

IPhO 2021

Теоретические задачи и решения · Вильнюс, Литва (в онлайн-формате) · 3

теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2021/

Задача 1: Физика планет

Эта задача состоит из двух независимых задач, связанных с внутренним строением планет. Влиянием кривизны поверхности планет можно пренебречь. Вам может понадобиться формула

$$(1 + x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \quad \text{при } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Часть А. Срединно-океанический хребт (5.0 балла)

Рассмотрим большой сосуд с водой, находящийся в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения g . В сосуд установлены две параллельные друг другу вертикальные прямоугольные пластины так, что их вертикальные края плотно, без зазоров прилегают к вертикальным стенкам сосуда. Каждая пластина погружена в воду на длину h (рис. 1). Ширина пластин вдоль оси y равна w , плотность воды равна ρ_0 .

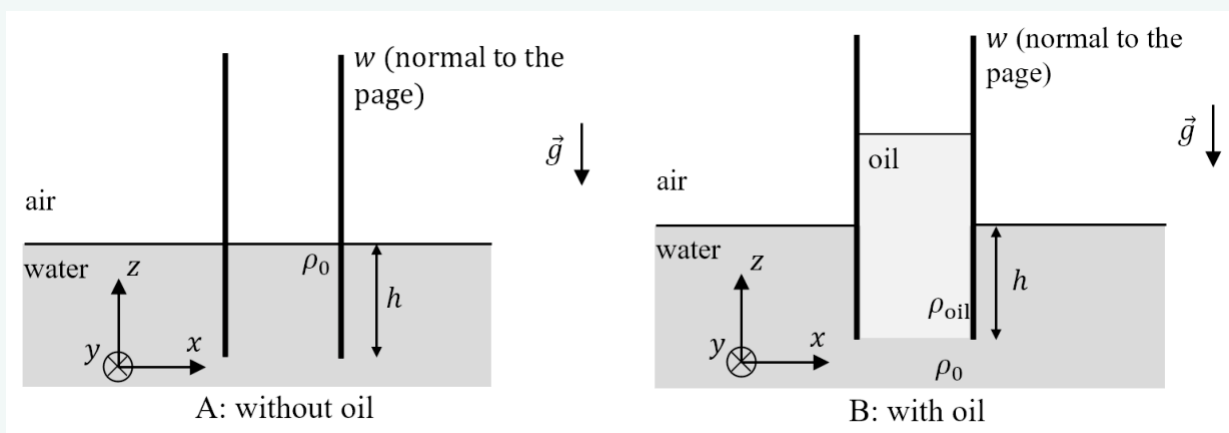


Рисунок 1. Параллельные пластины в воде.

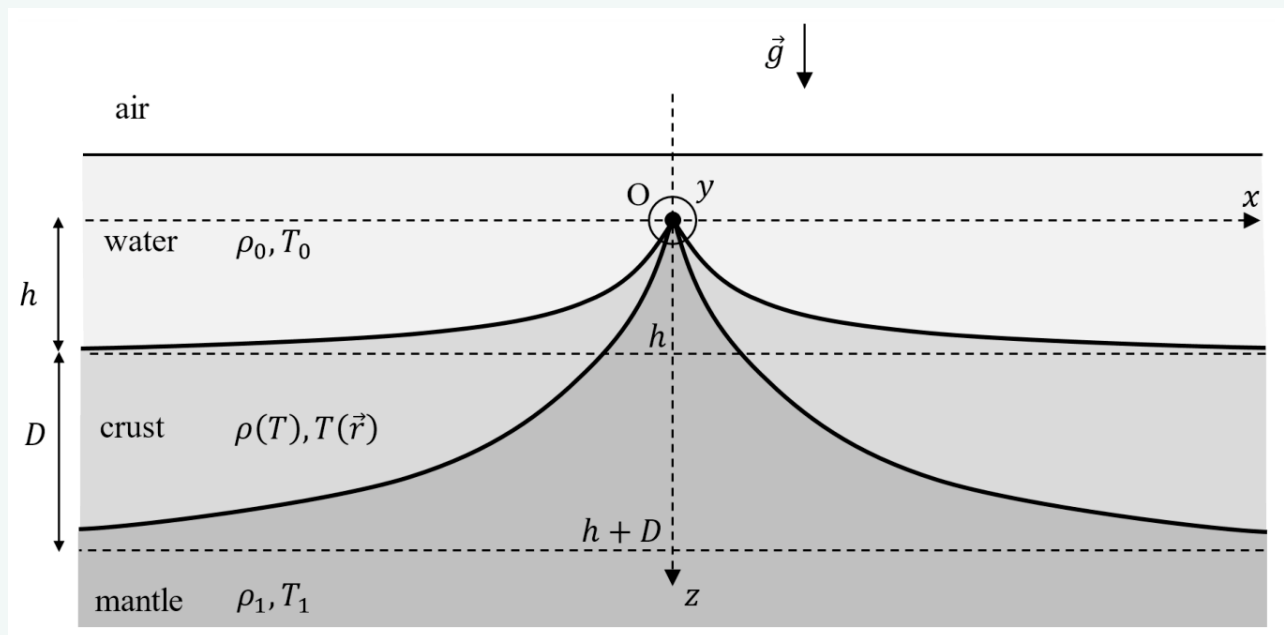
В пространство между пластинами наливают масло плотностью ρ_{oil} ($\rho_{\text{oil}} < \rho_0$) до тех пор, пока нижний уровень масла не достигнет нижних краёв пластин. Считайте, что пластины и стенки сосуда достаточно высоки, чтобы масло не переливалось через них. Поверхностным натяжением и смешиванием жидкостей можно пренебречь.

А.1 — 0.8 балла

Чему равна x -компонента равнодействующей силы F_x , действующей на правую пластину (укажите величину и направление)?

На рис. 2 показано поперечное сечение срединно-океанического хребта. Он состоит из расположенных друг над другом слоёв мантии, коры и океанской воды. Мантия состоит из горных пород, которые, как мы предполагаем, могут течь на геологических масштабах

Известно, что с высокой точностью материал коры расширяется линейно с температурой T . Поскольку температуры воды и мантии считаются постоянными, удобно использовать перенормированный коэффициент теплового расширения. Тогда $l(T) = l_1[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$, где l — длина образца материала коры, l_1 — его длина при температуре T_1 , а k_l — перенормированный коэффициент теплового расширения, который можно считать постоянным.



где члены порядка k_l^2 и выше отброшены. Затем определите постоянную k .

Известно, что $k > 0$. Кроме того, коэффициент теплопроводности коры k можно считать постоянным. Следовательно, на очень большом расстоянии от оси хребта температура коры линейно зависит от глубины.

А.3 — 1.1 балла

Считая мантию и воду несжимаемыми жидкостями, находящимися в гидростатическом равновесии, выразите толщину коры D вдали от хребта через h , ρ_0 , ρ_1 и k . Любым движением вещества можно пренебречь.

А.4 — 1.6 балла

Найдите в главном порядке по k результирующую горизонтальную силу F , действующую на правую половину ($x > 0$) коры, выразив её через ρ_0 , ρ_1 , h , L , k и g .

Предположим, что кора теплоизолирована от остальной Земли. В результате теплопроводности температуры верхней и нижней поверхностей коры будут сближаться до тех пор, пока кора не достигнет теплового равновесия. Удельная теплоёмкость коры равна c , и её можно считать постоянной.

А.5 — 0.9 балла

Используя анализ размерностей или оценку по порядку величины, оцените характерное время τ , за которое разность температур верхней и нижней поверхностей коры вдали от оси хребта приблизится к нулю. Можно считать, что τ не зависит от двух начальных температур поверхностей коры.

Часть В. Сейсмические волны в слоистой среде (5.0 балла)

Предположим, что на поверхности некоторой планеты происходит кратковременное землетрясение. Можно считать, что сейсмические волны исходят от линейного источника, расположенного при $z = x = 0$, где x — горизонтальная координата, а z — глубина под поверхностью (рис. 3). Длину источника сейсмических волн можно считать гораздо большей любой другой длины, рассматриваемой в этой задаче.

В результате землетрясения равномерный поток так называемых продольных Р-волн излучается по всем направлениям в плоскости x - z , имеющим положительную компоненту вдоль оси z . Поскольку теория волн в твёрдом теле в общем случае сложна, в этой задаче мы пренебрегаем всеми остальными волнами, излучаемыми при землетрясении. Кора планеты имеет слоистое строение, так что скорость Р-волн v зависит от глубины z согласно закону $v = v_0(1 + z/z_0)$, где v_0 — скорость на поверхности, а z_0 — известная положительная постоянная.

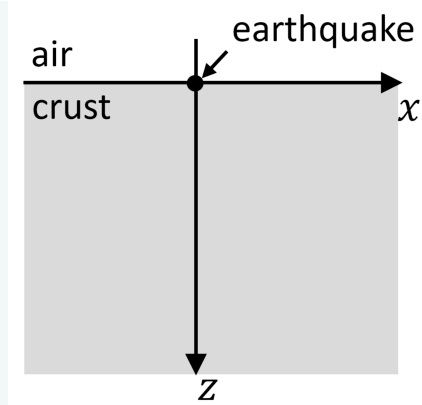


Рисунок 3. Система координат, используемая в части В.

В.1 — 1.5 балла

Рассмотрим отдельный луч, испущенный при землетрясении, который первоначально составляет угол $0 < \theta_0 < \pi/2$ с осью z и распространяется в плоскости x - z . Какова горизонтальная координата $x_1(\theta_0) \neq 0$, при которой этот луч можно обнаружить на поверхности планеты? Известно, что траектория луча представляет собой дугу окружности. Запишите ответ в виде $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$, где A и b — постоянные, которые требуется найти.

Если вам не удалось найти A и b , в следующих вопросах можно использовать результат $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ как заданный. Предположим, что полная энергия на единицу длины источника, выделившаяся в виде Р-волн в кору во время землетрясения, равна E . Считайте, что волны полностью поглощаются, когда достигают поверхности планеты снизу.

В.2 — 1.5 балла

Найдите, как плотность энергии на единицу площади $\varepsilon(x)$, поглощённой поверхностью, зависит от расстояния вдоль поверхности x . Схематически изобразите график $\varepsilon(x)$.

Далее считайте, что при достижении поверхности волны, напротив, полностью отражаются. Представьте себе устройство, расположенное при $z = x = 0$ и имеющее ту же геометрию, что и рассмотренный ранее источник землетрясения. Устройство способно излучать Р-волны с произвольно выбранным угловым распределением. Заставим устройство испустить сигнал в узком диапазоне углов излучения. А именно, начальный угол сигнала с вертикалью принадлежит интервалу $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, где $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ и $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

В.3 — 2.0 балла

На каком расстоянии $x_{\max}$ вдоль поверхности от источника находится самая дальняя точка, которой сигнал не достигает? Запишите ответ через θ_0 , $\delta\theta_0$ и другие приведённые выше постоянные.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A.1

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right)$$

Сила направлена в сторону $+x$, от масла.

- A.2

$$\rho(T) = \rho_1 \left[1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]^{-3} \approx \rho_1 \left[1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad k = 3k_l.$$

- A.3

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}$$

в рамках приближения первого порядка для плотности.

- A.4 Полная горизонтальная сила, действующая со стороны жидкостей, в главном порядке равна

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2},$$

и направлена от хребта вдоль $+x$.

- A.5

$$\tau \sim \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa} = \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Это оценка по порядку величины.

- B.1

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0, \quad A = 2z_0, \quad b = 1.$$

- B.2

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

График соответствует чётной функции с максимумом $\varepsilon(0) = E/(2\pi z_0)$, достигает половины максимума при $x = \pm 2z_0$ и стремится к нулю как x^{-2} .

- **B.3** В пределе узкого углового диапазона

$$x_{\max} \simeq \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

Это внешняя граница последнего недостигаемого интервала вдоль направления распространения пучка. Ниже выведено точное выражение, учитывающее целое число отражений.

Решение

A.1

Пусть H — высота столба масла над нижними краями пластин. На уровне этих краёв давления масла и воды должны совпадать. После вычитания атмосферного давления получаем

$$\rho_{\text{oil}} g H = \rho_0 g h, \quad H = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} h.$$

Столб жидкости высотой a и плотностью ρ действует на вертикальную пластину с горизонтальной силой

$$w \int_0^a \rho g (a - u) du = \frac{1}{2} \rho g w a^2$$

где u — высота над нижним основанием столба.

Масло толкает правую пластину в направлении $+x$, а вода — в направлении $-x$. Действие атмосферного давления с двух сторон взаимно компенсируется. Учитывая масло выше внешнего уровня воды, получаем

$$F_x = \frac{g w}{2} (\rho_{\text{oil}} H^2 - \rho_0 h^2).$$

Подставляя H , находим

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right) > 0.$$

Таким образом, пластина выталкивается наружу.

A.2

Введём безразмерную разность температур

$$q = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}.$$

При изотропном расширении все три линейных размера изменяются в одинаковое число раз. Следовательно,

$$\frac{V(T)}{V(T_1)} = (1 - k_l q)^3.$$

Масса сохраняется, а исходная плотность при T_1 равна ρ_1 , поэтому

$$\rho(T) = \rho_1 (1 - k_l q)^{-3}.$$

Используя приведённое разложение и пренебрегая членами порядка k_l^2 , получаем

$$\rho(T) \approx \rho_1(1 + 3k_l q).$$

Сравнение с уравнением (2) даёт

$$k = 3k_l.$$

A.3

Воспользуемся направленной вниз осью z на рис. 2. Вдали от хребта кора простирается от $z = h$ до $z = h + D$. Её температура равна

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D},$$

и, следовательно, её плотность равна

$$\rho(z) \approx \rho_1 \left[1 + k \left(1 - \frac{z - h}{D} \right) \right].$$

Её средняя плотность составляет

$$\bar{\rho} = \frac{1}{D} \int_h^{h+D} \rho(z) dz = \rho_1 \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Пусть p_O — общее давление жидкостей на вершине хребта, где толщина коры равна нулю. Из условия гидростатического равновесия получаем давления непосредственно над и под корой вдали от хребта:

$$\begin{aligned} p_{\text{top}} &= p_O + \rho_0 g h, \\ p_{\text{bottom}} &= p_O + \rho_1 g (h + D). \end{aligned}$$

Для равновесия вертикальных сил, действующих на столб коры в её удалённом горизонтальном участке, необходимо

$$p_{\text{bottom}} - p_{\text{top}} = \bar{\rho} g D.$$

Таким образом,

$$\rho_1 (h + D) - \rho_0 h = \rho_1 D \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

После сокращения общего слагаемого $\rho_1 D$ получаем

$$(\rho_1 - \rho_0) h = \frac{1}{2} \rho_1 k D,$$

откуда

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0) h}{\rho_1 k}.$$

A.4

Вычислим силы давления на действительных границах раздела вода–кора и мантия–кора.

Запишем верхнюю и нижнюю поверхности коры в виде $z = z_t(x)$ и $z = z_b(x)$. Их значения на концах равны

$$z_t(0) = z_b(0) = 0, \quad z_t(\infty) = h, \quad z_b(\infty) = h + D.$$

Поля давления жидкостей имеют вид

$$p_w(z) = p_O + \rho_0 g z, \quad p_m(z) = p_O + \rho_1 g z.$$

Для элемента границы раздела с горизонтальной длиной dx и шириной L горизонтальная компонента силы давления содержит наклон поверхности. Верхняя жидкость толкает в направлении отрицательных x , а нижняя — в направлении положительных x :

$$dF_x = L \left[p_m(z_b) \frac{dz_b}{dx} - p_w(z_t) \frac{dz_t}{dx} \right] dx.$$

Множители, связанные с площадью наклонной поверхности и единичной нормалью, сокращаются, поэтому это выражение не требует дополнительного приближения малого наклона. Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} F_x &= L \int_0^{h+D} (p_O + \rho_1 g z) dz - L \int_0^h (p_O + \rho_0 g z) dz \\ &= p_O L D + \frac{gL}{2} [\rho_1 (h+D)^2 - \rho_0 h^2]. \end{aligned}$$

Это можно также записать в виде

$$F_x = \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2 + (p_O + \rho_1 g h) L D + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_0) g L h^2.$$

Согласно А.3, при фиксированном h имеем $D \propto k^{-1}$. При фиксированном фоновом давлении эти три вклада имеют соответственно порядки k^{-2} , k^{-1} и k^0 . Следовательно, главный член равен

$$F_x \simeq \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2.$$

Подставляя выражение для D , получаем

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2}.$$

Сила направлена вдоль $+x$, от хребта. Это полная сила, действующая со стороны жидкостей; литостатическая сила на искусственном разрезе через удалённый участок коры не вычиталась.

A.5

В главном порядке по k объёмная теплоёмкость коры равна $\rho_1 c$, что даёт коэффициент температуропроводности

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1 c}.$$

Вдали от хребта характерное расстояние, на которое должна распространиться теплота, равно D . Поэтому уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

даёт оценку характерных масштабов

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi \frac{\Delta T}{D^2}.$$

Разность температур сокращается, как и требуется:

$$\tau \sim \frac{D^2}{\chi} = \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa}.$$

Используя А.3, получаем

$$\tau \sim \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Анализ размерностей не определяет численный множитель. Разность температур поверхностей асимптотически стремится к нулю, а не обращается в нуль за конечное время.

В.1

В среде, где скорость волн зависит только от глубины, согласно закону Снеллиуса сохраняется горизонтальная компонента вектора медленности:

$$\frac{\sin \theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0},$$

где $\theta(z)$ — локальный угол с вертикалью. Поскольку

$$v(z) = v_0 \frac{z + z_0}{z_0},$$

получаем

$$\sin \theta(z) = \frac{z + z_0}{z_0} \sin \theta_0.$$

Введём обозначение

$$R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}.$$

На нисходящем участке луча

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{z + z_0}{\sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}}.$$

Интегрирование с условием $x = 0$ при $z = 0$ даёт

$$x = \sqrt{R^2 - z_0^2} - \sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}.$$

Таким образом, траектория лежит на окружности

$$(x - x_c)^2 + (z + z_0)^2 = R^2,$$

центр которой имеет координаты

$$x_c = \sqrt{R^2 - z_0^2} = z_0 \cot \theta_0, \quad z_c = -z_0.$$

Луч поворачивает в самой глубокой точке этой окружности и симметрично возвращается к поверхности. Две точки его пересечения с $z = 0$ соответствуют $x = 0$ и $x = 2x_c$. Поэтому

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0,$$

и

$$A = 2z_0, \quad b = 1.$$

Скорость на поверхности v_0 влияет на время распространения, но сокращается в выражениях, определяющих геометрию луча.

В.2

Нижняя полуплоскость охватывает угловой диапазон π . Поэтому при равномерном излучении энергия на единицу длины источника, равная

$$dE = \frac{E}{\pi} d\theta$$

приходится на угловой интервал $d\theta$.

Для лучей, возвращающихся при $x > 0$,

$$x = 2z_0 \cot \theta, \quad \left| \frac{dx}{d\theta} \right| = 2z_0 \csc^2 \theta.$$

Закон сохранения энергии для излучаемого углового интервала и принимающей его полоски поверхности даёт

$$\varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} |d\theta|.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{2\pi z_0} \sin^2 \theta.$$

Используя

$$\cot \theta = \frac{x}{2z_0}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + x^2/(4z_0^2)},$$

находим

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}}.$$

Излучение, направленное влево, даёт то же выражение при $x < 0$. Его нормировка имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} \left[\arctan \frac{x}{2z_0} \right]_{-\infty}^{\infty} = E.$$

Для построения требуемого эскиза: кривая гладкая и симметричная относительно $x = 0$, с единственным максимумом $E/(2\pi z_0)$. При $x = \pm 2z_0$ её высота равна $E/(4\pi z_0)$, поэтому её полная ширина на половине высоты составляет $4z_0$. Она остаётся положительной при любом конечном x , а её хвосты удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon(x) \sim \frac{2Ez_0}{\pi x^2} \quad (|x| \gg z_0).$$

Поскольку E — энергия на единицу длины источника, ε имеет размерность энергии на единицу площади.

В.3

При зеркальном отражении от поверхности вертикальная компонента скорости луча меняет знак, а горизонтальная сохраняется. Поэтому каждый луч повторяет ту же дугу, сдвинутую по горизонтали. Он достигает поверхности в точках

$$x_n(\theta) = n\ell(\theta), \quad \ell(\theta) = 2z_0 \cot \theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть

$$\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \frac{\delta\theta_0}{2}.$$

Для углового диапазона, целиком лежащего внутри $0 < \theta < \pi/2$, наименьшее и наибольшее расстояния между последовательными выходами на поверхность равны

$$\ell_{\min} = 2z_0 \cot \theta_+, \quad \ell_{\max} = 2z_0 \cot \theta_-.$$

Поскольку пучок заполняет весь угловой интервал, при n -м выходе на поверхность он достигает интервала

$$I_n = [n\ell_{\min}, n\ell_{\max}].$$

Промежуток между I_n и I_{n+1} существует тогда и только тогда, когда

$$n\ell_{\max} < (n+1)\ell_{\min},$$

или

$$n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) < \ell_{\min}.$$

Положим $\Delta\ell = \ell_{\max} - \ell_{\min}$. Как только $n\Delta\ell \geq \ell_{\min}$, соседние интервалы перекрываются и продолжают перекрываться при всех больших n . Следовательно, точная внешняя граница последнего промежутка равна

$$x_{\max} = \ell_{\min} \left\lceil \frac{\ell_{\min}}{\Delta\ell} \right\rceil.$$

Округление вверх учитывает целое число выходов на поверхность. Сама граница достигается; недостижимые точки приближаются к ней со стороны меньших координат.

В требуемом приближении узкого углового диапазона

$$\ell_0 = 2z_0 \cot \theta_0,$$

и

$$\Delta\ell \simeq \left| \frac{d\ell}{d\theta} \right|_{\theta_0} \delta\theta_0 = 2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0.$$

При фиксированном θ_0 для достаточно узкого углового диапазона требуется много отражений, прежде чем интервалы начнут перекрываться. Тогда в главном порядке округлением до целого можно пренебречь:

$$x_{\max} \simeq \frac{\ell_0^2}{\Delta\ell}.$$

Поэтому

$$x_{\max} \simeq \frac{(2z_0 \cot \theta_0)^2}{2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Электростатическая линза

Рассмотрим равномерно заряженное металлическое кольцо радиуса R с полным зарядом q . Кольцо представляет собой полый тор толщиной $2a \ll R$. Этой толщиной можно пренебречь в частях А, В, С и Е. Плоскость xy совпадает с плоскостью кольца, а ось z перпендикулярна ей, как показано на рисунке 1. В частях А и В вам может понадобиться формула (разложение Тейлора)

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \quad \text{при } |x| \ll 1.$$

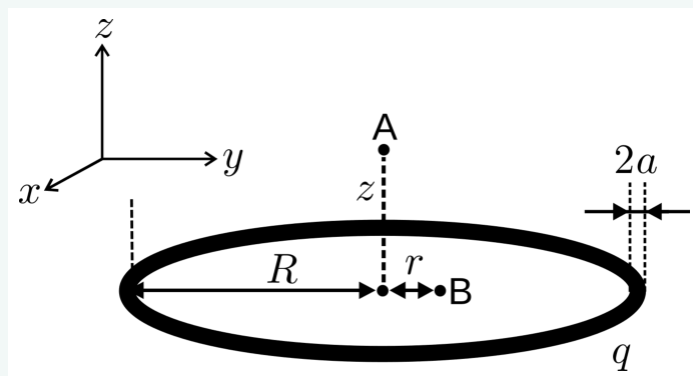


Рисунок 1. Заряженное кольцо радиуса R .

Часть А. Электростатический потенциал на оси кольца (1 балл)

A.1	Вычислите электростатический потенциал $\Phi(z)$ на оси кольца на расстоянии z от его центра (точка А на рисунке 1).	0.3 балла
A.2	Вычислите электростатический потенциал $\Phi(z)$ с точностью до наименьшей ненулевой степени z , полагая $z \ll R$.	0.4 балла
A.3	Электрон (с массой m и зарядом $-e$) помещают в точку А (рисунок 1, $z \ll R$). Какая сила действует на электрон? По выражению для силы определите знак q , при котором движение будет колебательным. Движущийся электрон не влияет на распределение заряда по кольцу.	0.2 балла
A.4	Какова циклическая частота ω таких гармонических колебаний?	0.1 балла

Часть В. Электростатический потенциал в плоскости кольца (1.7 балла)

В этой части задачи вам предстоит исследовать потенциал $\Phi(r)$ в плоскости кольца ($z = 0$) при $r \ll R$ (точка В на рисунке 1). С точностью до наименьшей ненулевой степени r электростатический потенциал задаётся выражением $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$.

B.1	Найдите выражение для β . Вам может понадобиться приведённая выше формула разложения Тейлора.	1.5 балла
B.2	Электрон помещают в точку В (рисунок 1, $r \ll R$). Какая сила действует на электрон? По выражению для силы определите знак q , при котором движение будет представлять собой гармонические колебания. Движущийся электрон не влияет на распределение заряда по кольцу.	0.2 балла

Часть С. Фокусное расстояние идеализированной электростатической линзы: мгновенная зарядка (2.3 балла)

Требуется создать устройство для фокусировки электронов — электростатическую линзу. Рассмотрим следующую конструкцию. Кольцо расположено перпендикулярно оси z , как показано на рисунке 2. Имеется источник, который по команде испускает сгустки нерелятивистских электронов. Кинетическая энергия этих электронов равна $E = mv^2/2$ (v — скорость), и они покидают источник в точно заданные моменты времени. Система запрограммирована так, что большую часть времени кольцо электрически нейтрально, но его заряд становится равным q , когда электроны находятся на расстоянии менее $d/2$ ($d \ll R$) от плоскости кольца (заштрихованная область на рисунке 2, называемая «активной областью»). В части С считайте, что процессы зарядки и разрядки происходят мгновенно и электрическое поле также мгновенно «заполняет пространство». Магнитными полями можно пренебречь, а скорость электронов вдоль оси z считать постоянной. Движущиеся электроны не возмущают распределение заряда по кольцу.

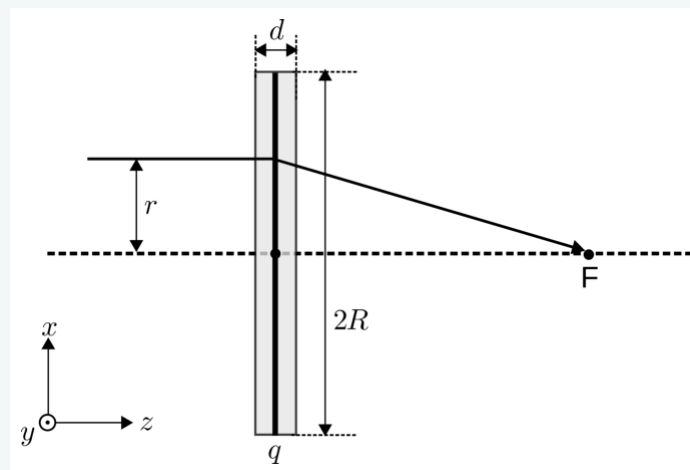


Рисунок 2. Модель электростатической линзы.

C.1	Определите фокусное расстояние f этой линзы. Считайте, что $f \gg d$. Выразите ответ через постоянную β из вопроса В.1 и другие известные величины. Считайте, что до входа в «активную область» сгусток электронов движется параллельно оси z и $r \ll R$. Знак q выбран так, чтобы линза была собирающей.	1.3 балла
-----	--	-----------

В действительности источник электронов расположен на оси z на расстоянии $b > f$ от центра кольца. Теперь считайте, что до входа в «активную область» электроны движутся не параллельно оси z , а испускаются из точечного источника под различными углами $\gamma \ll 1$ рад к оси z . Электроны фокусируются в точке, расположенной на расстоянии c от центра кольца.

C.2	Найдите c . Выразите ответ через постоянную β из вопроса В.1 и другие известные величины.	0.8 балла
C.3	Выполняется ли для электростатической линзы формула тонкой оптической линзы $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$? Покажите это, явно вычислив $1/b + 1/c$.	0.2 балла

Часть D. Кольцо как конденсатор (3 балла)

Рассмотренная выше модель была идеализированной: мы предполагали, что кольцо заряжается мгновенно. В действительности зарядка не является мгновенной, поскольку кольцо представляет собой конденсатор с конечной ёмкостью C . В этой части мы исследуем свойства этого конденсатора. Вам могут понадобиться следующие интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1	Вычислите ёмкость C кольца. Учтите, что кольцо имеет конечную толщину $2a$, но помните, что $a \ll R$.	2.0 балла
-----	--	-----------

Когда электроны входят в «активную область», кольцо подключают к источнику напряжения V_0 (рисунок 3). Когда электроны выходят из «активной области», кольцо заземляют. Сопротивление контактов равно R_0 , а сопротивлением самого кольца можно пренебречь.

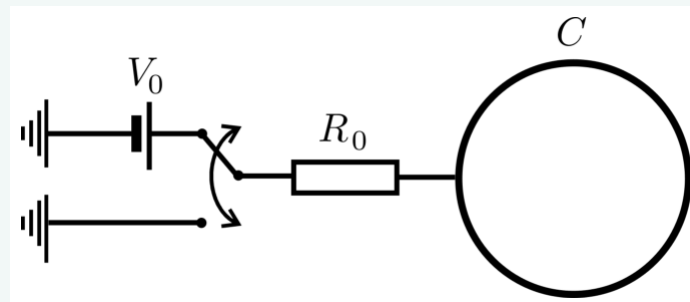


Рисунок 3. Зарядка электростатической линзы.

D.2	Определите зависимость заряда кольца от времени, $q(t)$, и схематически изобразите график этой зависимости. Момент $t = 0$ соответствует моменту, когда электроны находятся в плоскости кольца. Чему равен заряд кольца q_0 , когда модуль $q(t)$ максимален? Ёмкость кольца равна C (то есть использовать конкретное выражение, найденное в D.1, не требуется). <i>Примечание:</i> полярность на рисунке 3 показана лишь условно. Знак следует выбрать так, чтобы линза была собирающей.	1.0 балла
-----	--	-----------

Часть E. Фокусное расстояние более реалистичной линзы: немгновенная зарядка (2 балла)

В этой части задачи мы рассмотрим действие более реалистичной линзы. Здесь мы вновь пренебрежём толщиной кольца $2a$ и будем считать, что до входа в «активную область» электроны движутся параллельно оси z . Однако зарядка кольца теперь не является мгновенной.

E.1	Найдите фокусное расстояние f линзы. Считайте, что $f/v \gg R_0 C$, а d/v и $R_0 C$ имеют один порядок величины. Выразите ответ через постоянную β из части B и другие известные величины.	1.7 балла
E.2	Вы увидите, что результат для f аналогичен полученному в части C, причём величина q заменяется на q_{eff} . Найдите выражение для q_{eff} через величины,	0.3 балла

Ответы

Используем обозначения

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad T = \frac{d}{v}, \quad \tau = R_0 C, \quad Q = CV_0.$$

Здесь $e > 0$, потенциал обращается в нуль на бесконечности, а V_0 — приложенное напряжение с учётом знака: для фокусировки требуется $V_0 < 0$, следовательно, $Q < 0$. Все приближённые результаты имеют точность, оговорённую в условии задачи.

- **A.1:** $\Phi(z) = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$
- **A.2:** $\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right).$
- **A.3:** $\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}.$ Для колебаний вдоль оси требуется $q > 0$.
- **A.4:** $\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}},$ при $q > 0$.
- **B.1:** $\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}.$
- **B.2:** $\mathbf{F}_\perp = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp.$ Для колебаний в плоскости кольца требуется $q < 0$.
- **C.1:** $f = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta|q|d}.$
- **C.2:** $c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$
- **C.3:** Да: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{e\beta|q|d}{E} = \frac{1}{f}.$
- **D.1:** $C \approx \frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$
- **D.2:**

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - \exp\left(-\frac{t + T/2}{\tau}\right)\right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ q_0 \exp\left(-\frac{t - T/2}{\tau}\right), & t > T/2, \end{cases} \quad q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) < 0.$$

График убывает от нуля до минимума q_0 при $t = T/2$, затем экспоненциально приближается к нулю снизу.

- **E.1:** $f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}.$
- **E.2:** $q_{\text{eff}} = CV_0 = \frac{q_0}{1 - e^{-d/(vR_0 C)}}.$

Решение

Потенциальная энергия электрона равна $U = -e\Phi$. Поэтому

$$\mathbf{F} = -\nabla U = e\nabla\Phi.$$

Это определяет знаки сил во всём решении.

A.1

Каждый элемент заряда кольца находится на одном и том же расстоянии $\sqrt{R^2 + z^2}$ от точки наблюдения на его оси. По принципу суперпозиции

$$\Phi(z) = k \int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}}.$$

A.2

При $|z| \ll R$

$$\Phi(z) = \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2}.$$

Используя приведённое разложение с $\varepsilon = -1/2$, получаем

$$\boxed{\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R^3} z^2}.$$

Первый непостоянный член является квадратичным, поскольку потенциал не меняется при $z \mapsto -z$.

A.3

Дифференцируя потенциал на оси, получаем

$$F_z = e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{keqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx -\frac{keq}{R^3} z.$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}}.$$

Возвращающая сила должна быть направлена к $z = 0$. Следовательно, условие

$$\boxed{q > 0}$$

необходимо для колебаний вдоль оси.

A.4

Уравнение Ньютона принимает вид

$$m\ddot{z} = -\frac{keq}{R^3} z.$$

Сравнивая с $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$, получаем

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}}.$$

В.1

Поместим точку наблюдения в $(r, 0, 0)$. Элемент кольца с полярным углом θ имеет заряд

$$dq = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

и находится на расстоянии

$$s = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$$

от этой точки. Поэтому, обозначив $\rho = r/R$, получаем

$$\Phi(r) = \frac{kq}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

Разлагая до второго порядка по ρ , получаем

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho \cos \theta) + \frac{3}{8}(4\rho^2 \cos^2 \theta) \\ &= 1 + \rho \cos \theta + \rho^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Средние значения по углу равны

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\Phi(r) \approx \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

Сравнивая с $q(\alpha + \beta r^2)$, получаем

$$\alpha = \frac{k}{R}, \quad \boxed{\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}}.$$

В.2

Пусть $\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. Поскольку $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\boxed{\mathbf{F}_\perp = e\nabla_\perp \Phi = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp}.$$

Сила в плоскости кольца является возвращающей тогда и только тогда, когда

$$\boxed{q < 0}.$$

При таком знаке каждая поперечная координата удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора. Таким образом, устойчивость в продольном и поперечном направлениях требует противоположных знаков заряда кольца.

С.1

Электрон проводит время

$$T = \frac{d}{v}$$

в активной области. Поскольку $d \ll R$, поперечную силу в этой области можно вычислить по результату В.2. Кроме того, условие $f \gg d$ позволяет пренебречь изменением поперечной координаты за время взаимодействия.

Для входящего электрона, находящегося на поперечном расстоянии r от оси, поперечный импульс силы равен

$$m\Delta v_r = F_r T = 2e\beta q r \frac{d}{v}.$$

Начальная поперечная скорость равна нулю, поэтому

$$v_{r,\text{out}} = \frac{2e\beta q r d}{mv} < 0$$

при выборе $q < 0$, обеспечивающем фокусировку.

После выхода из активной области электрон движется по прямой. В приближении тонкой линзы расстояние до точки пересечения с осью равно

$$f = -\frac{vr}{v_{r,\text{out}}}.$$

Следовательно,

$$f = -\frac{mv^2}{2e\beta q d} = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta |q| d}.$$

Сокращение r показывает, что все параллельные лучи, проходящие достаточно близко к оси, имеют одно и то же фокусное расстояние.

С.2

Электрон, испущенный под углом $\gamma \ll 1$ из источника на расстоянии b , достигает линзы на расстоянии от оси

$$r \approx b\gamma.$$

Его входящая поперечная скорость удовлетворяет соотношению

$$\frac{v_{r,\text{in}}}{v} \approx \gamma \approx \frac{r}{b}.$$

Линза вызывает такое же изменение поперечной скорости, как в С.1. Поэтому

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = \frac{r}{b} + \frac{2e\beta q r d}{mv^2} = r \left(\frac{1}{b} + \frac{e\beta q d}{E} \right).$$

Чтобы выходящая траектория пересекала ось на расстоянии c за кольцом, необходимо

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = -\frac{r}{c}.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{b} - \frac{e\beta q d}{E} = \frac{e\beta |q| d}{E} - \frac{1}{b}.$$

Следовательно,

$$c = \frac{bE}{e\beta |q| b d - E} = \frac{b f}{b - f}.$$

Заданное условие $b > f$ обеспечивает $c > 0$.

C.3

Используя только что полученный результат, находим

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \left(\frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b} \right) = \frac{e\beta|q|d}{E}.$$

Согласно C.1, это равно $1/f$, поэтому

$$\boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}}.$$

Таким образом, формула тонкой оптической линзы выполняется в рамках указанных приближений.

D.1

Ёмкость изолированного кольца равна

$$C = \frac{q}{\Phi_s},$$

где Φ_s — потенциал его поверхности относительно бесконечности.

Для тонкого тора введём линейную плотность заряда

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

Выберем промежуточную длину ℓ , удовлетворяющую условию

$$a \ll \ell \ll R.$$

Вычислим потенциал поверхности, складывая вклады близкого, приближённо прямолинейного участка кольца и его удалённой криволинейной части.

Локально проводник имеет форму цилиндра радиуса a . Его потенциал снаружи с требуемой точностью можно представить потенциалом заряда, расположенного на его оси. Поэтому вклад от участка $-\ell < s < \ell$ равен

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{near}} &\approx k\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} \\ &= 2k\lambda \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right) \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{2\ell}{a}. \end{aligned}$$

Для удалённой части толщиной можно пренебречь. Пусть

$$\delta = \frac{\ell}{R} \ll 1.$$

Расстояние между двумя точками кольца, разделёнными углом θ , равно $2R \sin(\theta/2)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{far}} &\approx k\lambda \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{R d\theta}{2R \sin(\theta/2)} \\
&= k\lambda \int_{\delta/2}^{\pi-\delta/2} \frac{du}{\sin u} \\
&= 2k\lambda \ln \cot \frac{\delta}{4} \\
&\approx 2k\lambda \ln \frac{4R}{\ell}.
\end{aligned}$$

При сложении вкладов произвольная промежуточная длина исключается:

$$\begin{aligned}
\Phi_s &\approx 2k\lambda \left(\ln \frac{2\ell}{a} + \ln \frac{4R}{\ell} \right) \\
&= 2k\lambda \ln \frac{8R}{a} \\
&= \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R} \ln \frac{8R}{a}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$C \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$$

Конечный радиус a задаёт отсечку на малых расстояниях, благодаря которой потенциал поверхности остаётся конечным.

D.2

Электроны входят в активную область и покидают её в моменты

$$t_- = -\frac{T}{2}, \quad t_+ = \frac{T}{2}, \quad T = \frac{d}{v}.$$

Изначально кольцо нейтрально. Введём обозначения

$$\tau = R_0 C, \quad Q = CV_0 < 0.$$

Пока кольцо подключено к источнику, уравнение цепи имеет вид

$$R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0,$$

или

$$\tau \dot{q} + q = Q.$$

При $q(t_-) = 0$

$$q(t) = Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], \quad -T/2 \leq t \leq T/2.$$

Когда кольцо заземлено,

$$\tau \dot{q} + q = 0.$$

При переключении заряд непрерывен, поэтому

$$q(t) = q_0 e^{-(t-T/2)/\tau}, \quad t > T/2,$$

где

$$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) = CV_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{d}{vR_0C} \right) \right].$$

Объединяя интервалы, получаем

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ Q(1 - e^{-T/\tau})e^{-(t-T/2)/\tau}, & t > T/2. \end{cases}$$

На требуемом схематическом графике изобразите $q(t)$ ниже оси времени после начала зарядки. Изначально заряд равен нулю, затем во время зарядки непрерывно убывает со всё меньшей крутизной, достигает своего наименьшего отрицательного значения при $t = T/2$, а затем экспоненциально возрастает к нулю. Наклон графика изменяется скачком в оба момента переключения, тогда как $q(t)$ остаётся непрерывной.

Характерные точки:

Время	Заряд
$-T/2$	0
0	$Q(1 - e^{-T/(2\tau)})$
$T/2$	$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau})$
$T/2 + \tau$	$q_0 \exp(-1)$
$t \rightarrow +\infty$	0, приближение снизу

Таким образом, $|q(t)|$ максимален в момент выхода электронов из активной области.

Е.1

Здесь τ и $T = d/v$ сравнимы. Поэтому зарядка и существенная часть разрядки происходят, пока продольное расстояние электронов от кольца остаётся порядка d . Поскольку $d \ll R$, выражение для поперечной силы из В.2 остаётся применимым:

$$F_r(t) \approx 2e\beta q(t)r.$$

Кроме того, условие $f/v \gg \tau$ означает, что фокусировка происходит значительно позже того, как заряд существенно уменьшится. За время действия импульса силы поперечное смещение мало по сравнению с r , поэтому при вычислении импульса силы величину r можно считать постоянной:

$$m\Delta v_r = 2e\beta r \int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt.$$

Вклад зарядки равен

$$\begin{aligned} I_{\text{ch}} &= Q \int_{-T/2}^{T/2} [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}] dt \\ &= Q [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})]. \end{aligned}$$

Вклад разрядки равен

$$I_{\text{dis}} = q_0 \int_{T/2}^{\infty} e^{-(t-T/2)/\tau} dt$$

$$= q_0 \tau = Q\tau(1 - e^{-T/\tau}).$$

Их сумма равна

$$\int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt = QT = CV_0 \frac{d}{v}.$$

Следовательно,

$$\Delta v_r = \frac{2e\beta r Q d}{mv}.$$

Используя те же геометрические соотношения для тонкой линзы, что и в С.1, получаем

$$f = -\frac{vr}{\Delta v_r} = -\frac{mv^2}{2e\beta CV_0 d} = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}.$$

Сопротивление изменяет форму и длительность импульса заряда, но зависящие от него вклады в полный импульс силы при зарядке и разрядке взаимно компенсируются. Конечная протяжённость области взаимодействия приводит к поправкам, выходящим за пределы принятой точности приближения тонкой линзы.

Е.2

Сравнивая

$$f = -\frac{E}{e\beta qd} \quad \text{и} \quad f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d},$$

получаем

$$q_{\text{eff}} = CV_0.$$

Эквивалентно, используя D.2,

$$q_{\text{eff}} = \frac{q_0}{1 - \exp[-d/(vR_0C)]}.$$

Этот эффективный заряд равен заряду, который установился бы на кольце, если бы оно оставалось под приложенным напряжением неограниченно долго. Его модуль превышает фактический максимальный модуль заряда, поскольку хвост разрядки также вносит вклад в фокусировку.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Частицы и волны

Корпускулярно-волновой дуализм, согласно которому каждую частицу можно описать как волну и наоборот, — одно из центральных понятий квантовой механики. В этой задаче, опираясь на это представление и лишь несколько других основных предположений, мы исследуем ряд квантовых явлений, связанных с двумя различными типами частиц микромира — фермионами и бозонами.

Часть А. Квантовая частица в ящике (1.4 балла)

Рассмотрим частицу массой m , движущуюся в одномерной потенциальной яме, где её потенциальная энергия $V(x)$ задаётся выражением

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ или } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Классическая частица может двигаться в таком потенциале с любой кинетической энергией, тогда как для квантовой частицы разрешены лишь определённые положительные дискретные уровни энергии. В любом таком разрешённом состоянии частицу можно описать стоячей волной де Бройля с узлами на стенках.

А.1 — 0.4 балла

Определите минимально возможную энергию $E_{\min}$ квантовой частицы в яме. Выразите ответ через m , L и постоянную Планка $\hbar$.

Состояние частицы с минимально возможной энергией называется основным, а все остальные разрешённые состояния — возбуждёнными. Расположим все возможные значения энергии в порядке возрастания и обозначим их через E_n , начиная с E_1 для основного состояния.

А.2 — 0.6 балла

Найдите общее выражение для энергии E_n (здесь $n = 1, 2, 3, \dots$).

А.3 — 0.4 балла

Частица может мгновенно переходить из одного состояния в другое только за счёт испускания или поглощения фотона с энергией, равной соответствующей разности энергий. Найдите длину волны λ_{21} фотона, испускаемого при переходе частицы из первого возбуждённого состояния (E_2) в основное состояние (E_1).

Часть В. Оптические свойства молекул (2.1 балла)

В этой части мы изучим некоторые оптические свойства молекулы цианина Cy5 — широко используемого красителя, схематически изображённого на рис. 1а. Её оптические свойства определяются главным образом углеродной цепочкой с чередующимися одинарными и двойными связями между атомами углерода, показанной на рис. 1б, тогда как влияние колец на концах молекулы, а также радикалов R значительно меньше. Три из четырёх валентных электронов каждого атома С (а также атомов N) в цепочке образуют химические связи, а остальные валентные электроны «обобществлены» и могут перемещаться вдоль всей цепочки. Полная потенциальная энергия каждого такого электрона показана тонкой колеблющейся линией на рис. 1с; её минимумы соответствуют положениям атомов С и N.

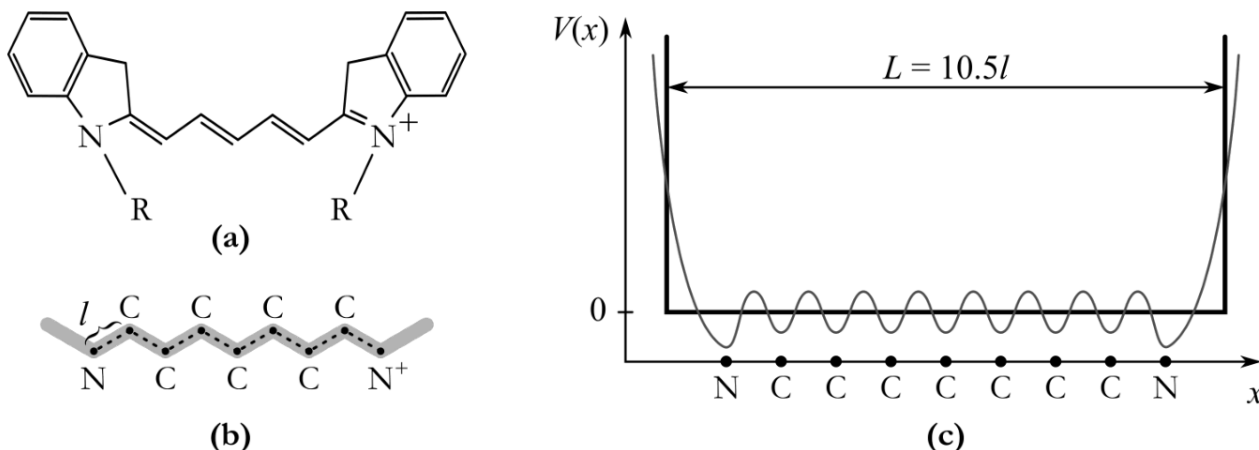


Рисунок 1. (a) Химическая структура молекулы цианина Cy5 (для простоты атомы водорода не показаны, а R обозначает некоторые радикалы). (b) Цепочка молекулы Cy5 со средним межатомным расстоянием l . (c) Потенциальная энергия электрона вдоль цепочки (тонкая линия) и её приближение ступенчатой функцией, заданной формулой 1 (толстая линия).

Для простоты приблизим этот профиль потенциальной энергии простой функцией, заданной формулой 1, с шириной $L = 10.5l$ (см. толстую линию на рис. 1c); здесь $l = 140 \text{ pm}$ — среднее межатомное расстояние (см. также рис. 1b). В результате получим «электронный газ», состоящий из 10 электронов (7 от атомов C, 2 от атома N и 1 от иона N^+), движущихся в одномерной потенциальной яме, рассмотренной в части А. В нашей оценке можно пренебречь взаимным взаимодействием этих электронов; однако необходимо учесть, что электроны являются фермионами и поэтому подчиняются принципу запрета Паули. Влиянием остальных электронов и движением ядер также пренебрегаем.

В.1 — 0.8 балла

Оцените наибольшую длину волны λ фотона, который может быть поглощён молекулой Cy5, предполагая, что электронная система первоначально находится в основном состоянии. Выразите ответ через l , физические постоянные и некоторый числовой коэффициент и вычислите численное значение.

В.2 — 0.4 балла

Молекула другого красителя, Cy3, имеет сходную структуру, но её цепочка короче на 2 атома углерода. Смещён ли её спектр поглощения в синюю или в красную область спектра по сравнению с молекулой Cy5? Оцените численно величину $\Delta\lambda$ этого спектрального сдвига. Можно считать, что удаление двух атомов углерода не изменяет форму молекулы, а лишь уменьшает длину цепочки на два межатомных расстояния.

Находясь в возбуждённом состоянии, молекула может спонтанно перейти в основное состояние с испусканием фотона. Средняя частота K таких событий (то есть относительное уменьшение числа молекул в возбуждённом состоянии, dN/N , за время dt , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) определяется длиной волны λ испускаемого фотона, электрическим дипольным моментом перехода d (порядка $d \simeq el$, где e — элементарный заряд), а также электрической постоянной ϵ_0 и постоянной Планка h .

В.3 — 0.7 балла

Используя анализ размерностей, определите выражение для скорости спонтанного излучения через ϵ_0 , h , λ и d . Числовой коэффициент в этом выражении $= \frac{16}{3}\pi^3$.

В.4 — 0.2 балла

Для молекулы Cu_5 $d \approx 2.4 \text{ e}\ell$. Оцените среднее время жизни флуоресценции низшего возбуждённого состояния молекулы Cu_5 , τ_{Cu_5} , равное величине, обратной скорости её излучательного перехода в основное состояние.

Часть С. Конденсация Бозе–Эйнштейна (1.5 балла)

Эта часть непосредственно не связана с частями А и В. Здесь мы изучим коллективное поведение бозонных частиц. Бозоны не подчиняются принципу запрета Паули, и при низких температурах или высоких концентрациях с ними происходит необычное явление, известное как конденсация Бозе–Эйнштейна (БЕС). Это фазовый переход в своеобразное коллективное квантовое состояние: большое число одинаковых частиц «конденсируется» в одно квантовое состояние и начинает вести себя как единая волна. Обычно переход достигается охлаждением фиксированного числа частиц ниже критической температуры. В принципе, его также можно вызвать, поддерживая постоянную температуру и повышая концентрацию частиц выше критического значения.

Начнём с исследования связи между температурой и концентрацией частиц при переходе. Оказывается, оценки их критических значений можно получить из простого наблюдения: *конденсация Бозе–Эйнштейна происходит, когда длина волны де Бройля, соответствующая среднеквадратичной скорости частиц, равна характерному расстоянию между частицами в газе.*

С.1 — 0.4 балла

Для газа невзаимодействующих атомов ^{87}Rb , находящегося в тепловом равновесии, запишите выражения для характерного импульса p и характерной длины волны де Бройля λ_{dB} через массу атома m , температуру T и физические постоянные.

С.2 — 0.5 балла

Вычислите характерное расстояние между частицами газа ℓ как функцию концентрации частиц n . Отсюда получите выражение для критической температуры T_c через массу атомов, их концентрацию и физические постоянные.

Чтобы получить БЕС в лаборатории, экспериментаторам приходится охлаждать газы до температур порядка $T_c = 100 \text{ nK}$.

С.3 — 0.6 балла

Какова концентрация частиц газа Rb n_c , если переход происходит при такой температуре? Для сравнения вычислите также «обычную» концентрацию частиц n_0 идеального газа при стандартных температуре и давлении (STP), то есть при $T_0 = 300 \text{ K}$ и $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Во сколько раз «обычный» газ плотнее? Можно считать, что масса атомов равна 87 атомным единицам массы (m_{amu}).

Часть D. Трёхлучевые оптические решётки (5 баллов)

Первые конденсаты Бозе–Эйнштейна были получены ещё в 1995 году, и с тех пор экспериментальные исследования развиваются во множестве направлений. В этой части вы исследуете одну особенно плодотворную идею: помещать конденсат в пространственно-периодические потенциалы, создаваемые интерференцией нескольких когерентных лазерных пучков. Из-за периодического характера возникающих интерференционных картин их называют *оптическими решётками*. Потенциальная энергия $V(\vec{r})$ атома, движущегося в оптической решётке, пропорциональна локальной интенсивности света; в расчётах можно считать, что

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

Здесь α — положительная постоянная, а угловые скобки обозначают усреднение по времени, устраняющее быстро осциллирующие слагаемые. Электрическое поле, создаваемое i -м лазером, описывается выражением

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\epsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

где $E_{0,i}$ — амплитуда, $\vec{k}_i$ — волновой вектор, а $\vec{\epsilon}_i$ — единичный вектор поляризации.

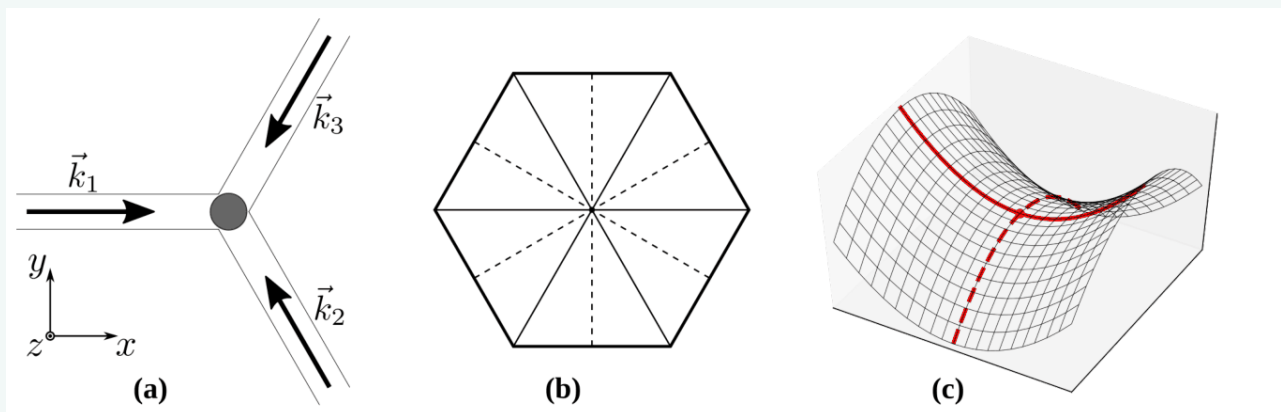


Рисунок 2. (a) Трёхлучевая оптическая решётка: три плоские волны с волновыми векторами $\vec{k}_{1,2,3}$ пересекаются и интерферируют в области, обозначенной серым кругом. (b) Симметрии правильного шестиугольника: сплошные и штриховые линии показывают два набора осей симметрии. (c) Седловая точка: точка поверхности, в которой наклоны во взаимно перпендикулярных направлениях равны нулю, но которая не является локальным экстремумом изображённой функции. При движении вдоль траектории, обозначенной сплошной линией, наблюдается кажущийся минимум. Чтобы отличить истинный минимум от седловой точки (показанной на рисунке), необходим дополнительный анализ в перпендикулярном направлении (штриховая линия).

Ваша задача — изучить *треугольные оптические решётки*, создаваемые интерференцией трёх когерентных лазерных пучков одинаковой интенсивности. Типичная схема показана на рис. 2а. Здесь все три пучка поляризованы в направлении z , распространяются в плоскости xy и пересекаются под одинаковыми углами 120° . Выберите направление оси x параллельно волновому вектору $\vec{k}_1$.

D.1 — 1.4 балла

Используя формулы 2 и 3, получите выражение для потенциальной энергии $V(\vec{r})$ как функции $\vec{r} = (x, y)$ в плоскости пучков.

Указание: результат удобно представить в виде постоянного слагаемого и суммы трёх косинусов с аргументами $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Запишите результат в таком виде и определите векторы $\vec{b}_i$.

D.2 — 0.5 балла

Полученная потенциальная энергия обладает осью вращательной симметрии шестого порядка, то есть распределение потенциала не меняется при повороте вокруг начала координат на угол, кратный 60° . Приведите простое рассуждение, доказывающее, что это действительно так.

Указанное свойство симметрии упрощает анализ двумерного распределения потенциала $V(\vec{r})$. Как показано на рис. 2b, у правильного шестиугольника есть оси симметрии, соединяющие соответственно противоположные вершины (сплошные линии) и середины противоположных сторон (штриховые линии). Поэтому в нашем случае нет необходимости строить и исследовать двумерные графики потенциала: многие выводы можно сделать, сосредоточившись на координатных осях x и y , проходящих вдоль осей симметрии.

D.3 — 1.2 балла

Найдите зависимость потенциала $V(\vec{r})$ вдоль координатных осей, то есть определите функции $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ и $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Найдите положения экстремумов $V_X(x)$ и $V_Y(y)$ как функций одного аргумента. Поскольку эти функции периодичны, включите в свои списки лишь по одному представителю каждого семейства периодически повторяющихся минимумов и максимумов.

Нас интересуют положения так называемых *узлов решётки*, то есть минимумов полного двумерного потенциала $V(\vec{r})$. Найденные минимумы функций одного аргумента V_X и V_Y указывают их предполагаемые положения, но их ещё нужно проверить, чтобы исключить седловые точки. Как показано на рис. 2с, при исследовании вдоль одной прямой седловые точки могут выглядеть как минимумы, хотя таковыми не являются.

D.4 — 0.8 балла

Проанализируйте результаты предыдущего пункта, чтобы найти истинные минимумы оптической решётки: определите все эквивалентные минимумы, ближайшие к началу координат (но не совпадающие с ним). Каково расстояние a между ближайшими минимумами, иначе говоря — постоянная нашей оптической решётки? Выразите ответ через длину волны лазера λ_{las} .

Электрическая нейтральность ультрахолодных атомов позволяет предположить, что их взаимодействия становятся существенными, лишь когда два или более атомов занимают один и тот же узел оптической решётки. Однако экспериментаторы могут исследовать и системы с дальнодействующим взаимодействием атомов. Один из возможных подходов основан на создании так называемых *ридберговских атомов*, которые имеют большие размеры и отличаются необычно большими значениями ряда других характеристик. Ридберговские атомы — это возбуждённые атомы, в которых один электрон переведён в

состояние с очень большим главным квантовым числом n . Размер ридберговского атома можно оценить, вычислив радиус классической круговой орбиты этого электрона с орбитальным моментом импульса $n\hbar$, где $\hbar$ — приведённая постоянная Планка.

D.5 — 1.1 балла

Вычислите значение n , при котором радиус ридберговского атома Rb сравним с длиной волны лазерного света $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$. Выразите ответ через λ_{las} и физические постоянные и найдите его численное значение.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь m_e обозначает массу электрона. Для части D введём общую амплитуду поля E_0 , $U = \alpha E_0^2 > 0$ и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{las}}}, \quad P_X = \frac{4\pi}{3k}, \quad P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}.$$

- **A.1:** $E_{\min} = \frac{h^2}{8mL^2}.$
- **A.2:** $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, n = 1, 2, 3, \dots$
- **A.3:** $\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$
- **B.1:** $\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 648 \text{ nm}.$
- **B.2: Синий сдвиг:** $\lambda_{\text{Cy3}} \simeq 519 \text{ nm},$ и $\Delta\lambda = \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 129 \text{ nm}.$
- **B.3:** $K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}.$
- **B.4:** $\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ eV})^2} \simeq 3.3 \text{ ns}.$
- **C.1:** $p = \sqrt{3mk_B T}, \lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$
- **C.2:** $\ell = n^{-1/3}, T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}$ в рамках заданной оценки условия перехода.
- **C.3:** $n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}, n_0 \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3};$ обычный газ плотнее в 1.52×10^7 раза.
- **D.1:** $V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{b}_i \cdot \vec{r}) \right],$ где $\vec{b}_1 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \vec{b}_2 = k(0, \sqrt{3})$ и $\vec{b}_3 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$
- **D.2:** Шесть векторов $\{\pm\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2, \pm\vec{b}_3\}$ образуют правильный шестиугольник. Поворот на 60° переставляет их, а косинус — чётная функция, поэтому V не меняется.

- **D.3:** $V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right]$, и $V_Y(y) = -\frac{U}{2} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) \right]^2$. По модулю P_X сечение вдоль x имеет минимум в 0 и максимум в $P_X/2$. По модулю P_Y сечение вдоль y имеет минимумы в 0, $P_Y/2$ и максимумы в $P_Y/3, 2P_Y/3$.
- **D.4:** $a = \frac{2}{3} \lambda_{\text{las}}$. Шесть ближайших минимумов находятся в точках $(\pm a, 0)$ и $(\pm a/2, \pm \sqrt{3}a/2)$, причём в последней паре координат знаки независимы.
- **D.5:** $n = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}} \simeq 84.7$, что соответствует $n \approx 85$.

Решение

В численных расчётах используются

$$\begin{aligned} h &= 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\ m_e &\simeq 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\ \epsilon_0 &\simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, & k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ m_{\text{amu}} &\simeq 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}. \end{aligned}$$

A.1

На каждой стенке должен находиться узел волны. У ненулевой стоячей волны с наибольшей длиной, помещающейся в яме, на ширине ямы укладывается одна полуволна:

$$L = \frac{\lambda_{\text{dB},1}}{2}.$$

Поэтому соотношение де Бройля даёт

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_{\text{dB},1}} = \frac{h}{2L}.$$

Используя нерелятивистское выражение для кинетической энергии и учитывая, что потенциальная энергия внутри ямы равна нулю, получаем

$$E_{\text{min}} = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Состояние с нулевым волновым числом не может удовлетворять обоим граничным условиям, если только волна не равна нулю тождественно, поэтому оно не является разрешённым состоянием частицы.

A.2

В n -й моде стоячей волны между стенками укладывается n полуволн:

$$L = n \frac{\lambda_{\text{dB},n}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$\lambda_{\text{dB},n} = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{nh}{2L},$$

и

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

A.3

По закону сохранения энергии энергия испускаемого фотона равна уменьшению энергии частицы:

$$\frac{hc}{\lambda_{21}} = E_2 - E_1 = \frac{(4 - 1)h^2}{8mL^2}.$$

Отсюда

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

B.1

На каждом пространственном энергетическом уровне могут находиться два электрона с противоположными спинами. Поэтому в основном состоянии десятиэлектронной системы заполнены уровни $n = 1, \dots, 5$, по два электрона на каждом.

При возбуждении с наименьшей возможной энергией электрон переходит с уровня $n = 5$ на первый незанятый уровень $n = 6$. Энергия этого возбуждения равна

$$\Delta E_{Cy5} = E_6 - E_5 = \frac{(6^2 - 5^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{11h^2}{8m_e L^2}.$$

Наименьшей энергии поглощаемого фотона соответствует наибольшая длина волны:

$$\lambda_{Cy5} = \frac{hc}{\Delta E_{Cy5}} = \frac{8m_e c L^2}{11h}.$$

При $L = 10.5l$

$$\lambda_{Cy5} = \frac{8(10.5)^2}{11} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h}.$$

Подставляя $l = 140 \times 10^{-12} \text{ м}$, получаем

$$\lambda_{Cy5} \simeq 6.48 \times 10^{-7} \text{ м} = 648 \text{ нм}.$$

B.2

При удалении двух атомов углерода число обобществлённых электронов уменьшается на два, а ширина ямы — на $2l$. Поэтому у Cu_3 восемь электронов и

$$L_{Cy3} = 8.5l.$$

В её основном состоянии заполнены уровни $n = 1, \dots, 4$. Возбуждение с наименьшей энергией соответствует переходу $4 \rightarrow 5$, поэтому

$$\Delta E_{Cy3} = \frac{(5^2 - 4^2)h^2}{8m_e (8.5l)^2} = \frac{9h^2}{8m_e (8.5l)^2}.$$

Таким образом,

$$\lambda_{\text{Cy3}} = \frac{8(8.5)^2}{9} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{578}{9} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 519 \text{ nm}.$$

Эта длина волны меньше, чем для Cy5, поэтому сдвиг направлен в **синюю область**. Его величина равна

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_{\text{Cy5}} - \lambda_{\text{Cy3}} \\ &= \left(\frac{882}{11} - \frac{578}{9} \right) \frac{m_e c l^2}{h} \\ &= \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boxed{\Delta\lambda \simeq 1.29 \times 10^{-7} \text{ m} = 129 \text{ nm}}.$$

В.3

Размерность дипольного момента равна произведению размерностей заряда и длины:

$$[d] = \text{C m}.$$

Поскольку

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{J m}},$$

имеем

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0} \right] = \text{J m}^3.$$

Деление на h , имеющую размерность J s , и на λ^3 даёт требуемую размерность обратного времени:

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3} \right] = \text{s}^{-1}.$$

Используя заданный безразмерный коэффициент, получаем

$$\boxed{K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}}.$$

Здесь K — положительная постоянная распада. Для числа $N(t)$ молекул, остающихся возбуждёнными, уравнение распада имеет вид $dN/dt = -KN$; «относительное уменьшение» в условии понимается как положительная величина убыли.

В.4

В рамках заданной модели при возвращении из низшего возбуждённого состояния в основное испускается фотон с длиной волны λ_{Cy5} . Дипольный момент перехода равен

$$d = 2.4 \text{ e}l \simeq 5.38 \times 10^{-29} \text{ C m}.$$

Скорость спонтанного излучения равна

$$K = \frac{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2}{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3} \simeq 3.01 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

При экспоненциальном распаде среднее время жизни равно $1/K$:

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ eV})^2} \simeq 3.3 \text{ ns}.$$

С.1

Для оценки температуры, предусмотренной условием, теорема о равнораспределении энергии даёт среднюю кинетическую энергию поступательного движения в трёх измерениях:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Поэтому характерный импульс, соответствующий среднеквадратичной скорости, равен

$$p = m \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3mk_B T}.$$

Соответствующая длина волны де Бройля равна

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

С.2

При концентрации n средний объём, приходящийся на одну частицу, равен $1/n$. Следовательно, характерное расстояние между частицами равно

$$\ell = n^{-1/3}.$$

Применяя заданный в условии критерий перехода

$$\lambda_{\text{dB}}(T_c) = \ell,$$

получаем

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_B T_c}} = n^{-1/3}.$$

Возводя в квадрат и преобразуя, находим

$$T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}.$$

Это оценка критической температуры, полученная из заданного критерия равенства длины волны и расстояния между частицами.

С.3

Для рубидия

$$m = 87m_{\text{amu}} \simeq 1.44467 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad T_c = 100 \text{ nK} = 1.00 \times 10^{-7} \text{ K}.$$

Выражая концентрацию из результата С.2, получаем

$$n_c = \left(\frac{3mk_B T_c}{h^2} \right)^{3/2}.$$

Численно

$$n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ м}^{-3}.$$

Соответствующее расстояние между частицами составляет приблизительно $8.57 \times 10^{-7} \text{ м}$.

Для обычного идеального газа уравнение состояния даёт

$$p_0 = n_0 k_B T_0.$$

Используя температуру и давление, заданные в вопросе, получаем

$$n_0 = \frac{10^5}{k_B(300)} \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Таким образом,

$$\frac{n_0}{n_c} \simeq 1.52 \times 10^7.$$

Обычный газ плотнее примерно в пятнадцать миллионов раз.

D.1

Пусть амплитуды всех трёх полей равны E_0 . Выберем волновые векторы в соответствии с рис. 2а:

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{k}_3 = k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

где $k = 2\pi/\lambda_{\text{las}}$.

Все поляризации направлены вдоль z , поэтому поля складываются как скаляры в этом направлении:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{z} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t).$$

Необходимые средние по времени равны

$$\langle \cos^2(\phi - \omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

и

$$\langle \cos(\phi_i - \omega t) \cos(\phi_j - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j).$$

Поэтому

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2 \left[\frac{3}{2} + \sum_{i < j} \cos((\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}) \right].$$

Введём

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \vec{b}_2 &= \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = k(0, \sqrt{3}), \\ \vec{b}_3 &= \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = k\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Поскольку косинус — чётная функция, выбор знака каждой разности несущественен. При $U = \alpha E_0^2$

$$V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \cos(\vec{b}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_2 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_3 \cdot \vec{r}) \right].$$

Объединяя первый и третий косинусы, получаем удобное выражение в координатах:

$$V(x, y) = -U \left[\frac{3}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) + \cos(\sqrt{3}ky) \right].$$

D.2

Три вектора $\vec{b}_i$ имеют одинаковый модуль $\sqrt{3}k$, а углы между ними равны 120° . Добавляя противоположные им векторы, получаем шесть векторов с последовательными угловыми интервалами 60° .

Поворот радиус-вектора на 60° эквивалентен в каждом скалярном произведении повороту соответствующего вектора $\vec{b}_i$ на -60° . При этом каждый $\vec{b}_i$ переходит в другой элемент множества $\{\pm \vec{b}_j\}$. Поскольку

$$\cos(-\vec{b}_j \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}),$$

сумма остаётся неизменной. Следовательно, потенциал обладает указанной вращательной симметрией шестого порядка.

D.3

Полагая $y = 0$, получаем

$$V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right].$$

Её наименьший положительный период равен

$$P_X = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{3}.$$

Производная равна

$$V'_X(x) = 3Uk \sin \left(\frac{3kx}{2} \right).$$

В интервале $0 \leq x < P_X$ минимум находится при $x = 0$, а максимум — при $x = P_X/2$.

Для оси y введём

$$q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

Тогда

$$V_Y(y) = -U \left(\frac{3}{2} + 2 \cos q + \cos 2q \right).$$

Используя $\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$, получаем

$$V_Y(y) = -\frac{U}{2}(1 + 2 \cos q)^2.$$

Её наименьший положительный период равен

$$P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{\sqrt{3}}.$$

Дифференцирование даёт

$$V_Y'(y) = \sqrt{3} U k (1 + 2 \cos q) \sin q.$$

Следовательно, стационарные точки удовлетворяют либо $\sin q = 0$, либо $\cos q = -1/2$.

По одному представителю каждого семейства экстремумов приведено ниже:

Сечение	Координата в пределах одного периода	Характер экстремума вдоль этой оси	Потенциал
V_X	$x = 0$	Минимум	$-9U/2$
V_X	$x = P_X/2$	Максимум	$-U/2$
V_Y	$y = 0$	Минимум	$-9U/2$
V_Y	$y = P_Y/3$	Максимум	0
V_Y	$y = P_Y/2$	Минимум	$-U/2$
V_Y	$y = 2P_Y/3$	Максимум	0

Таким образом, V_X — синусоида относительно уровня $-5U/2$. В пределах одного периода V_Y возрастает от глубокого минимума до нуля, убывает до менее глубокого минимума, снова возрастает до нуля и возвращается к глубокому минимуму на границе следующего периода.

D.4

Сначала проверим кажущийся неглубокий минимум в точке

$$(x, y) = \left(0, \frac{P_Y}{2}\right).$$

Здесь вторые производные полного потенциала равны

$$V_{xx} = -\frac{9}{2} U k^2, \quad V_{yy} = \frac{3}{2} U k^2, \quad V_{xy} = 0.$$

Кривизны имеют противоположные знаки, поэтому эта точка — **седловая**, а не узел решётки.

В начале координат

$$V_{xx} = V_{yy} = \frac{9}{2} U k^2, \quad V_{xy} = 0,$$

поэтому начало координат является истинным минимумом.

Чтобы найти все истинные минимумы, запишем

$$t = \frac{3kx}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

Условия стационарности имеют вид

$$\sin t \cos q = 0, \quad \sin q (\cos t + 2 \cos q) = 0.$$

Если $\cos q \neq 0$, то стационарность по x требует $\sin t = 0$. Для положительной кривизны по x тогда необходимо

$$\cos t \cos q > 0.$$

Поскольку $\cos t$ и $\cos q$ имеют одинаковый знак, выражение $\cos t + 2 \cos q$ не может обращаться в нуль. Значит, $\sin q = 0$. Поэтому в минимумах

$$t = \pi r, \quad q = \pi s,$$

где целые числа r, s имеют одинаковую чётность. Оставшаяся возможность стационарности, $\cos q = 0$, также требует $\cos t = 0$; определитель матрицы Гессе в этом случае отрицателен, поэтому получаются только седловые точки.

Записывая $r = 2j + s$, получаем положения узлов решётки:

$$\vec{r}_{j,s} = a \left(j + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right), \quad j, s \in \mathbb{Z},$$

где

$$a = \frac{4\pi}{3k}.$$

В этих точках все три косинуса в интерференционном выражении равны 1, и

$$V_{\min} = -\frac{9}{2}U.$$

Квадрат расстояния от начала координат равен

$$|\vec{r}_{j,s}|^2 = a^2(j^2 + js + s^2).$$

Для ненулевых пар целых чисел наименьшее значение положительного целого числа $j^2 + js + s^2$ равно 1. Оно достигается в шести узлах:

$$\boxed{(a, 0), (-a, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right)}.$$

Они образуют правильный шестиугольник вокруг начала координат. Поэтому

$$\boxed{a = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{las}}}.$$

D.5

Для сильно возбуждённого внешнего электрона ядро и внутренние электроны действуют приближённо как атомный остов с суммарным зарядом $+e$. Используем заданную классическую модель круговой орбиты, пренебрегая эффектами проникновения в остов и движением значительно более тяжёлого остова.

Кулоновское притяжение создаёт центростремительную силу:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Заданный момент импульса равен

$$m_e v r = n\hbar.$$

Исключая v , получаем

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

откуда

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2,$$

где

$$a_0 \simeq 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Полагая оцениваемый радиус равным λ_{las} , получаем

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{las}}}{a_0}} = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}.$$

При $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$

$$n = \sqrt{\frac{380 \times 10^{-9}}{5.292 \times 10^{-11}}} \simeq 84.7.$$

Таким образом, соответствующее целое главное квантовое число равно

$$n \approx 85.$$

Решение проверено по официальному решению.