

IPhO 2021

Problemas teóricos y soluciones · Vilna, Lituania (celebrada en línea) · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2021/

Problema 1: Física planetaria

Este problema consta de dos problemas independientes relacionados con el interior de los planetas. Se pueden despreciar los efectos de la curvatura de la superficie de los planetas. Puede que necesite utilizar la fórmula

$$(1 + x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \quad \text{cuando } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Parte A. Dorsal oceánica (5.0 puntos)

Considere un recipiente grande con agua situado en un campo gravitatorio uniforme con aceleración de caída libre $\vec{g}$. En el recipiente se colocan dos placas rectangulares verticales paralelas entre sí, de modo que sus bordes verticales estén en contacto estrecho, sin huecos, con las paredes verticales del recipiente. Una longitud h de cada placa está sumergida en el agua (Fig. 1). La anchura de las placas a lo largo del eje y es w , y la densidad del agua es ρ_0 .

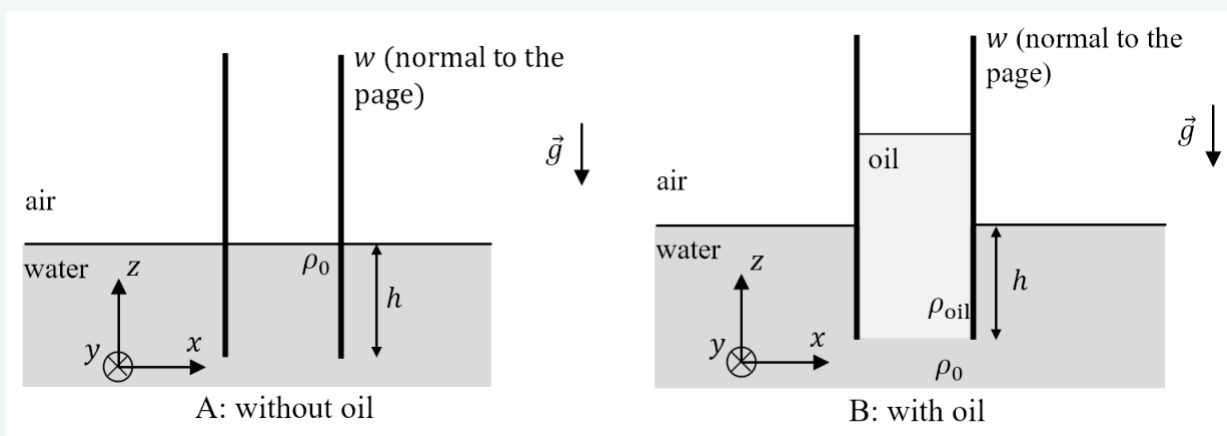


Figura 1. Placas paralelas en agua.

Se vierte aceite de densidad ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) en el espacio entre las placas hasta que el nivel inferior del aceite alcanza los bordes inferiores de las placas. Suponga que las placas y los bordes del recipiente son lo suficientemente altos como para que el aceite no rebose. Se pueden despreciar la tensión superficial y la mezcla de los fluidos.

A.1 — 0.8pt

¿Cuál es la componente x de la fuerza neta F_x que actúa sobre la placa derecha (módulo y sentido)?

La Fig. 2 muestra una sección transversal de una dorsal oceánica. Consta de capas superpuestas de manto, corteza y agua oceánica. El manto está compuesto de rocas que suponemos que pueden fluir en escalas de tiempo geológicas y, por tanto, en este problema se tratará como un

fluido. El espesor de la corteza es mucho menor que la escala de longitud característica en la dirección x , por lo que la corteza se comporta como una placa que puede flexionarse libremente. Con gran precisión, una dorsal de este tipo puede modelarse como un sistema bidimensional, sin variación de las variables a lo largo del eje y , que es perpendicular al plano de la Fig. 2. Suponga que la longitud L de la dorsal a lo largo del eje y es mucho mayor que cualquier otra longitud introducida en este problema.

Se supone que, en el centro de la dorsal, el espesor de la corteza es cero. A medida que aumenta la distancia horizontal x desde el centro, la corteza se hace más gruesa y se aproxima a un espesor constante D cuando $x \rightarrow \infty$. En correspondencia, el fondo oceánico desciende una altura vertical h por debajo de la cima de la dorsal O , que definimos como el origen de nuestro sistema de coordenadas (véase la Fig. 2). Se puede suponer que la densidad ρ_0 y la temperatura T_0 del agua son constantes en el espacio y en el tiempo. Lo mismo puede suponerse para la densidad ρ_1 del manto y su temperatura T_1 . La temperatura T de la corteza también es constante en el tiempo, pero puede depender de la posición.

Se sabe que, con gran precisión, el material de la corteza se dilata linealmente con la temperatura T . Dado que se supone que las temperaturas del agua y del manto son constantes, conviene utilizar una versión reescalada del coeficiente de dilatación térmica. Entonces, $l(T) = l_1[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$, donde l es la longitud de un trozo de material de la corteza, l_1 es su longitud a la temperatura T_1 y k_l es el coeficiente de dilatación térmica reescalado, que puede suponerse constante.

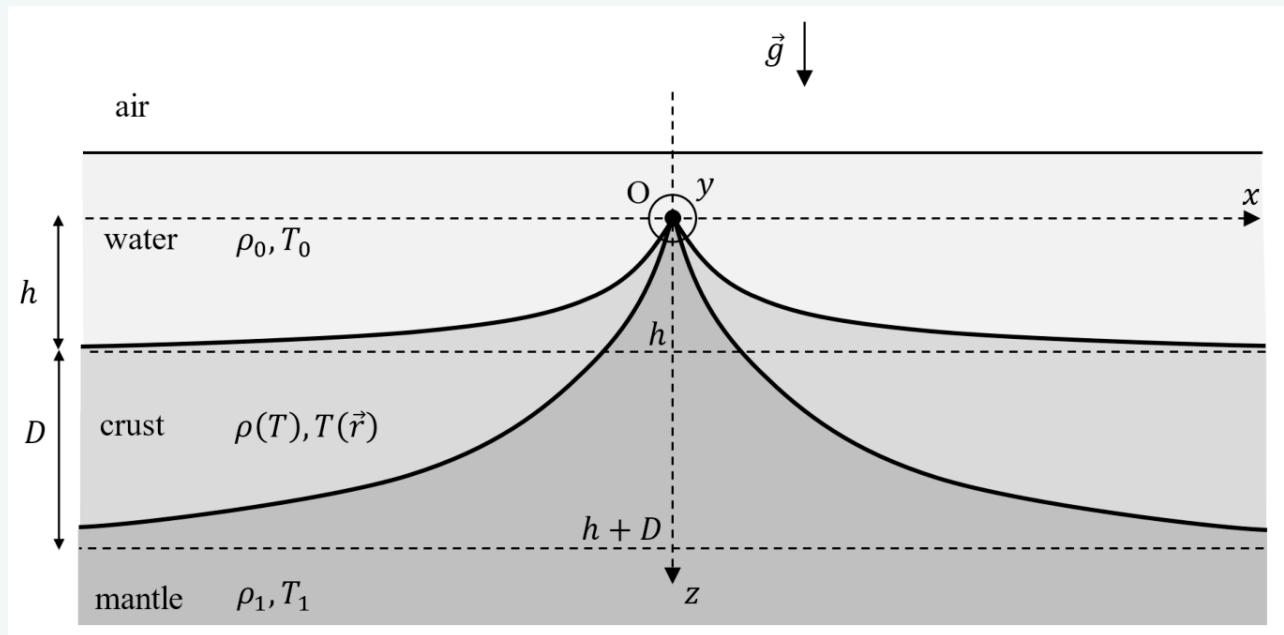


Figura 2. Dorsal oceánica. Observe que el eje z apunta hacia abajo.

A.2 — 0.6pt

Suponiendo que la corteza es isótropa, determine cómo depende su densidad ρ de su temperatura T . Suponiendo que $|k_l| \ll 1$, escriba su respuesta en la forma aproximada

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

donde se desprecian los términos de orden k_l^2 y superiores. A continuación, identifique la constante k .

Se sabe que $k > 0$. Además, se puede suponer que la conductividad térmica κ de la corteza es constante. En consecuencia, muy lejos del eje de la dorsal, la temperatura de la corteza depende linealmente de la profundidad.

A.3 — 1.1pt

Suponiendo que tanto el manto como el agua se comportan como fluidos incompresibles en equilibrio hidrostático, exprese el espesor D de la corteza a gran distancia en función de h , ρ_0 , ρ_1 y k . Puede despreciarse cualquier movimiento del material.

A.4 — 1.6pt

Determine, al orden dominante en k , la fuerza horizontal neta F que actúa sobre la mitad derecha ($x > 0$) de la corteza en función de ρ_0 , ρ_1 , h , L , k y g .

Suponga que la corteza está térmicamente aislada del resto de la Tierra. Como resultado de la conducción de calor, las temperaturas de las superficies superior e inferior de la corteza se irán acercando hasta que la corteza alcance el equilibrio térmico. El calor específico de la corteza es c y puede suponerse constante.

A.5 — 0.9pt

Mediante análisis dimensional o un análisis de orden de magnitud, estime el tiempo característico τ en el que la diferencia entre las temperaturas de las superficies superior e inferior de la corteza, lejos del eje de la dorsal, se aproximará a cero. Puede suponer que τ no depende de las dos temperaturas superficiales iniciales de la corteza.

Parte B. Ondas sísmicas en un medio estratificado (5.0 puntos)

Suponga que se produce un terremoto breve en la superficie de un planeta. Se puede suponer que las ondas sísmicas se originan en una fuente lineal situada en $z = x = 0$, donde x es la coordenada horizontal y z es la profundidad bajo la superficie (Fig. 3). Se puede suponer que la fuente de ondas sísmicas es mucho más larga que cualquier otra longitud considerada en esta cuestión.

Como resultado del terremoto, se emite un flujo uniforme de las denominadas ondas P longitudinales en todas las direcciones del plano x - z que tienen una componente positiva a lo largo del eje z . Dado que la teoría de ondas en un sólido es, en general, complicada, en este problema despreciamos todas las demás ondas emitidas por el terremoto. La corteza del planeta está estratificada de modo que la velocidad v de las ondas P depende de la profundidad z según $v = v_0(1 + z/z_0)$, donde v_0 es la velocidad en la superficie y z_0 es una constante positiva conocida.

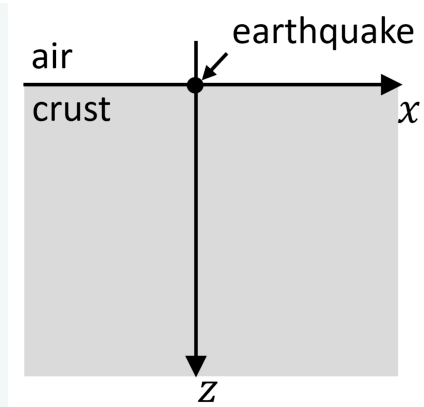


Figura 3. Sistema de coordenadas utilizado en la parte B.

B.1 — 1.5pt

Considere un único rayo emitido por el terremoto que forma un ángulo inicial $0 < \theta_0 < \pi/2$ con el eje z y se propaga en el plano x - z . ¿Cuál es la coordenada horizontal $x_1(\theta_0) \neq 0$ en la que puede detectarse este rayo en la superficie del planeta? Se sabe que la trayectoria del rayo es un arco de circunferencia. Escriba su respuesta en la forma $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$, donde A y b son constantes que deben determinarse.

Si no ha podido determinar A y b , en las siguientes cuestiones puede utilizar el resultado $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ como dato. Suponga que la energía total por unidad de longitud de la fuente liberada en forma de ondas P hacia la corteza durante el terremoto es E . Suponga que las ondas se absorben por completo cuando alcanzan la superficie del planeta desde abajo.

B.2 — 1.5pt

Determine cómo depende la densidad de energía por unidad de área $\varepsilon(x)$ absorbida por la superficie de la distancia x a lo largo de la superficie. Esboce la gráfica de $\varepsilon(x)$.

A partir de ahora, suponga que, en cambio, las ondas se reflejan por completo al alcanzar la superficie. Imagine un dispositivo situado en $z = x = 0$ que tiene la misma geometría que la fuente sísmica considerada anteriormente. El dispositivo es capaz de emitir ondas P con una distribución angular elegida libremente. Hacemos que el dispositivo emita una señal con un intervalo estrecho de ángulos de emisión. En particular, el ángulo inicial que forma la señal con la vertical pertenece al intervalo $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, donde $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ y $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

B.3 — 2.0pt

¿A qué distancia $x_{\max}$ de la fuente, medida a lo largo de la superficie, se encuentra el punto más lejano al que no llega la señal? Escriba su respuesta en función de θ_0 , $\delta\theta_0$ y las demás constantes dadas anteriormente.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- A.1

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right)$$

La fuerza apunta en el sentido $+x$, alejándose del aceite.

- A.2

$$\rho(T) = \rho_1 \left[1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]^{-3} \approx \rho_1 \left[1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad k = 3k_l.$$

- A.3

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}$$

dentro de la aproximación de primer orden para la densidad.

- A.4 La fuerza horizontal total ejercida por los fluidos es, al orden dominante,

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2},$$

dirigida en sentido opuesto a la dorsal, a lo largo de $+x$.

- A.5

$$\tau \sim \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa} = \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Esta es una estimación de orden de magnitud.

- B.1

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0, \quad A = 2z_0, \quad b = 1.$$

- B.2

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

La gráfica es par, alcanza su máximo en $\varepsilon(0) = E/(2\pi z_0)$, llega a la mitad de su máximo en $x = \pm 2z_0$ y tiende a cero como x^{-2} .

- **B.3** En el límite de una banda estrecha,

$$x_{\max} \simeq \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$

Este es el límite exterior del último intervalo no alcanzado en la dirección de propagación del haz. Más adelante se deduce una expresión exacta que tiene en cuenta el número entero de reflexiones.

Solución

A.1

Sea H la altura de la columna de aceite sobre los bordes inferiores de las placas. En esos bordes, las presiones del aceite y del agua deben coincidir. Restando la presión atmosférica,

$$\rho_{\text{oil}} g H = \rho_0 g h, \quad H = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} h.$$

Una columna de fluido de altura a y densidad ρ ejerce una fuerza horizontal

$$w \int_0^a \rho g (a - u) du = \frac{1}{2} \rho g w a^2$$

sobre una placa vertical, donde u mide la altura sobre la base de la columna.

El aceite empuja la placa derecha hacia $+x$; el agua la empuja hacia $-x$. La presión atmosférica se cancela entre ambos lados. Al incluir el aceite situado por encima del nivel exterior del agua, se obtiene

$$F_x = \frac{g w}{2} (\rho_{\text{oil}} H^2 - \rho_0 h^2).$$

Sustituyendo H ,

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right) > 0.$$

Por tanto, la placa es empujada hacia fuera.

A.2

Definimos la diferencia de temperatura adimensional

$$q = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}.$$

La dilatación isótropa modifica las tres dimensiones lineales por el mismo factor. En consecuencia,

$$\frac{V(T)}{V(T_1)} = (1 - k_l q)^3.$$

La masa se conserva y la densidad de referencia a T_1 es ρ_1 , de modo que

$$\rho(T) = \rho_1 (1 - k_l q)^{-3}.$$

Utilizando el desarrollo dado y despreciando los términos de orden k_l^2 ,

$$\rho(T) \approx \rho_1 (1 + 3k_l q).$$

La comparación con la ecuación (2) da

$$k = 3k_l.$$

A.3

Utilizamos el eje z de la Fig. 2, que apunta hacia abajo. Lejos de la dorsal, la corteza se extiende desde $z = h$ hasta $z = h + D$. Su temperatura es

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D},$$

y, por tanto, su densidad es

$$\rho(z) \approx \rho_1 \left[1 + k \left(1 - \frac{z - h}{D} \right) \right].$$

Su densidad media es

$$\bar{\rho} = \frac{1}{D} \int_h^{h+D} \rho(z) dz = \rho_1 \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Sea p_O la presión común de los fluidos en la cima de la dorsal, donde la corteza tiene espesor nulo. El equilibrio hidrostático da las presiones inmediatamente por encima y por debajo de la corteza lejana:

$$\begin{aligned} p_{\text{top}} &= p_O + \rho_0 g h, \\ p_{\text{bottom}} &= p_O + \rho_1 g (h + D). \end{aligned}$$

El equilibrio de fuerzas verticales sobre una columna de corteza horizontal alejada exige

$$p_{\text{bottom}} - p_{\text{top}} = \bar{\rho} g D.$$

Así,

$$\rho_1 (h + D) - \rho_0 h = \rho_1 D \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Tras cancelar el término común $\rho_1 D$,

$$(\rho_1 - \rho_0) h = \frac{1}{2} \rho_1 k D,$$

de modo que

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0) h}{\rho_1 k}.$$

A.4

Calculamos las fuerzas de presión sobre las interfaces reales agua–corteza y manto–corteza.

Escribimos las superficies superior e inferior de la corteza como $z = z_t(x)$ y $z = z_b(x)$. Sus valores en los extremos son

$$z_t(0) = z_b(0) = 0, \quad z_t(\infty) = h, \quad z_b(\infty) = h + D.$$

Los campos de presión de los fluidos son

$$p_w(z) = p_O + \rho_0 g z, \quad p_m(z) = p_O + \rho_1 g z.$$

Para un elemento de interfaz de longitud horizontal dx y anchura L , la componente horizontal de la fuerza de presión contiene la pendiente de la superficie. El fluido superior empuja hacia los valores negativos de x , mientras que el fluido inferior empuja hacia los valores positivos de x :

$$dF_x = L \left[p_m(z_b) \frac{dz_b}{dx} - p_w(z_t) \frac{dz_t}{dx} \right] dx.$$

Los factores procedentes del área de la superficie inclinada y del vector normal unitario se cancelan, por lo que esta expresión no requiere una aproximación adicional de pendiente pequeña. Integrando,

$$\begin{aligned} F_x &= L \int_0^{h+D} (p_O + \rho_1 g z) dz - L \int_0^h (p_O + \rho_0 g z) dz \\ &= p_O L D + \frac{gL}{2} [\rho_1 (h+D)^2 - \rho_0 h^2]. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$F_x = \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2 + (p_O + \rho_1 g h) L D + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_0) g L h^2.$$

Según A.3, $D \propto k^{-1}$ para h fijo. Con la presión de fondo fija, estas tres contribuciones son, respectivamente, de órdenes k^{-2} , k^{-1} y k^0 . Por tanto, el término dominante es

$$F_x \simeq \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2.$$

Sustituyendo la expresión de D ,

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2}.$$

Apunta a lo largo de $+x$, alejándose de la dorsal. Esta es la fuerza total ejercida por los fluidos; no se ha restado ninguna fuerza litostática sobre un corte artificial a través de la corteza lejana.

A.5

Al orden dominante en k , la corteza tiene una capacidad calorífica volumétrica $\rho_1 c$, lo que da la difusividad térmica

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1 c}.$$

Lejos de la dorsal, la distancia relevante a lo largo de la cual debe difundirse el calor es D . La ecuación del calor,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

da, por tanto, la estimación de escala

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi \frac{\Delta T}{D^2}.$$

La diferencia de temperatura se cancela, como se requiere:

$$\tau \sim \frac{D^2}{\chi} = \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa}.$$

Utilizando A.3,

$$\tau \sim \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

El análisis dimensional no determina un prefactor numérico. La diferencia de temperatura entre las superficies se aproxima a cero asintóticamente, en lugar de anularse en un tiempo finito.

B.1

En un medio cuya velocidad de onda depende únicamente de la profundidad, la ley de Snell conserva la lentitud horizontal:

$$\frac{\sin \theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0},$$

donde $\theta(z)$ es el ángulo local con la vertical. Puesto que

$$v(z) = v_0 \frac{z + z_0}{z_0},$$

obtenemos

$$\sin \theta(z) = \frac{z + z_0}{z_0} \sin \theta_0.$$

Definimos

$$R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}.$$

En la parte descendente del rayo,

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{z + z_0}{\sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}}.$$

La integración con $x = 0$ en $z = 0$ da

$$x = \sqrt{R^2 - z_0^2} - \sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}.$$

Así, la trayectoria pertenece a la circunferencia

$$(x - x_c)^2 + (z + z_0)^2 = R^2,$$

cuyo centro tiene las coordenadas

$$x_c = \sqrt{R^2 - z_0^2} = z_0 \cot \theta_0, \quad z_c = -z_0.$$

El rayo cambia de sentido vertical en el punto más profundo de esta circunferencia y regresa simétricamente a la superficie. Sus dos intersecciones con $z = 0$ son $x = 0$ y $x = 2x_c$. Por tanto,

$$\boxed{x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0,}$$

y

$$\boxed{A = 2z_0, \quad b = 1.}$$

La velocidad en la superficie v_0 afecta a los tiempos de recorrido, pero se cancela en la geometría del rayo.

B.2

El semiplano inferior abarca un intervalo angular π . Por tanto, la emisión uniforme asigna una energía por unidad de longitud de la fuente

$$dE = \frac{E}{\pi} d\theta$$

a un intervalo angular $d\theta$.

Para los rayos que regresan en $x > 0$,

$$x = 2z_0 \cot \theta, \quad \left| \frac{dx}{d\theta} \right| = 2z_0 \csc^2 \theta.$$

La conservación de la energía entre el intervalo angular emitido y la franja de superficie que lo recibe da

$$\varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} |d\theta|.$$

Por tanto,

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{2\pi z_0} \sin^2 \theta.$$

Utilizando

$$\cot \theta = \frac{x}{2z_0}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + x^2/(4z_0^2)},$$

obtenemos

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}}.$$

La emisión hacia la izquierda da la misma expresión para $x < 0$. Su normalización es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} \left[\arctan \frac{x}{2z_0} \right]_{-\infty}^{\infty} = E.$$

Para el esbozo solicitado: la curva es suave y simétrica respecto a $x = 0$, con un único máximo $E/(2\pi z_0)$. En $x = \pm 2z_0$, su altura es $E/(4\pi z_0)$, por lo que su anchura total a media altura es $4z_0$. Se mantiene positiva para todo x finito, y sus colas satisfacen

$$\varepsilon(x) \sim \frac{2Ez_0}{\pi x^2} \quad (|x| \gg z_0).$$

Como E es la energía por unidad de longitud de la fuente, ε tiene unidades de energía por unidad de área.

B.3

En una reflexión especular en la superficie, la componente vertical de la velocidad del rayo invierte su sentido, mientras que su componente horizontal se conserva. Por tanto, cada rayo repite el mismo arco, trasladado horizontalmente. Sus encuentros con la superficie se producen en

$$x_n(\theta) = n\ell(\theta), \quad \ell(\theta) = 2z_0 \cot \theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sea

$$\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \frac{\delta\theta_0}{2}.$$

Para una banda situada completamente dentro de $0 < \theta < \pi/2$, las distancias mínima y máxima entre encuentros sucesivos con la superficie son

$$\ell_{\min} = 2z_0 \cot \theta_+, \quad \ell_{\max} = 2z_0 \cot \theta_-.$$

Como el haz ocupa todo el intervalo angular, el intervalo de la superficie alcanzado en el encuentro número n es

$$I_n = [n\ell_{\min}, n\ell_{\max}].$$

Existe un hueco entre I_n e I_{n+1} precisamente cuando

$$n\ell_{\max} < (n+1)\ell_{\min},$$

o bien

$$n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) < \ell_{\min}.$$

Definimos $\Delta\ell = \ell_{\max} - \ell_{\min}$. Una vez que $n\Delta\ell \geq \ell_{\min}$, los intervalos adyacentes se solapan y siguen solapándose para todo n mayor. En consecuencia, el límite exterior exacto del último hueco es

$$x_{\max} = \ell_{\min} \left\lceil \frac{\ell_{\min}}{\Delta\ell} \right\rceil.$$

La función techo tiene en cuenta el número entero de encuentros con la superficie. El propio límite sí se alcanza; los puntos no alcanzados se aproximan a él por debajo.

Para la aproximación de banda estrecha solicitada,

$$\ell_0 = 2z_0 \cot \theta_0,$$

y

$$\Delta\ell \simeq \left| \frac{d\ell}{d\theta} \right|_{\theta_0} \delta\theta_0 = 2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0.$$

Para θ_0 fijo, una banda suficientemente estrecha requiere muchas reflexiones antes de que los intervalos se solapen. Al orden dominante, puede entonces despreciarse el redondeo a un entero:

$$x_{\max} \simeq \frac{\ell_0^2}{\Delta\ell}.$$

Por tanto,

$$x_{\max} \simeq \frac{(2z_0 \cot \theta_0)^2}{2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Lente electrostática

Considérese un anillo metálico cargado uniformemente, de radio R y carga total q . El anillo es un toroide hueco de espesor $2a \ll R$. Este espesor puede despreciarse en las partes A, B, C y E. El plano xy coincide con el plano del anillo, mientras que el eje z es perpendicular a él, como se muestra en la Figura 1. En las partes A y B puede ser necesario utilizar la fórmula (desarrollo de Taylor)

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \quad \text{cuando } |x| \ll 1.$$

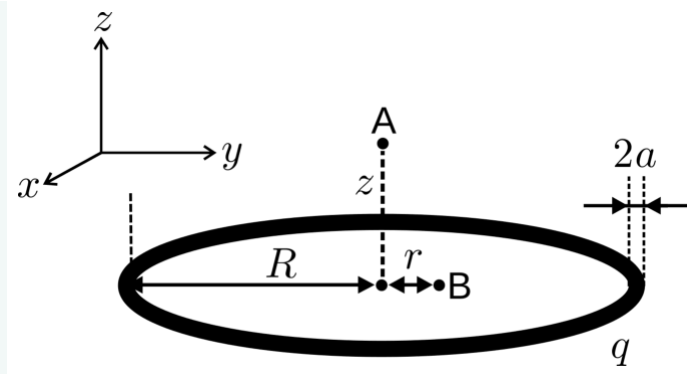


Figura 1. Un anillo cargado de radio R .

Parte A. Potencial electrostático en el eje del anillo (1 punto)

A.1	Calcule el potencial electrostático $\Phi(z)$ a lo largo del eje del anillo a una distancia z de su centro (punto A de la Figura 1).	0.3pt
A.2	Calcule el potencial electrostático $\Phi(z)$ hasta la menor potencia no nula de z , suponiendo que $z \ll R$.	0.4pt
A.3	Se coloca un electrón (de masa m y carga $-e$) en el punto A (Figura 1, $z \ll R$). ¿Qué fuerza actúa sobre el electrón? A partir de la expresión de la fuerza, determine el signo de q para que el movimiento resultante corresponda a oscilaciones. El electrón en movimiento no influye en la distribución de carga del anillo.	0.2pt
A.4	¿Cuál es la frecuencia angular ω de estas oscilaciones armónicas?	0.1pt

Parte B. Potencial electrostático en el plano del anillo (1.7 puntos)

En esta parte del problema deberá analizar el potencial $\Phi(r)$ en el plano del anillo ($z = 0$) para $r \ll R$ (punto B de la Figura 1). Hasta la menor potencia no nula de r , el potencial electrostático viene dado por $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$.

B.1	Obtenga la expresión de β . Puede ser necesario utilizar la fórmula del desarrollo de Taylor indicada anteriormente.	1.5pt
B.2	Se coloca un electrón en el punto B (Figura 1, $r \ll R$). ¿Qué fuerza actúa sobre el electrón? A partir de la expresión de la fuerza, determine el signo de q para que el movimiento resultante corresponda a oscilaciones armónicas. El electrón en movimiento no influye en la distribución de carga del anillo.	0.2pt

Parte C. Distancia focal de la lente electrostática idealizada: carga instantánea (2.3 puntos)

Se desea construir un dispositivo para enfocar electrones: una lente electrostática. Consideremos la siguiente configuración. El anillo está situado perpendicularmente al eje z , como se muestra en la Figura 2. Disponemos de una fuente que produce paquetes de electrones no relativistas cuando se solicita. La energía cinética de estos electrones es $E = mv^2/2$ (v es la velocidad) y salen de la fuente en instantes controlados con precisión. El sistema está programado de modo que el anillo sea eléctricamente neutro la mayor parte del tiempo, pero su carga pase a ser q cuando los electrones se encuentren a una distancia inferior a $d/2$ ($d \ll R$) del plano del anillo (región sombreada de la Figura 2, denominada «región activa»). En la parte C suponga que los procesos de carga y descarga son instantáneos y que el campo eléctrico también «llena el espacio»

instantáneamente. Se pueden despreciar los campos magnéticos y suponer que la velocidad de los electrones en la dirección z es constante. Los electrones en movimiento no perturban la distribución de carga del anillo.

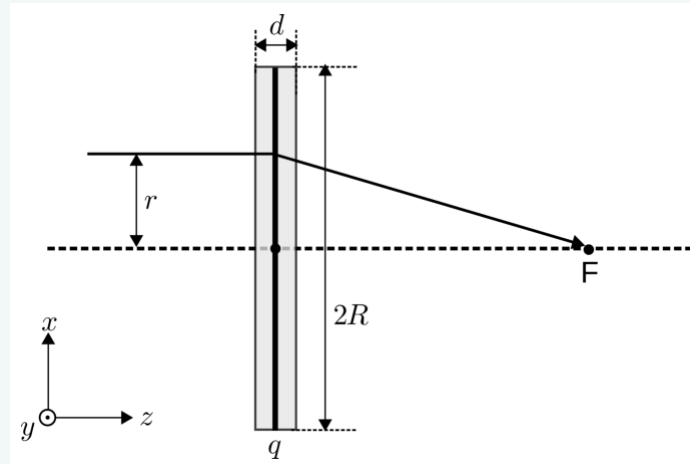


Figura 2. Un modelo de lente electrostática.

C.1	Determine la distancia focal f de esta lente. Suponga que $f \gg d$. Exprese su respuesta en función de la constante β de la pregunta B.1 y de otras magnitudes conocidas. Suponga que, antes de alcanzar la «región activa», el paquete de electrones es paralelo al eje z y que $r \ll R$. El signo de q es tal que la lente es convergente.	1.3pt
-----	--	-------

En realidad, la fuente de electrones se coloca sobre el eje z , a una distancia $b > f$ del centro del anillo. Considere que los electrones ya no se desplazan paralelamente al eje z antes de alcanzar la «región activa», sino que se emiten desde una fuente puntual con distintos ángulos $\gamma \ll 1$ rad respecto al eje z . Los electrones se enfocan en un punto situado a una distancia c del centro del anillo.

C.2	Halle c . Exprese su respuesta en función de la constante β de la pregunta B.1 y de otras magnitudes conocidas.	0.8pt
C.3	¿Se cumple la ecuación de una lente óptica delgada $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$ para la lente electrostática? Demuéstrelo calculando explícitamente $1/b + 1/c$.	0.2pt

Parte D. El anillo como condensador (3 puntos)

El modelo considerado anteriormente era idealizado y supusimos que el anillo se cargaba instantáneamente. En realidad, la carga no es instantánea, pues el anillo es un condensador con una capacidad finita C . En esta parte analizaremos las propiedades de este condensador. Puede necesitar las siguientes integrales:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1	Calcule la capacidad C del anillo. Considere que el anillo tiene un espesor finito $2a$, pero recuerde que $a \ll R$.	2.0pt
-----	---	-------

Cuando los electrones alcanzan la «región activa», el anillo se conecta a una fuente de tensión V_0 (Figura 3). Cuando los electrones abandonan la «región activa», el anillo se conecta a tierra. La resistencia de los contactos es R_0 y la resistencia del propio anillo puede despreciarse.

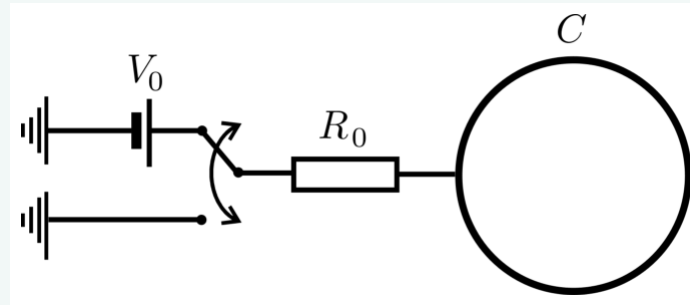


Figura 3. Carga de la lente electrostática.

D.2	Determine la carga del anillo en función del tiempo, $q(t)$, y represente esquemáticamente esta dependencia. $t = 0$ corresponde al instante en que los electrones se encuentran en el plano del anillo. ¿Cuál es la carga del anillo q_0 cuando el valor absoluto de $q(t)$ es máximo? La capacidad del anillo es C (es decir, no es necesario utilizar la expresión concreta obtenida en D.1). <i>Observación:</i> la polaridad dibujada en la Figura 3 es meramente orientativa. El signo debe elegirse de modo que la lente sea convergente.	1.0pt
-----	---	-------

Parte E. Distancia focal de una lente más realista: carga no instantánea (2 puntos)

En esta parte del problema consideraremos la acción de esta lente más realista. Aquí volveremos a despreciar el espesor del anillo $2a$ y supondremos que los electrones se desplazan paralelamente al eje z antes de alcanzar la «región activa». Sin embargo, la carga del anillo ya no es instantánea.

E.1	Halle la distancia focal f de la lente. Suponga que $f/v \gg R_0 C$, pero que d/v y $R_0 C$ son del mismo orden de magnitud. Exprese su respuesta en función de la constante β de la parte B y de otras magnitudes conocidas.	1.7pt
E.2	Verá que el resultado para f es similar al obtenido en la parte C, sustituyendo el valor q por q_{eff} . Obtenga la expresión de q_{eff} en función de las magnitudes dadas en el enunciado del problema.	0.3pt

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Utilícese

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad T = \frac{d}{v}, \quad \tau = R_0 C, \quad Q = CV_0.$$

Aquí $e > 0$, el potencial se anula en el infinito y V_0 es la tensión aplicada con su signo: para que la lente sea convergente se requiere $V_0 < 0$, por lo que $Q < 0$. Todos los resultados aproximados tienen la precisión estipulada en el problema.

- **A.1:** $\Phi(z) = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$

- **A.2:** $\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right)$.
- **A.3:** $\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}$. Las oscilaciones axiales requieren $q > 0$.
- **A.4:** $\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}}$, para $q > 0$.
- **B.1:** $\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}$.
- **B.2:** $\mathbf{F}_\perp = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp$. Las oscilaciones en el plano requieren $q < 0$.
- **C.1:** $f = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta |q| d}$.
- **C.2:** $c = \frac{bE}{e\beta |q| b d - E} = \frac{bf}{b - f}$.
- **C.3:** Sí: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{e\beta |q| d}{E} = \frac{1}{f}$.
- **D.1:** $C \approx \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}$.
- **D.2:**

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - \exp\left(-\frac{t + T/2}{\tau}\right) \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ q_0 \exp\left(-\frac{t - T/2}{\tau}\right), & t > T/2, \end{cases} \quad q_0 = Q \left(1 - e^{-T/\tau}\right) < 0.$$

La gráfica desciende desde cero hasta su mínimo q_0 en $t = T/2$ y después se aproxima exponencialmente a cero desde valores negativos.

- **E.1:** $f = -\frac{E}{e\beta C V_0 d} = \frac{E}{e\beta C |V_0| d}$.
- **E.2:** $q_{\text{eff}} = C V_0 = \frac{q_0}{1 - e^{-d/(v R_0 C)}}$.

Solución

Para un electrón, la energía potencial es $U = -e\Phi$. Por tanto,

$$\mathbf{F} = -\nabla U = e\nabla\Phi.$$

Esto fija los signos de las fuerzas en toda la solución.

A.1

Todos los elementos de carga del anillo se encuentran a la misma distancia $\sqrt{R^2 + z^2}$ del punto de observación situado sobre su eje. Por superposición se obtiene

$$\Phi(z) = k \int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}}.$$

A.2

Para $|z| \ll R$,

$$\Phi(z) = \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2}.$$

Utilizando el desarrollo proporcionado con $\varepsilon = -1/2$,

$$\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R^3} z^2.$$

El primer término no constante es cuadrático porque el potencial no cambia bajo la transformación $z \mapsto -z$.

A.3

Derivando el potencial axial,

$$F_z = e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{keqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx -\frac{keq}{R^3} z.$$

Así,

$$\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}.$$

Una fuerza restauradora debe apuntar hacia $z = 0$. En consecuencia,

$$q > 0$$

es la condición necesaria para que haya oscilaciones axiales.

A.4

La ecuación de Newton se convierte en

$$m\ddot{z} = -\frac{keq}{R^3} z.$$

Al compararla con $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$, se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}.$$

B.1

Situemos el punto de observación en $(r, 0, 0)$. Un elemento del anillo situado en el ángulo polar θ tiene una carga

$$dq = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

y se encuentra a una distancia

$$s = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$$

de ese punto. Por tanto, con $\rho = r/R$,

$$\Phi(r) = \frac{kq}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

Desarrollando hasta segundo orden en ρ ,

$$\begin{aligned}
 (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho \cos \theta) + \frac{3}{8}(4\rho^2 \cos^2 \theta) \\
 &= 1 + \rho \cos \theta + \rho^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right).
 \end{aligned}$$

Los promedios angulares son

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\Phi(r) \approx \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

Comparando con $q(\alpha + \beta r^2)$,

$$\alpha = \frac{k}{R}, \quad \boxed{\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}}.$$

B.2

Sea $\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. Puesto que $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\boxed{\mathbf{F}_\perp = e\nabla_\perp \Phi = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp}.$$

La fuerza es restauradora en el plano del anillo precisamente cuando

$$\boxed{q < 0}.$$

Para este signo, cada coordenada transversal satisface una ecuación de oscilador armónico. Así pues, la estabilidad axial y la transversal requieren signos opuestos de la carga del anillo.

C.1

El electrón permanece un tiempo

$$T = \frac{d}{v}$$

en la región activa. Como $d \ll R$, la fuerza transversal en ella puede evaluarse utilizando B.2. Además, $f \gg d$ permite despreciar el cambio de posición transversal durante la interacción.

Para un electrón incidente a una distancia transversal r , el impulso transversal es

$$m\Delta v_r = F_r T = 2e\beta q r \frac{d}{v}.$$

La velocidad transversal incidente es nula, por lo que

$$v_{r,\text{out}} = \frac{2e\beta q r d}{mv} < 0$$

para la elección convergente $q < 0$.

Tras abandonar la región activa, el electrón se mueve en línea recta. Con la precisión de la aproximación de lente delgada, la distancia hasta el eje es

$$f = -\frac{vr}{v_{r,\text{out}}}.$$

En consecuencia,

$$f = -\frac{mv^2}{2e\beta qd} = -\frac{E}{e\beta qd} = \frac{E}{e\beta|q|d}.$$

La cancelación de r muestra que todos los rayos paralelos suficientemente próximos al eje tienen la misma distancia focal.

C.2

Un electrón emitido con un ángulo $\gamma \ll 1$ desde una fuente situada a una distancia b alcanza la lente en

$$r \approx b\gamma.$$

Su velocidad transversal de entrada satisface

$$\frac{v_{r,\text{in}}}{v} \approx \gamma \approx \frac{r}{b}.$$

La lente produce el mismo cambio de velocidad transversal que en C.1. Así,

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = \frac{r}{b} + \frac{2e\beta qrd}{mv^2} = r \left(\frac{1}{b} + \frac{e\beta qd}{E} \right).$$

Para que la trayectoria de salida cruce el eje a una distancia c más allá del anillo,

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = -\frac{r}{c}.$$

Se deduce que

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{b} - \frac{e\beta qd}{E} = \frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b}.$$

Por tanto,

$$c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$$

La condición especificada $b > f$ garantiza que $c > 0$.

C.3

Utilizando el resultado que acabamos de obtener,

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \left(\frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b} \right) = \frac{e\beta|q|d}{E}.$$

Por C.1, esto es igual a $1/f$, de modo que

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}.$$

Por tanto, la ecuación de la lente óptica delgada se cumple dentro de las aproximaciones indicadas.

D.1

La capacidad del anillo aislado es

$$C = \frac{q}{\Phi_s},$$

donde Φ_s es su potencial superficial respecto al infinito.

Para un toro delgado, introduzcamos la carga por unidad de longitud

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

Elijamos una longitud intermedia ℓ que satisfaga

$$a \ll \ell \ll R.$$

Calculamos el potencial superficial combinando una porción cercana y aproximadamente recta del anillo con su porción lejana y curva.

Localmente, el conductor se asemeja a un cilindro de radio a . Su potencial exterior puede representarse, con la precisión requerida, mediante una carga situada en su eje. Por tanto, la contribución del segmento $-\ell < s < \ell$ es

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{near}} &\approx k\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} \\ &= 2k\lambda \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right) \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{2\ell}{a}.\end{aligned}$$

Para la porción lejana, puede despreciarse el espesor. Sea

$$\delta = \frac{\ell}{R} \ll 1.$$

La distancia entre dos puntos del anillo separados por un ángulo θ es $2R \sin(\theta/2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{far}} &\approx k\lambda \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{R d\theta}{2R \sin(\theta/2)} \\ &= k\lambda \int_{\delta/2}^{\pi-\delta/2} \frac{du}{\sin u} \\ &= 2k\lambda \ln \cot \frac{\delta}{4} \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{4R}{\ell}.\end{aligned}$$

Al sumar las contribuciones, se elimina la longitud intermedia arbitraria:

$$\begin{aligned}\Phi_s &\approx 2k\lambda \left(\ln \frac{2\ell}{a} + \ln \frac{4R}{\ell} \right) \\ &= 2k\lambda \ln \frac{8R}{a} \\ &= \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \ln \frac{8R}{a}.\end{aligned}$$

Así,

$$C \approx \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$$

El radio finito a proporciona el límite inferior de distancia que hace que el potencial superficial sea finito.

D.2

Los electrones entran en la región activa y salen de ella en

$$t_- = -\frac{T}{2}, \quad t_+ = \frac{T}{2}, \quad T = \frac{d}{v}.$$

El anillo es inicialmente neutro. Definamos

$$\tau = R_0 C, \quad Q = CV_0 < 0.$$

Mientras está conectado a la fuente, la ecuación del circuito es

$$R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0,$$

o bien

$$\tau \dot{q} + q = Q.$$

Con $q(t_-) = 0$,

$$q(t) = Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], \quad -T/2 \leq t \leq T/2.$$

Cuando el anillo se conecta a tierra,

$$\tau \dot{q} + q = 0.$$

La carga es continua en el instante de conmutación, de modo que

$$q(t) = q_0 e^{-(t-T/2)/\tau}, \quad t > T/2,$$

donde

$$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) = CV_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{d}{vR_0 C} \right) \right].$$

Combinando los intervalos,

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ Q(1 - e^{-T/\tau}) e^{-(t-T/2)/\tau}, & t > T/2. \end{cases}$$

Para el esbozo solicitado, dibuje $q(t)$ por debajo del eje del tiempo después de que comience la carga. Inicialmente es cero, desciende de forma continua y con una pendiente cada vez menos pronunciada durante la carga, alcanza su valor más negativo en $t = T/2$ y después asciende exponencialmente hacia cero. Su pendiente cambia de forma discontinua en ambos instantes de conmutación, mientras que $q(t)$ permanece continua.

Algunos puntos útiles son:

Tiempo	Carga
$-T/2$	0
0	$Q(1 - e^{-T/(2\tau)})$
$T/2$	$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau})$

Tiempo	Carga
$T/2 + \tau$	$q_0 \exp(-1)$
$t \rightarrow +\infty$	0, al que se aproxima desde valores negativos

Así, $|q(t)|$ es máximo cuando los electrones abandonan la región activa.

E.1

Aquí τ y $T = d/v$ son comparables. Por tanto, la carga y la parte apreciable de la descarga tienen lugar mientras los electrones permanecen a una distancia longitudinal del anillo del orden de d . Como $d \ll R$, la fuerza transversal de B.2 sigue siendo aplicable:

$$F_r(t) \approx 2e\beta q(t)r.$$

Además, $f/v \gg \tau$ significa que el enfoque se produce mucho después de que la carga haya disminuido sustancialmente. Durante el pulso de fuerza, el desplazamiento transversal es pequeño en comparación con r , por lo que r puede mantenerse constante al calcular el impulso:

$$m\Delta v_r = 2e\beta r \int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt.$$

La contribución de la carga es

$$\begin{aligned} I_{\text{ch}} &= Q \int_{-T/2}^{T/2} [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}] dt \\ &= Q [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})]. \end{aligned}$$

La contribución de la descarga es

$$\begin{aligned} I_{\text{dis}} &= q_0 \int_{T/2}^{\infty} e^{-(t-T/2)/\tau} dt \\ &= q_0 \tau = QT(1 - e^{-T/\tau}). \end{aligned}$$

Su suma es

$$\boxed{\int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt = QT = CV_0 \frac{d}{v}}.$$

En consecuencia,

$$\Delta v_r = \frac{2e\beta r Q d}{mv}.$$

Utilizando la misma geometría de lente delgada que en C.1,

$$\boxed{f = -\frac{vr}{\Delta v_r} = -\frac{mv^2}{2e\beta CV_0 d} = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}}.$$

La resistencia cambia la forma y la duración del pulso de carga, pero sus contribuciones al impulso total se cancelan entre la carga y la descarga. La extensión finita de la interacción produce correcciones que exceden la precisión supuesta en la aproximación de lente delgada.

E.2

Comparando

$$f = -\frac{E}{e\beta qd} \quad \text{y} \quad f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d},$$

obtenemos

$$q_{\text{eff}} = CV_0.$$

De forma equivalente, utilizando D.2,

$$q_{\text{eff}} = \frac{q_0}{1 - \exp[-d/(vR_0C)]}.$$

Esta carga efectiva es igual a la carga que alcanzaría el anillo si se mantuviera indefinidamente a la tensión aplicada. Su magnitud supera la carga máxima real porque la cola de descarga también contribuye al enfoque.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Partículas y ondas

La dualidad onda-partícula, que establece que cada partícula puede describirse como una onda y viceversa, es uno de los conceptos centrales de la mecánica cuántica. En este problema, nos basaremos en esta noción y en unas pocas hipótesis básicas más para explorar una selección de fenómenos cuánticos que abarcan los dos tipos distintos de partículas del micromundo: fermiones y bosones.

Parte A. Partícula cuántica en una caja (1.4 puntos)

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en un pozo de potencial unidimensional, donde su energía potencial $V(x)$ viene dada por

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ o } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Mientras que una partícula clásica puede moverse en un potencial de este tipo con cualquier energía cinética, para una partícula cuántica solo se permiten ciertos niveles de energía discretos y positivos. En cualquiera de estos estados permitidos, la partícula puede describirse como una onda estacionaria de de Broglie con nodos en las paredes.

A.1 — 0.4pt

Determine la energía mínima posible $E_{\min}$ de la partícula cuántica en el pozo. Exprese su respuesta en función de m , L y la constante de Planck $\hbar$.

El estado de la partícula con la energía mínima posible se denomina estado fundamental, y todos los demás estados permitidos se denominan estados excitados. Ordenemos todos los valores posibles de la energía en orden creciente y denotémoslos por E_n , comenzando por E_1 para el estado fundamental.

A.2 — 0.6pt

Obtenga la expresión general de la energía E_n (aquí $n = 1, 2, 3, \dots$).

A.3 — 0.4pt

La partícula solo puede experimentar una transición instantánea de un estado a otro mediante la emisión o absorción de un fotón cuya energía sea igual a la diferencia de energía correspondiente. Obtenga la longitud de onda λ_{21} del fotón emitido durante la transición de la partícula desde el primer estado excitado (E_2) al estado fundamental (E_1).

Parte B. Propiedades ópticas de las moléculas (2.1 puntos)

En esta parte, estudiaremos varias propiedades ópticas de la molécula de cianina Cy5, una molécula de colorante ampliamente utilizada, representada esquemáticamente en la Fig. 1a. Sus propiedades ópticas están determinadas principalmente por la cadena principal de carbono, compuesta por enlaces simples y dobles alternos entre átomos de carbono, que se muestra en la Fig. 1b, mientras que la influencia de los anillos situados en los extremos de la molécula, así como de los radicales R, es mucho menor. Tres de los cuatro electrones de valencia de cada átomo de C (y de los átomos de N) de la cadena principal forman los enlaces químicos, mientras que los electrones de valencia restantes son «compartidos» y pueden moverse a lo largo de toda la cadena principal. La energía potencial neta de cada uno de estos electrones se representa mediante la línea fina oscilante de la Fig. 1c, cuyos mínimos corresponden a las posiciones de los átomos de C y N.

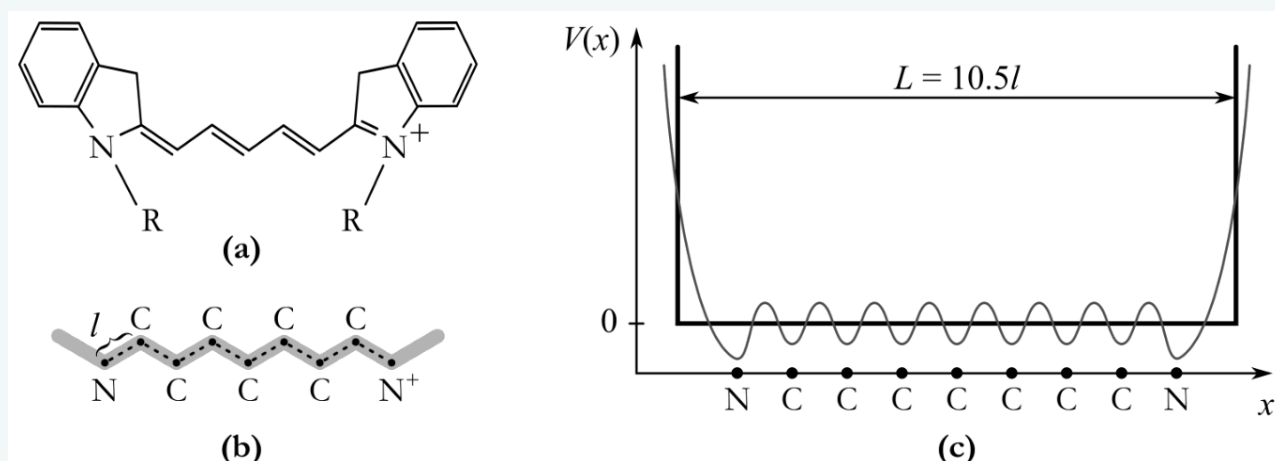


Figura 1. (a) Estructura química de la molécula de cianina Cy5 (por simplicidad, no se muestran los átomos de hidrógeno, y R representa ciertos radicales). (b) La cadena principal de la molécula Cy5, con distancia interatómica media l . (c) Energía potencial del electrón a lo largo de la cadena principal (línea fina) y su aproximación mediante la función escalón dada por la Ec. 1 (línea gruesa).

Por simplicidad, aproximaremos este perfil de energía potencial mediante la función sencilla dada en la Ec. 1, con anchura $L = 10.5l$ (véase la línea gruesa en la Fig. 1c); aquí $l = 140 \text{ pm}$ es la distancia interatómica media (véase también la Fig. 1b). Como resultado, obtenemos un «gas electrónico» compuesto por 10 electrones (7 de los átomos de C, 2 del átomo de N y 1 del ion N^+), que se mueven en el pozo de potencial unidimensional estudiado en la parte A. En nuestra estimación, podemos despreciar la interacción mutua entre estos electrones; sin embargo, debemos tener en cuenta que los electrones son fermiones y, por tanto, obedecen al principio de exclusión de Pauli. También despreciamos la influencia de otros electrones, así como el movimiento de los núcleos.

B.1 — 0.8pt

Estime la mayor longitud de onda λ del fotón que puede absorber la molécula Cy5, suponiendo que el sistema electrónico se encuentra inicialmente en su estado fundamental. Expresé su respuesta en función de l , las constantes físicas y un factor numérico, y calcule su valor numérico.

B.2 — 0.4pt

Otra molécula de colorante, Cy3, tiene una estructura similar, pero su cadena principal tiene 2 átomos de carbono menos. ¿Está su espectro de absorción desplazado hacia la región azul o hacia la región roja del espectro en comparación con el de la molécula Cy5? Estime numéricamente la magnitud $\Delta\lambda$ de este desplazamiento espectral. Puede suponer que eliminar dos átomos de carbono no cambia la forma de la molécula y solo reduce la longitud de la cadena principal en dos distancias interatómicas.

Cuando se encuentra en el estado excitado, la molécula puede experimentar una transición espontánea al estado fundamental emitiendo un fotón. La tasa media K de estos sucesos (es decir, la disminución relativa del número de moléculas que se encuentran en el estado excitado, dN/N , durante el tiempo dt , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) está determinada por la longitud de onda λ del fotón emitido, el momento dipolar eléctrico de transición d (que es del orden de $d \simeq el$, donde e es la carga elemental), así como por la permitividad del vacío ϵ_0 y la constante de Planck h .

B.3 — 0.7pt

Mediante análisis dimensional, determine la expresión de la tasa de emisión espontánea en función de ϵ_0 , h , λ y d . El factor numérico de su expresión es $= \frac{16}{3}\pi^3$.

B.4 — 0.2pt

Para la molécula Cy5, $d \approx 2.4 el$. Estime la vida media de fluorescencia del estado excitado de menor energía de la molécula Cy5, τ_{Cy5} , que es el inverso de la tasa de su transición radiativa al estado fundamental.

Parte C. Condensación de Bose-Einstein (1.5 puntos)

Esta parte no está directamente relacionada con las partes A y B. Aquí estudiaremos el comportamiento colectivo de las partículas bosónicas. Los bosones no obedecen al principio de exclusión de Pauli y, a bajas temperaturas o altas densidades, experimentan un fenómeno notable conocido como condensación de Bose-Einstein (BEC). Se trata de una transición de fase a un fascinante estado cuántico colectivo: un gran número de partículas idénticas se «condensan» en un único estado cuántico y comienzan a comportarse como una sola onda. La transición suele alcanzarse enfriando un número fijo de partículas por debajo de la temperatura crítica. En principio, también puede inducirse manteniendo fija la temperatura y aumentando la densidad de partículas por encima de su valor crítico.

Comenzamos explorando la relación entre la temperatura y la densidad de partículas en la transición. Resulta que pueden deducirse estimaciones de sus valores críticos a partir de una observación sencilla: *la condensación de Bose-Einstein se produce cuando la longitud de onda de de Broglie correspondiente a la velocidad cuadrática media de las partículas es igual a la distancia característica entre las partículas de un gas.*

C.1 — 0.4pt

Dado un gas de átomos de ^{87}Rb sin interacciones en equilibrio térmico, escriba las expresiones de su momento lineal típico p y de su longitud de onda de de Broglie típica λ_{dB} en función de la masa del átomo m , la temperatura T y las constantes físicas.

C.2 — 0.5pt

Calcule la distancia típica entre las partículas de un gas, ℓ , en función de la densidad de partículas n . A partir de ello, deduzca la temperatura crítica T_c en función de la masa de los átomos, su densidad y las constantes físicas.

Para obtener la BEC en el laboratorio, los físicos experimentales deben enfriar los gases hasta temperaturas tan bajas como $T_c = 100 \text{ nK}$.

C.3 — 0.6pt

¿Cuál es la densidad de partículas del gas de Rb n_c si la transición tiene lugar a esa temperatura? A efectos de comparación, calcule también la densidad de partículas «ordinaria» n_0 de un gas ideal en condiciones estándar de temperatura y presión (STP), es decir, $T_0 = 300 \text{ K}$ y $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. ¿Cuántas veces más denso es el gas «ordinario»? Puede suponer que la masa de los átomos es igual a 87 unidades de masa atómica (m_{amu}).

Parte D. Redes ópticas de tres haces (5 puntos)

Los primeros condensados de Bose-Einstein se produjeron en 1995 y, desde entonces, el trabajo experimental se ha diversificado en múltiples direcciones. En esta parte, investigará una idea especialmente fructífera: introducir el condensado en potenciales espacialmente periódicos creados mediante la interferencia de varios haces láser coherentes. Debido al carácter periódico de los patrones de interferencia resultantes, estos se denominan *redes ópticas*. La energía potencial $V(\vec{r})$ de un átomo que se mueve en una red óptica es proporcional a la intensidad local de la luz, y en sus cálculos puede suponer que

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

Aquí, α es una constante positiva, y los corchetes angulares indican un promedio temporal que elimina los términos que oscilan rápidamente. El campo eléctrico producido por el láser i -ésimo se describe mediante

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

con la amplitud $E_{0,i}$, el vector de onda $\vec{k}_i$ y el vector unitario de polarización $\vec{e}_i$.

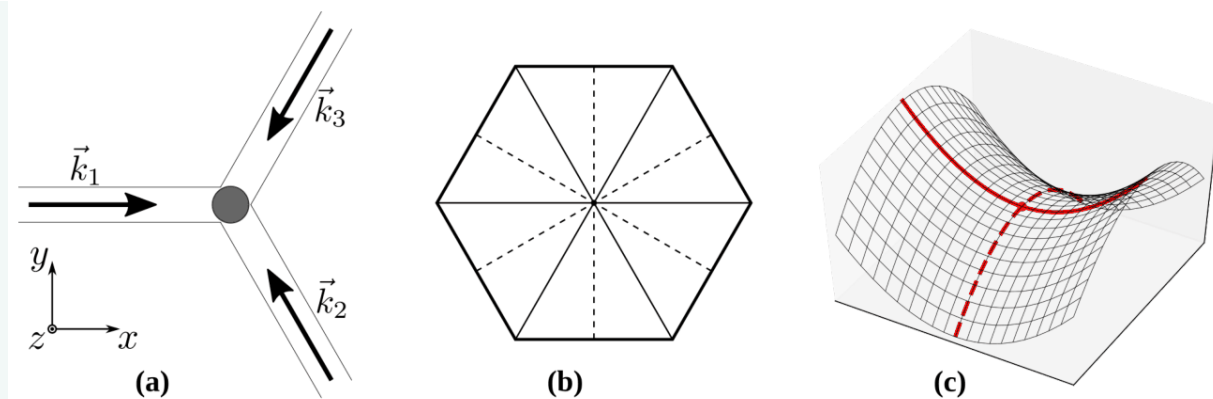


Figura 2. (a) Red óptica de tres haces: tres ondas planas con vectores de onda $\vec{k}_{1,2,3}$ se cruzan e interfieren en la región indicada por el círculo gris. (b) Simetrías de un hexágono regular: las líneas continuas y discontinuas muestran dos conjuntos de ejes de simetría. (c) Punto de silla: un punto de una superficie donde las pendientes en direcciones ortogonales son todas nulas, pero que no es un extremo local de la función representada. Al recorrer la trayectoria marcada por la línea continua se encuentra un mínimo aparente. Es necesario analizar también la dirección perpendicular (línea discontinua) para distinguir un mínimo verdadero de un punto de silla (representado).

Su tarea consiste en estudiar las *redes ópticas triangulares* producidas por la interferencia de tres haces láser coherentes de igual intensidad. En la Fig. 2a se muestra un montaje típico. En él, los tres haces están polarizados en la dirección z , se propagan en el plano xy y se cruzan formando ángulos iguales de 120° . Elija la dirección del eje x paralela al vector de onda $\vec{k}_1$.

D.1 — 1.4pt

Utilizando las Ecs. 2 y 3, obtenga la expresión de la energía potencial $V(\vec{r})$ en función de $\vec{r} = (x, y)$ en el plano de los haces.

Pista: el resultado puede expresarse de forma sencilla como un término constante más una suma de tres funciones coseno con argumentos $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Escriba su resultado en esta forma e identifique los vectores $\vec{b}_i$.

D.2 — 0.5pt

La energía potencial resultante tiene un eje de simetría de rotación de orden seis, es decir, la distribución del potencial es invariante frente a una rotación de un múltiplo de 60° alrededor del origen. Proporcione un argumento sencillo que demuestre que esto es así.

La observación anterior sobre la simetría simplifica el análisis de la distribución bidimensional del potencial $V(\vec{r})$. Como se muestra en la Fig. 2b, un hexágono regular tiene ejes de simetría que unen, respectivamente, vértices opuestos (líneas continuas) y puntos medios de lados opuestos (líneas discontinuas). Por tanto, en nuestra situación no es necesario elaborar y estudiar gráficas bidimensionales del potencial, ya que pueden deducirse muchas de sus características centrándose en los ejes de coordenadas x e y , que discurren a lo largo de los ejes de simetría.

D.3 — 1.2pt

Deduzca el comportamiento del potencial $V(\vec{r})$ a lo largo de los ejes de coordenadas, es decir, determine las funciones $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ y $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Identifique las posiciones de los extremos de $V_X(x)$ y $V_Y(y)$ como funciones de una sola variable. Puesto que estas funciones son periódicas, incluya en sus listas un solo representante de cada familia de mínimos y máximos que se repiten periódicamente.

Nos interesa determinar las posiciones de los llamados *sitios de la red*, es decir, los mínimos del potencial bidimensional completo $V(\vec{r})$. Los mínimos obtenidos para las funciones de una sola variable V_X y V_Y identifican sus posibles posiciones, pero aún deben comprobarse para descartar los puntos de silla. Como se muestra en la Fig. 2c, al estudiarlos a lo largo de una sola recta, los puntos de silla pueden parecer mínimos, aunque no lo sean.

D.4 — 0.8pt

Revise sus resultados de la pregunta anterior para determinar los mínimos verdaderos de la red óptica: identifique todos los mínimos equivalentes más cercanos al origen (pero que no coincidan con él). ¿Cuál es la distancia a entre los mínimos más próximos, es decir, la constante de red de nuestra red óptica? Exprese la respuesta en función de la longitud de onda del láser λ_{las} .

La neutralidad eléctrica de los átomos ultrafríos sugiere que sus interacciones solo resultan relevantes cuando dos o más átomos ocupan el mismo sitio de una red óptica. Sin embargo, los físicos experimentales también pueden explorar montajes que permiten interacciones atómicas de largo alcance. Un enfoque posible se basa en la creación de los llamados *átomos de Rydberg*, que tienen un gran tamaño físico y presentan otras propiedades acentuadas. Los átomos de Rydberg son átomos excitados con un electrón promovido a un estado con un número cuántico principal n muy elevado. El tamaño de un átomo de Rydberg puede estimarse calculando el radio de la órbita circular clásica de ese electrón con momento angular orbital $n\hbar$, donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida.

D.5 — 1.1pt

Calcule el valor de n que corresponde a un radio del átomo de Rydberg de Rb comparable a la longitud de onda de la luz láser $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$. Dé su respuesta en función de λ_{las} y las constantes físicas, y calcule su valor numérico.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí m_e denota la masa del electrón. Para la parte D, se definen la amplitud común del campo E_0 , $U = \alpha E_0^2 > 0$ y

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{las}}}, \quad P_X = \frac{4\pi}{3k}, \quad P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}.$$

- **A.1:** $E_{\min} = \frac{h^2}{8mL^2}.$
- **A.2:** $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, n = 1, 2, 3, \dots$

- **A.3:** $\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}$.
- **B.1:** $\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 648 \text{ nm}$.
- **B.2:** Un **desplazamiento hacia el azul**: $\lambda_{\text{Cy3}} \simeq 519 \text{ nm}$, y

$$\Delta\lambda = \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 129 \text{ nm}.$$
- **B.3:** $K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}$.
- **B.4:** $\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ eV})^2} \simeq 3.3 \text{ ns}$.
- **C.1:** $p = \sqrt{3mk_B T}$, $\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$.
- **C.2:** $\ell = n^{-1/3}$, $T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}$, dentro de la estimación de la transición indicada.
- **C.3:** $n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $n_0 \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$; el gas ordinario es 1.52×10^7 veces más denso.
- **D.1:** $V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{b}_i \cdot \vec{r}) \right]$, con $\vec{b}_1 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\vec{b}_2 = k(0, \sqrt{3})$ y

$$\vec{b}_3 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$
- **D.2:** Los seis vectores $\{\pm\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2, \pm\vec{b}_3\}$ forman un hexágono regular. Una rotación de 60° los permuta, y el coseno es una función par, de modo que V permanece invariable.
- **D.3:** $V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right]$, y $V_Y(y) = -\frac{U}{2} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) \right]^2$.
Módulo P_X , el corte a lo largo de x tiene un mínimo en 0 y un máximo en $P_X/2$. Módulo P_Y , el corte a lo largo de y tiene mínimos en 0, $P_Y/2$ y máximos en $P_Y/3, 2P_Y/3$.
- **D.4:** $a = \frac{2}{3} \lambda_{\text{las}}$. Los seis mínimos más próximos son $(\pm a, 0)$ y $(\pm a/2, \pm\sqrt{3}a/2)$, con signos independientes en el último par de coordenadas.
- **D.5:** $n = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}} \simeq 84.7$, que corresponde a $n \approx 85$.

Solución

En los cálculos numéricos se utilizan

$$\begin{aligned}
 h &= 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\
 m_e &\simeq 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\
 \varepsilon_0 &\simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, & k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\
 m_{\text{amu}} &\simeq 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

A.1

La onda debe tener un nodo en cada pared. La onda estacionaria no nula de mayor longitud de onda que cabe en el pozo tiene media longitud de onda a lo ancho de este:

$$L = \frac{\lambda_{dB,1}}{2}.$$

Por tanto, la relación de de Broglie da

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_{dB,1}} = \frac{h}{2L}.$$

Utilizando la energía cinética no relativista, con energía potencial nula dentro del pozo,

$$E_{\min} = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Un estado con número de onda nulo no puede satisfacer ambas condiciones de contorno a menos que la onda sea idénticamente nula, por lo que no es un estado permitido de la partícula.

A.2

En el modo de onda estacionaria n -ésimo, caben n semilongitudes de onda entre las paredes:

$$L = n \frac{\lambda_{dB,n}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En consecuencia,

$$\lambda_{dB,n} = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{nh}{2L},$$

y

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

A.3

La conservación de la energía iguala la energía del fotón emitido a la disminución de la energía de la partícula:

$$\frac{hc}{\lambda_{21}} = E_2 - E_1 = \frac{(4 - 1)h^2}{8mL^2}.$$

Por tanto,

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

B.1

Cada nivel de energía espacial puede alojar dos electrones con espines opuestos. Así, el estado fundamental del sistema de diez electrones llena los niveles $n = 1, \dots, 5$, con dos electrones por nivel.

La excitación mínima posible promueve un electrón desde $n = 5$ al primer nivel desocupado, $n = 6$. Su energía es

$$\Delta E_{\text{Cy5}} = E_6 - E_5 = \frac{(6^2 - 5^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{11h^2}{8m_e L^2}.$$

La menor energía del fotón absorbido corresponde a la mayor longitud de onda:

$$\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{hc}{\Delta E_{\text{Cy5}}} = \frac{8m_e c L^2}{11h}.$$

Con $L = 10.5l$,

$$\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{8(10.5)^2}{11} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h}.$$

Sustituyendo $l = 140 \times 10^{-12} \text{ m}$,

$$\lambda_{\text{Cy5}} \simeq 6.48 \times 10^{-7} \text{ m} = 648 \text{ nm}.$$

B.2

Al eliminar dos átomos de carbono se eliminan dos electrones compartidos y se acorta el pozo en $2l$.

Por tanto, Cy3 tiene ocho electrones y

$$L_{\text{Cy3}} = 8.5l.$$

Su estado fundamental llena los niveles $n = 1, \dots, 4$. La excitación de menor energía es $4 \rightarrow 5$, por lo que

$$\Delta E_{\text{Cy3}} = \frac{(5^2 - 4^2)h^2}{8m_e (8.5l)^2} = \frac{9h^2}{8m_e (8.5l)^2}.$$

Así,

$$\lambda_{\text{Cy3}} = \frac{8(8.5)^2}{9} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{578}{9} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 519 \text{ nm}.$$

Esta longitud de onda es menor que la de Cy5, por lo que el desplazamiento es hacia el **azul**. Su magnitud es

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_{\text{Cy5}} - \lambda_{\text{Cy3}} \\ &= \left(\frac{882}{11} - \frac{578}{9} \right) \frac{m_e c l^2}{h} \\ &= \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Delta\lambda \simeq 1.29 \times 10^{-7} \text{ m} = 129 \text{ nm}.$$

B.3

El momento dipolar tiene dimensiones de carga por longitud:

$$[d] = \text{C m}.$$

Puesto que

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{J m}},$$

tenemos

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0} \right] = \text{J m}^3.$$

Al dividir por h , cuyas dimensiones son J s , y por λ^3 , se obtiene la dimensión requerida de inverso del tiempo:

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3} \right] = \text{s}^{-1}.$$

Utilizando el factor adimensional proporcionado,

$$K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}.$$

Aquí K es la tasa positiva de desexcitación. Para el número $N(t)$ de moléculas que permanecen excitadas, la ecuación de decaimiento es $dN/dt = -KN$; la «disminución relativa» del enunciado se interpreta como la pérdida positiva.

B.4

En el modelo dado, el estado excitado de menor energía emite un fotón de longitud de onda λ_{Cy5} al volver al estado fundamental. Su momento dipolar es

$$d = 2.4 \text{ e}l \simeq 5.38 \times 10^{-29} \text{ C m}.$$

La tasa de emisión espontánea es

$$K = \frac{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2}{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3} \simeq 3.01 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Para un decaimiento exponencial, la vida media es $1/K$:

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2} \simeq 3.3 \text{ ns}.$$

C.1

Para la estimación de temperatura especificada en el problema, la equipartición da la energía cinética media de traslación en tres dimensiones:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Por tanto, el momento típico asociado a la velocidad cuadrática media es

$$p = m \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3mk_B T}.$$

Su longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

C.2

Para una densidad numérica n , el volumen medio por partícula es $1/n$. Por consiguiente, la separación lineal característica es

$$\boxed{\ell = n^{-1/3}}.$$

Al aplicar el criterio de transición del problema,

$$\lambda_{\text{dB}}(T_c) = \ell,$$

se obtiene

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T_c}} = n^{-1/3}.$$

Elevando al cuadrado y reordenando,

$$\boxed{T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_{\text{B}}}}.$$

Esta es la estimación de la temperatura crítica obtenida a partir del criterio indicado de igualdad entre la longitud de onda y la separación.

C.3

Para el rubidio,

$$m = 87m_{\text{amu}} \simeq 1.44467 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad T_c = 100 \text{ nK} = 1.00 \times 10^{-7} \text{ K}.$$

Despejando la densidad en el resultado de C.2,

$$n_c = \left(\frac{3mk_{\text{B}}T_c}{h^2} \right)^{3/2}.$$

Numéricamente,

$$\boxed{n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}}.$$

La separación correspondiente es aproximadamente $8.57 \times 10^{-7} \text{ m}$.

Para el gas ideal ordinario, la ley de los gases ideales da

$$p_0 = n_0 k_{\text{B}} T_0.$$

Utilizando la temperatura y la presión especificadas en la pregunta,

$$n_0 = \frac{10^5}{k_{\text{B}}(300)} \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Así,

$$\boxed{\frac{n_0}{n_c} \simeq 1.52 \times 10^7}.$$

El gas ordinario es aproximadamente quince millones de veces más denso.

D.1

Sea E_0 la amplitud común de los tres campos. Eligiendo los vectores de onda de acuerdo con la Fig. 2a,

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{k}_3 = k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

donde $k = 2\pi/\lambda_{\text{las}}$.

Todas las polarizaciones están orientadas según z , de modo que los campos se suman como escalares en esa dirección:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{z} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t).$$

Los promedios temporales necesarios son

$$\langle \cos^2(\phi - \omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

y

$$\langle \cos(\phi_i - \omega t) \cos(\phi_j - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j).$$

Por tanto,

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2 \left[\frac{3}{2} + \sum_{i < j} \cos((\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}) \right].$$

Definimos

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \vec{b}_2 &= \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = k(0, \sqrt{3}), \\ \vec{b}_3 &= \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

Puesto que el coseno es una función par, el signo elegido para cada diferencia es irrelevante. Con $U = \alpha E_0^2$,

$$V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \cos(\vec{b}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_2 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_3 \cdot \vec{r}) \right].$$

Al combinar el primer y el tercer coseno se obtiene la siguiente forma útil en coordenadas:

$$V(x, y) = -U \left[\frac{3}{2} + 2 \cos\left(\frac{3kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ky}{2}\right) + \cos(\sqrt{3}ky) \right].$$

D.2

Los tres $\vec{b}_i$ tienen el mismo módulo $\sqrt{3}k$ y están separados por 120° . Al incluir sus opuestos se obtienen seis vectores con intervalos angulares sucesivos de 60° .

Rotar el vector de posición 60° equivale, en cada producto escalar, a rotar el correspondiente $\vec{b}_i$ un ángulo de -60° . Esto transforma cada $\vec{b}_i$ en otro elemento del conjunto $\{\pm \vec{b}_j\}$. Puesto que

$$\cos(-\vec{b}_j \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}),$$

la suma no cambia. Así, el potencial tiene la simetría de rotación de orden seis indicada.

D.3

Haciendo $y = 0$,

$$V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right].$$

Su período fundamental es

$$P_X = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{3}.$$

La derivada es

$$V'_X(x) = 3Uk \sin \left(\frac{3kx}{2} \right).$$

En el intervalo $0 \leq x < P_X$, el mínimo está en $x = 0$ y el máximo en $x = P_X/2$.

Para el eje y , introducimos

$$q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

Entonces

$$V_Y(y) = -U \left(\frac{3}{2} + 2 \cos q + \cos 2q \right).$$

Utilizando $\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$,

$$V_Y(y) = -\frac{U}{2} (1 + 2 \cos q)^2.$$

Su período fundamental es

$$P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{\sqrt{3}}.$$

Al derivar se obtiene

$$V'_Y(y) = \sqrt{3}Uk(1 + 2 \cos q) \sin q.$$

Por tanto, los puntos estacionarios satisfacen $\sin q = 0$ o bien $\cos q = -1/2$.

Un representante de cada familia de extremos es:

Corte	Coordenada en un período	Tipo a lo largo de ese eje	Potencial
V_X	$x = 0$	Mínimo	$-9U/2$
V_X	$x = P_X/2$	Máximo	$-U/2$
V_Y	$y = 0$	Mínimo	$-9U/2$
V_Y	$y = P_Y/3$	Máximo	0
V_Y	$y = P_Y/2$	Mínimo	$-U/2$
V_Y	$y = 2P_Y/3$	Máximo	0

Así, V_X es una senoide en torno a $-5U/2$. A lo largo de un período, V_Y asciende desde un mínimo profundo hasta cero, desciende hasta un mínimo menos profundo, vuelve a ascender hasta cero y regresa al mínimo profundo en el límite con el período siguiente.

D.4

Primero comprobamos el mínimo aparentemente poco profundo situado en

$$(x, y) = \left(0, \frac{P_Y}{2}\right).$$

Aquí, las derivadas segundas del potencial completo son

$$V_{xx} = -\frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{yy} = \frac{3}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0.$$

Las curvaturas tienen signos opuestos, de modo que este punto es un **punto de silla**, no un sitio de la red.

En el origen,

$$V_{xx} = V_{yy} = \frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0,$$

por lo que el origen es un mínimo verdadero.

Para localizar todos los mínimos verdaderos, escribimos

$$t = \frac{3kx}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

Las condiciones de estacionariedad son

$$\sin t \cos q = 0, \quad \sin q(\cos t + 2 \cos q) = 0.$$

Si $\cos q \neq 0$, la estacionariedad en x exige $\sin t = 0$. Una curvatura positiva en x exige entonces

$$\cos t \cos q > 0.$$

Puesto que $\cos t$ y $\cos q$ tienen el mismo signo, $\cos t + 2 \cos q$ no puede anularse. Por tanto, $\sin q = 0$.

En consecuencia, los mínimos cumplen

$$t = \pi r, \quad q = \pi s,$$

donde los enteros r, s tienen la misma paridad. La posibilidad estacionaria restante, $\cos q = 0$, también exige $\cos t = 0$; su matriz hessiana tiene determinante negativo, por lo que solo da puntos de silla.

Escribiendo $r = 2j + s$, los sitios de la red son

$$\vec{r}_{j,s} = a \left(j + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right), \quad j, s \in \mathbb{Z},$$

con

$$a = \frac{4\pi}{3k}.$$

En estos puntos, los tres cosenos de interferencia valen 1, y

$$V_{\min} = -\frac{9}{2}U.$$

La distancia al origen al cuadrado es

$$|\vec{r}_{j,s}|^2 = a^2(j^2 + js + s^2).$$

Para pares de enteros distintos del par nulo, el menor valor del entero positivo $j^2 + js + s^2$ es 1. Se alcanza en seis sitios:

$$\left[(a, 0), (-a, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right) \right].$$

Forman un hexágono regular alrededor del origen. Por tanto,

$$a = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{las}}.$$

D.5

Para un electrón externo muy excitado, el núcleo y los electrones internos actúan aproximadamente como un centro de carga neta $+e$. Utilizamos el modelo clásico de órbita circular indicado, despreciando los efectos de penetración en ese centro y el movimiento de este, mucho más pesado.

La atracción de Coulomb proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

El momento angular prescrito es

$$m_e v r = n\hbar.$$

Eliminando v ,

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

de modo que

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2,$$

donde

$$a_0 \simeq 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Tomando el radio estimado igual a λ_{las} ,

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{las}}}{a_0}} = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}.$$

Para $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$,

$$n = \sqrt{\frac{380 \times 10^{-9}}{5.292 \times 10^{-11}}} \simeq 84.7.$$

Así, el número cuántico principal entero correspondiente es

$$n \approx 85.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.