

IPhO 2021

Teorik sorular ve çözümler · Vilnius, Litvanya (çevrim içi düzenlendi) · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2021/

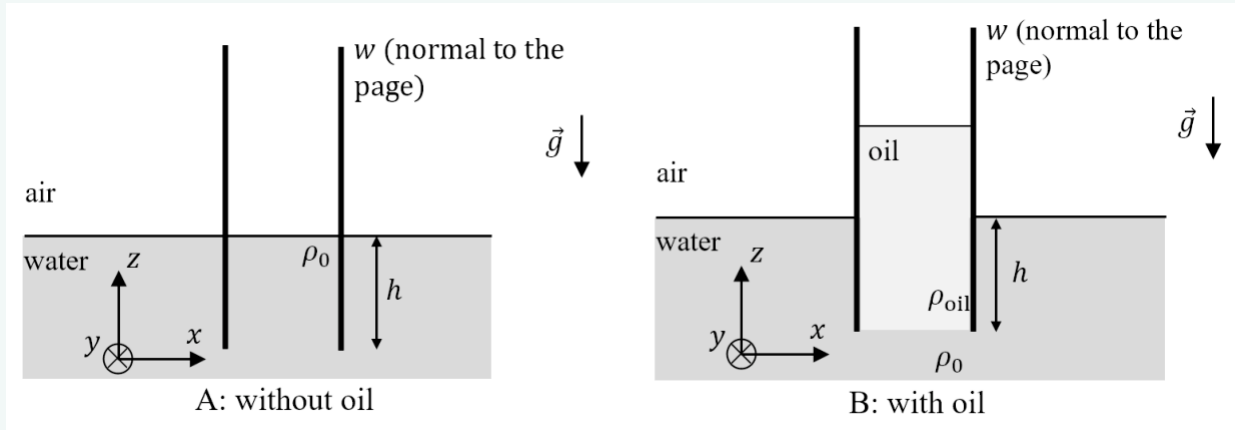
Soru 1: Gezegen Fiziği

Bu soru, gezegenlerin iç yapısıyla ilgili birbirinden bağımsız iki sorudan oluşmaktadır. Gezegenlerin yüzey eğriliğinin etkileri ihmal edilebilir. Şu formülü kullanmanız gerekebilir:

$$(1 + x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \quad \text{eğer } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Bölüm A. Okyanus ortası sırtı (5.0 puan)

Serbest düşme ivmesi g olan düzgün bir kütleçekim alanında bulunan, su dolu büyük bir kap düşünün. Birbirine paralel iki düşey dikdörtgen levha, düşey kenarları kabın düşey duvarlarıyla arada boşluk kalmadan sıkıca temas edecek şekilde kabın içine yerleştirilmiştir. Her levhanın h uzunluğundaki kısmı suya batırılmıştır (Şekil 1). Levhaların y eksenı boyunca genişliği w , suyun yoğunluğu ρ_0 'dir.



Şekil 1. Su içindeki paralel levhalar.

Levhaların arasındaki boşluğa, yağın alt seviyesi levhaların alt kenarlarına ulaşınca kadar yoğunluğu ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) olan yağ dökülür. Levhaların ve kabın kenarlarının, yağın üzerlerinden taşmasını önleyecek kadar yüksek olduğunu varsayın. Yüzey gerilimi ve sıvıların karışması ihmal edilebilir.

A.1 — 0.8 puan

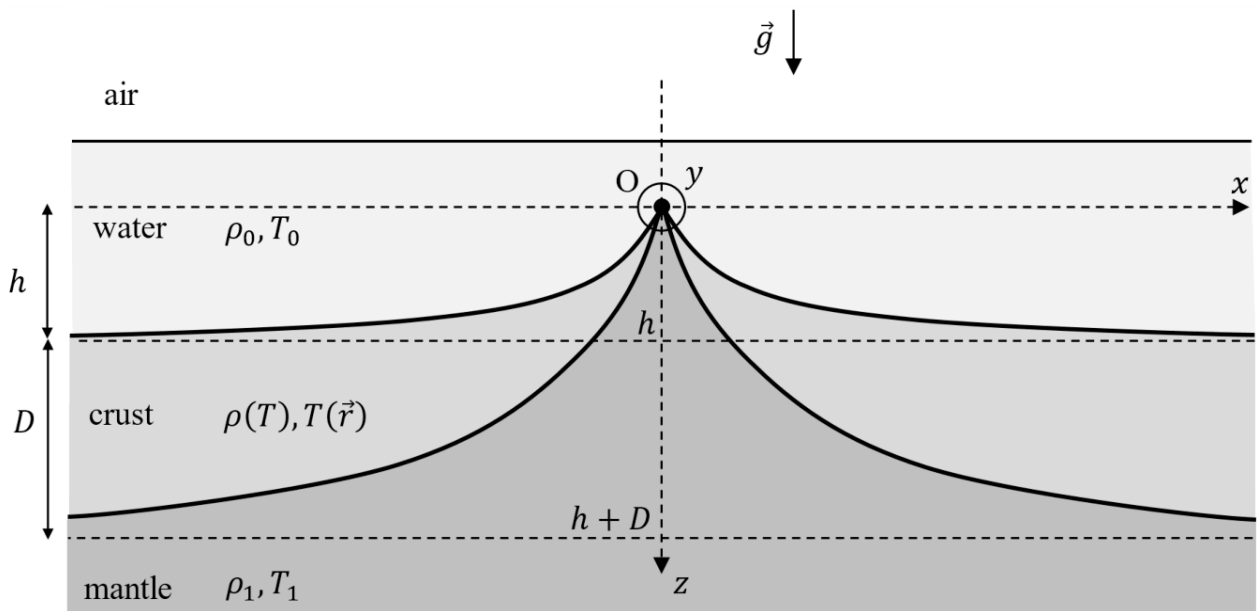
Sağ levhaya etki eden net kuvvetin x bileşeni F_x nedir (büyüklüğü ve yönü)?

Şekil 2, bir okyanus ortası sırtının enine kesitini göstermektedir. Bu yapı, üst üste bulunan manto, yer kabuğu ve okyanus suyu katmanlarından oluşur. Manto, jeolojik zaman ölçeklerinde akabildiğini varsaydığımız kayalarından oluşur ve bu nedenle bu soruda bir akışkan olarak ele alınacaktır. Yer kabuğunun kalınlığı, x doğrultusundaki karakteristik uzunluk ölçeğinden çok daha küçüktür; dolayısıyla yer kabuğu serbestçe bükülebilen bir levha gibi davranır. Böyle bir sırt, Şekil 2'nin

düzlemine dik olan y eksenı boyunca değışkenlerin hiçbir değışim göstermediğı iki boyutlu bir sistem olarak yüksek doğrulukla modellenelir. Sirtın y eksenı boyunca uzunluğı L 'nin, bu soruda tanımlanan diğer tüm uzunluklardan çok daha büyük olduğunu varsayın.

Sirtın merkezinde yer kabuğunun kalınlığının sıfır olduğu varsayılmaktadır. Merkezden yatay uzaklık x arttıkça yer kabuğı kalınlaşır ve $x \rightarrow \infty$ iken sabit bir D kalınlığına yaklaşır. Buna karşılık okyanus tabanı, koordinat sistemimizin başlangıç noktası olarak tanımladığımız sirtın tepesi O 'nın düşey olarak h kadar altına çöker (bkz. Şekil 2). Suyun yoğunluğu ρ_0 ve sıcaklığı T_0 'ın uzayda ve zamanda sabit olduğu varsayılabilir. Aynı varsayım mantonun yoğunluğu ρ_1 ve sıcaklığı T_1 için de yapılabilir. Yer kabuğunun sıcaklığı T de zamanda sabittir, ancak konuma bağılı olabilir.

Yer kabuğı malzemesinin, yüksek doğrulukla, sıcaklık T ile doğrusal olarak genleştii bilinmektedir. Su ve manto sıcaklıklarının sabit olduğu varsayıldığından, ısı genleşme katsayısının yeniden ölçeklendirilmiş bir biçimini kullanmak uygundur. Bu durumda $l(T) = l_1[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$ olur; burada l , bir yer kabuğı malzemesi parçasının uzunluğu, l_1 , bu parçanın T_1 sıcaklığındaki uzunluğu ve k_l , sabit olduğu varsayılabilen yeniden ölçeklendirilmiş ısı genleşme katsayısıdır.



Şekil 2. Okyanus ortası sırtı. z ekseninin aşağıya doğru yöneldiğine dikkat edin.

A.2 — 0.6 puan

Yer kabuğunun izotropik olduğunu varsayarak yoğunluğu ρ 'nın sıcaklığı T 'ye nasıl bağılı olduğunu bulun. $|k_l| \ll 1$ olduğunu varsayarak cevabınızı şu yaklaşık biçimde yazın:

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

Burada k_l^2 ve daha yüksek mertebeden terimler ihmal edilmektedir. Ardından k sabitini belirleyin.

$k > 0$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca yer kabuğunun ısı iletkenliği κ 'nın sabit olduğu varsayılabilir. Bunun sonucunda, sırt ekseninden çok uzakta yer kabuğunun sıcaklığı derinlikle doğrusal olarak değışir.

A.3 — 1.1 puan

Manto ve suyun her birinin hidrostatik dengede sıkıştırılmaz bir akışkan gibi davrandığını varsayarak, sırtın çok uzağındaki yer kabuğu kalınlığı D 'yi h , ρ_0 , ρ_1 ve k cinsinden ifade edin. Malzemenin her türlü hareketi ihmal edilebilir.

A.4 — 1.6 puan

Yer kabuğunun sağ yarısına ($x > 0$) etki eden net yatay kuvvet F 'yi, k 'ya göre başat mertebede, ρ_0 , ρ_1 , h , L , k ve g cinsinden bulun.

Yer kabuğunun, Dünya'nın geri kalanından ısı olarak yalıtıldığını varsayın. Isı iletimi sonucunda yer kabuğunun üst ve alt yüzeylerinin sıcaklıkları, yer kabuğu ısı dengeye ulaşınca kadar birbirine yaklaşacaktır. Yer kabuğunun özgül ısı c 'dir ve sabit olduğu varsayılabilir.

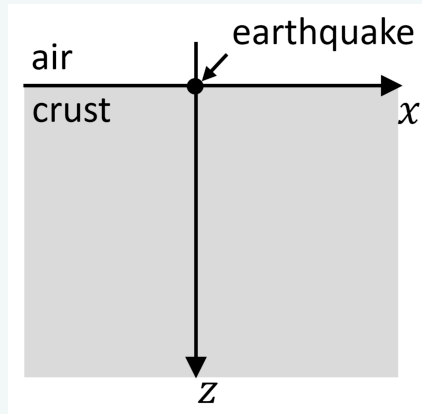
A.5 — 0.9 puan

Boyut analizi veya büyüklük mertebesi analizi kullanarak, sırt ekseninden uzaktaki yer kabuğunun üst ve alt yüzey sıcaklıkları arasındaki farkın sıfıra yaklaşacağı karakteristik süre τ 'yu tahmin edin. τ 'nın yer kabuğunun iki başlangıç yüzey sıcaklığına bağlı olmadığını varsayabilirsiniz.

Bölüm B. Katmanlı bir ortamda sismik dalgalar (5.0 puan)

Bir gezegenin yüzeyinde kısa süreli bir deprem meydana geldiğini varsayın. Sismik dalgaların $z = x = 0$ konumunda bulunan çizgisel bir kaynaktan çıktığı varsayılabilir; burada x yatay koordinat, z ise yüzeyin altındaki derinliktir (Şekil 3). Sismik dalga kaynağının, bu soruda ele alınan diğer tüm uzunluklardan çok daha uzun olduğu varsayılabilir.

Deprem sonucunda, boyuna P dalgaları olarak adlandırılan dalgalar, x - z düzleminde z eksenini boyunca pozitif bileşeni olan tüm yönlerde eşit akıyla yayılır. Katılardaki dalga kuramı genel olarak karmaşık olduğundan, bu soruda depremin yaydığı diğer tüm dalgaları ihmal ediyoruz. Gezegenin kabuğu, P dalgası hızı v 'nin derinlik z 'ye $v = v_0(1 + z/z_0)$ bağıntısına göre bağlı olacağı şekilde katmanlıdır; burada v_0 yüzeydeki hız, z_0 ise bilinen pozitif bir sabittir.



Şekil 3. Bölüm B'de kullanılan koordinat sistemi.

B.1 — 1.5 puan

Depremden çıkan, başlangıçta z ekseniniyle $0 < \theta_0 < \pi/2$ açısı yapan ve x - z düzleminde ilerleyen tek bir ışın düşünün. Bu ışının gezegenin yüzeyinde algılanabileceği yatay koordinat $x_1(\theta_0) \neq 0$ nedir? Işının izlediği yolun bir çember yayı olduğu bilinmektedir. Cevabınızı, A ve b bulunması gereken sabitler olmak üzere, $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ biçiminde yazın.

A ve b 'yi bulamadıysanız, sonraki sorularda $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ sonucunu verilmiş olarak kullanabilirsiniz. Deprem sırasında kabuğa P dalgaları olarak salınan toplam enerjinin, kaynağın birim uzunluğu başına E olduğunu varsayın. Dalgaların gezegenin yüzeyine alttan ulaştıklarında tamamen soğurulduğunu varsayın.

B.2 — 1.5 puan

Yüzey tarafından soğurulan birim alan başına enerji yoğunluğu $\varepsilon(x)$ 'in, yüzey boyunca uzaklık x 'e nasıl bağlı olduğunu bulun. $\varepsilon(x)$ 'in grafiğini kabaca çizin.

Bundan sonra, dalgaların yüzeye ulaştıklarında bunun yerine tamamen yansıdığını varsayın. $z = x = 0$ konumuna yerleştirilmiş, daha önce ele alınan deprem kaynağıyla aynı geometriye sahip bir aygıt düşünün. Aygıt, serbestçe seçilen bir açısal dağılımla P dalgaları yayabilmektedir. Aygıtın dar bir yayılma açısı aralığında bir sinyal yaymasını sağlıyoruz. Özellikle, sinyalin başlangıçta düşeyle yaptığı açı $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ aralığındadır; burada $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ ve $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ 'dir.

B.3 — 2.0 puan

Sinyalin ulaşmadığı en uzak nokta, kaynaktan yüzey boyunca hangi $x_{\max}$ uzaklığındadır? Cevabınızı θ_0 , $\delta\theta_0$ ve yukarıda verilen diğer sabitler cinsinden yazın.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• A.1

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right)$$

Kuvvet, yağdan uzağa doğru, $+x$ yönündedir.

• A.2

$$\rho(T) = \rho_1 \left[1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]^{-3} \approx \rho_1 \left[1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad k = 3k_l.$$

• A.3

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}$$

birinci mertebeden yoğunluk yaklaşımı kapsamında.

• A.4 Akışkanların uyguladığı toplam yatay kuvvet, başat mertebede,

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2},$$

olup sırttan uzağa doğru, $+x$ yönündedir.

- A.5

$$\tau \sim \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa} = \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Bu, bir büyüklük mertebesi tahminidir.

- B.1

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0, \quad A = 2z_0, \quad b = 1.$$

- B.2

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

Grafik çift fonksiyon grafiğidir; tepe değeri $\varepsilon(0) = E/(2\pi z_0)$ 'dır, $x = \pm 2z_0$ 'da maksimum değerinin yarısına ulaşır ve x^{-2} ile orantılı olarak sifıra yaklaşır.

- B.3 Dar bant limitinde,

$$x_{\max} \simeq \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

Bu, demetin yayılma yönü boyunca ulaşılmayan son aralığın dış sınırıdır. Yansıma sayısının tam sayı olmasını hesaba katan kesin bir ifade aşağıda türetilmiştir.

Çözüm

A.1

Yağ sütununun levhaların alt kenarlarından itibaren yüksekliği H olsun. Bu kenarlarda yağ ve su basınçları eşit olmalıdır. Atmosfer basıncı çıkarıldığında,

$$\rho_{\text{oil}} g H = \rho_0 g h, \quad H = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} h.$$

Yüksekliği a ve yoğunluğu ρ olan bir akışkan sütunu, düşey bir levhaya

$$w \int_0^a \rho g(a - u) du = \frac{1}{2} \rho g w a^2$$

yatay kuvvetini uygular; burada u , sütunun tabanından itibaren yüksekliği ölçer.

Yağ, sağ levhayı $+x$ yönüne; su ise $-x$ yönüne iter. Atmosfer basıncının iki taraftaki etkileri birbirini götürür. Dışarıdaki su seviyesinin üzerindeki yağ da hesaba katıldığında

$$F_x = \frac{g w}{2} (\rho_{\text{oil}} H^2 - \rho_0 h^2).$$

H yerine ifadesini koyarsak,

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right) > 0.$$

Dolayısıyla levha dışarıya doğru itilir.

A.2

Boyutsuz sıcaklık farkını şöyle tanımlayalım:

$$q = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}.$$

İzotropik genleşme, üç doğrusal boyutun tümünü aynı çarpanla değiştirir. Dolayısıyla,

$$\frac{V(T)}{V(T_1)} = (1 - k_l q)^3.$$

Kütle korunur ve T_1 'deki referans yoğunluk ρ_1 'dir; bu nedenle

$$\rho(T) = \rho_1 (1 - k_l q)^{-3}.$$

Verilen açılımı kullanıp k_l^2 mertebesindeki terimleri ihmal edersek,

$$\rho(T) \approx \rho_1 (1 + 3k_l q).$$

Denklem (2) ile karşılaştırma sonucunda

$$k = 3k_l.$$

A.3

Şekil 2'deki aşağıya yönelmiş z eksenini kullanalım. Sırttan uzakta yer kabuğu $z = h$ 'den $z = h + D$ 'ye kadar uzanır. Sıcaklığı

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D},$$

ve dolayısıyla yoğunluğu

$$\rho(z) \approx \rho_1 \left[1 + k \left(1 - \frac{z - h}{D} \right) \right].$$

Ortalama yoğunluğu ise

$$\bar{\rho} = \frac{1}{D} \int_h^{h+D} \rho(z) dz = \rho_1 \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Yer kabuğunun kalınlığının sıfır olduğu sırt tepesindeki ortak akışkan basıncı p_O olsun. Hidrostatik denge, uzaktaki yer kabuğunun hemen üstündeki ve altındaki basınçları verir:

$$p_{\text{top}} = p_O + \rho_0 g h,$$

$$p_{\text{bottom}} = p_O + \rho_1 g (h + D).$$

Uzaktaki yatay yer kabuğundan alınan bir sütun üzerinde düşey kuvvet dengesi şu koşulu gerektirir:

$$p_{\text{bottom}} - p_{\text{top}} = \bar{\rho} g D.$$

Böylece

$$\rho_1 (h + D) - \rho_0 h = \rho_1 D \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Ortak $\rho_1 D$ terimi sadeleştirildikten sonra,

$$(\rho_1 - \rho_0) h = \frac{1}{2} \rho_1 k D,$$

dolayısıyla

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}.$$

A.4

Gerçek su–yer kabuğu ve manto–yer kabuğu ara yüzeylerindeki basınç kuvvetlerini hesaplayalım.

Yer kabuğunun üst ve alt yüzeylerini $z = z_t(x)$ ve $z = z_b(x)$ olarak yazalım. Uç noktadaki değerleri şöyledir:

$$z_t(0) = z_b(0) = 0, \quad z_t(\infty) = h, \quad z_b(\infty) = h + D.$$

Akışkanların basınç alanları

$$p_w(z) = p_O + \rho_0 gz, \quad p_m(z) = p_O + \rho_1 gz.$$

Yatay uzunluğu dx ve genişliği L olan bir ara yüzey elemanı için basınç kuvvetinin yatay bileşeni, yüzeyin eğimini içerir. Üstteki akışkan negatif x yönüne, alttaki akışkan ise pozitif x yönüne iter:

$$dF_x = L \left[p_m(z_b) \frac{dz_b}{dx} - p_w(z_t) \frac{dz_t}{dx} \right] dx.$$

Eğimli yüzey alanından ve birim normalden gelen çarpanlar birbirini götürür; dolayısıyla bu ifade ek bir küçük eğim yaklaşımı gerektirmez. İntegral alındığında,

$$\begin{aligned} F_x &= L \int_0^{h+D} (p_O + \rho_1 gz) dz - L \int_0^h (p_O + \rho_0 gz) dz \\ &= p_O LD + \frac{gL}{2} [\rho_1 (h + D)^2 - \rho_0 h^2]. \end{aligned}$$

Eşdeğer olarak,

$$F_x = \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2 + (p_O + \rho_1 gh) LD + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_0) g L h^2.$$

A.3'e göre, sabit h için $D \propto k^{-1}$ 'dir. Arka plan basıncı sabit tutulduğunda bu üç katkı sırasıyla k^{-2} , k^{-1} ve k^0 mertebesinde. Dolayısıyla başat terim

$$F_x \simeq \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2.$$

D yerine ifadesini koyarsak,

$$F_x \simeq \frac{2g L h^2 (\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2}.$$

Kuvvet sırttan uzağa, $+x$ yönüne doğrudur. Bu, akışkanların uyguladığı toplam kuvvettir; uzaktaki yer kabuğundan geçen yapay bir kesit üzerindeki herhangi bir litostatik kuvvet çıkarılmamıştır.

A.5

k 'ya göre başat mertebede yer kabuğunun hacimsel ısı kapasitesi $\rho_1 c$ 'dir; bu da ısı yayılım katsayısını verir:

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1 c}.$$

Sırttan uzakta, ısının yayılması gereken ilgili uzaklık D 'dir. Bu nedenle ısı denklemi,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

şu ölçek tahminini verir:

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi \frac{\Delta T}{D^2}.$$

Gerektiği gibi sıcaklık farkı sadeleşir:

$$\tau \sim \frac{D^2}{\chi} = \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa}.$$

A.3 kullanıldığında,

$$\tau \sim \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Boyut analizi sayısal bir ön çarpan belirlemez. Yüzey sıcaklıkları arasındaki fark, sonlu bir zamanda sıfır olmak yerine asimptotik olarak sıfıra yaklaşır.

B.1

Dalga hızının yalnızca derinliğe bağlı olduğu bir ortamda Snell yasası, yatay yavaşlık bileşenini korur:

$$\frac{\sin \theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0},$$

burada $\theta(z)$, düşeyle yapılan yerel açıdır.

$$v(z) = v_0 \frac{z + z_0}{z_0},$$

olduğundan,

$$\sin \theta(z) = \frac{z + z_0}{z_0} \sin \theta_0.$$

Şunu tanımlayalım:

$$R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}.$$

Işının aşağıya ilerleyen kısmında,

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{z + z_0}{\sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}}.$$

$z = 0$ 'da $x = 0$ koşuluyla integral alındığında

$$x = \sqrt{R^2 - z_0^2} - \sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}.$$

Dolayısıyla yörünge,

$$(x - x_c)^2 + (z + z_0)^2 = R^2,$$

çemberi üzerinde yer alır; bu çemberin merkezinin koordinatları

$$x_c = \sqrt{R^2 - z_0^2} = z_0 \cot \theta_0, \quad z_c = -z_0.$$

Işın bu çemberin en derin noktasında yön değiştirir ve simetrik olarak yüzeye döner. $z = 0$ ile iki kesişimi $x = 0$ ve $x = 2x_c$ 'dir. Bu nedenle

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0,$$

ve

$$A = 2z_0, \quad b = 1.$$

Yüzeydeki hız v_0 , ilerleme sürelerini etkiler; ancak ışın geometrisini belirleyen ifadelerde sadeleşir.

B.2

Aşağıya doğru olan yarı düzlem, π büyüklüğünde bir açı aralığını kapsar. Dolayısıyla düzgün yayılım, kaynağın birim uzunluğu başına

$$dE = \frac{E}{\pi} d\theta$$

enerjisini $d\theta$ açısal aralığına atar.

$x > 0$ 'da geri dönen ışınlar için,

$$x = 2z_0 \cot \theta, \quad \left| \frac{dx}{d\theta} \right| = 2z_0 \csc^2 \theta.$$

Yayılmın gerçekleştiği açı aralığı ile bu enerjiyi alan yüzey şeridi arasındaki enerji korunumu şu bağıntıyı verir:

$$\varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} |d\theta|.$$

Böylece

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{2\pi z_0} \sin^2 \theta.$$

Şu bağıntıları kullanarak

$$\cot \theta = \frac{x}{2z_0}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + x^2/(4z_0^2)},$$

şunu buluruz:

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

Sola doğru yayılım, $x < 0$ için aynı ifadeyi verir. Normalizasyonu şöyledir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} \left[\arctan \frac{x}{2z_0} \right]_{-\infty}^{\infty} = E.$$

İstenen kaba çizim için: eğri düzgündür ve $x = 0$ 'a göre simetriktir; tek maksimum değeri $E/(2\pi z_0)$ 'dır. $x = \pm 2z_0$ 'da yüksekliği $E/(4\pi z_0)$ olduğundan, yarı maksimumdaki tam genişliği $4z_0$ 'dır. Her sonlu x için pozitif kalır ve kuyrukları şu bağıntıyı sağlar:

$$\varepsilon(x) \sim \frac{2Ez_0}{\pi x^2} \quad (|x| \gg z_0).$$

E , kaynağın birim uzunluğu başına enerji olduğundan, ε 'un birimi birim alan başına enerjidir.

B.3

Yüzeydeki düzgün yansımada, ışın hızının düşey bileşeni yön değiştirirken yatay bileşeni korunur. Dolayısıyla her ışın, yatay olarak ötelenmiş aynı yayı tekrarlar. Yüzeyle karşılaşmaları şu konumlarda gerçekleşir:

$$x_n(\theta) = n\ell(\theta), \quad \ell(\theta) = 2z_0 \cot \theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Şöyle tanımlayalım:

$$\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \frac{\delta\theta_0}{2}.$$

Tamamı $0 < \theta < \pi/2$ içinde kalan bir bant için, yüzeyle ardışık karşılaşmalar arasındaki en kısa ve en uzun uzaklıklar

$$\ell_{\min} = 2z_0 \cot \theta_+, \quad \ell_{\max} = 2z_0 \cot \theta_-.$$

Demet açısı aralığını doldurduğundan, n . karşılaşmada ulaşılan yüzey aralığı

$$I_n = [n\ell_{\min}, n\ell_{\max}].$$

I_n ile I_{n+1} arasında bir boşluk bulunması için gerekli ve yeterli koşul

$$n\ell_{\max} < (n+1)\ell_{\min},$$

veya

$$n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) < \ell_{\min}.$$

$\Delta\ell = \ell_{\max} - \ell_{\min}$ olarak tanımlayalım. $n\Delta\ell \geq \ell_{\min}$ olduğunda komşu aralıklar örtüşür ve daha büyük her n için örtüşmeye devam eder. Sonuç olarak son boşluğun kesin dış sınırı

$$x_{\max} = \ell_{\min} \left\lceil \frac{\ell_{\min}}{\Delta\ell} \right\rceil.$$

Tavan fonksiyonu, yüzeyle karşılaşma sayısının tam sayı olmasını hesaba katar. Sınırın kendisine ulaşılır; ulaşılmayan noktalar bu sınıra daha küçük uzaklıklardan yaklaşır.

İstenen dar bant yaklaşımı için,

$$\ell_0 = 2z_0 \cot \theta_0,$$

ve

$$\Delta\ell \simeq \left| \frac{d\ell}{d\theta} \right|_{\theta_0} \delta\theta_0 = 2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0.$$

Sabit θ_0 için yeterince dar bir bantta, aralıklar örtüşmeden önce çok sayıda yansıma gerekir. Bu durumda başat mertebede tam sayıya yuvarlama ihmal edilebilir:

$$x_{\max} \simeq \frac{\ell_0^2}{\Delta\ell}.$$

Dolayısıyla

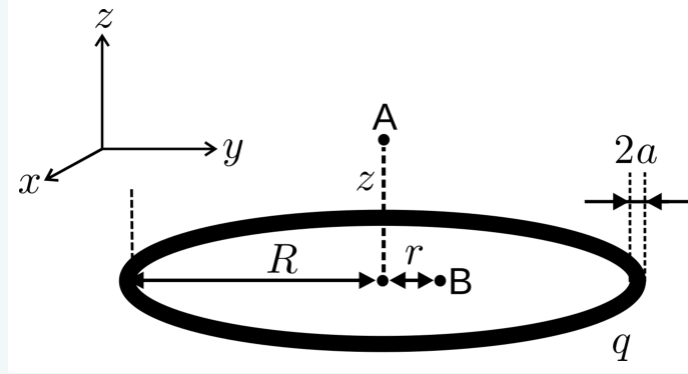
$$x_{\max} \simeq \frac{(2z_0 \cot \theta_0)^2}{2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Elektrostatik mercek

Yarıçapı R ve toplam yükü q olan, düzgün yüklü metal bir halka ele alınız. Halka, kalınlığı $2a \ll R$ olan içi boş bir toroiddir. A, B, C ve E bölümlerinde bu kalınlık ihmal edilebilir. Şekil 1'de gösterildiği gibi, xy düzlemi halkanın düzlemiyle çakışırken z eksenini bu düzleme diktir. A ve B bölümlerinde şu formülü (Taylor açılımını) kullanmanız gerekebilir:

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon - 1)x^2, \quad \text{eğer } |x| \ll 1.$$



Şekil 1. Yarıçapı R olan yüklü bir halka.

Bölüm A. Halkanın eksenindeki elektrostatik potansiyel (1 puan)

A.1	Halkanın ekseninde, merkezinden z uzaklıkta bulunan noktadaki (Şekil 1'deki A noktası) elektrostatik potansiyeli $\Phi(z)$ hesaplayınız.	0.3 puan
A.2	$z \ll R$ olduğunu varsayarak, elektrostatik potansiyeli $\Phi(z)$, z 'nin sıfırdan farklı en düşük kuvvetine kadar hesaplayınız.	0.4 puan
A.3	A noktasına (Şekil 1, $z \ll R$) bir elektron (kütlesi m ve yükü $-e$) yerleştiriliyor. Elektronu etki eden kuvvet nedir? Kuvvet ifadesine bakarak, ortaya çıkan hareketin salınım olması için q 'nın işaretini belirleyiniz. Hareket eden elektron, halkadaki yük dağılımını etkilememektedir.	0.2 puan
A.4	Bu harmonik salınımların açısal frekansı ω nedir?	0.1 puan

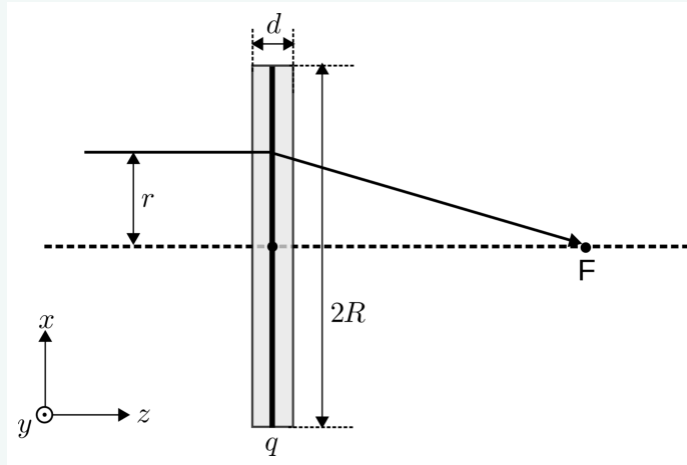
Bölüm B. Halkanın düzlemindeki elektrostatik potansiyel (1.7 puan)

Sorunun bu bölümünde, halkanın düzlemindeki ($z = 0$) potansiyeli $\Phi(r)$, $r \ll R$ için (Şekil 1'deki B noktası) incelemeniz gerekmektedir. r 'nin sıfırdan farklı en düşük kuvvetine kadar elektrostatik potansiyel, $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ ile verilmektedir.

B.1	β için bir ifade bulunuz. Yukarıda verilen Taylor açılımı formülünü kullanmanız gerekebilir.	1.5 puan
B.2	B noktasına (Şekil 1, $r \ll R$) bir elektron yerleştiriliyor. Elektronu etki eden kuvvet nedir? Kuvvet ifadesine bakarak, ortaya çıkan hareketin harmonik salınım olması için q 'nın işaretini belirleyiniz. Hareket eden elektron, halkadaki yük dağılımını etkilememektedir.	0.2 puan

Bölüm C. İdealleştirilmiş elektrostatik merceğin odak uzaklığı: anlık yüklenme (2.3 puan)

Elektronları odaklayacak bir düzenek, yani bir elektrostatik mercek yapılmak isteniyor. Şu düzeni ele alalım. Halka, Şekil 2'de gösterildiği gibi z eksenine dik olarak yerleştirilmiştir. İstenildiğinde relativistik olmayan elektron paketleri üreten bir kaynağımız vardır. Bu elektronların kinetik enerjisi $E = mv^2/2$ 'dir (v hızdır) ve kaynaktan, hassas biçimde kontrol edilen anlarda çıkarlar. Sistem, halka çoğu zaman elektriksel olarak nötr olacak, ancak elektronlar halkanın düzlemine $d/2$ uzaklıktan daha yakın olduğunda ($d \ll R$) yükü q olacak şekilde programlanmıştır (Şekil 2'deki taralı bölgeye "etkin bölge" denir). C bölümünde, yüklenme ve boşalma süreçlerinin anlık olduğunu ve elektrik alanının da anında "uzayı doldurduğunu" varsayınız. Manyetik alanlar ihmal edilebilir ve elektronların z doğrultusundaki hızının sabit olduğu varsayılabilir. Hareket eden elektronlar, halkadaki yük dağılımını bozmamaktadır.



Şekil 2. Bir elektrostatik mercek modeli.

C.1	Bu merceğin odak uzaklığını f belirleyiniz. $f \gg d$ olduğunu varsayınız. Cevabınızı B.1 sorusundaki β sabiti ve bilinen diğer nicelikler cinsinden ifade ediniz. "Etkin bölgeye" ulaşmadan önce elektron paketinin z eksenine paralel olduğunu ve $r \ll R$ olduğunu varsayınız. q 'nın işareti, mercek yakınsak olacak şekildedir.	1.3 puan
-----	---	-------------

Gerçekte elektron kaynağı, z eksenı üzerinde halkanın merkezinden $b > f$ uzaklığa yerleştirilir. Elektronların "etkin bölgeye" ulaşmadan önce artık z eksenine paralel olmadığını, bunun yerine noktasal bir kaynaktan z eksenıyle farklı $\gamma \ll 1$ rad açılarını yapacak şekilde yayıldığını düşününüz. Elektronlar, halkanın merkezinden c uzaklıkta bulunan bir noktada odaklanılır.

C.2	c 'yi bulunuz. Cevabınızı B.1 sorusundaki β sabiti ve bilinen diğer nicelikler cinsinden ifade ediniz.	0.8 puan
C.3	İnce optik mercek denklemi $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$, elektrostatik mercek için sağlanır mı? $1/b + 1/c$ 'yi açıkça hesaplayarak gösteriniz.	0.2 puan

Bölüm D. Bir kondansatör olarak halka (3 puan)

Yukarıda ele alınan model idealleştirilmişti ve halkanın anında yüklendiğini varsaymıştık. Gerçekte yüklenme anlık değildir; çünkü halka, sonlu bir C sıçasına sahip bir kondansatördür. Bu bölümde bu kondansatörün özelliklerini inceleyeceğiz. Aşağıdaki integrallere ihtiyaç duyabilirsiniz:

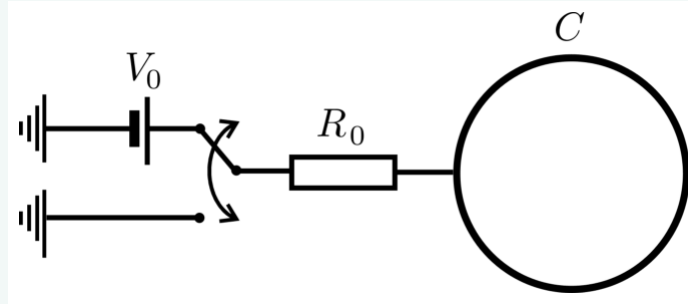
$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

ve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1	Halkanın sığasını C hesaplayınız. Halkanın sonlu bir $2a$ kalınlığı olduğunu dikkate alınız, ancak $a \ll R$ olduğunu unutmayınız.	2.0 puan
-----	--	-------------

Elektronlar “etkin bölgeye” ulaştığında halka, gerilimi V_0 olan bir kaynağa bağlanır (Şekil 3). Elektronlar “etkin bölgeyi” geçtiklerinde halka toprağa bağlanır. Kontakların direnci R_0 'dır ve halkanın kendi direnci ihmal edilebilir.



Şekil 3. Elektrostatik merceğin yüklenmesi.

D.2	Halkadaki yükün zamana bağlılığını, $q(t)$, belirleyiniz ve bu bağımlılığın şematik grafiğini çizin. $t = 0$, elektronların halkanın düzleminde olduğu ana karşılık gelmektedir. $q(t)$ 'nin mutlak değeri en büyük olduğunda halkadaki yük q_0 nedir? Halkanın sığası C 'dir (yani D.1'de bulunan ifadeyi kullanmanız gerekmemektedir). Not: Şekil 3'te çizilen kutupluluk yalnızca gösterim amaçlıdır. İşaret, merceğ yakınsak olacak şekilde seçilmelidir.	1.0 puan
-----	---	-------------

Bölüm E. Daha gerçekçi bir merceğin odak uzaklığı: anlık olmayan yüklenme (2 puan)

Sorunun bu bölümünde, daha gerçekçi olan bu merceğin etkisini ele alacağız. Burada yine halkanın kalınlığını $2a$ ihmal edeceğiz ve elektronların “etkin bölgeye” ulaşmadan önce z eksenine paralel hareket ettiğini varsayacağız. Ancak halkanın yüklenmesi artık anlık değildir.

E.1	Merceğin odak uzaklığını f bulunuz. $f/v \gg R_0 C$ olduğunu, ancak d/v ile $R_0 C$ 'nin aynı büyüklük mertebesinde olduğunu varsayınız. Cevabınızı B bölümündeki β sabiti ve bilinen diğer nicelikler cinsinden ifade ediniz.	1.7 puan
E.2	f için elde edilen sonucun, q yerine q_{eff} konulmasıyla C bölümünde elde edilen sonuca benzediğini göreceksiniz. q_{eff} için soruda verilen nicelikler cinsinden bir ifade bulunuz.	0.3 puan

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Şu tanımları kullanınız:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad T = \frac{d}{v}, \quad \tau = R_0 C, \quad Q = C V_0.$$

Burada $e > 0$ 'dır, potansiyel sonsuzda sıfırdır ve V_0 , uygulanan gerilimin işaretli değeridir: odaklama için $V_0 < 0$, dolayısıyla $Q < 0$ olmalıdır. Tüm yaklaşık sonuçlar, soruda belirtilen doğruluk düzeyindedir.

- **A.1:** $\Phi(z) = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$.
 - **A.2:** $\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right)$.
 - **A.3:** $\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}$. Eksen doğrultusundaki salınımlar için $q > 0$ olmalıdır.
 - **A.4:** $\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}}$, $q > 0$ için.
 - **B.1:** $\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}$.
 - **B.2:** $\mathbf{F}_\perp = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp$. Düzlem içindeki salınımlar için $q < 0$ olmalıdır.
 - **C.1:** $f = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta|q|d}$.
 - **C.2:** $c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}$.
 - **C.3:** Evet: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{e\beta|q|d}{E} = \frac{1}{f}$.
 - **D.1:** $C \approx \frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}$.
 - **D.2:**

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - \exp\left(-\frac{t + T/2}{\tau}\right) \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ q_0 \exp\left(-\frac{t - T/2}{\tau}\right), & t > T/2, \end{cases} \quad q_0 = Q \left(1 - e^{-T/\tau}\right) < 0.$$
- Grafik sıfırdan başlayıp $t = T/2$ 'de en küçük değeri olan q_0 'a düşer, ardından sıfıra aşağıdan üstel olarak yaklaşır.
- **E.1:** $f = -\frac{E}{e\beta C V_0 d} = \frac{E}{e\beta C |V_0| d}$.
 - **E.2:** $q_{\text{eff}} = C V_0 = \frac{q_0}{1 - e^{-d/(vR_0 C)}}$.

Çözüm

Bir elektronun potansiyel enerjisi $U = -e\Phi$ 'dir. Dolayısıyla

$$\mathbf{F} = -\nabla U = e\nabla\Phi.$$

Bu bağıntı, çözüm boyunca kuvvetin işaretlerini belirler.

A.1

Halkadaki her yük elemanı, eksen üzerindeki gözlem noktasından aynı $\sqrt{R^2 + z^2}$ uzaklığındadır. Süperpozisyon ilkesinden

$$\Phi(z) = k \int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}}.$$

A.2

$|z| \ll R$ için,

$$\Phi(z) = \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2}.$$

Verilen açılımı $\varepsilon = -1/2$ ile kullanarak,

$$\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R^3} z^2.$$

Potansiyel $z \mapsto -z$ dönüşümünde değişmediği için sabit olmayan ilk terim ikinci derecedendir.

A.3

Eksen üzerindeki potansiyelin türevini alarak,

$$F_z = e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{keqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx -\frac{keq}{R^3} z.$$

Böylece

$$\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}.$$

Geri çağırıcı kuvvet $z = 0$ 'a doğru yönelmelidir. Bu nedenle, eksen doğrultusundaki salınımlar için

$$q > 0$$

olmalıdır.

A.4

Newton'un hareket denklemi şu hâli alır:

$$m\ddot{z} = -\frac{keq}{R^3} z.$$

$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ ile karşılaştırıldığında,

$$\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}.$$

B.1

Gözlem noktasını $(r, 0, 0)$ 'a yerleştirelim. Kutupsal açısı θ olan bir halka elemanının yükü

$$dq = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

ve bu noktaya uzaklığı

$$s = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$$

olur. Dolayısıyla, $\rho = r/R$ tanımıyla,

$$\Phi(r) = \frac{kq}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

ρ 'ya göre ikinci mertebeye kadar açılım yaparak,

$$(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho \cos \theta) + \frac{3}{8}(4\rho^2 \cos^2 \theta) \\ = 1 + \rho \cos \theta + \rho^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right).$$

Açısal ortalamalar şöyledir:

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

Dolayısıyla

$$\Phi(r) \approx \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

$q(\alpha + \beta r^2)$ ile karşılaştırıldığında,

$$\alpha = \frac{k}{R}, \quad \boxed{\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}}.$$

B.2

$\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ olsun. $r^2 = x^2 + y^2$ olduğundan,

$$\boxed{\mathbf{F}_\perp = e\nabla_\perp \Phi = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp}.$$

Kuvvetin halkanın düzleminde geri çağırıcı olması için gerek ve yeter koşul

$$\boxed{q < 0}.$$

Bu işaret için her enine koordinat bir harmonik osilatör denklemini sağlar. Dolayısıyla eksen doğrultusunda ve enine doğrultuda kararlılık, halka yükünün zıt işaretli olmasını gerektirir.

C.1

Elektronun etkin bölgede geçirdiği süre

$$T = \frac{d}{v}$$

olur. $d \ll R$ olduğundan, buradaki enine kuvvet B.2 kullanılarak hesaplanabilir. Ayrıca $f \gg d$ koşulu, etkileşim sırasında enine konumun değişimini ihmal etmemize olanak verir.

Enine uzaklığı r olan bir gelen elektron için enine itme

$$m\Delta v_r = F_r T = 2e\beta q r \frac{d}{v}.$$

Gelen elektronun enine hızı sıfırdır, dolayısıyla odaklama sağlayan $q < 0$ seçimi için

$$v_{r,\text{out}} = \frac{2e\beta q r d}{mv} < 0$$

olur.

Elektron etkin bölgeden çıktıktan sonra bir doğru boyunca hareket eder. İnce mercek yaklaşımının doğruluğu içinde, eksene ulaşıncaya kadar eksen doğrultusunda aldığı yol

$$f = -\frac{vr}{v_{r,\text{out}}}.$$

Bunun sonucunda,

$$f = -\frac{mv^2}{2e\beta qd} = -\frac{E}{e\beta qd} = \frac{E}{e\beta|q|d}.$$

r 'nin sadeleşmesi, eksene yeterince yakın tüm paralel ışınların aynı odak uzaklığına sahip olduğunu gösterir.

C.2

b uzaklığındaki bir kaynaktan $\gamma \ll 1$ açısıyla yayılan elektron, merceğe şu enine uzaklıkta ulaşır:

$$r \approx b\gamma.$$

Girişteki enine hızı şu bağıntıyı sağlar:

$$\frac{v_{r,\text{in}}}{v} \approx \gamma \approx \frac{r}{b}.$$

Mercek, C.1'dekiyle aynı enine hız değişimini oluşturur. Böylece

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = \frac{r}{b} + \frac{2e\beta qrd}{mv^2} = r \left(\frac{1}{b} + \frac{e\beta qd}{E} \right).$$

Çıkış yörüngesinin ekseni halkanın ilerisinde c uzaklıkta kesmesi için,

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = -\frac{r}{c}.$$

Buradan

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{b} - \frac{e\beta qd}{E} = \frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b}.$$

Dolayısıyla

$$c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$$

Verilen $b > f$ koşulu, $c > 0$ olmasını sağlar.

C.3

Az önce elde edilen sonucu kullanarak,

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \left(\frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b} \right) = \frac{e\beta|q|d}{E}.$$

C.1'e göre bu, $1/f$ 'ye eşittir; dolayısıyla

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}.$$

Böylece ince optik mercek denklemi, belirtilen yaklaşımlar çerçevesinde sağlanır.

D.1

Yalıtılmış halkanın sığası

$$C = \frac{q}{\Phi_s},$$

burada Φ_s , sonsuza göre yüzey potansiyelidir.

İnce bir torus için birim uzunluk başına yükü tanımlayalım:

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

Şu koşulu sağlayan bir ara uzunluk ℓ seçelim:

$$a \ll \ell \ll R.$$

Yüzey potansiyelini, halkanın yakındaki yaklaşık düz kısmıyla uzaktaki eğri kısmının katkılarını birleştirerek hesaplarız.

İletken, yerel olarak yarıçapı a olan bir silindire benzer. Dışındaki potansiyel, istenen doğruluk düzeyinde, eksenine üzerine yerleştirilmiş bir yükü temsil edilebilir. Dolayısıyla $-\ell < s < \ell$ parçasının katkısı

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{near}} &\approx k\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} \\ &= 2k\lambda \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right) \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{2\ell}{a}.\end{aligned}$$

Uzaktaki kısım için kalınlık ihmal edilebilir. Şöyle tanımlayalım:

$$\delta = \frac{\ell}{R} \ll 1.$$

Halka üzerinde aralarında θ açısı bulunan iki nokta arasındaki uzaklık $2R \sin(\theta/2)$ 'dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{far}} &\approx k\lambda \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{R d\theta}{2R \sin(\theta/2)} \\ &= k\lambda \int_{\delta/2}^{\pi-\delta/2} \frac{du}{\sin u} \\ &= 2k\lambda \ln \cot \frac{\delta}{4} \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{4R}{\ell}.\end{aligned}$$

Katkılar toplandığında keyfî ara uzunluk ortadan kalkar:

$$\begin{aligned}\Phi_s &\approx 2k\lambda \left(\ln \frac{2\ell}{a} + \ln \frac{4R}{\ell} \right) \\ &= 2k\lambda \ln \frac{8R}{a} \\ &= \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \ln \frac{8R}{a}.\end{aligned}$$

Böylece

$$C \approx \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$$

Sonlu a yarıçapı, yüzey potansiyelini sonlu kılan kısa uzaklık alt sınırını sağlar.

D.2

Elektronlar etkin bölgeye şu anlarda girer ve bölgeden çıkar:

$$t_- = -\frac{T}{2}, \quad t_+ = \frac{T}{2}, \quad T = \frac{d}{v}.$$

Halka başlangıçta nötrdür. Şu tanımları yapalım:

$$\tau = R_0 C, \quad Q = CV_0 < 0.$$

Kaynağa bağlıken devre denklemi

$$R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0,$$

ya da

$$\tau \dot{q} + q = Q.$$

$q(t_-) = 0$ koşuluyla,

$$q(t) = Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], \quad -T/2 \leq t \leq T/2.$$

Halka topraklandığında,

$$\tau \dot{q} + q = 0.$$

Anahtarlama anında yük sürekli; dolayısıyla

$$q(t) = q_0 e^{-(t-T/2)/\tau}, \quad t > T/2,$$

burada

$$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) = CV_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{d}{vR_0 C} \right) \right].$$

Zaman aralıklarını birleştirerek,

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ Q(1 - e^{-T/\tau}) e^{-(t-T/2)/\tau}, & t > T/2. \end{cases}$$

İstenen şematik grafik için, yüklenme başladıktan sonra $q(t)$ 'yi zaman ekseninin altında çiziniz.

Başlangıçta sıfırdır; yüklenme sırasında sürekli olarak ve giderek azalan bir diklikle düşer, $t = T/2$ 'de en negatif değerine ulaşır ve ardından sıfıra doğru üstel olarak yükselir. Her iki anahtarlama anında da eğimi süresiz biçimde değişirken $q(t)$ sürekli kalır.

Yararlı noktalar şunlardır:

Zaman	Yük
$-T/2$	0
0	$Q(1 - e^{-T/(2\tau)})$
$T/2$	$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau})$
$T/2 + \tau$	$q_0 \exp(-1)$
$t \rightarrow +\infty$	0, aşağıdan yaklaşılr

Dolayısıyla $|q(t)|$, elektronlar etkin bölgeden çıkarken en büyüktür.

E.1

Burada τ ile $T = d/v$ karşılaştırılabilir büyüklüktedir. Bu nedenle yüklenme ve boşalmanın kayda değer kısmı, elektronlar halkadan boyuna doğrultuda d mertebesinde bir uzaklık içinde kalırken gerçekleşir. $d \ll R$ olduğundan, B.2'deki enine kuvvet ifadesi geçerliliğini korur:

$$F_r(t) \approx 2e\beta q(t)r.$$

Ayrıca $f/v \gg \tau$ koşulu, odaklamanın yük büyük ölçüde azaldıktan çok sonra gerçekleştiği anlamına gelir. Kuvvet darbesi sırasında enine yer değiştirme r 'ye göre küçüktür; bu nedenle itme hesaplanırken r sabit tutulabilir:

$$m\Delta v_r = 2e\beta r \int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt.$$

Yüklenmenin katkısı

$$\begin{aligned} I_{\text{ch}} &= Q \int_{-T/2}^{T/2} \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right] dt \\ &= Q \left[T - \tau(1 - e^{-T/\tau}) \right]. \end{aligned}$$

Boşalmanın katkısı

$$\begin{aligned} I_{\text{dis}} &= q_0 \int_{T/2}^{\infty} e^{-(t-T/2)/\tau} dt \\ &= q_0 \tau = Q\tau(1 - e^{-T/\tau}). \end{aligned}$$

Toplamları

$$\boxed{\int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt = QT = CV_0 \frac{d}{v}}.$$

Bunun sonucunda,

$$\Delta v_r = \frac{2e\beta r Q d}{mv}.$$

C.1'dekiyle aynı ince mercek geometrisini kullanarak,

$$\boxed{f = -\frac{vr}{\Delta v_r} = -\frac{mv^2}{2e\beta CV_0 d} = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}}.$$

Direnç, yük darbesinin biçimini ve süresini değiştirir; ancak toplam itmeye yaptığı katkılar yüklenme ve boşalma arasında birbirini götürür. Etkileşimin sonlu bir bölgeye yayılması, varsayılan ince mercek doğruluğunun ötesinde düzeltmeler doğurur.

E.2

Şu ifadeleri karşılaştırarak,

$$f = -\frac{E}{e\beta qd} \quad \text{ve} \quad f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d},$$

şunu elde ederiz:

$$\boxed{q_{\text{eff}} = CV_0}.$$

Eşdeğer olarak, D.2'yi kullanarak,

$$q_{\text{eff}} = \frac{q_0}{1 - \exp[-d/(vR_0C)]}.$$

Bu etkin yük, halkanın uygulanan gerilimde süresiz olarak tutulması durumunda ulaşacağı yüke eşittir. Boşalma kuyruğu da odaklamaya katkıda bulunduğu için büyüklüğü, gerçekte ulaşılan en büyük yük büyüklüğünü aşar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Parçacıklar ve Dalgalar

Her parçacığın bir dalga olarak ve her dalganın bir parçacık olarak betimlenebileceğini ifade eden dalga-parçacık ikiliği, kuantum mekaniğinin temel kavramlarından biridir. Bu soruda, mikro dünyanın iki farklı parçacık türünü —fermionları ve bozonları— kapsayan çeşitli kuantum olaylarını incelemek için bu kavrama ve yalnızca birkaç başka temele dayanacağız.

Bölüm A. Kutudaki kuantum parçacığı (1.4 puan)

Potansiyel enerjisi $V(x)$ aşağıdaki gibi verilen bir boyutlu potansiyel kuyusunda hareket eden, kütlesi m olan bir parçacık düşünün:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ veya } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Klasik bir parçacık böyle bir potansiyelde herhangi bir kinetik enerjiyle hareket edebilirken, kuantum parçacığı için yalnızca belirli pozitif, kesikli enerji düzeylerine izin verilir. İzin verilen bu durumların her birinde parçacık, duvarlarda düğümleri bulunan bir duran de Broglie dalgası olarak betimlenebilir.

A.1 — 0.4 puan

Kuyudaki kuantum parçacığının mümkün olan en düşük enerjisini $E_{\min}$ belirleyin. Cevabınızı m , L ve Planck sabiti $\hbar$ cinsinden ifade edin.

Parçacığın mümkün olan en düşük enerjiye sahip durumuna temel durum, izin verilen diğer tüm durumlarına ise uyarılmış durumlar denir. Mümkün olan tüm enerji değerlerini artan sırada sıralayalım ve temel durum için E_1 'den başlayarak bunları E_n ile gösterelim.

A.2 — 0.6 puan

E_n enerjisinin genel ifadesini bulun (burada $n = 1, 2, 3, \dots$).

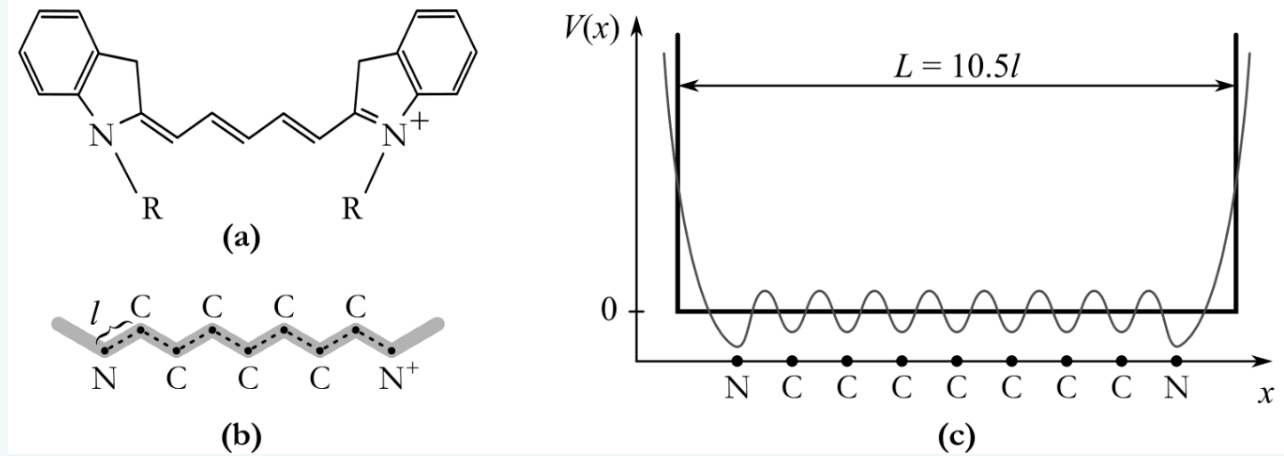
A.3 — 0.4 puan

Parçacık bir durumdan diğerine ancak ilgili enerji farkına eşit enerjili bir foton yayarak veya soğurarak anlık geçiş yapabilir. Parçacığın birinci uyarılmış durumdan (E_2) temel duruma (E_1) geçişi sırasında yayılan fotonun dalga boyunu λ_{21} bulun.

Bölüm B. Moleküllerin optik özellikleri (2.1 puan)

Bu bölümde, yaygın olarak kullanılan ve Şekil 1a'da şematik olarak gösterilen bir boya molekülü olan siyanin Cy5 molekülünün çeşitli optik özelliklerini inceleyeceğiz. Molekülün optik özelliklerini esas olarak, karbon atomları arasındaki tekli ve çiftli bağların dönüşümlü olarak sıralanmasıyla

oluşan ve Şekil 1b'de gösterilen karbon omurgası belirler; molekülün uçlarındaki halkaların ve R radikallerinin etkisi ise çok daha küçüktür. Omurgadaki her C atomunun (ve N atomlarının) dört değerlik elektronundan üçü kimyasal bağları oluştururken, geriye kalan değerlik elektronları "ortaklaşa kullanılır" ve tüm omurga boyunca hareket edebilir. Bu elektronların her birinin net potansiyel enerjisi Şekil 1c'de salınımlı ince çizgiyle gösterilmiştir; minimumlar C ve N atomlarının konumlarına karşılık gelir.



Şekil 1. (a) Siyanin Cy5 molekülünün kimyasal yapısı (basitlik amacıyla hidrojen atomları gösterilmemiştir ve R bazı radikalleri belirtir). (b) Ortalama atomlar arası uzaklığı l olan Cy5 molekülünün omurgası. (c) Elektronun omurga boyunca potansiyel enerjisi (ince çizgi) ve Denklem 1'de verilen basamak fonksiyonuyla yapılan yaklaşıması (kalın çizgi).

Basitlik amacıyla bu potansiyel enerji profilini, Denklem 1'de verilen ve genişliği $L = 10.5l$ olan basit fonksiyonla yaklaşık olarak temsil edeceğiz (Şekil 1c'deki kalın çizgiye bakınız); burada $l = 140$ pm ortalama atomlar arası uzaklıktır (ayrıca Şekil 1b'ye bakınız). Sonuç olarak, bölüm A'da ele alınan bir boyutlu potansiyel kuyusunda hareket eden 10 elektrondan (C atomlarından 7, N atomundan 2 ve N^+ iyonundan 1 elektron) oluşan bir "elektron gazı" elde ederiz. Hesaplamamızda bu elektronların birbirleriyle etkileşimini ihmal edebiliriz; ancak elektronların fermiyon olduğunu ve dolayısıyla Pauli dışarlama ilkesine uyduğunu hesaba katmalıyız. Diğer elektronların etkisini ve çekirdeklerin hareketini de ihmal ediyoruz.

B.1 — 0.8 puan

Elektron sisteminin başlangıçta temel durumda olduğunu varsayarak, Cy5 molekülünün soğurabileceği fotonun en büyük dalga boyunu λ hesaplayın. Cevabınızı l , fiziksel sabitler ve bir sayısal çarpan cinsinden ifade edin ve sayısal değerini hesaplayın.

B.2 — 0.4 puan

Bir başka boya molekülü olan Cy3 benzer bir yapıya sahiptir, ancak omurgası 2 karbon atomu daha kısadır. Cy5 molekülüne kıyasla soğurma spektrumu, spektrumun daha mavi bölgesine mi yoksa daha kırmızı bölgesine mi kaymıştır? Bu spektral kaymanın büyüklüğünü $\Delta\lambda$ sayısal olarak hesaplayın. İki karbon atomunun çıkarılmasının molekülün şeklini değiştirmedikçe ve yalnızca omurganın uzunluğunu iki atomlar arası uzaklık kadar kısalttığını varsayabilirsiniz.

Uyarılmış durumdaki bir molekül, foton yayarak temel duruma kendiliğinden geçiş yapabilir. Bu olayların ortalama hızı K (yani uyarılmış durumdaki moleküllerin sayısının dt süresindeki bağıl azalması, dN/N , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$), yayılan fotonun dalga boyu λ , geçiş elektrik dipol momentini d (

$d \simeq el$ mertebesinde; burada e temel yüküdür), boşluğun elektriksel geçirgenliği ϵ_0 ve Planck sabiti h tarafından belirlenir.

B.3 — 0.7 puan

Boyut analizini kullanarak kendiliğinden yayım hızının ϵ_0 , h , λ ve d cinsinden ifadesini belirleyin. İfadenizin sayısal çarpanı $= \frac{16}{3}\pi^3$ 'tür.

B.4 — 0.2 puan

Cy5 molekülü için $d \approx 2.4 el$ 'dir. Cy5 molekülünün en düşük uyarılmış durumunun ortalama floresans ömrünü, τ_{Cy5} , hesaplayın; bu süre, temel duruma ışınlı geçiş hızının tersidir.

Bölüm C. Bose-Einstein yoğunlaşması (1.5 puan)

Bu bölüm, Bölüm A ve B ile doğrudan ilişkili değildir. Burada bozonik parçacıkların kolektif davranışını inceleyeceğiz. Bozonlar Pauli dışarlama ilkesine uymaz ve düşük sıcaklıklarda ya da yüksek yoğunluklarda Bose-Einstein yoğunlaşması (BEC) olarak bilinen çarpıcı bir olay yaşar. Bu, ilgi çekici bir kolektif kuantum durumuna faz geçişidir: çok sayıda özdeş parçacık tek bir kuantum durumunda 'yoğunlaşır' ve tek bir dalga gibi davranmaya başlar. Bu geçişe genellikle sabit sayıda parçacığın kritik sıcaklığın altına soğutulmasıyla ulaşılır. İlke olarak sıcaklık sabit tutularak ve parçacık yoğunluğu kritik değerinin üzerine çıkarılarak da geçiş sağlanabilir.

Geçişteki sıcaklık ile parçacık yoğunluğu arasındaki ilişkiyi inceleyerek başlayacağız. Görüleceği üzere, bunların kritik değerleri basit bir gözlemden hareketle kestirilebilir: *Bose-Einstein yoğunlaşması, parçacıkların hız kareleri ortalamasına karşılık gelen de Broglie dalga boyu, gazdaki parçacıklar arasındaki karakteristik uzaklığa eşit olduğunda gerçekleşir.*

C.1 — 0.4 puan

Isıl dengede bulunan, etkileşmeyen ^{87}Rb atomlarından oluşan bir gaz için, atomların tipik doğrusal momentumunun p ve tipik de Broglie dalga boyunun λ_{dB} ifadelerini atomun kütlesi m , sıcaklık T ve fiziksel sabitlerin fonksiyonu olarak yazın.

C.2 — 0.5 puan

Gazdaki parçacıklar arasındaki tipik uzaklığı, ℓ , parçacık yoğunluğu n 'nin fonksiyonu olarak hesaplayın. Buradan kritik sıcaklığı T_c , atomların kütlesi, yoğunluğu ve fiziksel sabitlerin fonksiyonu olarak elde edin.

Laboratuvarda BEC elde etmek için deneyçilerin gazları $T_c = 100 \text{ nK}$ kadar düşük sıcaklıklara soğutmaları gerekir.

C.3 — 0.6 puan

Geçiş böyle bir sıcaklıkta gerçekleşiyorsa Rb gazının parçacık yoğunluğu n_c nedir? Karşılaştırma amacıyla, standart sıcaklık ve basınçta (STP), yani $T_0 = 300 \text{ K}$ ve $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ koşullarında bir ideal gazın 'olağan' parçacık yoğunluğunu n_0 da hesaplayın. 'Olağan' gaz kaç kat daha yoğundur? Atomların kütlelerinin 87 atomik kütle birimine (m_{amu}) eşit olduğunu varsayabilirsiniz.

Bölüm D. Üç demetli optik örgüler (5 puan)

İlk Bose-Einstein yoğunlukları 1995 yılında üretildi ve o zamandan bu yana deneysel çalışmalar farklı yönere yayıldı. Bu bölümde, yoğunluğun birkaç eşevrelili lazer demetinin girişimiyle oluşturulan, uzayda periyodik potansiyellere yüklenmesi şeklindeki özellikle verimli bir fikir

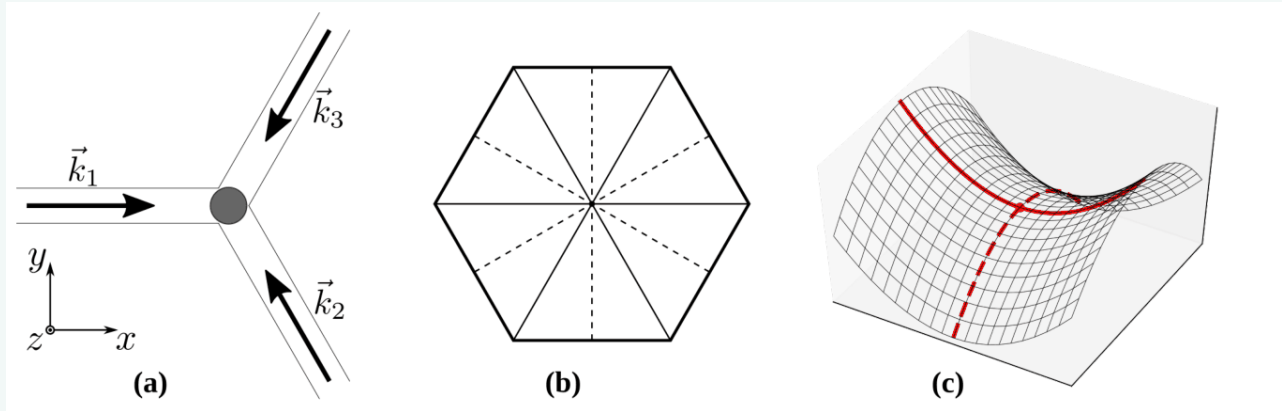
inceleyeceksiniz. Ortaya çıkan girişim desenlerinin periyodik yapısı nedeniyle bunlara *optik örgüler* denir. Optik örgüde hareket eden bir atomun potansiyel enerjisi $V(\vec{r})$, ışığın yerel şiddetiyle orantılıdır ve hesaplamalarınızda aşağıdaki ifadeyi varsayabilirsiniz:

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

Burada α pozitif bir sabittir ve açılı parantezler, hızla salınan terimleri ortadan kaldıran zaman ortalamasını belirtir. i . lazerin oluşturduğu elektrik alan şu şekilde betimlenir:

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

burada $E_{0,i}$ genlik, $\vec{k}_i$ dalga vektörü ve $\vec{e}_i$ birim uzunluklu kutuplanma vektörüdür.



Şekil 2. (a) Üç demetli optik örgü: dalga vektörleri $\vec{k}_{1,2,3}$ olan üç düzlem dalga, gri daireyle belirtilen bölgede kesişir ve girişim yapar. (b) Düzgün altıgenin simetrisi: düz ve kesikli çizgiler iki simetri eksenini gösterir. (c) Eyer noktası: bir yüzey üzerinde, birbirine dik yönlere eğimlerin tümünün sıfır olduğu, ancak çizilen fonksiyonun yerel ekstremumu olmayan bir nokta. Düz çizgiyle işaretlenmiş yol boyunca ilerlerken görünürde bir minimumla karşılaşılır. Gerçek bir minimumu bir eyer noktasından (gösterilen) ayırt etmek için dik yönde (kesikli çizgi) ek bir inceleme gerekir.

Göreviniz, eşit şiddette üç eşevrelî lazer demetinin girişimiyle oluşturulan *üçgensel optik örgüleri* incelemektir. Tipik bir düzenek Şekil 2a'da gösterilmiştir. Burada üç demetin tümü z yönünde kutuplanmıştır, xy düzleminde yayılır ve eşit 120° açılarla kesişir. x ekseninin yönünü $\vec{k}_1$ dalga vektörüne paralel seçin.

D.1 — 1.4 puan

Denklem 2 ve 3'ü kullanarak demetlerin düzlemindeki potansiyel enerjinin $V(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$ 'nin fonksiyonu olarak ifadesini elde edin.

İpucu: Sonuç, sabit bir terim ile argümanları $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$ olan üç kosinüs fonksiyonunun toplamı olarak sade bir biçimde ifade edilebilir. Lütfen sonucunuzu bu biçimde yazın ve $\vec{b}_i$ vektörlerini belirleyin.

D.2 — 0.5 puan

Ortaya çıkan potansiyel enerjinin altı katlı dönme simetrisi eksenli vardır; yani potansiyel dağılımı, orijin etrafında 60° 'nin bir katı kadar döndürüldüğünde değişmez. Bunun gerçekten böyle olduğunu kanıtlayan basit bir gerekçe sunun.

Yukarıdaki simetri gözlemi, iki boyutlu potansiyel dağılımının $V(\vec{r})$ incelenmesini kolaylaştırır. Şekil 2b'de gösterildiği gibi düzgün bir altıgenin, sırasıyla karşılıklı köşeleri (düz çizgiler) ve karşılıklı kenarların orta noktalarını (kesikli çizgiler) birleştiren simetri doğruları vardır. Bu nedenle, bizim durumumuzda iki boyutlu potansiyel grafikleri çizip incelemek gerekmez; çünkü simetri doğruları boyunca uzanan x ve y koordinat eksenlerine odaklanarak birçok sonuca ulaşılabilir.

D.3 — 1.2 puan

Potansiyelin $V(\vec{r})$ koordinat eksenleri boyunca davranışını türetin; yani $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ ve $V_Y(y) \equiv V(0, y)$ fonksiyonlarını belirleyin. Tek değişkenli fonksiyonlar olarak $V_X(x)$ ve $V_Y(y)$ 'nin ekstremumlarının konumlarını belirleyin. Bu fonksiyonlar periyodik olduğundan, lütfen listelerinize periyodik olarak tekrarlanan minimum ve maksimum ailelerinin her birinden yalnızca bir temsilci ekleyin.

Örgü noktaları olarak adlandırılan noktaların, yani tam iki boyutlu potansiyelin $V(\vec{r})$ minimumlarının konumlarını belirlemek istiyoruz. Tek değişkenli V_X ve V_Y fonksiyonları için elde edilen minimumlar, bunların olası konumlarını gösterir; ancak eyer noktalarını elemek için yine de kontrol edilmeleri gerekir. Şekil 2c'de gösterildiği gibi eyer noktaları, tek bir doğru boyunca incelendiğinde minimum gibi görünebilir, ancak minimum değildir.

D.4 — 0.8 puan

Optik örgünün gerçek minimumlarını belirlemek için önceki sorudaki sonuçlarınızı gözden geçirin: Orijine en yakın olan (ancak orijinle çakışmayan) tüm eşdeğer minimumları belirleyin. En yakın minimumlar arasındaki uzaklık a , başka bir deyişle optik örgümüzün örgü sabiti nedir? Cevabınızı lazerin dalga boyu λ_{las} cinsinden ifade edin.

Aşırı soğuk atomların elektriksel olarak nötr olması, etkileşimlerinin yalnızca iki veya daha fazla atomun optik örgünün aynı noktasını işgal etmesi durumunda önem kazandığını düşündürür. Bununla birlikte deneyçiler, uzun menzilli atomik etkileşimlere olanak veren düzenekleri de inceleyebilir. Olası bir yaklaşım, fiziksel olarak büyük olan ve diğer bazı özellikleri de olağandışı ölçüde büyük olan *Rydberg atomları* denilen atomların oluşturulmasına dayanır. Rydberg atomları, bir elektronu çok yüksek bir baş kuantum sayısına n sahip bir duruma çıkarılmış uyarılmış atomlardır. Bir Rydberg atomunun boyutu, yörüngesel açısal momentumu $n\hbar$ olan bu elektronun klasik dairesel yörüngesinin yarıçapı hesaplanarak kestirilebilir; burada $\hbar$ indirgenmiş Planck sabitidir.

D.5 — 1.1 puan

Rb Rydberg atomunun yarıçapının lazer ışığının dalga boyuyla $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ karşılaştırılabilir olmasına karşılık gelen n değerini hesaplayın. Cevabınızı λ_{las} ve fiziksel sabitler cinsinden verin ve sayısal değerini bulun.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada m_e elektron kütesini belirtir. Bölüm D için ortak alan genliğini E_0 , $U = \alpha E_0^2 > 0$ ve aşağıdaki büyüklükleri tanımlayalım:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{las}}}, \quad P_X = \frac{4\pi}{3k}, \quad P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}.$$

- **A.1:** $E_{\min} = \frac{h^2}{8mL^2}.$
- **A.2:** $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, n = 1, 2, 3, \dots$
- **A.3:** $\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$
- **B.1:** $\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 648 \text{ nm}.$
- **B.2: Maviye kayma:** $\lambda_{\text{Cy3}} \simeq 519 \text{ nm}$ ve $\Delta\lambda = \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 129 \text{ nm}.$
- **B.3:** $K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}.$
- **B.4:** $\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ eV})^2} \simeq 3.3 \text{ ns}.$
- **C.1:** $p = \sqrt{3mk_B T}, \lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$
- **C.2:** Belirtilen geçiş kestirimi kapsamında $\ell = n^{-1/3}, T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}.$
- **C.3:** $n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}, n_0 \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3};$ olağan gaz 1.52×10^7 kat daha yoğundur.
- **D.1:** $V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{b}_i \cdot \vec{r}) \right];$ burada $\vec{b}_1 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \vec{b}_2 = k(0, \sqrt{3})$ ve $\vec{b}_3 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$
- **D.2:** Altı vektör $\{\pm\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2, \pm\vec{b}_3\}$ düzgün bir altıgen oluşturur. 60° 'lik bir dönme bunların yerlerini değiştirir ve kosinüs çift fonksiyondur; dolayısıyla V değişmez.
- **D.3:** $V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right]$ ve $V_Y(y) = -\frac{U}{2} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) \right]^2.$ P_X modülüne göre x kesitin 0'da bir minimumu ve $P_X/2$ 'de bir maksimumu vardır. P_Y modülüne göre y kesitin 0, $P_Y/2$ 'de minimumları ve $P_Y/3, 2P_Y/3$ 'te maksimumları vardır.
- **D.4:** $a = \frac{2}{3} \lambda_{\text{las}}.$ En yakın altı minimum $(\pm a, 0)$ ve $(\pm a/2, \pm\sqrt{3}a/2)$ noktalarıdır; son koordinat çiftindeki işaretler birbirinden bağımsızdır.
- **D.5:** $n = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}} \simeq 84.7;$ bu, $n \approx 85$ 'e karşılık gelir.

Çözüm

Sayısal hesaplamalarda şu değerler kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
h &= 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\
m_e &\simeq 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\
\varepsilon_0 &\simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, & k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\
m_{\text{amu}} &\simeq 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}.
\end{aligned}$$

A.1

Dalganın her duvarda bir düğümü olmalıdır. Kuyuya sığan, özdeş olarak sıfır olmayan en uzun dalga boylu duran dalganın yarım dalga boyu, kuyunun genişliğine eşittir:

$$L = \frac{\lambda_{\text{dB},1}}{2}.$$

Dolayısıyla de Broglie bağıntısı şu sonucu verir:

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_{\text{dB},1}} = \frac{h}{2L}.$$

Kuyu içinde potansiyel enerji sıfır olduğundan, göreceli olmayan kinetik enerji ifadesi kullanılarak

$$E_{\text{min}} = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}$$

elde edilir. Dalga sayısı sıfır olan bir durum, dalga özdeş olarak sıfır olmadıkça her iki sınır koşulunu da sağlayamaz; dolayısıyla izin verilen bir parçacık durumu değildir.

A.2

n . duran dalga modunda duvarların arasına n yarım dalga boyu sığar:

$$L = n \frac{\lambda_{\text{dB},n}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bunun sonucunda

$$\lambda_{\text{dB},n} = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{nh}{2L},$$

ve

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

elde edilir.

A.3

Enerjinin korunumu gereği yayılan fotonun enerjisi, parçacığın enerjisindeki azalmaya eşittir:

$$\frac{hc}{\lambda_{21}} = E_2 - E_1 = \frac{(4 - 1)h^2}{8mL^2}.$$

Buradan

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}$$

bulunur.

B.1

Her uzaysal enerji düzeyinde zıt spinli iki elektron bulunabilir. Dolayısıyla on elektronlu sistemin temel durumunda $n = 1, \dots, 5$ düzeyleri, her düzeyde iki elektron olacak şekilde doludur.

Mümkün olan en küçük uyarılma, bir elektronu $n = 5$ düzeyinden ilk boş düzey olan $n = 6$ 'ya çıkarır. Bu uyarılmanın enerjisi

$$\Delta E_{\text{Cy}5} = E_6 - E_5 = \frac{(6^2 - 5^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{11h^2}{8m_e L^2}$$

şeklindedir. Soğurulan en küçük foton enerjisi en büyük dalga boyuna karşılık gelir:

$$\lambda_{\text{Cy}5} = \frac{hc}{\Delta E_{\text{Cy}5}} = \frac{8m_e c L^2}{11h}.$$

$L = 10.5l$ kullanıldığında

$$\lambda_{\text{Cy}5} = \frac{8(10.5)^2}{11} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h}$$

elde edilir. $l = 140 \times 10^{-12}$ m yerine konulduğunda

$$\lambda_{\text{Cy}5} \simeq 6.48 \times 10^{-7} \text{ m} = 648 \text{ nm}$$

bulunur.

B.2

İki karbon atomunun çıkarılması, ortaklaşa kullanılan iki elektronu ortadan kaldırır ve kuyuyu $2l$ kadar kısaltır. Dolayısıyla Cy3'ün sekiz elektronu vardır ve

$$L_{\text{Cy}3} = 8.5l.$$

Temel durumda $n = 1, \dots, 4$ düzeyleri doludur. En düşük uyarılma $4 \rightarrow 5$ geçiştir; dolayısıyla

$$\Delta E_{\text{Cy}3} = \frac{(5^2 - 4^2)h^2}{8m_e (8.5l)^2} = \frac{9h^2}{8m_e (8.5l)^2}.$$

Böylece

$$\lambda_{\text{Cy}3} = \frac{8(8.5)^2}{9} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{578}{9} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 519 \text{ nm}.$$

Bu, Cy5'in dalga boyundan daha kısadır; dolayısıyla kayma **maviye** doğrudur. Kaymanın büyüklüğü

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= \lambda_{\text{Cy}5} - \lambda_{\text{Cy}3} \\ &= \left(\frac{882}{11} - \frac{578}{9} \right) \frac{m_e c l^2}{h} \\ &= \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h}. \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\Delta \lambda \simeq 1.29 \times 10^{-7} \text{ m} = 129 \text{ nm}.$$

B.3

Dipol momentinin boyutu yük ile uzunluğun çarpımıdır:

$$[d] = C \text{ m}.$$

$$[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{J\,m},$$

olduğundan

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0} \right] = J\,m^3$$

elde edilir. Boyutu $J\,s$ olan $\hbar$ 'ye ve λ^3 'e bölmek, gereken ters zaman boyutunu verir:

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar \lambda^3} \right] = s^{-1}.$$

Verilen boyutsuz çarpan kullanılarak

$$K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 \hbar \lambda^3}$$

bulunur.

Burada K pozitif bozunma hızıdır. Uyarılmış durumda kalan moleküllerin sayısı $N(t)$ için bozunma denklemi $dN/dt = -KN$ 'dir; soru metnindeki "bağlı azalma" pozitif kayıp olarak yorumlanır.

B.4

Verilen modele göre, en düşük uyarılmış durum temel duruma dönerken dalga boyu λ_{Cy5} olan bir foton yayar. Dipol momenti

$$d = 2.4\,e\ell \simeq 5.38 \times 10^{-29}\,C\,m$$

şeklindedir. Kendiliğinden yayım hızı

$$K = \frac{16\pi^3 (2.4\,e\ell)^2}{3\varepsilon_0 \hbar \lambda_{\text{Cy5}}^3} \simeq 3.01 \times 10^8\,s^{-1}$$

olur. Üstel bozunmada ortalama ömür $1/K$ 'dir:

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 \hbar \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4\,e\ell)^2} \simeq 3.3\,ns.$$

C.1

Soruda belirtilen sıcaklık kestirimi için, eşbölüşüm ilkesi üç boyuttaki ortalama öteleme kinetik enerjisini verir:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T.$$

Dolayısıyla hızın karesinin ortalamasının kareköküne karşılık gelen tipik momentum

$$p = m\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3mk_B T}$$

olur. Bunun de Broglie dalga boyu

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

şeklindedir.

C.2

Sayı yoğunluğu n olduğunda parçacık başına ortalama hacim $1/n$ 'dir. Dolayısıyla karakteristik doğrusal uzaklık

$$\ell = n^{-1/3}$$

olur. Sorudaki geçiş ölçütü olan

$$\lambda_{\text{dB}}(T_c) = \ell,$$

uygulandığında

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T_c}} = n^{-1/3}$$

elde edilir. Karesi alınıp yeniden düzenlendiğinde

$$T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_{\text{B}}}$$

bulunur. Bu, belirtilen dalga boyu–uzaklık ölçütünden elde edilen kritik sıcaklık kestirimidir.

C.3

Rubidyum için

$$m = 87m_{\text{amu}} \simeq 1.44467 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad T_c = 100 \text{ nK} = 1.00 \times 10^{-7} \text{ K}.$$

C.2'nin sonucu yoğunluk için çözüldüğünde

$$n_c = \left(\frac{3mk_{\text{B}}T_c}{h^2} \right)^{3/2}$$

bulunur. Sayısal olarak

$$n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}.$$

Buna karşılık gelen uzaklık yaklaşık $8.57 \times 10^{-7} \text{ m}$ 'dir.

Olağan ideal gaz için ideal gaz yasası

$$p_0 = n_0 k_{\text{B}} T_0$$

sonucunu verir. Soruda belirtilen sıcaklık ve basınç kullanılarak

$$n_0 = \frac{10^5}{k_{\text{B}}(300)} \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{n_0}{n_c} \simeq 1.52 \times 10^7.$$

Olağan gaz yaklaşık on beş milyon kat daha yoğundur.

D.1

Üç alanın genliği de E_0 olsun. Dalga vektörlerini Şekil 2a ile uyumlu seçersek

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{k}_3 = k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

burada $k = 2\pi/\lambda_{\text{las}}$ 'tir.

Tüm kutuplanmalar z doğrultusunda olduğundan alanlar bu doğrultuda skaler olarak toplanır:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{z} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t).$$

Gerekli zaman ortalamaları

$$\langle \cos^2(\phi - \omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

ve

$$\langle \cos(\phi_i - \omega t) \cos(\phi_j - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2 \left[\frac{3}{2} + \sum_{i < j} \cos((\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}) \right].$$

Şu tanımları yapalım:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \vec{b}_2 &= \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = k(0, \sqrt{3}), \\ \vec{b}_3 &= \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

Kosinüs çift fonksiyon olduğundan her fark için seçilen işaret önemsizdir. $U = \alpha E_0^2$ ile

$$V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \cos(\vec{b}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_2 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_3 \cdot \vec{r}) \right]$$

elde edilir. Birinci ve üçüncü kosinüsün birleştirilmesi, koordinatlar cinsinden şu kullanışlı biçimi verir:

$$V(x, y) = -U \left[\frac{3}{2} + 2 \cos\left(\frac{3kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ky}{2}\right) + \cos(\sqrt{3}ky) \right].$$

D.2

Üç $\vec{b}_i$ vektörünün büyüklüğü $\sqrt{3}k$ 'ya eşittir ve aralarındaki açılar 120° 'dir. Negatifleri de dahil edildiğinde, ardışık açısız aralıkları 60° olan altı vektör elde edilir.

Konum vektörünü 60° döndürmek, her skaler çarpımda ilgili $\vec{b}_i$ 'yi -60° döndürmeye eşdeğerdir. Bu işlem her $\vec{b}_i$ 'yi $\{\pm \vec{b}_j\}$ kümesinin başka bir elemanına götürür.

$$\cos(-\vec{b}_j \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}),$$

olduğundan toplam değişmez. Dolayısıyla potansiyel, belirtilen altı katlı dönme simetrisine sahiptir.

D.3

$y = 0$ alınırsa

$$V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right].$$

Temel periyodu

$$P_X = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{3}$$

şeklindedir. Türevi

$$V'_X(x) = 3Uk \sin \left(\frac{3kx}{2} \right)$$

olur. $0 \leq x < P_X$ aralığında minimum $x = 0$ 'da, maksimum ise $x = P_X/2$ 'dedir.

y eksenini için

$$q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}$$

tanımını yapalım. O hâlde

$$V_Y(y) = -U \left(\frac{3}{2} + 2 \cos q + \cos 2q \right).$$

$\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$ kullanıldığında

$$V_Y(y) = -\frac{U}{2} (1 + 2 \cos q)^2$$

elde edilir. Temel periyodu

$$P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{\sqrt{3}}$$

şeklindedir. Türev alındığında

$$V'_Y(y) = \sqrt{3}Uk(1 + 2 \cos q) \sin q$$

bulunur. Dolayısıyla durağan noktalar ya $\sin q = 0$ ya da $\cos q = -1/2$ koşulunu sağlar.

Her ekstremum ailesinin bir temsilcisi şöyledir:

Kesit	Bir periyot içindeki koordinat	O eksen boyunca niteliği	Potansiyel
V_X	$x = 0$	Minimum	$-9U/2$
V_X	$x = P_X/2$	Maksimum	$-U/2$
V_Y	$y = 0$	Minimum	$-9U/2$
V_Y	$y = P_Y/3$	Maksimum	0
V_Y	$y = P_Y/2$	Minimum	$-U/2$
V_Y	$y = 2P_Y/3$	Maksimum	0

Böylece V_X , $-5U/2$ etrafında bir sinüzoidir. Bir periyot boyunca V_Y , derin bir minimumdan sıfıra yükselir, daha sık bir minimuma düşer, yeniden sıfıra yükselir ve bir sonraki periyot sınırında derin minimuma geri döner.

D.4

Önce

$$(x, y) = \left(0, \frac{P_Y}{2}\right)$$

noktasındaki görünürde siğ minimumu kontrol edelim. Burada tam potansiyelin ikinci türevleri

$$V_{xx} = -\frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{yy} = \frac{3}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0$$

şeklindedir. Eğrilikler zıt işaretli olduğundan bu nokta bir örgü noktası değil, bir **eyer noktasıdır**.

Orijinde

$$V_{xx} = V_{yy} = \frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0,$$

olduğundan orijin gerçek bir minimumdur.

Tüm gerçek minimumların yerlerini bulmak için

$$t = \frac{3kx}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}$$

yazalım. Durağanlık koşulları

$$\sin t \cos q = 0, \quad \sin q(\cos t + 2 \cos q) = 0$$

şeklindedir. $\cos q \neq 0$ ise x yönündeki durağanlık $\sin t = 0$ gerektirir. Bu durumda x yönünde pozitif eğrilik olması için

$$\cos t \cos q > 0.$$

olmalıdır. $\cos t$ ve $\cos q$ aynı işaretli olduğundan $\cos t + 2 \cos q$ sıfır olamaz. Dolayısıyla $\sin q = 0$ 'dır. Bu nedenle minimumlarda

$$t = \pi r, \quad q = \pi s,$$

olur; burada r, s tamsayıları aynı tek-çift özelliğine sahiptir. Geriye kalan durağanlık olasılığı olan $\cos q = 0$, ayrıca $\cos t = 0$ gerektirir; bu durumda Hess matrisinin determinantı negatiftir, dolayısıyla yalnızca eyer noktaları elde edilir.

$r = 2j + s$ yazılırsa örgü noktaları

$$\vec{r}_{j,s} = a \left(j + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right), \quad j, s \in \mathbb{Z},$$

şeklindedir; burada

$$a = \frac{4\pi}{3k}.$$

Bu noktalarda üç girişim kosinüsünün tümü 1'e eşittir ve

$$V_{\min} = -\frac{9}{2}U.$$

Orijinden uzaklığın karesi

$$|\vec{r}_{j,s}|^2 = a^2(j^2 + js + s^2)$$

şeklindedir. Sıfırdan farklı tamsayı çiftleri için pozitif tamsayı $j^2 + js + s^2$ 'nin en küçük değeri 1'dir. Bu değer altı noktada elde edilir:

$$(a, 0), (-a, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right).$$

Bu noktalar orijin etrafında düzgün bir altıgen oluşturur. Dolayısıyla

$$a = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{las}}.$$

D.5

Yüksek derecede uyarılmış bir dış elektron için çekirdek ve iç elektronlar, net yükü $+e$ olan bir merkez gibi davranır. Belirtilen klasik dairesel yörünge modelini kullanıyor, elektronun bu merkez bölgesine nüfuz etmesinden kaynaklanan etkileri ve çok daha ağır olan merkezin hareketini ihmal ediyoruz.

Coulomb çekimi merkezci kuvveti sağlar:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Verilen açısal momentum

$$m_e v r = n\hbar$$

şeklinde. v yok edildiğinde

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

böylece

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2,$$

elde edilir; burada

$$a_0 \simeq 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Kestirilen yarıçapı λ_{las} 'a eşit alırsak

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{las}}}{a_0}} = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}.$$

$\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ için

$$n = \sqrt{\frac{380 \times 10^{-9}}{5.292 \times 10^{-11}}} \simeq 84.7.$$

Dolayısıyla karşılık gelen tamsayı baş kuantum sayısı

$$n \approx 85$$

olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.