلى تماس مباشر مع الصفيحة. ما الاتجاه الذي يتخذه متجه مغنطة المغناطيس الكروي في حالة اتزان مستقر، وما القوة العمودية بين الصفيحة والمغناطيس؟ ضع علامة صح للاتجاه الصحيح أو الاتجاهات الصحيحة في المربع الموافق في ورقة الإجابة. ستؤدي العلامات غير الصحيحة إلى خفض درجتك.



1.5 — B.3 نقطة

يوضع الآن مغناطيس من الجزء A.1 بين صفيحتين دائريتين سمكيتين من مادة حديدية مغناطيسية، قطر كل منهما $D = 2d$ ، بحيث يضغط وجهها المغناطيس المستويان على الصفيحتين، وتكون الأقراص الثلاثة جميعها متحدة المحور. أوجد القوة المغناطيسية F المؤثرة في كل صفيحة. تلميح: يمكنك إهمال المجال المغناطيسي سواء خارج الصفيحتين الحديديتين المغناطيسيتين أو خارج الفجوة بينهما.

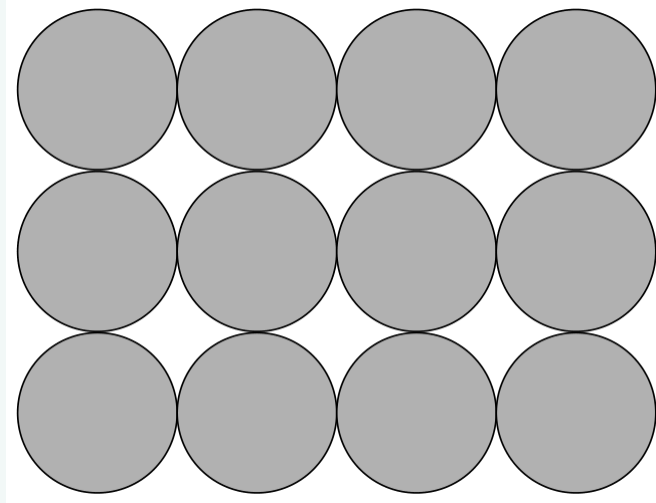
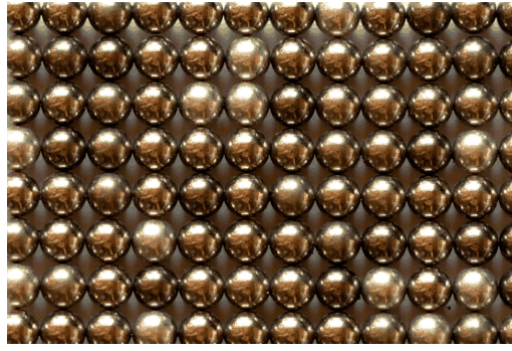
الجزء C. الترتيب الحديدي المغناطيسي والمضاد له (نقطتان)

تعود الخواص المغناطيسية للمواد إلى عزوم ثنائيات الأقطاب المغناطيسية للإلكترونات والنوى الذرية. إذا اتجهت عزوم ثنائيات الأقطاب متوازيةً بعضها مع بعض، تعاظم المجال الذي تولّده؛ وهذه هي المواد الحديدية المغناطيسية. أما إذا وُجد قرب كل عزم ثنائي قطب عزم آخر موازٍ له ومعاكس في الاتجاه، فإن المجالات تتلاشى؛ وهذه هي المواد المضادة للحديدية المغناطيسية.

فيما يلي، نعتبر عددًا كبيرًا جدًا من المغناطيس الكروية الواردة في الجزء A.4، مرتبةً عند عقد شبكة ثنائية الأبعاد؛ انظر الصور الفوتوغرافية الحقيقية لترتيبات الاتزان المستقر أدناه. افترض أن جميع متجهات المغنطة تقع في مستوى الشكل. اقتصر في حساباتك على التأثيرات مع أقرب الجيران (في شكل C.1، لكل مغناطيس أربعة جيران أقرب، وفي شكل C.2 ستة).

0.8 — C.1 نقطة

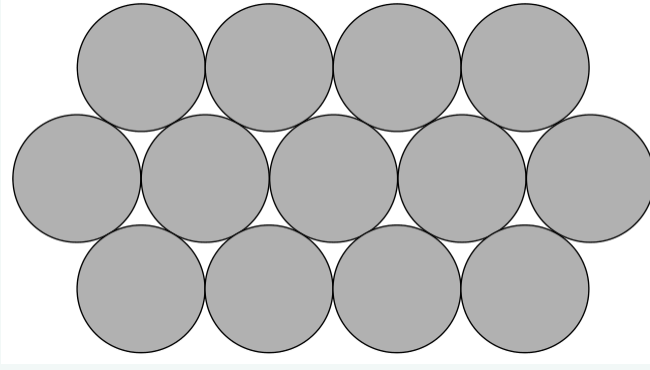
يُبين اتجاهات مغنطة المغناطيس في الشكل أدناه. لا يُطلب منك إثبات أن الترتيب الذي اقترحتَه هو الإمكانية الوحيدة. ومع ذلك، عليك تبرير أن الترتيب المقترح مستقر بالفعل. أوجد الطاقة اللازمة لانتزاع مغناطيس واحد من هذه الشبكة من موضع ما في وسطها، بافتراض إبقاء المغناطيس الأخرى ثابتة. هل يوافق هذا الترتيب ترتيب المواد الحديدية المغناطيسية أم المواد المضادة للحديدية المغناطيسية؟



1.2 — C.2 نقطة

أجب عن الأسئلة نفسها الواردة في المهمة C.1 للترتيب الموضح في الشكل أدناه.





الثوابت الفيزيائية

فيما يلي قائمة بالثوابت الفيزيائية التي قد تستخدمها في الحل، بالإضافة إلى الكميات المعطاة في نص المسألة.

الثابت الفيزيائي	الرمز	القيمة العددية
سرعة الضوء في الفراغ	c	299 792 458 m/s
نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ Vs/Am}$
سماحية الفراغ (الثابت الكهربائي)	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $1 \text{ F/m} = 1 \text{ As/Vm}$
الشحنة الأولية	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$
كتلة سكون الإلكترون	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
كتلة سكون البروتون	m_p	$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
كتلة سكون النيوترون	m_n	$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
وحدة الكتلة الذرية	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
ثابت الجذب العام	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
ثابت أفوغادرو	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
ثابت الغاز المولي	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
ثابت بولتزمان	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
ثابت ستيفان-بولتزمان	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
ثابت بلانك	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
ثابت بلانك المختزل	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

جميع قيم القوى أدناه هي مقاديرها.

• **A.1:**

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4} \simeq 2.1 \times 10^{-4} \text{ N}$$

القوة تجاذبية للاتجاهات الموضحة.

• **A.2:** تيار دائري قطره d ، حيث

$$I = Jh \simeq 2.4 \times 10^3 \text{ A}.$$

• A.3:

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L} \simeq 14 \text{ N}$$

القوة تجاذبية.

• A.4: في تقريب السلسلة الطويلة،

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g} \simeq 6.6 \text{ m}.$$

• A.5:

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}$$

هذا المقدار مستقل عن θ ضمن التقريبات المذكورة.

- B.1: المجال الخارجي هو مجال ثنائي القطب الحقيقي مع ثنائي قطب صوري مماثل له في الشدة ومتجه في الاتجاه نفسه. تلتقي خطوط المجال بالصفحة عمودياً. يشكّل الخط المار بالنقطة 1 حلقة عودة قصيرة في الهواء؛ أما الخطان الماران بالنقطتين 2 و3 فينتميان إلى حلقين أكبر تحمّلان الفيض عبر الصفحة. وتوصّف اتجاهاتهما بالتفصيل في الحل.
- B.2: ضع علامة صح عند الرسم الأول في كل صف: تكون المغنطة عمودية على الصفحة، إما نحوها أو بعيداً عنها.

$$F = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^2}{24} \simeq 5.9 \text{ N}$$

القوة المغناطيسية تجاذبية.

• B.3: تنجذب كل صفحة نحو المغناطيس والصفحة الأخرى، بقوة

$$F = \frac{3\pi \mu_0 J^2 d^2}{32} \simeq 2.1 \times 10^2 \text{ N}.$$

- C.1: تتجه جميع العزوم في الصف الأفقي الواحد في الاتجاه نفسه؛ وتتجه عزوم الصفوف المتتالية في اتجاهات متعاكسة. وهذا ترتيب مضاد للحديدية المغناطيسية.

$$W = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

- C.2: تتجه جميع العزوم في الاتجاه الأفقي نفسه. وهذا ترتيب حديدي مغناطيسي، يجتاز اختبار الاستقرار الدوراني لمغناطيس منفرد الموصوف أدناه.

$$W = \frac{\pi \mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

وهذا يثبت الاستقرار تجاه دوران مغناطيس منفرد فقط؛ ففي نموذج تأثرات أقرب الجيران، توجد دورانات جماعية لمغانط كثيرة تُخفّض الطاقة.

الحل

المغنطة وعزما ثنائي القطب المعنيان هما

$$J = \frac{1.5}{\mu_0} = 1.19366 \times 10^6 \text{ A/m},$$

$$m_c = J \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.750 \text{ A m}^2, \quad m_s = J \frac{\pi \delta^3}{6} = 0.078125 \text{ A m}^2.$$

لثنائي قطب دائمين، تكون طاقة التآثر

$$U_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})].$$

وبصورة مكافئة، $U_{12} = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$. تُستنتج القوى باشتقاق هذه الطاقة بالنسبة إلى الموضع، مع إبقاء العزوم الدائمة ثابتة.

A.1

بما أن $L \gg d, h$ ، يمكن استبدال الأسطوانتين بثنائي قطب نقطيين. عزمهما متوازيان بعضهما مع بعض ومع محورهما المشترك، ومن ثم

$$U(L) = -\frac{\mu_0 m_c^2}{2\pi L^3}.$$

تميل القوة إلى إنقاص L ، ومقدارها هو

$$F = \frac{dU}{dL} = \frac{3\mu_0 m_c^2}{2\pi L^4}.$$

بالتعويض عن $m_c = J\pi d^2 h/4$

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^4 h^2}{32L^4}.$$

عند $L = 0.20 \text{ m}$

$$F = 2.109375 \times 10^{-4} \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^{-4} \text{ N}}.$$

A.2

يمكن تمثيل جسم ذي مغنطة منتظمة بتيارات مقيدة. وكثافة التيار السطحي المقيد فيه هي

$$\vec{K}_b = \vec{J} \times \hat{n}.$$

في أسطوانة مغنطة محورياً، يسري هذا التيار حول السطح الجانبي المنحني، بمقدار $K_b = J$. ويعطي التكامل على سمك الأسطوانة تياراً دائرياً مكافئاً

$$\boxed{I = Jh}.$$

عند مسافات كبيرة مقارنة بالسمك، يمكن استبدال طبقة التيار الأسطوانية الرقيقة بحلقة واحدة قطرها d .

وتُستنتج النتيجة نفسها بمساواة العزمين المغناطيسيين:

$$I \frac{\pi d^2}{4} = J \frac{\pi d^2 h}{4}.$$

عددياً،

$$I = (1.19366 \times 10^6)(2.0 \times 10^{-3}) = 2.3873 \times 10^3 \text{ A} \simeq \boxed{2.4 \text{ kA}}.$$

يُختار اتجاه دورانه وفق قاعدة اليد اليمنى بحيث ينتج اتجاه المغنطة المحدد.

A.3

يسمح الشرط $L \gg h$ باستخدام تمثيل الحلقة التيارية من A.2. ولأن $L \ll d$ ، يمكن معاملة الأجزاء المتناظرة المتقاربة من الحلقتين

كأسلاك مستقيمة متوازية تفصل بينها مسافة L .

قوة التجاذب لكل وحدة طول بين تيارين متوازيين هي

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L}.$$

في الرتبة الأولى للتقريب، تؤثر هذه القوة على امتداد المحور المشترك. ويعطي الضرب في المحيط πd

$$F \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L}.$$

إذن

$$F \simeq \frac{\mu_0 J^2 h^2 d}{2L}.$$

عند $L = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$,

$$F \simeq 14.3239 \text{ N} \simeq \boxed{14 \text{ N}}.$$

هذه هي النتيجة في الرتبة الأولى للتقريب ضمن التفاوت المفترض بين المقاييس $d \gg L \gg h$.

A.4

تصطف الكرات بحيث تكون عزومها على امتداد السلسلة، ومتجهة جميعها في الاتجاه نفسه. كتلة كل كرة هي

$$M = \rho \frac{\pi \delta^3}{6}.$$

تتجاذب كرتان تفصل بين مركزيهما مسافة $n\delta$ بقوة

$$F_n = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(n\delta)^4} = \frac{F_1}{n^4},$$

حيث

$$F_1 = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}.$$

في سلسلة تحتوي على N كرة، يجب أن تحمل الكرة العليا المثبتة الكرات الأخرى وعددها $N - 1$. وأكبر قوة مغناطيسية إلى أعلى يمكن أن تؤثر بها فيها، مع بقاء جميع الكرات متلامسة، هي

$$F_{\text{top}} = F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

وبالتالي،

$$(N - 1)Mg \leq F_1 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4}.$$

موضع الاتصال الأعلى هو الذي يحدد الحد الأقصى: فالمقطع الواقع أسفله يحمل وزنًا أقل، بينما يتضمن التجاذب المغناطيسي عبره زوجًا واحدًا على الأقل عند كل مسافة فصل موجودة عبر موضع الاتصال الأعلى.

لسلسلة طويلة،

$$F_{\text{top}} \simeq F_1 \frac{\pi^4}{90}.$$

كذلك، في الرتبة الأولى بالنسبة إلى $1/N$ ، يكون الوزن المعلق

$$Mg \frac{l}{\delta} = \frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l.$$

بمساواة هذا بالقوة المغناطيسية الحدية،

$$\frac{\rho\pi\delta^2 g}{6} l_{\text{max}} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24} \frac{\pi^4}{90}.$$

وعليه،

$$l_{\max} \simeq \frac{\pi^4 \mu_0 J^2}{360 \rho g}.$$

يُختزل قطر الكرة: ففوة التماسك المغناطيسية وكتلة السلسلة لكل وحدة طول تتناسبان كلاهما مع δ^2 .

بأخذ $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,

$$F_1 = 5.8594 \text{ N}, \quad F_{\text{top}} \simeq 6.3417 \text{ N},$$

$$l_{\max} \simeq 6.5848 \text{ m} \simeq \boxed{6.6 \text{ m}}.$$

إن احتساب الكرة العليا المثبتة والتقريب إلى عدد صحيح من الكرات لا يغيّران الطول إلا بمقدار من رتبة δ .

A.5

لأن $\delta \gg r \sin \theta$ ، يمكن استبدال السلسلة المتقطعة بخط متصل من ثنائيات الأقطاب. وعزم ثنائي القطب لكل وحدة طول فيه هو

$$\lambda_m = \frac{m_s}{\delta} = \frac{\pi J \delta^2}{6}.$$

ضع O عند نقطة الأصل، ولتتمد السلسلة على طول z ، من 0 إلى l . اختر جميع العزوم في اتجاه z . في المنطقة الخارجية، عرّف جهداً مغناطيسياً قياسياً بالعلاقة

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi.$$

جهد الخط هو

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \int_0^l \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3} dz'.$$

بما أن

$$\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} = \frac{z - z'}{|\vec{r} - z'\hat{z}|^3},$$

فإن التكامل يعطي

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_m}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - l\hat{z}|} - \frac{1}{r} \right).$$

إذن يكافئ المجال الخارجي مجال قطبين مغناطيسيين فعالين متعاكسين عند الطرفين:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi} \left[\frac{\vec{r} - l\hat{z}}{|\vec{r} - l\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

عندما $l \gg r$ ، تكون مساهمة الطرف البعيد مهملة، ويتبقى

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 \lambda_m}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

ومن ثم

$$B \simeq \frac{\mu_0 J \delta^2}{24 r^2}.$$

المجال شعاعي حول الطرف القريب، لذا فإن مقداره مستقل عن θ . ويؤدي عكس جميع العزوم إلى عكس اتجاه المجال.

B.1

لتشغل الصفيحة المنطقة $x < 0$ ، وليكن سطحها عند $x = 0$ ، وليكن مركز الكرة عند $x = a > 0$. في الرسم الوارد في ورقة الإجابة،

$$\vec{m} = -m_s \hat{x}.$$

لصفحة عالية النفاذية، يجب أن تنعدم تقريباً المركبة المماسية للمجال الخارجي. يتحقق هذا الشرط الحدي بوضع ثنائي قطب صوري عند $x = -a$ له الاتجاه العمودي نفسه:

$$\vec{m}_{\text{image}} \simeq -m_s \hat{x}.$$

وبصورة أدق، يُضرب مقداره في

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \simeq 1.$$

عند السطح، تتلاشى المركبتان المماسيتان لمجالي ثنائي القطب. إذا رمز y إلى الارتفاع فوق مركز الكرة، فإن المركبة العمودية المتبقية هي

$$B_x(0, y) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{y^2 - 2a^2}{(a^2 + y^2)^{5/2}}.$$

وهكذا يدخل الفيض الصفحية قرب محور الكرة، حيث $|y| < \sqrt{2}a$ ، ويخرج منها على مسافة أبعد، حيث $|y| > \sqrt{2}a$.

يمكن وصف الرسم المطلوب كما يلي:

- **الجانب الأيسر للكرة هو جانبها الشمالي**، وجانبها الأيمن هو جانبها الجنوبي. تتجه الأسهم الخارجية من الجانب الأيسر نحو الجانب الأيمن على مسارات عودة منحنية. وداخل الكرة، تتجه الأسهم تقريباً من اليمين إلى اليسار.
- **عبر النقطة 1:** ارسم حلقة عودة علوية قصيرة تقع بكاملها في الهواء خارج الصفيحة. تخرج من سطح الكرة العلوي الأيسر، وتصعد عبر النقطة 1، وتنحني نحو اليمين، ثم تدخل سطح الكرة العلوي الأيمن.
- **عبر النقطة 2:** ارسم حلقة أكبر تحمل الفيض إلى أعلى عبر الصفيحة. عند النقطة 2 تتجه أساساً إلى أعلى، وإلى حد ما نحو السطح. تنحني يميناً وتخرج من السطح فوق النقطة 3، عمودياً على السطح، قبل أن تنحني عائداً إلى الجانب الجنوبي للكرة. وعند تتبعها عكسياً، يهبط جزؤها الموجود داخل الصفيحة ويتصل بالفيض الداخل إلى الصفيحة في موضع أقرب إلى المغناطيس.
- **عبر النقطة 3:** ارسم خطاً يخرج من الصفيحة أفقياً تقريباً نحو اليمين. ثم ينحني إلى أسفل وإلى اليمين نحو الجانب الجنوبي للكرة. واصل رسمه عكسياً عبر الصفيحة على هيئة مسار منحني يعود إلى نقطة دخول أدنى، يغذيها الفيض القادم من الجانب الشمالي للكرة.
- نمط النصف السفلي هو انعكاس نمط النصف العلوي حول الخط الأفقي المار بمركز الكرة. يستمر كل خط عبر المادة والمغناطيس ليشكل خط مجال مغناطيسي مغلقاً.

في حد نصف الفضاء المثالي، يكون المجال داخل الصفيحة تقريباً ضعف المجال الذي كان سيولده ثنائي القطب الحقيقي وحده هناك. وهذا يحدد الامتدادات المنحنية عبر النقطة 2، وكذلك اتجاهاتها.

B.2

ليتجه $\hat{n}$ عمودياً إلى خارج الصفيحة، ولنحلل عزم الكرة على النحو الآتي

$$\vec{m} = m_n \hat{n} + \vec{m}_t.$$

لصورته العزم

$$\vec{m}' = m_n \hat{n} - \vec{m}_t.$$

إذا كان مركز الكرة على مسافة a من الصفيحة، فإن الصورة تبعد عنه مسافة $2a$. ومجالها عند ثنائي القطب الحقيقي هو

$$\vec{B}_{\text{image}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2a)^3} (2m_n \hat{n} + \vec{m}_t).$$

لأن مغنطة الصفيحة مستحثة، فإن طاقة التأثير هي

$$U = -\frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{image}}.$$

بالرمز θ إلى الزاوية بين $\vec{m}$ والعمود على الصفيحة،

$$U(a, \theta) = -\frac{\mu_0 m_s^2}{8\pi(2a)^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

تبلغ هذه الطاقة قيمتها الدنيا عند

$$\theta = 0 \quad \text{أو} \quad \theta = \pi.$$

إن كلا الاتجاهين العموديين على الصفيحة مستقر: نحو الصفيحة وبعيداً عنها. وهما الرسمان الأولان في الصفيحتين العلوي والسفلي.

عند أي من الاتجاهين المستقرين، يكون مقدار قوة التجاذب

$$F = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi(2a)^4}.$$

عند التماس، $a = \delta/2$ ، ومن ثم

$$F = \frac{3\mu_0 m_s^2}{2\pi\delta^4} = \boxed{\frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^2}{24}}.$$

عددياً،

$$F = 5.8594 \text{ N} \simeq \boxed{5.9 \text{ N}}.$$

B.3

لتكن

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

مساحة وجه المغناطيس، ولتكن

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = 4A$$

مساحة كل صفيحة.

نفاذية الصفيحتين كبيرة جداً، لذا فإن المجال H داخلهما مهمل. وبالتالي تكون كل صفيحة تقريباً سطحاً متساوي الجهد المغناطيسي القياسي. وبإهمال تأثيرات الحواف، تكون للمجال المحوري H القيمة نفسها في المغناطيس وفي الفجوة الهوائية الحلقية المحيطة به.

ليكن B_m المجال المحوري بإشارته في المغناطيس، و B_a نظيره في الفجوة الحلقية. بما أن المغنطة ثابتة،

$$B_m = \mu_0(H + J), \quad B_a = \mu_0 H.$$

ومن ثم

$$B_m - B_a = \mu_0 J.$$

يجب أن يعود كل الفيض المار عبر المغناطيس عبر الفجوة الحلقية، لأن الفيض الخارجي مهمل. لذلك،

$$AB_m + (A_p - A)B_a = 0.$$

بالحل،

$$B_m = \mu_0 J \left(1 - \frac{A}{A_p}\right), \quad B_a = -\mu_0 J \frac{A}{A_p}.$$

عند $A_p = 4A$ ،

$$B_m = \frac{3}{4}\mu_0 J = 1.125 \text{ T}, \quad B_a = -\frac{1}{4}\mu_0 J = -0.375 \text{ T}.$$

يُولد المجال المغناطيسي العمودي على سطح عالي النفاذية ضغطاً تجاذبياً

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

عند تماس المغناطيس والصفيحة، يمكن حساب هذا الضغط بتخيّل شق فراغي متناهي الصغر: فالمركبة العمودية لـ B متصلة عبره. تسحب كل من المنطقة المركزية ومنطقة فيض العودة الحلقية الصفيحة إلى الداخل، بغض النظر عن تعاكس اتجاهي المجال فيهما.

إذن

$$F = \frac{AB_m^2 + (A_p - A)B_a^2}{2\mu_0}.$$

يعطي التعويض

$$F = \frac{\mu_0 J^2 A}{2} \left(1 - \frac{A}{A_p}\right).$$

مع $A_p = 4A$

$$F = \frac{3\pi\mu_0 J^2 d^2}{32}.$$

عدديًا،

$$F = 210.9375 \text{ N} \simeq \boxed{2.1 \times 10^2 \text{ N}}$$

على كل صفحة.

C.1

نعرّف مقياس طاقة التآثر ثنائي القطب بين أقرب الجيران

$$\varepsilon_d = \frac{\mu_0 m_s^2}{4\pi\delta^3} = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{144} = 4.8828125 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

اختر العزوم على امتداد الصفوف الأفقية، مع عكس اتجاهها في الصفوف المتتالية. في ورقة الإجابة، يمكن أن تتجه عزوم الصف العلوي يمينًا، والصف الأوسط يسارًا، والصف السفلي يمينًا:

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{array}$$

اعتبر مغناطيسيًا مركزيًا يتجه عزمه يمينًا.

يتجه عزمًا جاريه الأفقيين يمينًا أيضًا، ويقعان على محور ثنائي القطب الخاص به. ويساهم كل منهما بطاقة تآثر

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

يتجه عزمًا جاريه الرأسيين يسارًا، ويقعان في اتجاه عمودي على عزمه. ويساهم كل منهما بمقدار

$$U_{\text{vertical}} = -\varepsilon_d.$$

وعليه، فإن طاقة التآثر الكلية للمغناطيس المركزي مع جيرانه هي

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 2(-\varepsilon_d) = -6\varepsilon_d.$$

يولد الجيران الأربعة جميعهم مجالات موازية للعزم المركزي، بمقدار كلي

$$B_{\text{nn}} = \frac{6\varepsilon_d}{m_s}.$$

تؤدي إدارة ذلك المغناطيس بزاوية α ، مع إبقاء جيرانه ثابتين، إلى زيادة الطاقة بمقدار

$$\Delta U = 6\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

ومن ثم يتعرض لعزم إرجاع.

عند ثبات مواقع الشبكة المربعة، يجعل هذا النمط أيضًا طاقة الاتجاهات الكلية لتأثرات أقرب الجيران في قيمتها الدنيا. لإثبات ذلك، اكتب عزمًا وحيدًا على الصورة (u_i, v_i) . عندئذ

$$\frac{U}{\varepsilon_d} = \sum_{\langle ij \rangle_x} (-2u_i u_j + v_i v_j) + \sum_{\langle ij \rangle_y} (u_i u_j - 2v_i v_j) \geq -3 \sum_i (u_i^2 + v_i^2) = -3N.$$

تنتج المتباينة من $a^2 + b^2 \leq 2|ab|$ ، ويبلغ النمط الشريطي المقترح هذا الحد في داخل الشبكة بعيداً عن حوافها.

تؤدي إزالة المغناطيس المركزي إلى اللانهاية إلى إلغاء روابطه الأربع، لذا فإن الشغل المطلوب هو

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 6\varepsilon_d.$$

لا يوجد عامل $1/2$: إذ تُحسب كل رابطة يشترك فيها المغناطيس المزال مرة واحدة. وعليه،

$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{24} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

للسفوف المتتالية مغنطة متعاكسة، مما يعطي ترتيباً مضاداً للحديدية المغناطيسية.

C.2

اختر جميع العزوم أفقية ومتجهة يميناً، بما في ذلك كل كرة في الرسم الوارد في ورقة الإجابة.

للكرة المركزية جاران أفقيان وأربعة جيران في اتجاهات مائلة تصنع متجهات إزاحتهم زاويتين 60° أو 120° مع العزوم.

يساهم كل زوج أفقي بمقدار

$$U_{\text{horizontal}} = -2\varepsilon_d.$$

للعزوم المتوازية التي تصنع زاوية β مع اتجاه الفصل بينها،

$$U_{\text{pair}} = \varepsilon_d(1 - 3 \cos^2 \beta).$$

ومن ثم يساهم كل جار في اتجاه مائل بمقدار

$$U_{\text{diagonal}} = \varepsilon_d \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_d.$$

بجمع الروابط الست،

$$U_{\text{central}} = 2(-2\varepsilon_d) + 4\left(\frac{1}{4}\varepsilon_d\right) = -3\varepsilon_d.$$

تتلاشى المركبات العرضية لمجالات الجيران. ويتجه المجال المتبقي على امتداد العزم المركزي، ومقداره

$$B_{\text{nn}} = \frac{3\varepsilon_d}{m_s}.$$

وبالتالي، تتطلب إدارة مغناطيس واحد بزاوية α ، مع ثبات جميع جيرانه، طاقة

$$\Delta U = 3\varepsilon_d(1 - \cos \alpha) > 0.$$

يثبت هذا وجود عزم إرجاع يقاوم الدوران الفردي. لكنه لا يثبت الاستقرار تجاه الدورانات الجماعية: ففي نموذج تآثرات أقرب الجيران، لا

تتغير الطاقة عند تدوير جميع العزوم معاً بالزاوية نفسها، لأن الزاوية بين كل اتجاهين متتاليين من اتجاهات الروابط الست هي 60° ، كما أن

بعض الدورانات الجماعية غير المنتظمة تُخفّض الطاقة.

الشغل المطلوب لإزالة المغناطيس المركزي هو

$$W = 0 - U_{\text{central}} = 3\varepsilon_d,$$

ومن ثم

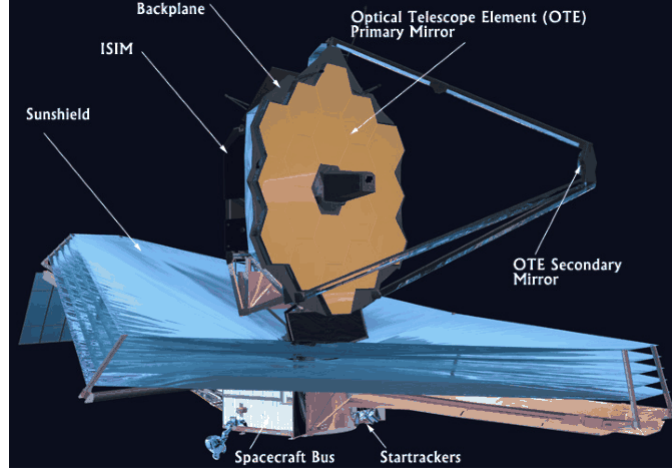
$$W = \frac{\pi\mu_0 J^2 \delta^3}{48} \simeq 1.5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

تتجه جميع العزوم في الاتجاه نفسه، لذا فإن هذا الترتيب هو ترتيب حديدي مغناطيسي.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: تلسكوب جيمس ويب الفضائي

تتناول هذه المسألة فيزياء تلسكوب جيمس ويب الفضائي. يسقط ضوء نجم على المرآة الأولية، التي تبلغ مساحتها $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$ ، ثم ينعكس عن مرآة ثانوية. يبلغ البعد البؤري للنظام $f = 130 \text{ m}$. يُركّز الضوء داخل ISIM (وحدة الأجهزة العلمية المتكاملة)، التي تضم كاميرات CCD (أجهزة اقتران الشحنة).



مصدر الصورة: ناسا

الجزء A. تصوير نجم (1.8 نقطة)

يبعد أقرب عملاق أحمر مسافة 89 سنة ضوئية، وتبلغ درجة حرارته $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ ، وقطره $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

0.4 — A.1 نقطة

احسب قطر الصورة المركزة للنجم على سطح التصوير في كاميرا CCD.

0.4 — A.2 نقطة

قدّر قطر الهدب المركزي الأعظم للحيود على سطح التصوير في كاميرا CCD. افترض طولاً موجياً مقداره $\lambda = 800 \text{ nm}$ ، وهو الطول الموجي الذي تكون عنده شدة الإشعاع الصادر عن النجم العملاق الأحمر أكبر ما يمكن.

1.0 — A.3 نقطة

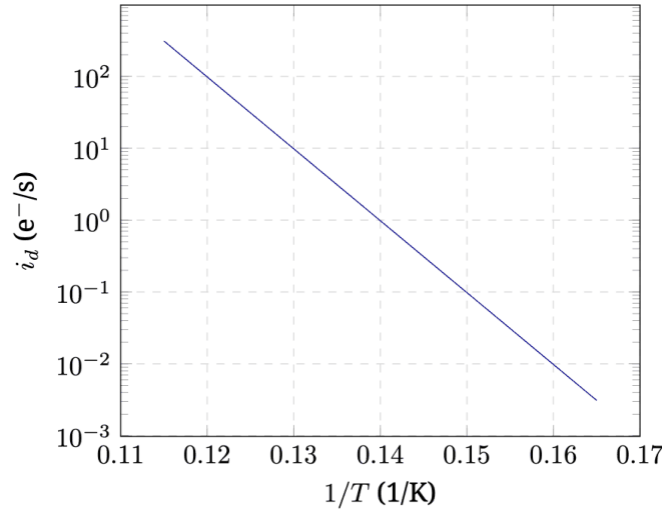
إذا لم يُبرّد جهاز CCD، ولم يكن بوسعه فقدان الحرارة إلا بالإشعاع من الوجه العلوي لسطح التصوير، فما درجة حرارة اتزانه عند موضع صورة النجم العملاق الأحمر؟ افترض أن سطح CCD جسم أسود. قدّم صيغة وتقديرًا عدديًا.

الجزء B. عدّ الفوتونات (1.8 نقطة)

يؤدي امتصاص كاميرا CCD لفوتون إلى انبعاث إلكترون داخل الجهاز. ولا يحدث ذلك إلا إذا امتلك الفوتون طاقة كافية لإثارة إلكترون عبر فجوة طاقة ΔE_g . افترض أن كل فوتون ذي طاقة كافية ينجح في ذلك. ويوجد أيضًا تسرّب للإلكترونات عبر الفجوة بسببه درجة حرارة كاميرا CCD: وهذا هو تيار الظلام i_d ، ويُقاس بعدد الإلكترونات في الثانية. وهو دالة في درجة الحرارة وفقًا للعلاقة

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/(6k_B T)}. \quad (1)$$

حيث i_0 ثابت.



يبين الرسم البياني كيفية تغير تيار الظلام مع درجة الحرارة. ينبغي فهم وحدة تيار الظلام e^-/s على أنها تعبر عن عدد الإلكترونات في الثانية.

0.4 — B.1 نقطة

استنتج من الرسم البياني لتيار الظلام تقديرًا لرتبة مقدار درجة حرارة مصدر بعيد للفوتونات الحرارية يكون بالكاد قادرًا على إثارة إلكترون في البكسل.

تُجمع الإلكترونات في مكثف، ثم تُعد بعد زمن تعريض τ . توجد ثلاثة مصادر رئيسية لعدم اليقين في هذه العملية: عدم يقين ثابت في عملية العد يُسمَّى ضجيج القراءة؛ وخطأ توزيع بواسون المرتبط بتيار الظلام؛ وخطأ توزيع بواسون المرتبط بالفوتونات الواردة المكتشفة. تساوي أخطاء توزيع بواسون الجذر التربيعي لعدد العدات المرتبطة بالعملية. ويساوي عدد الفوتونات المقاس عدد الإلكترونات في المكثف مطروحًا منه عدد الإلكترونات المرتبطة بتيار الظلام.

0.4 — B.2 نقطة

اكتب تعبيرًا لعدم اليقين الكلي في العد σ_t ، إذا كان ضجيج القراءة σ_r ، وتيار الظلام i_d ، ومعدل الفوتونات الواردة p ، وزمن التعريض τ .

في الأسئلة المتبقية من هذا الجزء، افترض أن زمن التعريض هو $\tau = 10^4 s$ ، وأن ضجيج القراءة ثابت ومقداره $\sigma_r = 14$.

0.5 — B.3 نقطة

افترض درجة حرارة تشغيل $T_p = 7.5 K$. احسب أدنى معدل للفوتونات p بحيث يكون عدد الفوتونات عشرة أمثال عدم اليقين في العد.

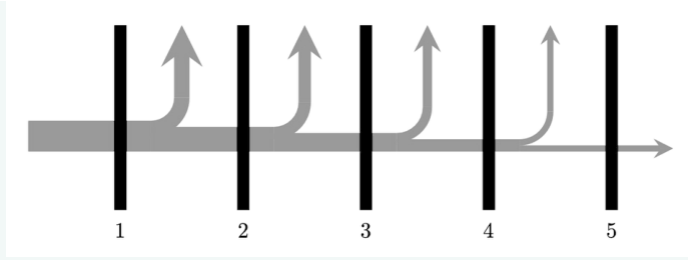
0.5 — B.4 نقطة

بافتراض أن جميع الفوتونات قادرة بالكاد على إثارة إلكترون عبر فجوة النطاق، فما شدة مصدر الفوتونات الذي وجدته في B.3 عند المرة الأولى؟ عبّر عن إجابتك بوحدة W/m^2 .

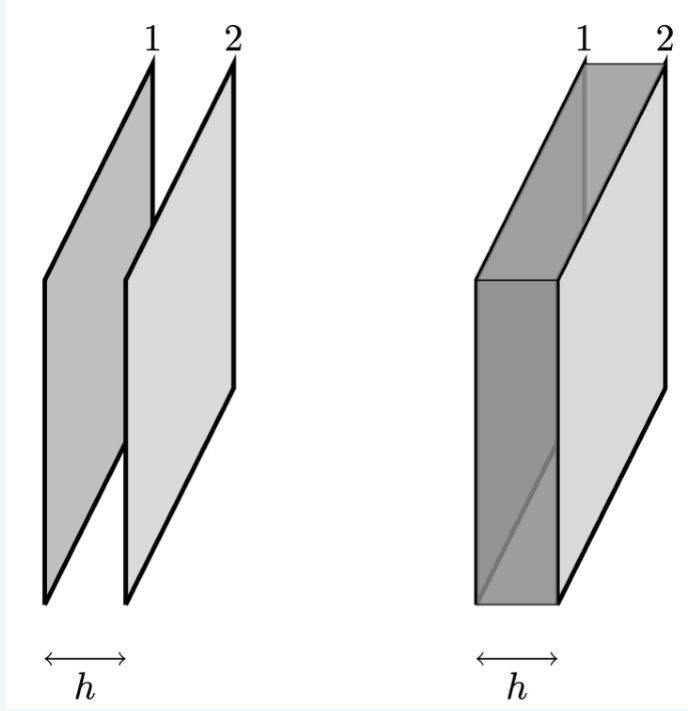
الجزء C. التبريد السلبي (4.4 نقطة)

يجب إبقاء كاميرا CCD للأشعة تحت الحمراء عند درجة حرارة منخفضة. والوسيلة الأولى هي درع يحمي من إشعاع الشمس.

يتكون الدرع الشمسي من خمس طبقات عاكسة منفصلة على هيئة صفائح رقيقة (بالأسود)؛ تسقط الطاقة الإشعاعية (البرمادي) القادمة من الشمس على الصفيحة الأولى يسارًا، ويتسرب بعض الطاقة من بين كل زوج من الصفائح.



رسم تخطيطي لتدفق الطاقة: تمثل الخطوط الرأسية (بالأسود) الصفائح، وتدفق الطاقة (بالرمادي) من اليسار إلى اليمين، إلا أن بعض الطاقة تتدفق إلى أعلى وإلى الفضاء من بين الصفائح.



على اليسار نموذج مبسّط لصفحتين متجاورتين 1 و 2 تفصل بينهما مسافة h . الصفحتان غير متصلتين، ومحيطهما مفتوح على الفضاء. افترض أن الصفحتين متوازيتان. يمكن تبادل الإشعاع الحراري بين الصفحتين، كما يمكن أن يتسرب الإشعاع الحراري عبر الفجوة المحيطة. وعلى اليمين، ظلّت الفجوة المحيطة للمساعدة على تصورها.

افترض التبسيطات الآتية:

- الصفائح مربعة، ومساحة كل منها $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$.
- الصفائح متوازية، ويفصل بينها $h = 25 \text{ cm}$ على امتداد المحيط.
- للصفائح انبعاثية ثابتة $\epsilon \ll 1$. افترض أن جميع الانعكاسات عن أسطح الصفائح منتشرة.
- الصفائح رقيقة، ودرجة الحرارة على السطحين الأمامي والخلفي متساوية ومتجانسة.
- نسبة الفيض الإشعاعي المنبعث من صفيحة التي تمتصها الصفيحة المجاورة هي $\alpha \leq 1$. وهذا يعني أنه إذا أصدرت الصفيحة 1 في الشكل أعلاه كمية حرارة Q_1 باتجاه الصفيحة 2، فإن الصفيحة 2 ستمتص كمية αQ_1 من الصفيحة 1.
- يُقَرَّب مقدار الفيض الإشعاعي المتسرب إلى الخارج من الفجوة المحيطة بين صفحتين بالتعبير βQ_{12} ، حيث αQ_{12} هو صافي الفيض بين الصفحتين. وتحقق النسبة $\beta < 1$. وهذا يكافئ القول إن فقدان الحرارة إلى الفضاء بين صفحتين يتناسب مع صافي التبادل الحراري بينهما. وهذا تقريب خشن لأغراض هذه المسألة.
- درجة حرارة خلفية الفضاء مهمة.

2.4 — C.1 نقطة

اشتق تعبيرين لدرجتي حرارة اتزان الصفحتين الأولى والخامسة بدلالة شدة الإشعاع الشمسي الساقط I_0 ، والثابتين α و β ، وأي ثوابت فيزيائية لازمة. لتبسيط تعبيرك، يمكنك تعريف ثوابت إضافية بدلالة α و β ، وما إلى ذلك.

1.6 — C.2 نقطة

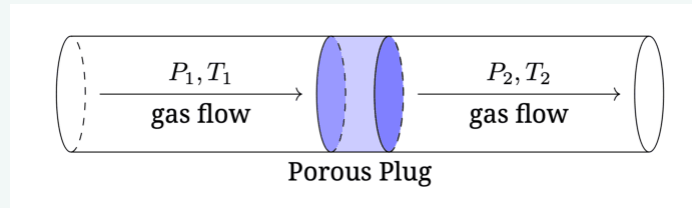
اشتق تقديرين عدديين لـ α و β من المعلومات المتعلقة بهندسة الصفائح، بافتراض انبعاثية $\epsilon = 0.05$. يُستحسن النظر في نموذج الصندوق المستطيل للصفائح أعلاه، حيث تعمل مساحة المحيط فعلياً بوصفها ماصاً مثاليًا للطاقة الإشعاعية.

0.4 — C.3 نقطة

حدّد عددياً درجتَي حرارة الصفيحتين 1 و 5. شدة الإشعاع الشمسي هي $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$.

الجزء D. المبرد العميق (4 نقاط)

تُبرّد المرحلة الأخيرة من نظام التبريد كاميرا CCD مباشرة. يحتوي نظام تبريد ذي دورة مغلقة على أنبوب إمداد يغذي غاز الهيليوم عند ضغط ثابت P_1 ، ويمر الغاز عبر سدادة مسامية شبيهة بالإسفنج إلى أنبوب ذي ضغط ثابت P_2 . ينقل الأنبوب الغاز لتبريد CCD. ثم يمر غاز الهيليوم عبر مضخة قبل أن يعود إلى خط الإمداد.



يُدفع غاز الهيليوم المُزوّد من اليسار عند ضغط محدد جيداً P_1 ودرجة حرارة محددة جيداً T_1 عبر السدادة إلى ضغط محدد جيداً P_2 ودرجة حرارة محددة جيداً T_2 ، ثم يُنقل بعيداً من جهة اليمين.

مع مرور الغاز عبر السدادة المسامية، يصبح الاحتكاك اللزج مع الجدران الضيقة للقنوات في الإسفنج مؤثراً مهماً؛ ومع ذلك، لا تنتقل حرارة إلى الغاز أو منه أثناء العملية. ولا تزيد سرعة الحركة العيانية للغاز في المنطقة 2 على مثيلتها في المنطقة 1 إلا زيادة طفيفة. الهيليوم ليس غازاً مثاليًا، لكنه يظل في الحالة الغازية طوال هذه العملية.

1.0 — D.1 نقطة

اعتبر مولاً من الغاز يمر عبر السدادة من اليسار إلى اليمين. أكمل الجدول في ورقة إجابتك بكتابة '>' أو '<' لتحديد الكمية التي يجب أن تكون أكبر، أو '=' لتحديد الكميتين اللتين يجب أن تتساويا، أو '?' إذا لم يكن من الممكن معرفة أيهما أكبر أو ما إذا كانتا متساويتين دون معلومات إضافية.

Quantity Name	State 1	Compare using ">", "<", "=", or "?"	State 2
Internal Energy	U_1		U_2
Temperature	T_1		T_2
Entropy	S_1		S_2
Pressure	P_1		P_2
Volume	V_1		V_2

0.6 — D.2 نقطة

حدّد كمية محفوظة تُركّب من U (الطاقة الداخلية)، و P (الضغط)، و V (الحجم) أثناء مرور مول من الغاز عبر السدادة؛ وبيّن خطوات اشتقاقك لهذه الكمية المحفوظة.

تتضمن أوراق إجابتك رسوماً بيانية للطاقة الداخلية لكل وحدة كتلة بدلالة الحجم لكل وحدة كتلة للهيليوم، مع منحنيات تساوي درجة الحرارة وخطوط ثبات الإنتروبي.

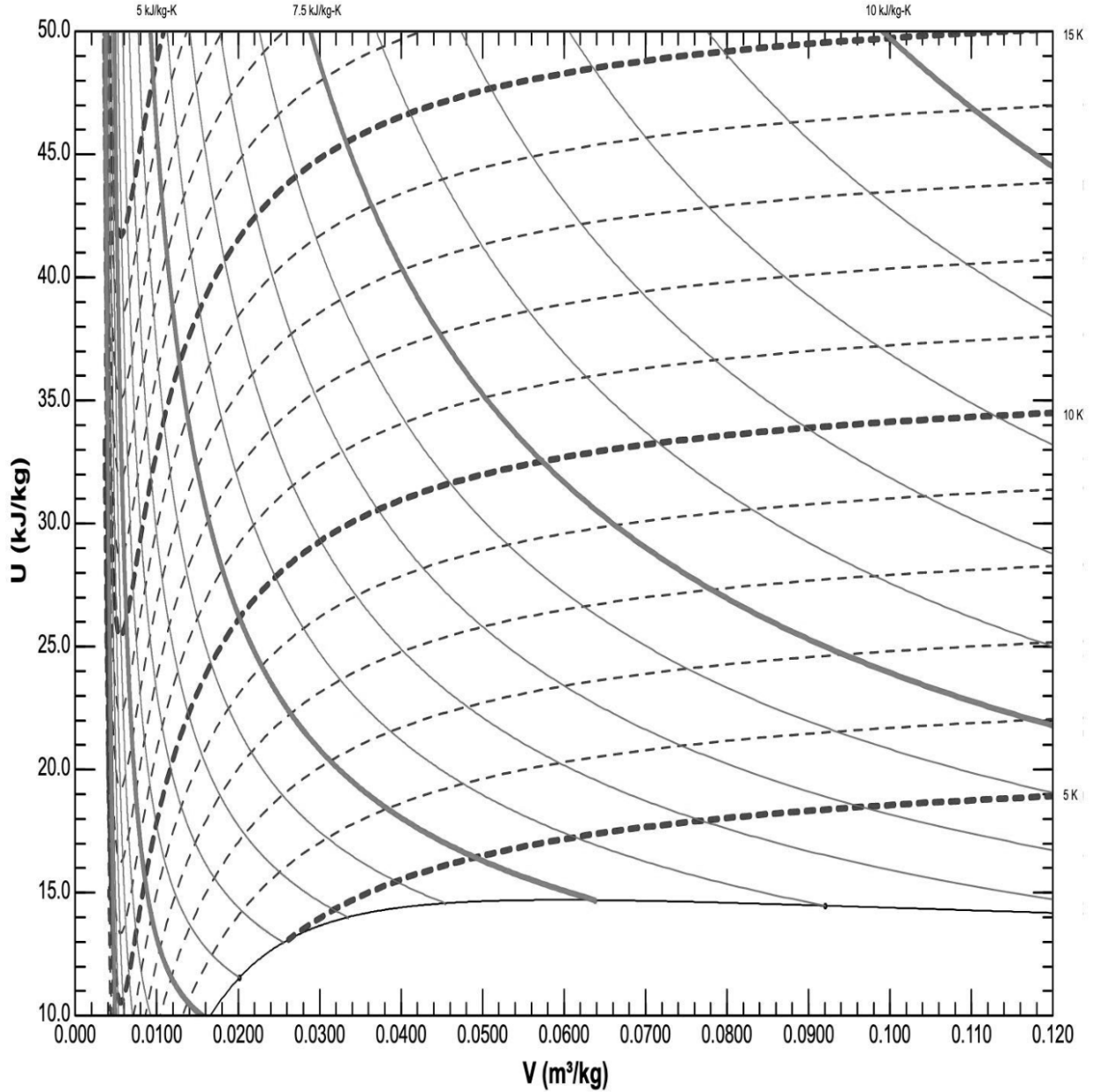
1.4 — D.3 نقطة

بافتراض أن $T_2 = 7.5 \text{ K}$ و $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ ، استخدم الرسم البياني لإيجاد قيمة عددية للكمية المحفوظة التي وجدتها في الجزء D.2. بين الإنشاء على الرسم البياني!

Solid curves (trending down with increasing volume) are constant entropy S ; values for the bold curves are on top.

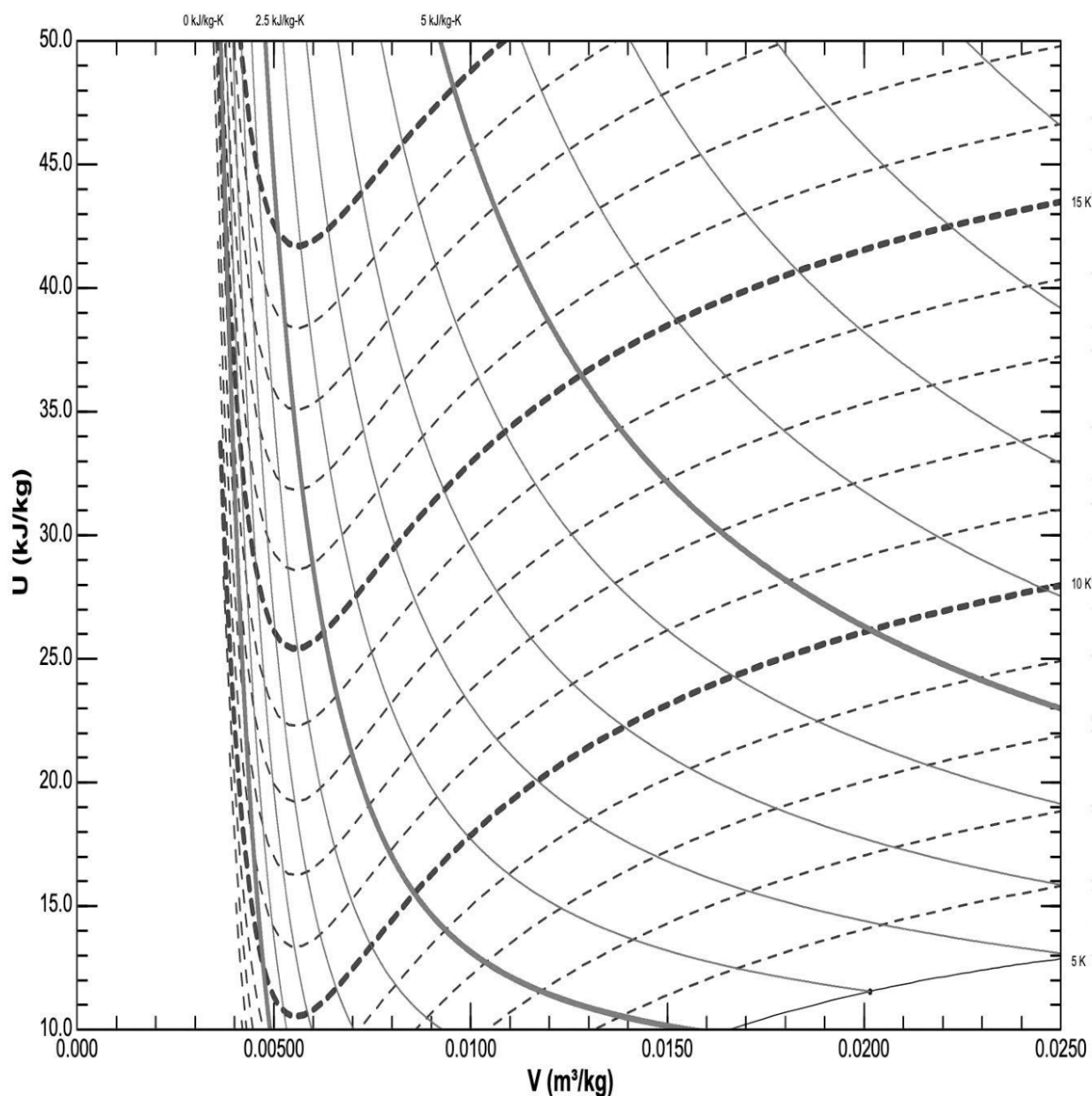
Dashed curves (trending up with increasing volume) are constant temperature T ; values for the bold curves are on right.

Internal energy (per kg) U is on vertical axis; volume (per kg) V is on horizontal axis



0.8 — D.4 نقطة

أوجد أقصى درجة حرارة ممكنة لـ T_1 . بين الإنشاء على الرسم البياني!



0.2 — D.5 نقطة

بافتراض القيمة التي وجدتها لأقصى T_1 في D.4، أوجد قيمة عددية لـ P_1 .

الثوابت الفيزيائية

فيما يلي قائمة بالثوابت الفيزيائية التي قد تستخدمها في الحل، إضافة إلى الكميات المعطاة في نص المسألة.

القيمة العددية	الرمز	الثابت الفيزيائي
299 792 458 m/s	c	سرعة الضوء في الفراغ
$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; $[1 \text{ N/A}^2 = 1 \text{ V s/(A m)}]$	μ_0	نفاذية الفراغ (الثابت المغناطيسي)
$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $[1 \text{ F/m} = 1 \text{ A s/(V m)}]$	ϵ_0	سمحية الفراغ (الثابت الكهربائي)
$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $[1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}]$	e	الشحنة الأولية
$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	m_e	كتلة سكون الإلكترون
$1.67262192369(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	m_p	كتلة سكون البروتون
$1.67492749804(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	m_n	كتلة سكون النيوترون

الثابت الفيزيائي	الرمز	القيمة العددية
وحدة الكتلة الذرية	m_{amu}	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
ثابت الجاذبية	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
ثابت أفوغادرو	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
ثابت الغاز المولي	R	$8.31446261815324 \dots \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
ثابت بولتزمان	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
ثابت ستيفان-بولتزمان	σ	$5.670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
ثابت بلانك	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
ثابت بلانك المختزل	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **A.1:** $d_{\text{image}} \simeq 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}$
- **A.2:** $d_{\text{diff}} \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}$ ، باستخدام فتحة دائرية مكافئة.
- **A.3:** عند مسافة L ، ومع بقعة حيود مسخنة بانتظام،

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4} \simeq 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

- **B.1:** تقدير الطاقة المميزة هو 10^3 K ، $T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}$ ، لأن $|\Delta E_g|/k_B \simeq 1.4 \times 10^3 \text{ K}$. أما معيار ذروة الطول الموجي فيعطي نحو $2.8 \times 10^2 \text{ K}$.
- **B.2:** $\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p\tau}$
- **B.3:** $p_{\text{min}} \simeq 0.22 \text{ s}^{-1}$
- **B.4:** $I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$
- **C.1:** نعرّف

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \quad K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha}.$$

عندئذٍ

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}, \quad T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}.$$

- **C.2:** $\alpha \simeq 0.293$, $\beta \simeq 0.414$
- **C.3:** $T_1 \simeq 360 \text{ K}$, $T_5 \simeq 120 \text{ K}$
- **D.1:** بترتيب الجدول: $<, >, <, >, <, >$.
- **D.2:** $H = U + PV$ ، بإهمال التغير الصغير في طاقة الحركة العيانية.
- **D.3:** $H/m \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}$ ، وهو ما يكافئ نحو 160 J/mol للهيليوم.
- **D.4:** $T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}$
- **D.5:** $P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}$

الحل

A.1

لتكن مسافة النجم L . باستخدام أن 1 سنة ضوئية $\simeq 9.46 \times 10^{15}$ m.

$$L \simeq 89(9.46 \times 10^{15}) = 8.42 \times 10^{17} \text{ m.}$$

بما أن $f \gg L$ ، فإن الصورة تقع عملياً في المستوى البؤري. وقطرها الزاوي هو d_o/L ، ومن ثم

$$d_{\text{image}} = f \frac{d_o}{L} = \frac{130(1.7 \times 10^{11})}{8.42 \times 10^{17}} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

إذن

$$d_{\text{image}} \simeq 26 \mu\text{m.}$$

A.2

نقرب المرآة الأولية بفتحة دائرية ذات المساحة نفسها:

$$D = 2\sqrt{\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi}} = 5.64 \text{ m.}$$

لفتحة دائرية، يكون نصف القطر الزاوي لأول حد أدنى للحيود $1.22\lambda/D$. وبناءً عليه، يكون قطر الهدب المركزي الأعظم

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{\lambda f}{D}.$$

عددياً،

$$d_{\text{diff}} = 2.44 \frac{(800 \times 10^{-9})(130)}{5.64} = 4.50 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

وعليه،

$$d_{\text{diff}} \simeq 45 \mu\text{m.}$$

قطر الحيود أكبر من قطر الصورة الهندسية.

A.3

نعامل النجم بوصفه جسمًا أسود ونهمل الفواقد البصرية. تكون قدرته الإشعاعية

$$P_{\text{star}} = 4\pi \left(\frac{d_o}{2}\right)^2 \sigma T_{\text{star}}^4.$$

ومن ثم تكون القدرة التي تجمعها المرآة

$$P_{\text{collected}} = A_{\text{mirror}} \frac{P_{\text{star}}}{4\pi L^2} = A_{\text{mirror}} \sigma T_{\text{star}}^4 \frac{d_o^2}{4L^2} \simeq 2.43 \times 10^{-6} \text{ W.}$$

للتقدير المطلوب، نأخذ قطر البقعة المضاءة مساوياً للكبر بين القطر الهندسي وقطر الحيود:

$$d_{\text{spot}} \simeq d_{\text{diff}}, \quad A_{\text{spot}} \simeq \frac{\pi d_{\text{diff}}^2}{4}.$$

نقرب التسخين بأنه منتظم على هذه البقعة. ولأن السطح العلوي وحده يشع، فإن الاتزان يتطلب

$$P_{\text{collected}} = \sigma A_{\text{spot}} T_{\text{image}}^4.$$

إذن

$$T_{\text{image}} \simeq T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}} d_o^2}{\pi L^2 d_{\text{diff}}^2} \right)^{1/4}$$

و

$$T_{\text{image}} \simeq 405 \text{ K} \approx 4.1 \times 10^2 \text{ K}.$$

يهمل هذا التقدير الشكل التفصيلي لتوزيع شدة الحيويد والطاقة الموجودة في حلقاته الخارجية. وفي حد البصريات الهندسية، يعطي التعويض بـ $d_{\text{spot}} = f d_o / L$ بدلاً من ذلك

$$T_{\text{image,geom}} = T_{\text{star}} \left(\frac{A_{\text{mirror}}}{\pi f^2} \right)^{1/4} \simeq 530 \text{ K}.$$

B.1

بأخذ لوغاريتم قانون تيار الظلام نحصل على

$$\ln i_d = \ln i_0 - \frac{|\Delta E_g|}{6k_B} \frac{1}{T}.$$

من الرسم البياني، تؤدي زيادة $1/T$ من 0.12 K^{-1} إلى 0.16 K^{-1} إلى انخفاض التيار من 10^2 إلى 10^{-2} s^{-1} . ومن ثم

$$\frac{\Delta \ln i_d}{\Delta(1/T)} = \frac{\ln(10^{-4})}{0.04 \text{ K}^{-1}} = -100 \ln 10 \text{ K}.$$

يترتب على ذلك أن

$$\frac{|\Delta E_g|}{k_B} = 600 \ln 10 \text{ K} \simeq 1.38 \times 10^3 \text{ K},$$

أو

$$|\Delta E_g| \simeq 1.91 \times 10^{-20} \text{ J} \simeq 0.119 \text{ eV}.$$

باستخدام تقدير الطاقة الحرارية المميزة $E_\gamma \sim k_B T$ ،

$$T_{\text{source}} \sim 10^3 \text{ K}.$$

يوجد هنا عامل عددي يعتمد على الاصطلاح المتبع. ويكون الطول الموجي للعتبة

$$\lambda_g = \frac{hc}{|\Delta E_g|} \simeq 10.4 \mu\text{m}.$$

إذا كان المقصود بعبارة «قادر بالكاد» أن ذروة الطيف الحراري بدلالة الطول الموجي تصل إلى هذه العتبة، فإن علاقة التناسب في قانون فين وذروة النجم المعطاة تعطيان

$$T_{\text{source}} \simeq 3600 \text{ K} \frac{0.800 \mu\text{m}}{10.4 \mu\text{m}} \simeq 2.8 \times 10^2 \text{ K}.$$

يحدد كلا الحسابين المقياس الحراري ذي الصلة: فالطيف الحراري ليس له حد علوي حاد لطاقة الفوتونات.

B.2

متوسط عدد الفوتونات هو pT ، ومتوسط عدد إلكترونات الظلام هو $i_d T$. وتساوي تبايناتها البواسونية متوسطيهما على الترتيب.

بافتراض استقلال مصادر الضجيج، تُجمع التباينات:

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + i_d T + pT.$$

وعليه،

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + p\tau}.$$

يؤدي طرح متوسط عدّ الظلام المعلوم إلى إزالة مساهمته المتوسطة، لكنه يُبقي تقلباته الإحصائية.

B.3

يقابل الخط المستقيم على الرسم البياني تقريباً العلاقة

$$i_d(T) = 10^{14-100 \text{ K}/T} \text{ s}^{-1}.$$

عند $T_p = 7.5 \text{ K}$

$$i_d = 10^{14-100/7.5} = 10^{2/3} \simeq 4.64 \text{ s}^{-1}.$$

نكتب $N = p\tau$ لعدد الفوتونات المتوقع. ويكون الشرط الحدّي

$$N = 10\sqrt{\sigma_r^2 + i_d \tau + N}.$$

بالتربيع وحل المعادلة التربيعية الناتجة نحصل على الجذر الموجب

$$N = 50 + \sqrt{2500 + 100(\sigma_r^2 + i_d \tau)}.$$

مع $\sigma_r = 14$ و $\tau = 10^4 \text{ s}$

$$N \simeq 2.21 \times 10^3.$$

إذن

$$p_{\min} = \frac{N}{\tau} \simeq 0.221 \text{ s}^{-1} \approx 0.22 \text{ s}^{-1}.$$

B.4

لكل فوتون عند العتبة طاقة $|\Delta E_g|$. ومع كفاءة كشف تساوي الواحد وجمع بلا فواقد، تكون القدرة المطلوبة عند المراة $p|\Delta E_g|$. ومن ثم

$$I = \frac{p|\Delta E_g|}{A_{\text{mirror}}}.$$

بالتعويض نحصل على

$$I = \frac{(0.221)(1.91 \times 10^{-20})}{25} \simeq 1.69 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

وعليه،

$$I \simeq 1.7 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

C.1

لتكن $A = A_{\text{sheet}}$ ، ولنعرّف القدرة المنبعثة من أحد وجهي الصفيحة i بأنها

$$q_i = \epsilon \sigma A T_i^4.$$

وفقاً لقانون كيرشوف، تعطي الانبعاثية الثابتة أيضاً الامتصاصية، ولذلك تمتص الصفيحة 1 قدرة شمسية

$$P_{\odot} = \epsilon I_0 A.$$

باتّباع نموذج التسرّب المفروض من اليسار إلى اليمين، نعرّف صافي القدرة التي تتلقاها الصفيحة $i + 1$ من الفجوة السابقة بأنه

$$F_i = \alpha(q_i - q_{i+1}).$$

وتكون القدرة المصاحبة المتسربة عبر تلك الفجوة

$$L_i = \beta(q_i - q_{i+1}) = \frac{\beta}{\alpha} F_i.$$

ومن ثم تكون القدرة الكلية الداخلة إلى الفجوة من جانبها الأسخن

$$F_i + L_i = rF_i, \quad r = 1 + \frac{\beta}{\alpha}.$$

لكل صفيحة وسطية، يتطلب الاتزان

$$F_{i-1} = rF_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

تشع الصفيحة الأخيرة q_5 من وجهها المكشوف، لذا

$$F_4 = q_5.$$

بالرجوع عبر الفجوات بالتتابع،

$$F_3 = rq_5, \quad F_2 = r^2q_5, \quad F_1 = r^3q_5.$$

تحقق فروق درجات الحرارة العلاقة

$$q_i - q_{i+1} = \frac{F_i}{\alpha}.$$

بجمع الفروق الأربعة كلها نحصل على

$$q_1 - q_5 = \frac{q_5}{\alpha}(1 + r + r^2 + r^3).$$

نعرف

$$K = 1 + \frac{1 + r + r^2 + r^3}{\alpha};$$

وعندئذٍ $q_1 = Kq_5$.

أخيرًا، تفقد الصفيحة الأولى q_1 عبر سطحها المواجه للشمس، و rF_1 إلى الفجوة الأولى:

$$\epsilon I_0 A = q_1 + rF_1 = (K + r^4)q_5.$$

باستخدام $q_5 = \epsilon \sigma AT_5^4$ ، نحصل على

$$T_5 = \left[\frac{I_0}{\sigma(K + r^4)} \right]^{1/4}$$

وبما أن $T_1^4 = KT_5^4$ ، فإن

$$T_1 = \left[\frac{I_0}{\sigma} \frac{K}{K + r^4} \right]^{1/4}.$$

نُختزل عوامل ϵA الظاهرة صراحة؛ لكن الانبعاثية تظل مؤثرة في α و β .

C.2

طول ضلع الصفيحة هو

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{200} = 14.14 \text{ m}.$$

ومساحة الفتحة المحيطية هي

$$A_{\text{gap}} = 4ah = 4(14.14)(0.25) = 14.14 \text{ m}^2.$$

لأن الصفائح شديدة الانعكاسية والانعكاسات منتشرة، نقرب الإشعاع داخل الصندوق بأنه ممتزج جيدًا بعد انعكاسات متكررة. وعندئذٍ تتناسب احتمالات الامتصاص مع المساحة الماصة.

لكل صفيحة مساحة امتصاص فعالة ϵA ، بينما تعمل الفتحة بوصفها ماصًا أسود ذا مساحة فعالة A_{gap} . ومن ثم تكون مساحة الامتصاص الفعالة الكلية

$$2\epsilon A + A_{\text{gap}}.$$

وتكون النسبة التي تمتصها الصفيحة الأخرى في النهاية تقريباً

$$\alpha \simeq \frac{\epsilon A}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

أما النسبة المتسربة فهي تقريباً

$$\beta \simeq \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A + A_{\text{gap}}}.$$

عند $\epsilon A = 0.05(200) = 10 \text{ m}^2$,

$$\alpha \simeq \frac{10}{20 + 14.14} = 0.293,$$

$$\beta \simeq \frac{14.14}{20 + 14.14} = 0.414.$$

تعود النسبة المتبقية، التي تساوي تقريباً α ، إلى الصفيحة الباعثة وتمتصها؛ وبناءً عليه، فإن $2\alpha + \beta = 1$ في هذا التقدير.

C.3

تعطي التقديرات السابقة

$$r = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2.414,$$

$$r^4 \simeq 33.97, \quad K \simeq 80.60, \quad K + r^4 \simeq 114.57.$$

وعليه،

$$T_5 = \left[\frac{1360}{(5.670374419 \times 10^{-8})(114.57)} \right]^{1/4} \simeq 120.3 \text{ K},$$

و

$$T_1 = K^{1/4} T_5 \simeq 360.4 \text{ K}.$$

إذن

$$T_1 \simeq 360 \text{ K}, \quad T_5 \simeq 120 \text{ K}.$$

D.1

القيم المطلوب إدخالها هي:

المقارنة	الكمية
$U_1 ? U_2$	الطاقة الداخلية
$T_1 ? T_2$	درجة الحرارة
$S_1 < S_2$	الإنتروبيا
$P_1 > P_2$	الضغط
$V_1 < V_2$	الحجم

يدفع هبوط الضغط الجريان عبر السدادة المقاومة، لذا $P_1 > P_2$. ويجعل التبدد اللزج العملية الكظومة غير عكوسة، مما يعطي $S_2 > S_1$.

باستخدام تساوي مساحتي المقطع العرضي للأنبوبين الموضَّح، يعطي حفظ الكتلة في الجريان المستقر

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2,$$

حيث w سرعة الحركة العيانية. وبما أن $w_2 > w_1$ ، فإن الكثافة تنخفض ويزداد الحجم الذي يشغله مول واحد.

بالنسبة إلى غاز حقيقي، لا يوجد اتجاه تغيّر عام للطاقة الداخلية أو لدرجة الحرارة أثناء الخنق. وتتطلب المقارنة بين قيمتي كل منهما معلومات إضافية عن الحالتين.

D.2

نتتبع مولاً واحداً عبر السدادة. يبذل الغاز في جهة المنبع شغلاً $P_1 V_1$ على هذا المول، بينما يبذل المول شغلاً $P_2 V_2$ على الغاز في جهة المصب.

لا يوجد انتقال للحرارة. وبإهمال التغير الصغير في طاقة الحركة العيانية، يعطي القانون الأول

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2.$$

بإعادة الترتيب،

$$\boxed{U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2.}$$

إنّ الكمية المحفوظة هي الإنتالبي،

$$\boxed{H = U + PV.}$$

وبصورة أدق، يحفظ الجريان الكظوم المستقر $h + w^2/2$ لكل وحدة كتلة. ويسمح التقريب المذكور بإهمال فرق طاقة الحركة.

D.3

للتوضيح، نرمز بـ u و v إلى الطاقة الداخلية النوعية والحجم النوعي، اللذين يرمز إليهما بـ U و V على الرسوم البيانية. متطابقة الديناميكا الحرارية هي

$$du = T ds - P dv.$$

على امتداد منحنى ثابت الإنتروبي،

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -P.$$

وعليه، فإن معادلة المماس لمنحنى ثابت الإنتروبي عند (v, u) هي

$$u_{\text{tan}}(x) = u - P(x - v) = (u + Pv) - Px.$$

وقيمة تقاطعه مع المحور الرأسي هي تحديداً الإنتالبي النوعي:

$$\boxed{h = u + Pv.}$$

الإنشاء المطلوب على الصورة 9 هو:

$$1. \text{ حدّد موضع } v_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

$$2. \text{ استوفِ لتحديد موضع منحنى تساوي درجة الحرارة } 7.5 \text{ K}.$$

$$3. \text{ عند هذه الحالة، ارسم مماساً لمنحنى ثبات الإنتروبي المار بها.}$$

$$4. \text{ مدّد ذلك المماس إلى } v = 0; \text{ واقرأ قيمة تقاطعه مع المحور الرأسي.}$$

لهذه الحالة تقريباً

$$u_2 \simeq 26 \text{ kJ/kg}.$$

ويكون ميل المماس تقريباً

$$-P_2 \simeq -140 \text{ kPa}.$$

وبالتالي،

$$h_2 = u_2 + P_2 v_2 \simeq 26 + (140)(0.100) = 40 \text{ kJ/kg}.$$

إنّ

$$\boxed{h_1 = h_2 \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ J/kg}.}$$

للهيليوم ذي الكتلة المولية التي تبلغ تقريباً $4.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ، يقابل ذلك

$$H_{\text{molar}} \simeq 160 \text{ J/mol}.$$

D.4

يجب أن يكون لجميع حالات الدخول المسموح بها الإنتالبي النوعي نفسه $h_0 \simeq 40 \text{ kJ/kg}$.

الإنشاء البياني على الصورة 10 هو:

1. علم النقطة $(0, h_0)$ على المحور الرأسي.
2. ارسم من هذه النقطة مماسات لعدة منحنيات متصلة لثبات الإنتروبيا.
3. علم نقاط تماسها. تحقق كل نقطة منها $u + Pv = h_0$ ، ولذلك ترسم هذه النقاط منحنى ثبات الإنتالبي.
4. أوجد منحنى تساوي درجة الحرارة المتقطع ذا أعلى درجة حرارة يصل إليها هذا المنحنى. عند درجة الحرارة القصوى، يمس منحنى ثبات الإنتالبي منحنى تساوي درجة الحرارة ذاك.

يقع التماس الحدي قريباً من منحنى تساوي درجة الحرارة 11 K ، مع قراءات بيانية تقريبية

$$v_1 \sim 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}, \quad u_1 \sim 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg}.$$

يدعم الرسم البياني قيمة قصوى تقارب $11 \text{ K} - 10.5$ ، لذا

$$T_{1,\text{max}} \simeq 11 \text{ K}.$$

D.5

الضغط هو القيمة المطلقة ليل المماس لمنحنى ثبات الإنتروبيا عند حالة الدخول المختارة. وبصورة مكافئة،

$$P_1 = \frac{h_0 - u_1}{v_1}.$$

باستخدام الإحداثيات البيانية التقريبية،

$$P_1 \simeq \frac{(40 - 21) \times 10^3}{1.0 \times 10^{-2}} = 1.9 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

ضمن الدقة التي يبررها الرسم البياني،

$$P_1 \simeq 2 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

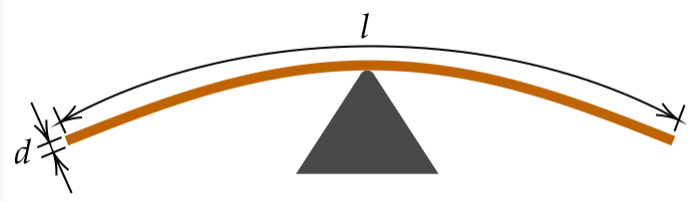
المسألة 3: قوانين التحجيم

تصف قوانين التحجيم العلاقة الدالية بين كميتين فيزيائيتين تتغيران إحداهما بتغير الأخرى على مدى واسع. وقد تكون هذه العلاقة الدالية قانون قوة، لكن ثمة احتمالات أخرى أيضاً. وكثيراً ما يتعذر التوصل إلى تعبيرات دقيقة، ومع ذلك يظل من الممكن اشتقاق قوانين التحجيم.

الجزء A. عود السباغيتي (2.0 نقطة)

2.0 A.1 نقطة

يوازن عود سباغيتي قطره d أفقياً بإسناده من منتصفه. إذا كان $d = 1 \text{ mm}$ ، فإن العود ينكسر تحت تأثير وزنه عندما يبلغ طوله $l = 50 \text{ cm}$. ما أقصى طول l' لعود قطره $d' = 1 \text{ cm}$ قبل أن ينكسر تحت تأثير وزنه؟



الجزء B. قلعة رمليّة (2.0 نقطة)

2.0 B.1 نقطة

متوسط حجم الحبيبات في الرمل الخشن يساوي 10 أمثال متوسط حجمها في الرمل الناعم. يحتوي كل من الرمل الناعم الرطب والرمل الخشن الرطب على المقدار الأمثل من الماء (أي بافتراض بلوغ المنشآت المصنوعة منهما أقصى متانة)، ويستخدمان لبناء أسطوانتين متطابقتين تماماً في الشكل والحجم. تُختبر متانة كل أسطوانة بضغطها بين لوحين متوازيين. تنهار الأسطوانة المصنوعة من الرمل الخشن عندما تبلغ القوة المؤثرة لضغط اللوحين $F_c = 10 \text{ N}$. ما مقدار القوة F_f اللازمة لهدم الأسطوانة المصنوعة من الرمل الناعم؟ يمكنك إهمال تأثيرات الجاذبية.

الجزء C. السفر بين النجوم (2.0 نقطة)

2.0 C.1 نقطة

تسافر مركبة فضائية في بعثة بين النجوم بتسارع ذاتي ثابت المقدار $g = 10 \text{ m/s}^2$ ، أي إن هذا هو تسارع المركبة في الإطار المرجعي العطالي الذي تكون فيه ساكنة لحظياً. يجب أن يتمكن الركاب من العودة إلى الأرض خلال ما تبقى من أعمارهم المتوقعة، وهو 50 سنة. أقصى مسافة عن الأرض تبلغها المركبة هي d . إذا زيد التسارع إلى $g' = 15 \text{ m/s}^2$ ، أمكن للمركبة بلوغ مسافة أبعد d' . ما النسبة d'/d ؟

تلميح 1. قد ترغب في استخدام صيغة جمع السرعات النسبية، ولكن توجد طرائق أخرى أيضاً.

تلميح 2. قد تحتاج إلى التعامل مع الدوال الزائدية المعروفة كما يأتي:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

تلميح 3. بحسب الطريقة التي تتبعها، قد تحتاج إلى واحد أو أكثر من التكاملات الآتية:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C, \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

حيث إن $\operatorname{atanh} x$ و $\operatorname{asinh} x$ هما الدالتان العكسيتان للدالتين الزائديتين المعنيتين.

الجزء D. ذلك الشعور بالغوص (2.0 نقطة)

2.0 D.1 نقطة

تطفو كرة خشبية مصممة نصف قطرها r_0 في الماء. بإهمال تأثيرات الاحتكاك، يكون تردد الاهتزازات الصغيرة ω_0 ، ولكن بسبب الاحتكاك اللزج، يكون تردد الاهتزازات المتخامدة بعد إزاحتها رأسياً في الواقع $0.99 \omega_0$. ما أصغر نصف قطر $r_{\min}$ لكرة خشبية تطفو في الماء وتؤدي اهتزازات صغيرة عند إزاحتها؟ تلميح: تتناسب قوة المقاومة للزوجة المؤثرة في جسم معين مع سرعته بالنسبة إلى كتلة المائع، ومع لزوجة η المائع الذي يتحرك فيه. وحدة اللزوجة هي $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **A.1** : $l' = l\sqrt{\frac{d'}{d}} = 0.50\sqrt{10} \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$

• **B.1** : $F_f = 10^{1/3} F_c = 10^{4/3} \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$

• **C.1:** مع $T = 50$ سنة مقيسًا لدى الركاب،

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1} \approx 4.8 \times 10^2.$$

• **D.1:** $r_{\min} = (1 - 0.99^2)^{1/3} r_0 \approx 0.27 r_0$. هذا هو نصف القطر الحرج؛ ويتطلب حدوث الاهتزازات أن يكون $r > r_{\min}$.

الحل

A.1

نفترض أن للسباغيتي الكثافة نفسها وإجهاد الكسر نفسه عند كلا القطرين، ونستخدم تقريب العارضة النحيلة. تتناسب مساحة مقطعها العرضي وفقًا للعلاقة $A \propto d^2$ ، ولذلك يكون وزنها لكل وحدة طول

$$q = \rho g_E A \propto d^2,$$

حيث g_E هو تسارع الجاذبية.

لننظر إلى أحد نصفي العود. وزنه $ql/2$ ، ويؤثر على بُعد $l/4$ من المسند المركزي. ومن ثم فإن أكبر عزم انحناء، وهو الذي يحدث عند المنتصف، يساوي

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8} \propto d^2 l^2.$$

في انحناء العوارض، يكون أقصى إجهاد طولي

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}(d/2)}{I},$$

حيث يحقق عزم المساحة الثاني العلاقة $I \propto d^4$. وبناءً على ذلك،

$$\sigma_{\max} \propto \frac{l^2}{d}.$$

يحدث الكسر عند إجهاد المادة نفسه، ومن ثم

$$\frac{l'^2}{d'} = \frac{l^2}{d}, \quad l' = l \sqrt{\frac{d'}{d}}.$$

وبما أن $d'/d = 10$

$$l' = 0.50 \sqrt{10} \text{ m} = 1.581 \dots \text{ m} \approx 1.6 \text{ m}.$$

B.1

يتماسك الرمل الرطب بفعل القوى الشعرية الناشئة عن الجسور المائية بين الحبيبات. ليرمز a إلى بُعد مميز للحبيبة، ولترمز γ إلى التوتر السطحي للماء. نفترض تشابه أشكال الحبيبات وتراصها وخصائص ابتلالها. عند المحتوى المائي الأمثل، تتغير أبعاد الجسور المائية تناسبياً مع a .

تتناسب القوة الشعرية عند نقطة تلامس وفقًا للعلاقة

$$f_{\text{cap}} \propto \gamma a.$$

وينتج ذلك إما عن تأثير التوتر السطحي على امتداد خط تلامس طوله متناسب مع a ، وإما عن ضغط شعري من رتبة γ/a يؤثر على مساحة من رتبة a^2 .

يتناسب عدد نقاط التلامس التي تنقل القوة عبر مساحة عيانية ثابتة S مع S/a^2 . ومن ثم يتناسب إجهاد التماسك المميز وفقًا للعلاقة

$$\sigma_{\text{coh}} \propto \frac{f_{\text{cap}}}{a^2} \propto \frac{\gamma}{a}.$$

بالنسبة إلى الأسطوانات المتطابقة في الشكل والحجم، يتبع حمل الانهيار تحت الضغط قانون التحجيم نفسه:

$$F_{\text{break}} \propto \frac{1}{a}.$$

وبما أن حجم الحبيبة يتناسب مع a^3 ،

$$\frac{a_c}{a_f} = \left(\frac{V_c}{V_f} \right)^{1/3} = 10^{1/3}.$$

وعليه،

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{a_c}{a_f} = 10^{1/3},$$

مما يعطي

$$F_f = 10 \cdot 10^{1/3} \text{ N} = 21.54 \dots \text{ N} \approx 22 \text{ N}.$$

C.1

نعدّ الأرض إطارًا مرجعيًا عطاليًا، ونهمل حقول الجاذبية، وننظر في رحلة على خط مستقيم تبدأ وتنتهي بالسكون بالنسبة إلى الأرض. السنوات الـ 50 المتاحة هي الزمن الخاص للركاب، الذي نرمز إليه بـ T . ونفترض، على سبيل المثالية، أن انعكاسات اتجاه التسارع آنية.

نشقّ أولًا الإزاحة تحت تسارع ذاتي ثابت. نعرّف معامل السرعة الزائدي

$$\theta = \text{atanh}(v/c).$$

خلال فترة من الزمن الخاص $d\tau$ ، يكون تغير السرعة في إطار السكون اللحظي $g d\tau$. ويعطي جمع السرعات النسبي، إلى الرتبة الأولى،

$$dv = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) d\tau,$$

ومن ثم

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{g}{c}.$$

بدءًا من السكون،

$$\theta = \frac{g\tau}{c}, \quad v = c \tanh \theta, \quad \frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta.$$

ويترتب على ذلك أن

$$\frac{dx}{d\tau} = v \frac{dt}{d\tau} = c \sinh \left(\frac{g\tau}{c} \right).$$

وبالتكامل،

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left[\cosh \left(\frac{g\tau}{c} \right) - 1 \right].$$

لتعظيم مسافة الابتعاد خلال زمن خاص معين، مع بدء مرحلة الذهاب وإنهائها بالسكون، تتسارع المركبة مبتعدةً خلال نصف ذلك الزمن، ثم تتباطأ خلال نصفه الآخر. ففي مرحلة ذهاب مدتها من الزمن الخاص L ، لا يمكن أن يتجاوز معامل السرعة الزائدي الحد

$$\theta(\tau) \leq \frac{g}{c} \min(\tau, L - \tau).$$

ويحقق المسار الذي يتضمن التسارع ثم التباطؤ هذا الحد، فيعظم الإزاحة لأن $dx/d\tau = c \sinh \theta$ تزداد بازدياد θ .

تتطلب رحلة العودة عبر المسافة نفسها الحد الأدنى نفسه من الزمن الخاص. ومن ثم تتكون رحلة الذهاب والإياب المثلى من أربع فترات متساوية:

1. التسارع ابتعادًا عن الأرض.

2. التباطؤ حتى السكون عند أقصى مسافة.

3. التسارع باتجاه الأرض.

4. التباطؤ حتى السكون عند الأرض.

تدوم كل فترة $T/4 = 12.5$ سنة. وتقطع مسافتان متساويتان خلال فترتي الذهاب، ولذلك

$$d(g) = \frac{2c^2}{g} \left[\cosh\left(\frac{gT}{4c}\right) - 1 \right].$$

ومن ثم

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'} \frac{\cosh(g'T/(4c)) - 1}{\cosh(gT/(4c)) - 1}.$$

باستخدام $c \simeq 3.00 \times 10^8$ m/s وسنة واحدة $s \simeq 3.156 \times 10^7$ ،

$$\frac{gT}{4c} \simeq 13.15, \quad \frac{g'T}{4c} \simeq 19.72.$$

كلتا قيمتي وسيط الدالة كبيرتان، ولذلك $\cosh x - 1 \simeq e^x/2$ وعليه

$$\frac{d'}{d} \simeq \frac{g}{g'} \exp\left(\frac{(g' - g)T}{4c}\right) \simeq \frac{2}{3} e^{6.575}.$$

فتكون النتيجة

$$\frac{d'}{d} \approx 4.8 \times 10^2.$$

D.1

نفترض أن جميع الكرات مصنوعة من الخشب نفسه، وأن الطفو يحدد عمق غمرها عند الاتزان، وأن نموذج المقاومة اللزجة الخطية المذكور ينطبق عليها.

عند إزاحة صغيرة إلى أسفل مقدارها z ، تكون الزيادة في الحجم المغمور $A_w z$ ، حيث A_w هي مساحة مقطع الكرة عند سطح الماء. وتولد الزيادة في قوة الطفو قوة إرجاع

$$F_{\text{rest}} = -kz, \quad k = \rho_w g_E A_w.$$

تحدد نسبة كثافة الخشب إلى كثافة الماء الكسر المغمور عند الاتزان. ولذلك تكون أوضاع الطفو متشابهة هندسيًا، مما يعطي

$$A_w \propto r^2, \quad k \propto r^2, \quad m \propto r^3.$$

ومن ثم يحقق التردد الزاوي غير المخمد العلاقة

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \propto r^{-1}.$$

نكتب القوة اللزجة على الصورة

$$F_{\text{visc}} = -b\dot{z}.$$

وبما أنها تتناسب مع اللزوجة والسرعة، فإن تحليل الأبعاد للأجسام المتشابهة هندسيًا يعطي

$$b = C\eta r \propto r,$$

حيث C عامل هندسي عديم الأبعاد.

معادلة الحركة هي

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0.$$

نعرف معدل التخميد

$$\beta = \frac{b}{2m} \propto r^{-2}.$$

في حالة التخميد دون الحرج، يكون تردد الاهتزاز

$$\omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}.$$

عند نصف القطر r_0 ، تقتضي الترددات المعطاة أن

$$(0.99 \omega_0)^2 = \omega_0^2 - \beta_0^2,$$

ومن ثم

$$\frac{\beta_0^2}{\omega_0^2} = 1 - 0.99^2 = 0.0199.$$

بجمع علاقات التناسب مع نصف القطر،

$$\frac{\beta^2(r)}{\Omega^2(r)} = 0.0199 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3.$$

تحدث الاهتزازات عندما تكون هذه النسبة أصغر من الواحد. ولذلك يحقق نصف القطر الحرج العلاقة

$$0.0199 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} \right)^3 = 1,$$

وهي تعطي

$$r_{\min} = (0.0199)^{1/3} r_0 = 0.27099 \dots r_0 \approx 0.27 r_0.$$

عند المساواة تكون الحركة مخمّدة تخميداً حرجاً ولا تهتز. ومن ثم فإن $r_{\min}$ هو القيمة الحدية الدنيا لنصف القطر، وتحدث الحركة الاهتزازية عندما يكون $r > r_{\min}$.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.