

IPhO 2021

理论题与解答 · 立陶宛维尔纽斯（线上举办） · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2021/

题目 1：行星物理

本题由两个与行星内部有关的独立问题组成。可以忽略行星表面曲率的影响。你可能需要使用公式

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1+\varepsilon x, \quad \text{当 } |x| \ll 1. \quad (1)$$

部分 A. 洋中脊 (5.0 分)

考虑一个盛水的大容器，置于自由落体加速度为 g 的均匀重力场中。将两块相互平行的竖直矩形板安装在容器内，使板的竖直边缘与容器的竖直壁紧密接触，不留缝隙。每块板浸入水中的长度为 h （图 1）。板沿 y 轴方向的宽度为 w ，水的密度为 ρ_0 。

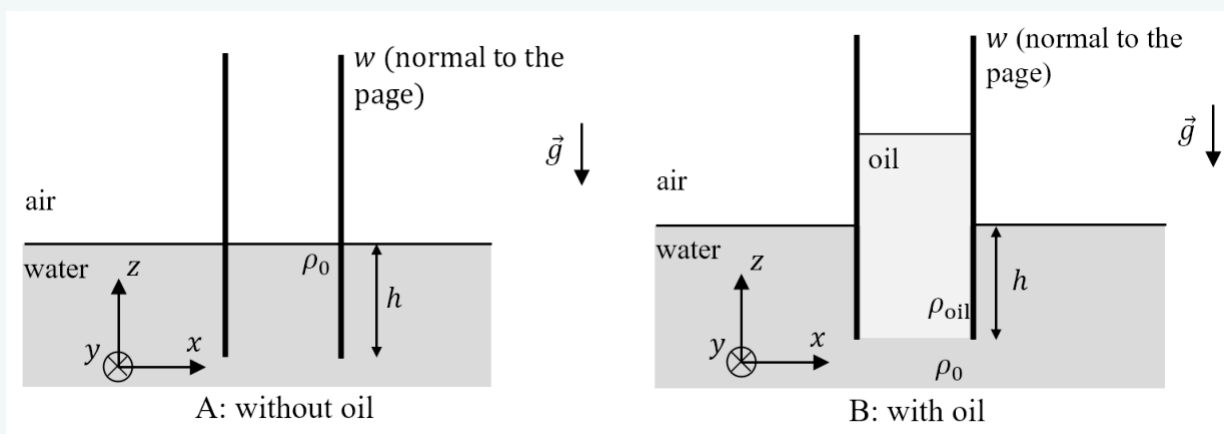


图 1. 水中的平行板。

向两板之间倒入密度为 ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) 的油，直到油的下表面到达两板的下边缘。假设板和容器的边缘足够高，油不会从上方溢出。可以忽略表面张力和流体的混合。

A.1 — 0.8 分

作用在右侧板上的合力的 x 分量 F_x 是多少（大小和方向）？

图 2 展示了洋中脊的横截面。它由地幔、地壳和海水各层叠置而成。地幔由岩石组成，我们假设这些岩石在地质时间尺度上可以流动，因此在本题中将其视为流体。地壳的厚度远小于 x 方向上的特征长度尺度，因此地壳的行为如同一块可自由弯曲的板。可以将这样的洋中脊以很高的精度建模为二维系统，各物理量沿垂直于图 2 平面的 y 轴方向均不发生变化。假设洋中脊沿 y 轴方向的长度 L 远大于本题中引入的任何其他长度。

假设在洋中脊中心，地壳厚度为零。随着距中心的水平距离 x 增大，地壳逐渐变厚，并在 $x \rightarrow \infty$ 时趋于恒定厚度 D 。相应地，海底下沉到洋中脊顶部 O 以下，竖直高度差为 h ；我们将 O 定义为坐标系的原点（见图 2）。可以认为水的密度 ρ_0 和温度 T_0 在空间和时间上均为常量。地幔的密度 ρ_1 及其温度 T_1 也可作相同假设。地壳的温度 T 同样不随时间变化，但可以随位置变化。

已知地壳物质随温度 T 发生的膨胀在很高精度下呈线性关系。由于假设水和地幔的温度恒定，使用重新标度后的热膨胀系数更为方便。于是有 $l(T) = l_1[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$ ，其中 l 是一块地壳物质的长度， l_1 是它在温度 T_1 时的长度， k_l 是重新标度后的热膨胀系数，可以认为它是常量。

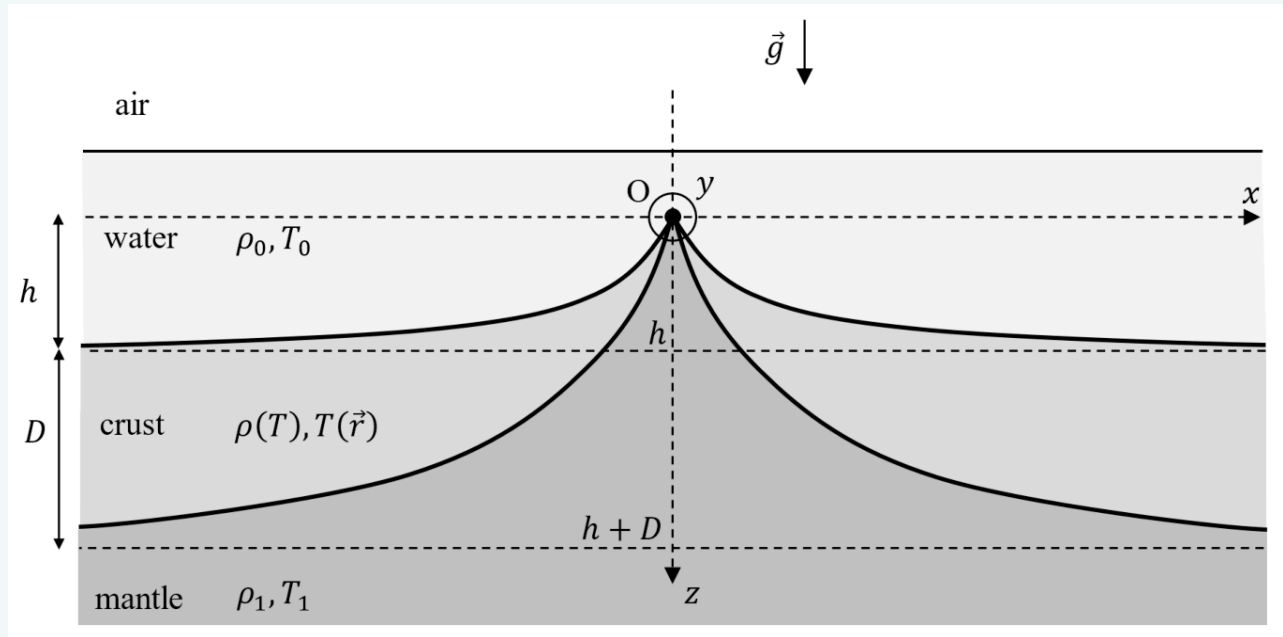


图 2. 洋中脊。注意， z 轴指向下方。

A.2 — 0.6 分

假设地壳是各向同性的，求其密度 ρ 如何依赖于温度 T 。假设 $|k_l| \ll 1$ ，将答案写成近似形式

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

其中忽略了 k_l^2 阶及更高阶的项。然后确定常量 k 。

已知 $k > 0$ 。此外，可以认为地壳的热导率 κ 为常量。因此，在远离洋中脊轴线的地方，地壳温度随深度呈线性变化。

A.3 — 1.1 分

假设地幔和水均表现为处于流体静力平衡的不可压缩流体，用 h 、 ρ_0 、 ρ_1 和 k 表示远处的地壳厚度 D 。可以忽略物质的任何运动。

A.4 — 1.6 分

求作用在地壳右半部分 ($x > 0$) 上的水平合力 F ，保留关于 k 的主导阶，并用 ρ_0 、 ρ_1 、 h 、 L 、 k 和 g 表示。

假设地壳与地球其余部分绝热。由于热传导，地壳上、下表面的温度将逐渐接近，直到地壳达到热平衡。地壳的比热容为 c ，可以认为它是常量。

A.5 — 0.9 分

利用量纲分析或数量级分析，估算远离洋中脊轴线处地壳上、下表面温度差趋于零的特征时间 τ 。可以假设 τ 不依赖于地壳两个表面的初始温度。

部分 B. 分层介质中的地震波 (5.0 分)

假设某颗行星表面发生了一次短暂的地震。可以认为地震波来自位于 $z = x = 0$ 的线源，其中 x 是水平坐标， z 是地表以下的深度（图 3）。可以认为地震波源的长度远大于本题考虑的任何其他长度。

地震发生后，所谓的纵波 P 波沿 x - z 平面内所有沿 z 轴具有正分量的方向均匀发射。由于固体中的波动理论通常较为复杂，本题忽略地震发出的所有其他波。行星的地壳具有分层结构，使得 P 波波速 v 随深度 z 按照 $v = v_0(1 + z/z_0)$ 变化，其中 v_0 是地表处的波速， z_0 是已知的正常量。

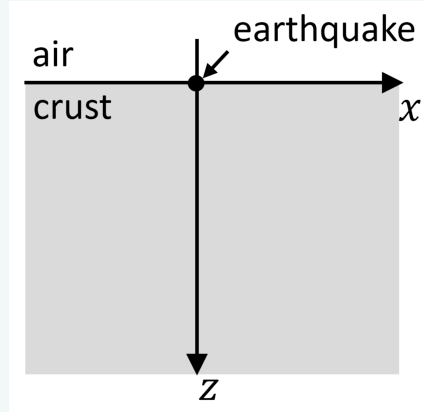


图 3. 部分 B 中使用的坐标系。

B.1 — 1.5 分

考虑地震发出的一条射线，它与 z 轴的初始夹角为 $0 < \theta_0 < \pi/2$ ，并在 x - z 平面内传播。在行星表面的哪个水平坐标 $x_1(\theta_0) \neq 0$ 处可以探测到这条射线？已知射线路径是一段圆弧。将答案写成 $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ 的形式，其中 A 和 b 是待求的常量。

如果未能求出 A 和 b ，在后续问题中可以将结果 $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ 作为已知条件使用。假设地震期间，以 P 波形式释放到地壳中的能量按波源单位长度计为 E 。假设波从下方到达行星表面时被完全吸收。

B.2 — 1.5 分

求地表吸收的单位面积能量密度 $\varepsilon(x)$ 如何随沿地表的距离 x 变化。画出 $\varepsilon(x)$ 的示意图。

从现在起，改为假设波到达地表时被完全反射。设想在 $z = x = 0$ 处放置一个装置，它具有与前面所考虑的地震波源相同的几何形状。该装置能够按照任意选定的角分布发射 P 波。让装置发射一个发射角范围很窄的信号。具体而言，信号与竖直方向的初始夹角属于区间 $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ ，其中 $0 < \theta_0 < \pi/2$ 、 $\delta\theta_0 \ll 1$ 且 $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ 。

B.3 — 2.0 分

信号无法到达的最远点沿地表距波源的距离 $x_{\max}$ 是多少？用 θ_0 、 $\delta\theta_0$ 及上文给出的其他常量表示答案。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right)$$

力沿 $+x$ 方向，背离油。

- A.2

$$\rho(T) = \rho_1 \left[1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]^{-3} \approx \rho_1 \left[1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad k = 3k_l.$$

- A.3

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}$$

该结果在密度的一阶近似下成立。

- A.4 流体施加的总水平力在主导阶为

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2},$$

方向沿 $+x$ ，背离洋中脊。

- A.5

$$\tau \sim \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa} = \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

这是一个数量级估算。

- B.1

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0, \quad A = 2z_0, \quad b = 1.$$

- B.2

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

图像关于纵轴对称，在 $\varepsilon(0) = E/(2\pi z_0)$ 处取得峰值，在 $x = \pm 2z_0$ 处降至最大值的一半，并按 x^{-2} 趋于零。

- B.3 在窄角带极限下，

$$x_{\max} \simeq \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

这是沿波束传播方向最后一个未被信号到达的区间的外边界。下文将推导计及反射次数为整数的精确表达式。

解答

A.1

设 H 为油柱在板下边缘以上的高度。在这些边缘处，油和水的压强必须相等。减去大气压后，

$$\rho_{\text{oil}} g H = \rho_0 g h, \quad H = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} h.$$

高度为 a 、密度为 ρ 的流体柱对竖直板施加的水平力为

$$w \int_0^a \rho g (a - u) du = \frac{1}{2} \rho g w a^2$$

其中 u 表示距流体柱底部的高度。

油将右侧板推向 $+x$ 方向；水将其推向 $-x$ 方向。两侧的大气压作用相互抵消。计入外侧水面以上的油，可得

$$F_x = \frac{g w}{2} (\rho_{\text{oil}} H^2 - \rho_0 h^2).$$

代入 H ,

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right) > 0.$$

因此，板被向外推。

A.2

定义无量纲温差

$$q = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}.$$

各向同性膨胀使三个方向的线度均按相同的比例变化。因此，

$$\frac{V(T)}{V(T_1)} = (1 - k_l q)^3.$$

质量守恒，且 T_1 时的参考密度为 ρ_1 ，故

$$\rho(T) = \rho_1 (1 - k_l q)^{-3}.$$

利用题给的展开式并忽略 k_l^2 阶的项，

$$\rho(T) \approx \rho_1 (1 + 3k_l q).$$

与式 (2) 比较可得

$$k = 3k_l.$$

A.3

采用图 2 中指向下方的 z 轴。远离洋中脊处，地壳从 $z = h$ 延伸至 $z = h + D$ 。其温度为

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D},$$

因此，其密度为

$$\rho(z) \approx \rho_1 \left[1 + k \left(1 - \frac{z - h}{D} \right) \right].$$

其平均密度为

$$\bar{\rho} = \frac{1}{D} \int_h^{h+D} \rho(z) dz = \rho_1 \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

设 p_O 为洋中脊顶部两种流体共同的压强，该处地壳厚度为零。由流体静力平衡可得，远处地壳紧邻上、下表面的压强分别为：

$$\begin{aligned} p_{\text{top}} &= p_O + \rho_0 g h, \\ p_{\text{bottom}} &= p_O + \rho_1 g (h + D). \end{aligned}$$

远处水平地壳中的一个柱状单元在竖直方向上的受力平衡要求

$$p_{\text{bottom}} - p_{\text{top}} = \bar{\rho} g D.$$

因此

$$\rho_1 (h + D) - \rho_0 h = \rho_1 D \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

消去两边共有的项 $\rho_1 D$ 后，

$$(\rho_1 - \rho_0) h = \frac{1}{2} \rho_1 k D,$$

所以

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0) h}{\rho_1 k}.$$

A.4

我们计算实际的水—地壳界面和地幔—地壳界面上的压力。

将地壳的上、下表面分别写为 $z = z_t(x)$ 和 $z = z_b(x)$ 。它们的端点值为

$$z_t(0) = z_b(0) = 0, \quad z_t(\infty) = h, \quad z_b(\infty) = h + D.$$

流体的压强场为

$$p_w(z) = p_O + \rho_0 g z, \quad p_m(z) = p_O + \rho_1 g z.$$

对于水平长度为 dx 、宽度为 L 的界面微元，压力的水平分量包含表面斜率。上方流体向 x 负方向推，下方流体则向 x 正方向推：

$$dF_x = L \left[p_m(z_b) \frac{dz_b}{dx} - p_w(z_t) \frac{dz_t}{dx} \right] dx.$$

倾斜表面积与单位法向量所引入的因子相互抵消，因此该表达式不需要额外采用小斜率近似。积分得

$$\begin{aligned} F_x &= L \int_0^{h+D} (p_O + \rho_1 g z) dz - L \int_0^h (p_O + \rho_0 g z) dz \\ &= p_O L D + \frac{gL}{2} [\rho_1 (h + D)^2 - \rho_0 h^2]. \end{aligned}$$

等价地，

$$F_x = \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2 + (p_O + \rho_1 g h) L D + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_0) g L h^2.$$

由 A.3 可知，在 h 固定时， $D \propto k^{-1}$ 。在背景压强固定的情况下，这三项贡献分别为 k^{-2} 、 k^{-1} 和 k^0 阶。因此，主导项为

$$F_x \simeq \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2.$$

代入 D 的表达式,

$$F_x \simeq \frac{2g L h^2 (\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2}.$$

其方向沿 $+x$, 背离洋中脊。这是流体施加的总力; 并未减去远处地壳内人为截面上的岩静压力。

A.5

保留关于 k 的主导阶, 地壳的体积热容为 $\rho_1 c$, 相应的热扩散率为

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1 c}.$$

远离洋中脊处, 热量必须扩散经过的相关距离为 D 。因此, 热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

给出尺度估算

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi \frac{\Delta T}{D^2}.$$

温差如题目要求那样被消去:

$$\tau \sim \frac{D^2}{\chi} = \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa}.$$

利用 A.3,

$$\tau \sim \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

量纲分析无法确定数值系数。表面温差是渐近趋于零的, 而非在有限时间内消失。

B.1

在波速仅依赖于深度的介质中, 斯涅尔定律使水平慢度保持不变:

$$\frac{\sin \theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0},$$

其中 $\theta(z)$ 是射线在该处与竖直方向的夹角。由于

$$v(z) = v_0 \frac{z + z_0}{z_0},$$

可得

$$\sin \theta(z) = \frac{z + z_0}{z_0} \sin \theta_0.$$

定义

$$R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}.$$

在射线向下传播的部分,

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{z + z_0}{\sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}}.$$

积分并使用 $z = 0$ 时 $x = 0$ 的条件, 得

$$x = \sqrt{R^2 - z_0^2} - \sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}.$$

因此, 轨迹位于圆

$$(x - x_c)^2 + (z + z_0)^2 = R^2,$$

上, 其圆心坐标为

$$x_c = \sqrt{R^2 - z_0^2} = z_0 \cot \theta_0, \quad z_c = -z_0.$$

射线在这个圆的最深处转向, 并对称地返回地表。它与 $z = 0$ 的两个交点为 $x = 0$ 和 $x = 2x_c$ 。因此

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0,$$

且

$$A = 2z_0, \quad b = 1.$$

地表波速 v_0 影响传播时间, 但在射线的几何关系中被消去。

B.2

向下的半平面对应的角度范围为 π 。因此, 均匀发射将按波源单位长度计的能量

$$dE = \frac{E}{\pi} d\theta$$

分配给角度区间 $d\theta$ 。

对于返回到 $x > 0$ 处的射线,

$$x = 2z_0 \cot \theta, \quad \left| \frac{dx}{d\theta} \right| = 2z_0 \csc^2 \theta.$$

发射角区间与接收它的地表条带之间的能量守恒给出

$$\varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} |d\theta|.$$

因此

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{2\pi z_0} \sin^2 \theta.$$

利用

$$\cot \theta = \frac{x}{2z_0}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + x^2/(4z_0^2)},$$

可得

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

向左发射的波对 $x < 0$ 给出相同的表达式。其归一化关系为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} \left[\arctan \frac{x}{2z_0} \right]_{-\infty}^{\infty} = E.$$

题目所要求的示意图具有如下特征：曲线光滑且关于 $x = 0$ 对称，只有一个最大值 $E/(2\pi z_0)$ 。在 $x = \pm 2z_0$ 处，其高度为 $E/(4\pi z_0)$ ，因此半高全宽为 $4z_0$ 。它在任意有限的 x 处均为正，其尾部满足

$$\varepsilon(x) \sim \frac{2Ez_0}{\pi x^2} \quad (|x| \gg z_0).$$

由于 E 是按波源单位长度计的能量， ε 的单位是单位面积的能量。

B.3

在地表发生镜面反射时，射线速度的竖直分量反向，而水平分量保持不变。因此，每条射线都会重复相同的圆弧，只是沿水平方向平移。它与地表相遇的位置为

$$x_n(\theta) = n\ell(\theta), \quad \ell(\theta) = 2z_0 \cot \theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

令

$$\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \frac{\delta\theta_0}{2}.$$

对于完全位于 $0 < \theta < \pi/2$ 内的角带，相邻两次与地表相遇之间的最短和最长距离为

$$\ell_{\min} = 2z_0 \cot \theta_+, \quad \ell_{\max} = 2z_0 \cot \theta_-.$$

由于波束充满整个角度区间，第 n 次与地表相遇时所到达的地表区间为

$$I_n = [n\ell_{\min}, n\ell_{\max}].$$

I_n 和 I_{n+1} 之间存在空隙，当且仅当

$$n\ell_{\max} < (n+1)\ell_{\min},$$

即

$$n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) < \ell_{\min}.$$

令 $\Delta\ell = \ell_{\max} - \ell_{\min}$ 。一旦 $n\Delta\ell \geq \ell_{\min}$ ，相邻区间便会重叠，并且对于每个更大的 n 都会继续重叠。因此，最后一个空隙的精确外边界为

$$x_{\max} = \ell_{\min} \left\lceil \frac{\ell_{\min}}{\Delta\ell} \right\rceil.$$

向上取整体现了与地表相遇的次数必须为整数。边界本身可以被信号到达；未被信号到达的点从较小坐标一侧趋近该边界。

对于题目要求的窄角带近似，

$$\ell_0 = 2z_0 \cot \theta_0,$$

且

$$\Delta\ell \simeq \left| \frac{d\ell}{d\theta} \right|_{\theta_0} \delta\theta_0 = 2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0.$$

在 θ_0 固定时，足够窄的角带需要经过多次反射，区间才会发生重叠。因此，在主导阶可以忽略整数取整的影响：

$$x_{\max} \simeq \frac{\ell_0^2}{\Delta\ell}.$$

因此

$$x_{\max} \simeq \frac{(2z_0 \cot \theta_0)^2}{2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta \theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：静电透镜

考虑一个半径为 R 、总电荷量为 q 的均匀带电金属圆环。该圆环是厚度为 $2a \ll R$ 的空心环面体。在 A、B、C 和 E 部分中，可以忽略这一厚度。 xy 平面与圆环所在平面重合， z 轴则垂直于该平面，如图 1 所示。在 A 和 B 部分中，你可能需要使用以下公式（泰勒展开）：

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \quad \text{当 } |x| \ll 1.$$

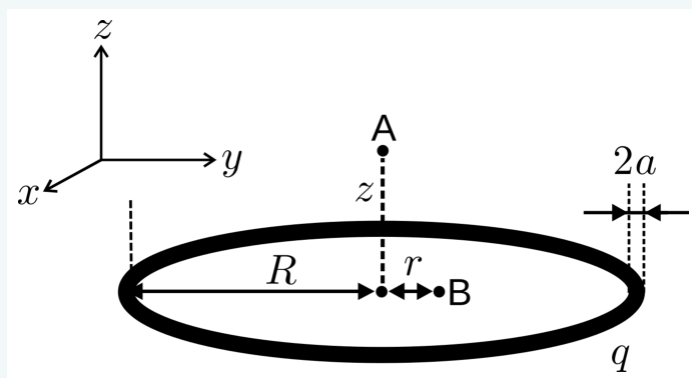


图 1. 半径为 R 的带电圆环。

部分 A. 圆环轴线上的静电势（1 分）

A.1	计算圆环轴线上距圆心 z 处（图 1 中的 A 点）的静电势 $\Phi(z)$ 。	0.3 分
A.2	假设 $z \ll R$ ，计算静电势 $\Phi(z)$ ，保留到 z 的最低非零次幂项。	0.4 分
A.3	将一个电子（质量为 m ，电荷量为 $-e$ ）放在 A 点（图 1， $z \ll R$ ）。电子受到的力是什么？根据力的表达式，确定 q 应取何种符号，才能使电子做振动。运动的电子不影响圆环上的电荷分布。	0.2 分
A.4	这种简谐振动的角频率 ω 是多少？	0.1 分

部分 B. 圆环平面内的静电势（1.7 分）

在本部分中，你需要分析圆环所在平面（ $z = 0$ ）内、 $r \ll R$ 处（图 1 中的 B 点）的电势 $\Phi(r)$ 。保留到 r 的最低非零次幂项时，静电势可写为 $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ 。

B.1	求 β 的表达式。你可能需要使用上面给出的泰勒展开公式。	1.5 分
B.2	将一个电子放在 B 点（图 1， $r \ll R$ ）。电子受到的力是什么？根据力的表达式，确定 q 应取何种符号，才能使电子做简谐振动。运动的电子不影响圆环上的电荷分布。	0.2 分

部分 C. 理想化静电透镜的焦距：瞬时充电（2.3 分）

我们希望制造一种聚焦电子的装置——静电透镜。考虑以下结构。圆环垂直于 z 轴放置，如图 2 所示。我们有一个能够按需产生非相对论性电子束团的电子源。这些电子的动能为 $E = mv^2/2$ (v 为速度)，它们在精确控制的时刻离开电子源。系统经过设定，使圆环在大多数时间内保持电中性，但当电子距圆环平面的距离小于 $d/2$ ($d \ll R$) 时，圆环的电荷量变为 q (图 2 中的阴影区域，称为“作用区”)。在 C 部分中，假设充电和放电过程都是瞬时完成的，电场也瞬时“充满空间”。可以忽略磁场，并假设电子沿 z 方向的速度保持不变。运动的电子不会扰动圆环上的电荷分布。

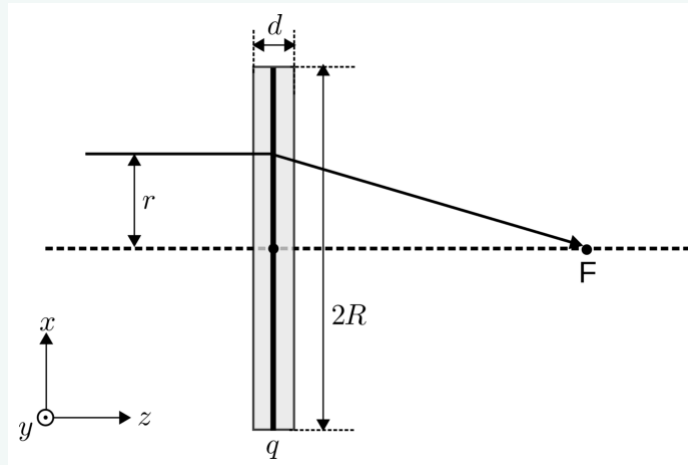


图 2. 静电透镜模型。

C.1	确定该透镜的焦距 f 。假设 $f \gg d$ 。用 B.1 问中的常量 β 及其他已知量表示你的答案。假设电子束团到达“作用区”之前平行于 z 轴运动，且 $r \ll R$ 。 q 的符号应使透镜具有聚焦作用。	1.3 分
-----	--	-------

实际中，电子源放置在 z 轴上，距圆环中心的距离为 $b > f$ 。考虑电子在到达“作用区”之前不再平行于 z 轴运动，而是从一个点源以相对于 z 轴的不同角度 $\gamma \ll 1$ 弧度发射。电子聚焦于距圆环中心 c 处的一点。

C.2	求 c 。用 B.1 问中的常量 β 及其他已知量表示你的答案。	0.8 分
C.3	静电透镜是否满足光学薄透镜公式 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$ ？通过显式计算 $1/b + 1/c$ 加以说明。	0.2 分

部分 D. 作为电容器的圆环（3 分）

上面考虑的是理想化模型，我们假设圆环瞬时完成充电。实际中，充电并非瞬时完成，因为圆环是一个具有有限电容 C 的电容器。在本部分中，我们将分析这个电容器的性质。你可能需要以下积分：

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

以及

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1	计算圆环的电容 C 。考虑圆环具有有限宽度 $2a$ ，但请记住 $a \ll R$ 。	2.0 分
-----	--	-------

当电子到达“作用区”时，将圆环接到电压为 V_0 的电源上（图 3）。当电子穿过“作用区”后，将圆环接地。接触电阻为 R_0 ，圆环自身的电阻可以忽略。

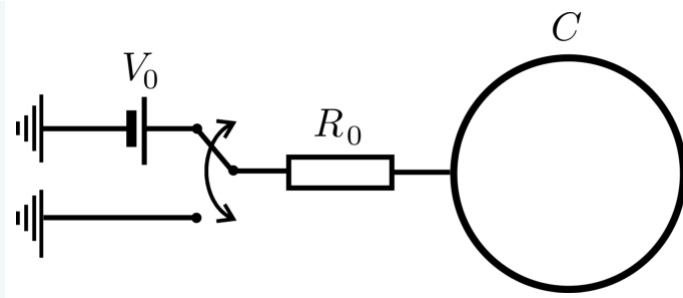


图 3. 静电透镜的充电。

D.2	确定圆环上的电荷量随时间变化的函数 $q(t)$ ，并画出其示意图。 $t = 0$ 对应于电子位于圆环平面内的时刻。当 $q(t)$ 的绝对值最大时，圆环上的电荷量 q_0 是多少？圆环的电容为 C （即不必使用 D.1 中求出的具体表达式）。注：图 3 中画出的极性仅作参考。应选择使透镜具有聚焦作用的符号。	1.0 分
-----	--	-------

部分 E. 更真实的透镜的焦距：非瞬时充电（2 分）

在本部分中，我们将考虑这种更真实的透镜的作用。这里再次忽略圆环的宽度 $2a$ ，并假设电子在到达“作用区”之前平行于 z 轴运动。然而，圆环的充电不再是瞬时完成的。

E.1	求该透镜的焦距 f 。假设 $f/v \gg R_0C$ ，但 d/v 与 R_0C 为同一数量级。用 B 部分中的常量 β 及其他已知量表示你的答案。	1.7 分
E.2	你会发现， f 的结果与 C 部分所得的结果类似，只是将 q 替换为 q_{eff} 。用题目中给出的量求出 q_{eff} 的表达式。	0.3 分

题目译自官方英文原文。

答案

采用以下记号：

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad T = \frac{d}{v}, \quad \tau = R_0C, \quad Q = CV_0.$$

这里 $e > 0$ ，无穷远处的电势为零， V_0 是带符号的外加电压：聚焦要求 $V_0 < 0$ ，因此 $Q < 0$ 。所有近似结果均满足题目规定的精度。

- A.1: $\Phi(z) = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ 。
- A.2: $\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right)$ 。
- A.3: $\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}$ 。轴向振动要求 $q > 0$ 。
- A.4: $\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}}$ ，其中 $q > 0$ 。
- B.1: $\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}$ 。
- B.2: $\mathbf{F}_\perp = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp$ 。平面内的振动要求 $q < 0$ 。
- C.1: $f = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta |q| d}$ 。

- C.2: $c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}$ 。
- C.3: 是: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{e\beta|q|d}{E} = \frac{1}{f}$ 。
- D.1: $C \approx \frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}$ 。
- D.2:

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - \exp\left(-\frac{t+T/2}{\tau}\right) \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ q_0 \exp\left(-\frac{t-T/2}{\tau}\right), & t > T/2, \end{cases} \quad q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) < 0.$$

曲线从零下降, 在 $t = T/2$ 时达到最小值 q_0 , 随后从负值一侧按指数规律趋近于零。

- E.1: $f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}$ 。
- E.2: $q_{\text{eff}} = CV_0 = \frac{q_0}{1 - e^{-d/(vR_0C)}}$ 。

解答

对于电子, 势能为 $U = -e\Phi$ 。因此

$$\mathbf{F} = -\nabla U = e\nabla\Phi.$$

整个解答中力的符号均由此确定。

A.1

圆环上的每个电荷元到轴线上观察点的距离都相同, 均为 $\sqrt{R^2 + z^2}$ 。由叠加原理可得

$$\Phi(z) = k \int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}}.$$

A.2

当 $|z| \ll R$ 时,

$$\Phi(z) = \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2}.$$

在给出的展开式中取 $\varepsilon = -1/2$, 得到

$$\boxed{\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R^3} z^2}.$$

第一个非常数项为二次项, 因为电势在 $z \mapsto -z$ 变换下保持不变。

A.3

对轴向电势求导,

$$F_z = e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{keqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx -\frac{keq}{R^3} z.$$

因此

$$\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}.$$

回复力必须指向 $z = 0$ 。因此，轴向振动要求

$$q > 0$$

成立。

A.4

牛顿运动方程为

$$m\ddot{z} = -\frac{keq}{R^3} z.$$

与 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ 比较可得

$$\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}.$$

B.1

将观察点置于 $(r, 0, 0)$ 。极角为 θ 处的圆环微元所带电荷为

$$dq = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

且到该点的距离为

$$s = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}.$$

因此，令 $\rho = r/R$ ，有

$$\Phi(r) = \frac{kq}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

展开至 ρ 的二阶，

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho \cos \theta) + \frac{3}{8}(4\rho^2 \cos^2 \theta) \\ &= 1 + \rho \cos \theta + \rho^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

角向平均值为

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\Phi(r) \approx \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

与 $q(\alpha + \beta r^2)$ 比较，得到

$$\alpha = \frac{k}{R}, \quad \beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}.$$

B.2

令 $\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ 。由于 $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\mathbf{F}_\perp = e\nabla_\perp\Phi = 2e\beta q\mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3}\mathbf{r}_\perp.$$

当且仅当

$$q < 0.$$

时, 该力在圆环平面内为回复力。取这一符号时, 每个横向坐标都满足简谐振子方程。因此, 轴向稳定性与横向稳定性要求圆环电荷具有相反的符号。

C.1

电子在作用区内停留的时间为

$$T = \frac{d}{v}.$$

由于 $d \ll R$, 可用 B.2 的结果计算该区域内的横向力。此外, $f \gg d$ 使我们可以忽略相互作用过程中横向位置的变化。

对于横向距离为 r 的入射电子, 其横向冲量为

$$m\Delta v_r = F_r T = 2e\beta q r \frac{d}{v}.$$

入射横向速度为零, 因此, 取产生聚焦作用的 $q < 0$ 时,

$$v_{r,\text{out}} = \frac{2e\beta q r d}{mv} < 0$$

成立。

离开作用区后, 电子沿直线运动。在薄透镜近似的精度下, 到轴线交点的距离为

$$f = -\frac{vr}{v_{r,\text{out}}}.$$

因此,

$$f = -\frac{mv^2}{2e\beta q d} = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta|q|d}.$$

r 被约去, 说明所有充分靠近轴线的平行入射轨迹具有相同的焦距。

C.2

从距离为 b 的电子源以角度 $\gamma \ll 1$ 发射的电子, 到达透镜时位于

$$r \approx b\gamma.$$

其入射横向速度满足

$$\frac{v_{r,\text{in}}}{v} \approx \gamma \approx \frac{r}{b}.$$

透镜产生的横向速度变化与 C.1 中相同。因此

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = \frac{r}{b} + \frac{2e\beta q r d}{mv^2} = r \left(\frac{1}{b} + \frac{e\beta q d}{E} \right).$$

要使出射轨迹在圆环之后距离为 c 处与轴线相交，必须有

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = -\frac{r}{c}.$$

由此可得

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{b} - \frac{e\beta q d}{E} = \frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b}.$$

因此

$$c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$$

题设条件 $b > f$ 保证了 $c > 0$ 。

C.3

利用刚得到的结果，

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \left(\frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b} \right) = \frac{e\beta|q|d}{E}.$$

根据 C.1，这等于 $1/f$ ，所以

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}.$$

因此，在上述近似范围内，光学薄透镜公式成立。

D.1

孤立圆环的电容为

$$C = \frac{q}{\Phi_s},$$

其中 Φ_s 是圆环表面相对于无穷远处的电势。

对于细环面体，引入单位长度的电荷量

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

选择一个满足

$$a \ll \ell \ll R.$$

的中间长度 ℓ 。我们将圆环附近近似为直线的一段与远处的弯曲部分的贡献相加，以计算表面电势。

导体局部近似为半径为 a 的圆柱。在所需精度下，其外部电势可由分布在其轴线上的电荷表示。因此， $-\ell < s < \ell$ 这一段的贡献为

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{near}} &\approx k\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} \\ &= 2k\lambda \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right) \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{2\ell}{a}. \end{aligned}$$

对于远处的部分，可以忽略厚度。令

$$\delta = \frac{\ell}{R} \ll 1.$$

圆环上角间隔为 θ 的两点之间的距离为 $2R \sin(\theta/2)$ 。因此

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{far}} &\approx k\lambda \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{R d\theta}{2R \sin(\theta/2)} \\ &= k\lambda \int_{\delta/2}^{\pi-\delta/2} \frac{du}{\sin u} \\ &= 2k\lambda \ln \cot \frac{\delta}{4} \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{4R}{\ell}.\end{aligned}$$

将两部分贡献相加，任意选取的中间长度被消去：

$$\begin{aligned}\Phi_s &\approx 2k\lambda \left(\ln \frac{2\ell}{a} + \ln \frac{4R}{\ell} \right) \\ &= 2k\lambda \ln \frac{8R}{a} \\ &= \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R} \ln \frac{8R}{a}.\end{aligned}$$

因此

$$C \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$$

有限半径 a 提供了短距离截断，使表面电势保持有限。

D.2

电子进入和离开作用区的时刻分别为

$$t_- = -\frac{T}{2}, \quad t_+ = \frac{T}{2}, \quad T = \frac{d}{v}.$$

圆环最初呈电中性。定义

$$\tau = R_0 C, \quad Q = CV_0 < 0.$$

接通电源期间，电路方程为

$$R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0,$$

即

$$\tau \dot{q} + q = Q.$$

由 $q(t_-) = 0$ ，得

$$q(t) = Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], \quad -T/2 \leq t \leq T/2.$$

圆环接地后，

$$\tau \dot{q} + q = 0.$$

切换时电荷量连续，因此

$$q(t) = q_0 e^{-(t-T/2)/\tau}, \quad t > T/2,$$

其中

$$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) = CV_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{d}{vR_0C} \right) \right].$$

合并各时间区间，得到

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ Q(1 - e^{-T/\tau})e^{-(t-T/2)/\tau}, & t > T/2. \end{cases}$$

绘制所要求的示意图时，充电开始后的 $q(t)$ 应画在时间轴下方。它最初为零，充电期间连续下降且逐渐变缓，在 $t = T/2$ 时达到最负值，随后按指数规律上升并趋近于零。两个切换时刻处的斜率均发生突变，而 $q(t)$ 保持连续。

可用于作图的点如下：

时间	电荷量
$-T/2$	0
0	$Q(1 - e^{-T/(2\tau)})$
$T/2$	$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau})$
$T/2 + \tau$	$q_0 \exp(-1)$
$t \rightarrow +\infty$	0, 从负值一侧趋近

因此，电子离开作用区时， $|q(t)|$ 达到最大值。

E.1

这里 τ 与 $T = d/v$ 相当。因此，充电及显著的放电过程发生时，电子与圆环的纵向距离仍在 d 的量级内。由于 $d \ll R$ ，B.2 中的横向力表达式仍然适用：

$$F_r(t) \approx 2e\beta q(t)r.$$

此外， $f/v \gg \tau$ 意味着聚焦发生在电荷已大幅衰减之后很久。在力脉冲持续期间，横向位移相对于 r 很小，因此计算冲量时可将 r 视为常量：

$$m\Delta v_r = 2e\beta r \int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt.$$

充电过程的贡献为

$$\begin{aligned} I_{\text{ch}} &= Q \int_{-T/2}^{T/2} [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}] dt \\ &= Q [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})]. \end{aligned}$$

放电过程的贡献为

$$\begin{aligned} I_{\text{dis}} &= q_0 \int_{T/2}^{\infty} e^{-(t-T/2)/\tau} dt \\ &= q_0 \tau = Q\tau(1 - e^{-T/\tau}). \end{aligned}$$

两者之和为

$$\int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt = QT = CV_0 \frac{d}{v}.$$

因此,

$$\Delta v_r = \frac{2e\beta r Q d}{mv}.$$

采用与 C.1 相同的薄透镜几何关系,

$$f = -\frac{vr}{\Delta v_r} = -\frac{mv^2}{2e\beta CV_0 d} = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}.$$

电阻改变了电荷脉冲的形状和持续时间, 但充电与放电过程中由电阻引起的总冲量贡献相互抵消。相互作用区域的有限范围会产生超出所采用的薄透镜近似精度的修正。

E.2

比较

$$f = -\frac{E}{e\beta q d} \quad \text{与} \quad f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d},$$

可得

$$q_{\text{eff}} = CV_0.$$

等价地, 利用 D.2,

$$q_{\text{eff}} = \frac{q_0}{1 - \exp[-d/(vR_0C)]}.$$

这一有效电荷量等于圆环在无限长时间内保持外加电压时所能达到的电荷量。其绝对值超过实际的峰值电荷量, 因为放电过程的尾部也对聚焦有贡献。

解答已与官方解答核对。

题目 3: 粒子与波

波粒二象性指出, 每个粒子都可以用波来描述, 反之亦然; 这是量子力学的核心概念之一。在本题中, 我们将依靠这一概念以及另外几个基本假设, 探索一些量子现象, 涉及微观世界中两种不同类型的粒子——费米子和玻色子。

部分 A. 箱中的量子粒子 (1.4 分)

考虑一个质量为 m 的粒子在一维势阱中运动, 其势能 $V(x)$ 为

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ 或 } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

经典粒子在这样的势场中运动时可以具有任意动能, 而量子粒子只允许具有某些特定的正的离散能级。在任一这样的允许态中, 粒子都可以描述为在阱壁处有波节的德布罗意驻波。

A.1 — 0.4 分

确定阱中量子粒子可能具有的最低能量 $E_{\min}$ 。用 m 、 L 和普朗克常量 h 表示答案。

粒子具有最低可能能量的状态称为基态，其余所有允许态称为激发态。将所有可能的能量值按递增顺序排列，并记作 E_n ，其中从基态的 E_1 开始编号。

A.2 — 0.6 分

求能量 E_n 的一般表达式（这里 $n = 1, 2, 3, \dots$ ）。

A.3 — 0.4 分

粒子只有通过发射或吸收能量等于相应能量差的光子，才能从一个状态瞬时跃迁到另一个状态。求粒子从第一激发态（ E_2 ）跃迁到基态（ E_1 ）时所发射光子的波长 λ_{21} 。

部分 B. 分子的光学性质（2.1 分）

在本部分中，我们将研究花菁 Cy5 分子的若干光学性质。这是一种广泛使用的染料分子，其结构示意图见图 1a。它的光学性质主要由碳骨架决定，骨架由碳原子之间交替排列的单键和双键组成，如图 1b 所示；分子两端的环以及基团 R 的影响则小得多。骨架中每个 C 原子（以及 N 原子）的四个价电子中，有三个形成化学键，其余价电子则被“共享”，可以沿整个骨架运动。每个这样的电子的总势能用图 1c 中起伏的细线表示，其中极小值对应 C 原子和 N 原子的位置。

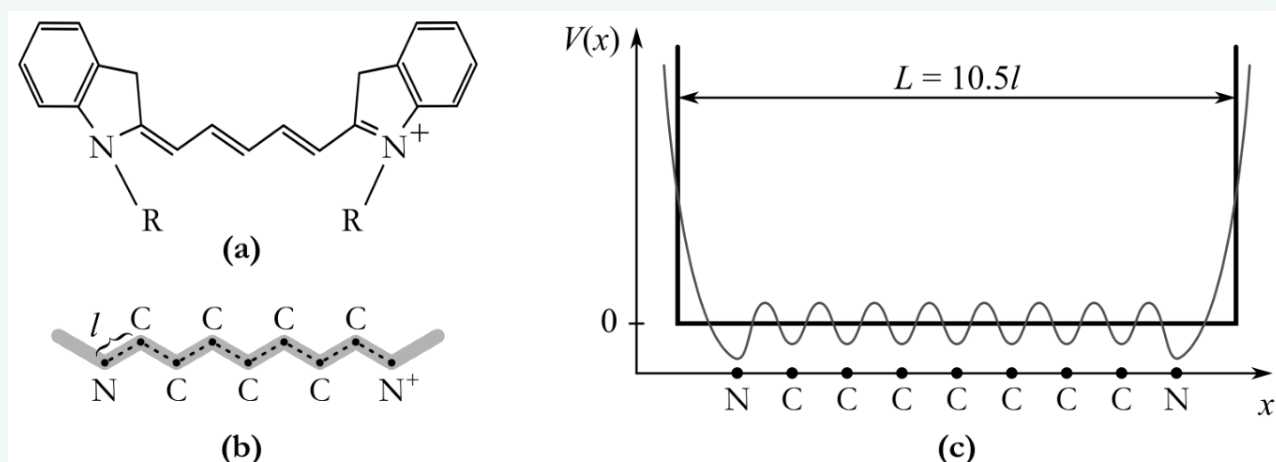


图 1. (a) 花菁 Cy5 分子的化学结构（为简明起见，未画出氢原子，R 表示某些基团）。(b) Cy5 分子的骨架，平均原子间距为 l 。(c) 电子沿骨架的势能（细线），以及用式 1 给出的阶跃函数对其作的近似（粗线）。

为简化起见，我们用式 1 给出的简单函数近似这一势能分布，取宽度 $L = 10.5l$ （见图 1c 中的粗线），这里 $l = 140 \text{ pm}$ 是平均原子间距（另见图 1b）。这样，我们得到由 10 个电子（7 个来自 C 原子，2 个来自 N 原子，1 个来自 N^+ 离子）组成的“电子气”，它们在部分 A 所讨论的一维势阱中运动。在估算中，可以忽略这些电子之间的相互作用；但应考虑到电子是费米子，因此遵守泡利不相容原理。我们还忽略其他电子的影响以及原子核的运动。

B.1 — 0.8 分

假设电子系统最初处于基态，估算 Cy5 分子能够吸收的光子的最大波长 λ 。用 l 、物理常量和一个数值系数表示答案，并计算其数值。

B.2 — 0.4 分

另一种染料分子 Cy3 具有类似结构，但其骨架少了 2 个碳原子。与 Cy5 分子相比，它的吸收光谱向蓝端还是红端移动？估算这一光谱位移的大小 $\Delta\lambda$ 的数值。可以假设，去掉两个碳原子不会改变分子的形状，只会使骨架长度缩短两个原子间距。

处于激发态的分子可以通过发射光子自发跃迁到基态。这类事件的平均速率 K (即在时间 dt 内, 处于激发态的分子数的相对减少量 dN/N , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) 由所发射光子的波长 λ 、跃迁电偶极矩 d (其数量级为 $d \simeq el$, 这里 e 为元电荷), 以及真空介电常数 ϵ_0 和普朗克常量 h 决定。

B.3 — 0.7 分

利用量纲分析, 确定以 ϵ_0 、 h 、 λ 和 d 表示的自发辐射速率表达式。该表达式中的数值系数为 $= \frac{16}{3}\pi^3$ 。

B.4 — 0.2 分

对于 Cy5 分子, $d \approx 2.4 el$ 。估算 Cy5 分子最低激发态的平均荧光寿命 τ_{Cy5} , 它等于该态向基态辐射跃迁的速率的倒数。

部分 C. 玻色-爱因斯坦凝聚 (1.5 分)

本部分与部分 A 和 B 没有直接联系。这里, 我们将研究玻色子的集体行为。玻色子不遵守泡利不相容原理, 在低温或高密度下会发生一种显著的现象, 称为玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC)。这是向一种奇特的集体量子态转变的相变: 大量全同粒子“凝聚”到同一个量子态中, 开始表现为一个整体的波。通常, 通过将数目固定的粒子冷却至临界温度以下来实现这一转变。原则上, 也可以保持温度不变, 使粒子数密度超过其临界值, 从而诱发这一转变。

我们首先探索转变发生时温度与粒子数密度之间的关系。事实表明, 对它们临界值的估算可以从一个简单的观察推导出来: 当与粒子均方速率相对应的德布罗意波长等于气体中粒子之间的特征间距时, 就会发生玻色-爱因斯坦凝聚。

C.1 — 0.4 分

给定一团处于热平衡、原子间无相互作用的 ^{87}Rb 原子气体, 写出其典型动量 p 和典型德布罗意波长 λ_{dB} 关于原子质量 m 、温度 T 和物理常量的表达式。

C.2 — 0.5 分

计算气体中粒子之间的典型距离 ℓ 与粒子数密度 n 的关系。由此推导临界温度 T_c 关于原子质量、原子数密度和物理常量的表达式。

为了在实验室中实现 BEC, 实验人员必须将气体冷却到低至 $T_c = 100 \text{ nK}$ 的温度。

C.3 — 0.6 分

如果转变在这样的温度下发生, Rb 气体的粒子数密度 n_c 是多少? 作为比较, 还请计算标准温度和压强 (STP), 即 $T_0 = 300 \text{ K}$ 和 $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ 下理想气体的“普通”粒子数密度 n_0 。“普通”气体的数密度是前者的多少倍? 可以假设原子的质量等于 87 个原子质量单位 (m_{amu})。

部分 D. 三光束光晶格 (5 分)

早在 1995 年, 人们就制备出了首批玻色-爱因斯坦凝聚体, 此后实验研究沿着多个方向发展。在本部分中, 你将研究一个成果尤其丰富的思路: 把凝聚体装载到由多束相干激光干涉形成的空间周期性势场中。由于所形成的干涉图样具有周期性, 这种势场被称为光晶格。原子在光晶格中运动时的势能 $V(\vec{r})$ 与局部光强成正比, 在计算中可以假设

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

这里, α 是一个正常量, 尖括号表示对时间取平均, 从而消去快速振荡的项。第 i 束激光产生的电场描述为

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\varepsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

其中振幅为 $E_{0,i}$ ，波矢为 $\vec{k}_i$ ，单位长度的偏振矢量为 $\vec{\varepsilon}_i$ 。

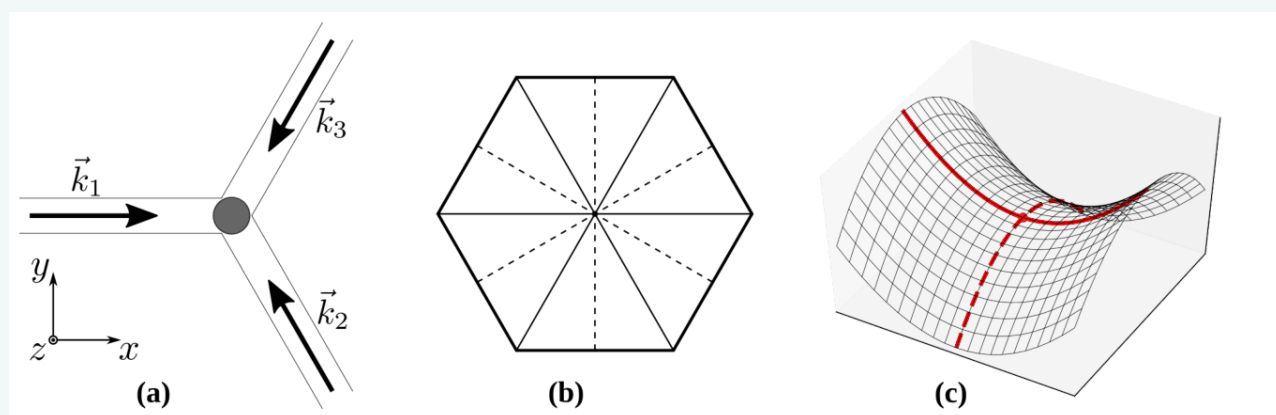


图 2. (a) 三光束光晶格：波矢为 $\vec{k}_{1,2,3}$ 的三个平面波在灰色圆圈所示区域内相交并发生干涉。(b) 正六边形的对称性：实线和虚线表示两组对称轴。(c) 鞍点：曲面上沿各正交方向的斜率均为零，但并非所绘函数局部极值的点。沿实线标出的路径移动时，会遇到一个表观极小值。要区分真正的极小值与图中所示的鞍点，还需要分析垂直方向（虚线）。

你的任务是研究由三束强度相等的相干激光干涉形成的三角光晶格。典型装置如图 2a 所示。这里，三束光均沿 z 方向偏振，在 xy 平面内传播，并以相等的 120° 夹角相交。选择 x 轴方向平行于波矢 $\vec{k}_1$ 。

D.1 — 1.4 分

利用式 2 和式 3，求光束所在平面内势能 $V(\vec{r})$ 关于 $\vec{r} = (x, y)$ 的表达式。

提示：结果可以简洁地表示为一个常数项加上三个余弦函数之和，余弦函数的自变量为 $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$ 。请将结果写成这种形式，并给出矢量 $\vec{b}_i$ 。

D.2 — 0.5 分

所得势能具有六重旋转对称轴，即势能分布绕原点旋转 60° 的整数倍角度后保持不变。请给出一个简单论证，证明它确实具有这一性质。

上述对称性简化了对二维势能分布 $V(\vec{r})$ 的分析。如图 2b 所示，正六边形的对称轴分别连接相对的顶点（实线）和相对边的中点（虚线）。因此，在本题中，无需绘制和研究二维势能图，只需着重考察沿对称轴的坐标轴 x 和 y ，就能得到许多结论。

D.3 — 1.2 分

推导势能 $V(\vec{r})$ 沿坐标轴的变化规律，即确定函数 $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ 和 $V_Y(y) \equiv V(0, y)$ 。找出一元函数的 $V_X(x)$ 和 $V_Y(y)$ 的极值位置。由于这些函数具有周期性，对于每一组周期性重复的极小值和极大值，请在列表中只列出一个代表。

我们希望确定所谓的格点的位置，即完整二维势能 $V(\vec{r})$ 的极小值位置。所得一元函数 V_X 和 V_Y 的极小值给出了格点的候选位置，但仍需检查以排除鞍点。如图 2c 所示，只沿一条直线研究时，鞍点可能看起来像极小值，但实际上并不是。

D.4 — 0.8 分

重新检查上一问的结果，以确定光晶格真正的极小值：找出距离原点最近（但不与原点重合）的所有等价极小值。最近的极小值之间的距离 a ，也就是该光晶格的晶格常数，是多少？用激光波长 λ_{las} 表示答案。

超冷原子的电中性意味着，只有两个或更多原子占据光晶格的同一格点时，它们之间的相互作用才变得重要。不过，实验人员也能研究支持原子间长程相互作用的装置。一种可行方法是制备所谓的里德伯原子，这类原子的尺寸很大，其他性质也表现得格外显著。里德伯原子是一个电子被激发到主量子数 n 很高的状态的激发态原子。可以通过计算该电子轨道角动量为 $n\hbar$ 时的经典圆轨道半径，估算里德伯原子的大小，这里 $\hbar$ 为约化普朗克常量。

D.5 — 1.1 分

计算当 Rb 里德伯原子的半径与激光波长 $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ 相当时所对应的 n 值。用 λ_{las} 和物理常量表示答案，并求出其数值。

题目译自官方英文原文。

答案

这里 m_e 表示电子质量。对于部分 D，定义共同的电场振幅为 E_0 ， $U = \alpha E_0^2 > 0$ ，并定义

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{las}}}, \quad P_X = \frac{4\pi}{3k}, \quad P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}.$$

- A.1: $E_{\min} = \frac{h^2}{8mL^2}$ 。
- A.2: $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。
- A.3: $\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}$ 。
- B.1: $\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 648 \text{ nm}$ 。
- B.2: 发生蓝移: $\lambda_{\text{Cy3}} \simeq 519 \text{ nm}$, 且 $\Delta\lambda = \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 129 \text{ nm}$ 。
- B.3: $K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}$ 。
- B.4: $\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 el)^2} \simeq 3.3 \text{ ns}$ 。
- C.1: $p = \sqrt{3mk_B T}$, $\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$ 。
- C.2: $\ell = n^{-1/3}$, $T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}$, 采用题目给出的转变估算条件。
- C.3: $n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $n_0 \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$; 普通气体的数密度是前者的 1.52×10^7 倍。

- **D.1:** $V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{b}_i \cdot \vec{r}) \right]$, 其中 $\vec{b}_1 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\vec{b}_2 = k(0, \sqrt{3})$, $\vec{b}_3 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 。
- **D.2:** 六个矢量 $\{\pm\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2, \pm\vec{b}_3\}$ 构成一个正六边形。旋转 60° 会使它们相互置换, 而余弦是偶函数, 因此 V 保持不变。
- **D.3:** $V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right]$, 且 $V_Y(y) = -\frac{U}{2} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) \right]^2$ 。以 P_X 为周期, 沿 x 轴的截面在 0 处有极小值, 在 $P_X/2$ 处有极大值。以 P_Y 为周期, 沿 y 轴的截面在 $0, P_Y/2$ 处有极小值, 在 $P_Y/3, 2P_Y/3$ 处有极大值。
- **D.4:** $a = \frac{2}{3} \lambda_{\text{las}}$ 。最近的六个极小值位于 $(\pm a, 0)$ 和 $(\pm a/2, \pm \sqrt{3}a/2)$, 后一坐标对中的正负号独立选取。
- **D.5:** $n = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}} \simeq 84.7$, 对应于 $n \simeq 85$ 。

解答

数值计算采用

$$\begin{aligned} h &= 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\ m_e &\simeq 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\ \epsilon_0 &\simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, & k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ m_{\text{amu}} &\simeq 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}. \end{aligned}$$

A.1

波在每一侧阱壁处都必须有波节。能够容纳在阱内的非零驻波, 其最长波长对应阱宽等于半个波长:

$$L = \frac{\lambda_{\text{dB},1}}{2}.$$

因此, 德布罗意关系给出

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_{\text{dB},1}} = \frac{h}{2L}.$$

采用非相对论动能, 并注意阱内势能为零, 得到

$$E_{\text{min}} = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

波数为零的状态无法同时满足两个边界条件, 除非波恒为零, 因此它不是允许的粒子态。

A.2

在第 n 个驻波模式中, 两阱壁之间容纳 n 个半波长:

$$L = n \frac{\lambda_{\text{dB},n}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

因此,

$$\lambda_{dB,n} = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{nh}{2L},$$

且

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

A.3

由能量守恒，所发射光子的能量等于粒子能量的减少量：

$$\frac{hc}{\lambda_{21}} = E_2 - E_1 = \frac{(4-1)h^2}{8mL^2}.$$

所以

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

B.1

每个空间能级可以容纳两个自旋相反的电子。因此，十电子系统的基态填满 $n = 1, \dots, 5$ 的能级，每个能级有两个电子。

能量最小的可能激发是将一个电子从 $n = 5$ 提升到第一个未占据能级 $n = 6$ 。其能量为

$$\Delta E_{Cy5} = E_6 - E_5 = \frac{(6^2 - 5^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{11h^2}{8m_e L^2}.$$

所吸收光子的最小能量对应最大波长：

$$\lambda_{Cy5} = \frac{hc}{\Delta E_{Cy5}} = \frac{8m_e c L^2}{11h}.$$

代入 $L = 10.5l$,

$$\lambda_{Cy5} = \frac{8(10.5)^2}{11} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h}.$$

代入 $l = 140 \times 10^{-12} \text{ m}$,

$$\lambda_{Cy5} \simeq 6.48 \times 10^{-7} \text{ m} = 648 \text{ nm}.$$

B.2

去掉两个碳原子会减少两个共享电子，并使势阱缩短 $2l$ 。因此，Cy3 有八个电子，且

$$L_{Cy3} = 8.5l.$$

其基态填满 $n = 1, \dots, 4$ 的能级。最低能量的激发为 $4 \rightarrow 5$ ，因此

$$\Delta E_{Cy3} = \frac{(5^2 - 4^2)h^2}{8m_e (8.5l)^2} = \frac{9h^2}{8m_e (8.5l)^2}.$$

于是

$$\lambda_{Cy3} = \frac{8(8.5)^2}{9} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{578}{9} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 519 \text{ nm}.$$

这一波长比 Cy5 的波长短，因此发生**蓝移**。位移大小为

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda_{\text{Cy5}} - \lambda_{\text{Cy3}} \\ &= \left(\frac{882}{11} - \frac{578}{9} \right) \frac{m_e c l^2}{h} \\ &= \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h}.\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{\Delta\lambda \simeq 1.29 \times 10^{-7} \text{ m} = 129 \text{ nm}}.$$

B.3

电偶极矩的量纲为电荷乘以长度：

$$[d] = \text{C m}.$$

由于

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{J m}},$$

可得

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0} \right] = \text{J m}^3.$$

除以量纲为 J s 的 h ，再除以 λ^3 ，便得到所需的时间倒数的量纲：

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3} \right] = \text{s}^{-1}.$$

利用题目给出的无量纲系数，

$$\boxed{K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}}.$$

这里 K 是正的衰减速率。对于仍处于激发态的分子数 $N(t)$ ，衰减方程为 $dN/dt = -KN$ ；题目中的“相对减少量”理解为正的损失量。

B.4

在给定模型下，最低激发态返回基态时会发射波长为 λ_{Cy5} 的光子。其电偶极矩为

$$d = 2.4 el \simeq 5.38 \times 10^{-29} \text{ C m}.$$

自发辐射速率为

$$K = \frac{16\pi^3 (2.4 el)^2}{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3} \simeq 3.01 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

对于指数衰减，平均寿命为 $1/K$ ：

$$\boxed{\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 el)^2} \simeq 3.3 \text{ ns}}.$$

C.1

对于题目所规定的温度估算，能量均分定理给出三维空间中的平均平动动能：

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

因此，与方均根速率对应的典型动量为

$$p = m\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3mk_{\text{B}}T}.$$

其德布罗意波长为

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T}}.$$

C.2

在数密度为 n 时，每个粒子平均占据的体积为 $1/n$ 。因此，特征线性间距为

$$\ell = n^{-1/3}.$$

应用题目给出的转变判据，

$$\lambda_{\text{dB}}(T_c) = \ell,$$

得到

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T_c}} = n^{-1/3}.$$

平方并整理，

$$T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_{\text{B}}}.$$

这就是由给定的波长与间距判据得到的临界温度估算值。

C.3

对于铷，

$$m = 87m_{\text{amu}} \simeq 1.44467 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad T_c = 100 \text{ nK} = 1.00 \times 10^{-7} \text{ K}.$$

由 C.2 的结果反解得

$$n_c = \left(\frac{3mk_{\text{B}}T_c}{h^2} \right)^{3/2}.$$

数值上，

$$n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}.$$

对应的间距约为 $8.57 \times 10^{-7} \text{ m}$ 。

对于普通理想气体，理想气体状态方程给出

$$p_0 = n_0 k_{\text{B}} T_0.$$

采用题目指定的温度和压强，

$$n_0 = \frac{10^5}{k_{\text{B}}(300)} \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

于是

$$\frac{n_0}{n_c} \simeq 1.52 \times 10^7.$$

普通气体的数密度约为前者的一千五百万倍。

D.1

设三束光的电场振幅均为 E_0 。按照图 2a 选取波矢，

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{k}_3 = k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

其中 $k = 2\pi/\lambda_{\text{las}}$ 。

所有偏振方向均沿 z 轴，因此各电场沿该方向按标量相加：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{z} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t).$$

所需的时间平均为

$$\langle \cos^2(\phi - \omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

以及

$$\langle \cos(\phi_i - \omega t) \cos(\phi_j - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j).$$

因此

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2 \left[\frac{3}{2} + \sum_{i < j} \cos((\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}) \right].$$

定义

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \vec{b}_2 &= \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = k(0, \sqrt{3}), \\ \vec{b}_3 &= \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = k\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

由于余弦是偶函数，每个差矢量的正负号选择不影响结果。令 $U = \alpha E_0^2$ ，则

$$V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \cos(\vec{b}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_2 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_3 \cdot \vec{r}) \right].$$

合并第一项和第三项余弦，可得便于使用的坐标形式

$$V(x, y) = -U \left[\frac{3}{2} + 2 \cos\left(\frac{3kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ky}{2}\right) + \cos(\sqrt{3}ky) \right].$$

D.2

三个 $\vec{b}_i$ 的大小均为 $\sqrt{3}k$ ，彼此夹角为 120° 。加入它们的反向矢量后，得到六个依次相隔 60° 的矢量。

将位置矢量旋转 60° ，在每个点积中等价于将相应的 $\vec{b}_i$ 旋转 -60° 。这会将每个 $\vec{b}_i$ 映射到集合 $\{\pm \vec{b}_j\}$ 中的另一个成员。由于

$$\cos(-\vec{b}_j \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}),$$

总和保持不变。因此，该势能具有题述的六重旋转对称性。

D.3

令 $y = 0$,

$$V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right].$$

其基本周期为

$$P_X = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{3}.$$

导数为

$$V'_X(x) = 3Uk \sin \left(\frac{3kx}{2} \right).$$

在 $0 \leq x < P_X$ 内，极小值位于 $x = 0$ ，极大值位于 $x = P_X/2$ 。

对于 y 轴，引入

$$q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

于是

$$V_Y(y) = -U \left(\frac{3}{2} + 2 \cos q + \cos 2q \right).$$

利用 $\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$,

$$V_Y(y) = -\frac{U}{2}(1 + 2 \cos q)^2.$$

其基本周期为

$$P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{\sqrt{3}}.$$

求导得

$$V'_Y(y) = \sqrt{3}Uk(1 + 2 \cos q) \sin q.$$

因此，驻点满足 $\sin q = 0$ 或 $\cos q = -1/2$ 。

每一组极值的一个代表如下：

截面	一个周期内的坐标	沿该轴的性质	势能
V_X	$x = 0$	极小值	$-9U/2$
V_X	$x = P_X/2$	极大值	$-U/2$
V_Y	$y = 0$	极小值	$-9U/2$
V_Y	$y = P_Y/3$	极大值	0
V_Y	$y = P_Y/2$	极小值	$-U/2$
V_Y	$y = 2P_Y/3$	极大值	0

因此， V_X 是以 $-5U/2$ 为中线的正弦型函数。在一个周期内， V_Y 从一个较深的极小值上升至零，下降至一个较浅的极小值，再次上升至零，并在下一个周期的边界处回到较深的极小值。

D.4

首先检查位于下述位置的表观浅极小值：

$$(x, y) = \left(0, \frac{P_Y}{2}\right).$$

此处完整势能的二阶导数为

$$V_{xx} = -\frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{yy} = \frac{3}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0.$$

两个方向的曲率符号相反，因此该点是鞍点，并非格点。

在原点处，

$$V_{xx} = V_{yy} = \frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0,$$

因此原点是真正的极小值点。

为找出所有真正的极小值，令

$$t = \frac{3kx}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

驻点条件为

$$\sin t \cos q = 0, \quad \sin q(\cos t + 2 \cos q) = 0.$$

如果 $\cos q \neq 0$ ，沿 x 方向的驻点条件要求 $\sin t = 0$ 。沿 x 方向的曲率为正又要求

$$\cos t \cos q > 0.$$

由于 $\cos t$ 与 $\cos q$ 同号， $\cos t + 2 \cos q$ 不可能为零。因此 $\sin q = 0$ 。所以极小值满足

$$t = \pi r, \quad q = \pi s,$$

其中整数 r, s 具有相同的奇偶性。剩余的驻点情形 $\cos q = 0$ 还要求 $\cos t = 0$ ；其黑塞矩阵的行列式为负，因此只给出鞍点。

写成 $r = 2j + s$ ，格点为

$$\vec{r}_{j,s} = a \left(j + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right), \quad j, s \in \mathbb{Z},$$

其中

$$a = \frac{4\pi}{3k}.$$

在这些点处，三个干涉余弦项均等于 1，且

$$V_{\min} = -\frac{9}{2}U.$$

到原点的距离平方为

$$|\vec{r}_{j,s}|^2 = a^2(j^2 + js + s^2).$$

对于非零整数对，正整数 $j^2 + js + s^2$ 的最小值为 1。它在六个格点处取得：

$$\left[(a, 0), (-a, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right) \right].$$

它们在原点周围构成一个正六边形。因此

$$a = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{las}}.$$

D.5

对于高度激发的外层电子，原子核和内层电子近似构成净电荷为 $+e$ 的原子实。我们采用题目给出的经典圆轨道模型，忽略穿透原子实的效应，以及质量大得多的原子实的运动。

库仑引力提供向心力：

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

给定的角动量为

$$m_e v r = n\hbar.$$

消去 v ,

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

所以

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2,$$

其中

$$a_0 \simeq 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

令估算的半径等于 λ_{las} ,

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{las}}}{a_0}} = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}.$$

对于 $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$,

$$n = \sqrt{\frac{380 \times 10^{-9}}{5.292 \times 10^{-11}}} \simeq 84.7.$$

因此，对应的整数主量子数为

$$n \approx 85.$$

解答已与官方解答核对。