

IPhO 2021

Theorieaufgaben und Lösungen · Vilnius, Litauen (online ausgetragen) · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/iph/2021/

Aufgabe 1: Planetenphysik

Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben zum Inneren von Planeten. Die Auswirkungen der Oberflächenkrümmung der Planeten können vernachlässigt werden. Möglicherweise benötigen Sie die Formel

$$(1 + x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \quad \text{wenn } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Teil A. Mittelozeanischer Rücken (5.0 Punkte)

Betrachten Sie ein großes Wassergefäß in einem homogenen Gravitationsfeld mit der Fallbeschleunigung g . Zwei zueinander parallele, senkrechte rechteckige Platten sind so in das Gefäß eingesetzt, dass ihre senkrechten Kanten dicht und lückenlos an den senkrechten Gefäßwänden anliegen. Jede Platte taucht über eine Länge h in das Wasser ein (Abb. 1). Die Breite der Platten entlang der y -Achse beträgt w , die Dichte des Wassers ist ρ_0 .

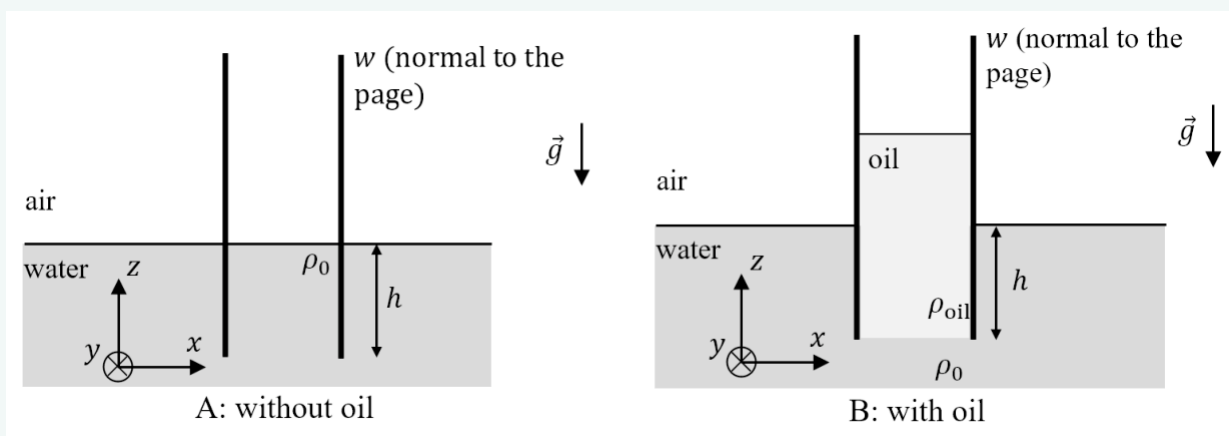


Abbildung 1. Parallele Platten im Wasser.

Öl der Dichte ρ_{oil} ($\rho_{\text{oil}} < \rho_0$) wird in den Raum zwischen den Platten gegossen, bis die untere Grenzfläche des Öls die Unterkanten der Platten erreicht hat. Nehmen Sie an, dass die Platten und die Gefäßränder hoch genug sind, sodass kein Öl darüberläuft. Oberflächenspannung und Durchmischung der Flüssigkeiten können vernachlässigt werden.

A.1 — 0.8 Punkte

Wie groß ist die x -Komponente der resultierenden Kraft F_x , die auf die rechte Platte wirkt (Betrag und Richtung)?

Abb. 2 zeigt einen Querschnitt durch einen mittelozeanischen Rücken. Er besteht aus übereinanderliegenden Schichten aus Mantel, Kruste und Ozeanwasser. Der Mantel besteht aus Gesteinen, von denen wir annehmen, dass sie auf geologischen Zeitskalen fließen können; daher

wird er in dieser Aufgabe als Fluid behandelt. Die Dicke der Kruste ist wesentlich kleiner als die charakteristische Längenskala in x -Richtung, sodass sich die Kruste wie eine frei biegsame Platte verhält. Ein solcher Rücken lässt sich mit hoher Genauigkeit als zweidimensionales System modellieren, dessen Größen sich entlang der y -Achse, die senkrecht zur Zeichenebene von Abb. 2 steht, nicht ändern. Nehmen Sie an, dass die Länge L des Rückens entlang der y -Achse wesentlich größer ist als jede andere in dieser Aufgabe eingeführte Länge.

Im Zentrum des Rückens wird die Dicke der Kruste als null angenommen. Mit zunehmendem horizontalem Abstand x vom Zentrum wird die Kruste dicker und nähert sich für $x \rightarrow \infty$ einer konstanten Dicke D . Entsprechend senkt sich der Meeresboden um eine vertikale Höhe h unter den Scheitel O des Rückens ab, den wir als Ursprung unseres Koordinatensystems festlegen (siehe Abb. 2). Die Dichte ρ_0 und die Temperatur T_0 des Wassers können als räumlich und zeitlich konstant angenommen werden. Dasselbe gilt für die Dichte ρ_1 und die Temperatur T_1 des Mantels. Die Temperatur T der Kruste ist ebenfalls zeitlich konstant, kann jedoch vom Ort abhängen.

Es ist bekannt, dass sich das Krustenmaterial mit hoher Genauigkeit linear mit der Temperatur T ausdehnt. Da die Temperaturen von Wasser und Mantel als konstant angenommen werden, ist es zweckmäßig, eine umskalierte Form des Wärmeausdehnungskoeffizienten zu verwenden. Dann gilt $l(T) = l_1[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$, wobei l die Länge eines Stücks Krustenmaterial, l_1 dessen Länge bei der Temperatur T_1 und k_l der umskalierte Wärmeausdehnungskoeffizient ist, der als konstant angenommen werden kann.

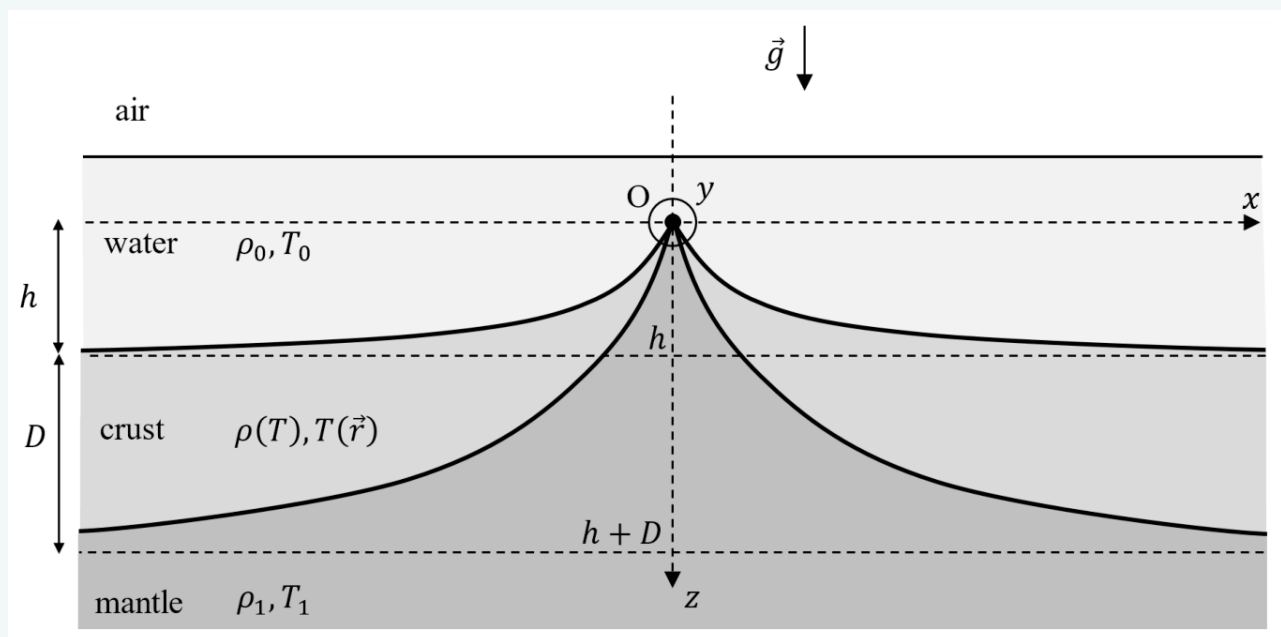


Abbildung 2. Mittelozeanischer Rücken. Beachten Sie, dass die z -Achse nach unten zeigt.

A.2 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie unter der Annahme einer isotropen Kruste, wie ihre Dichte ρ von ihrer Temperatur T abhängt. Schreiben Sie Ihre Antwort unter der Annahme $|k_l| \ll 1$ in der Näherungsform

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

wobei Terme der Ordnung k_l^2 und höher vernachlässigt werden. Bestimmen Sie anschließend die Konstante k .

Es ist bekannt, dass $k > 0$ gilt. Außerdem kann die Wärmeleitfähigkeit κ der Kruste als konstant angenommen werden. Daher hängt die Temperatur der Kruste in sehr großer Entfernung von der Rückenachse linear von der Tiefe ab.

A.3 — 1.1 Punkte

Drücken Sie unter der Annahme, dass sich Mantel und Wasser jeweils wie ein inkompressibles Fluid im hydrostatischen Gleichgewicht verhalten, die Krustendicke D in großer Entfernung durch h , ρ_0 , ρ_1 und k aus. Jegliche Bewegung des Materials kann vernachlässigt werden.

A.4 — 1.6 Punkte

Bestimmen Sie in führender Ordnung in k die resultierende horizontale Kraft F , die auf die rechte Hälfte ($x > 0$) der Kruste wirkt, in Abhängigkeit von ρ_0 , ρ_1 , h , L , k und g .

Nehmen Sie an, die Kruste sei vom Rest der Erde thermisch isoliert. Durch Wärmeleitung nähern sich die Temperaturen der Ober- und Unterseite der Kruste einander an, bis die Kruste das thermische Gleichgewicht erreicht. Die spezifische Wärmekapazität der Kruste beträgt c und kann als konstant angenommen werden.

A.5 — 0.9 Punkte

Schätzen Sie mithilfe einer Dimensionsanalyse oder einer Größenordnungsabschätzung die charakteristische Zeit τ ab, innerhalb derer sich die Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Kruste in großer Entfernung von der Rückenachse null annähert. Sie können annehmen, dass τ nicht von den beiden anfänglichen Oberflächentemperaturen der Kruste abhängt.

Teil B. Seismische Wellen in einem geschichteten Medium (5.0 Punkte)

Nehmen Sie an, an der Oberfläche eines Planeten ereigne sich ein kurzes Erdbeben. Es kann angenommen werden, dass die seismischen Wellen von einer Linienquelle bei $z = x = 0$ ausgehen, wobei x die horizontale Koordinate und z die Tiefe unterhalb der Oberfläche ist (Abb. 3). Die Quelle der seismischen Wellen kann als wesentlich länger als jede andere in dieser Teilaufgabe betrachtete Länge angenommen werden.

Infolge des Erdbebens wird ein gleichmäßiger Fluss sogenannter longitudinaler P-Wellen in alle Richtungen in der x - z -Ebene ausgesandt, die eine positive Komponente entlang der z -Achse aufweisen. Da die Wellentheorie in einem Festkörper im Allgemeinen kompliziert ist, vernachlässigen wir in dieser Aufgabe alle anderen vom Erdbeben ausgesandten Wellen. Die Kruste des Planeten ist so geschichtet, dass die Geschwindigkeit v der P-Wellen gemäß $v = v_0(1 + z/z_0)$ von der Tiefe z abhängt, wobei v_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche und z_0 eine bekannte positive Konstante ist.

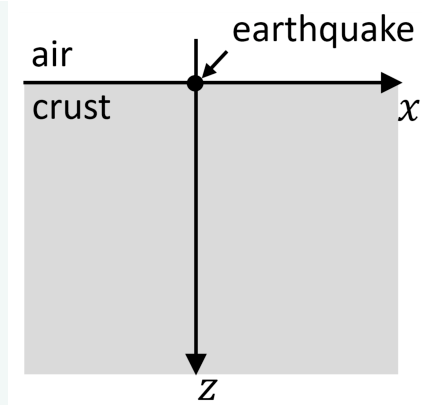


Abbildung 3. Das in Teil B verwendete Koordinatensystem.

B.1 — 1.5 Punkte

Betrachten Sie einen einzelnen, vom Erdbeben ausgesandten Strahl, der anfangs einen Winkel $0 < \theta_0 < \pi/2$ mit der z -Achse bildet und sich in der x - z -Ebene ausbreitet. Bei welcher horizontalen Koordinate $x_1(\theta_0) \neq 0$ kann dieser Strahl an der Oberfläche des Planeten nachgewiesen werden? Es ist bekannt, dass die Strahlbahn ein Kreisbogen ist. Schreiben Sie Ihre Antwort in der Form $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$, wobei A und b zu bestimmende Konstanten sind.

Falls Sie A und b nicht bestimmen konnten, können Sie in den folgenden Teilaufgaben das Ergebnis $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ als gegeben verwenden. Nehmen Sie an, dass die gesamte Energie pro Längeneinheit der Quelle, die während des Erdbebens als P-Wellen in die Kruste abgegeben wird, E beträgt. Nehmen Sie an, dass die Wellen vollständig absorbiert werden, wenn sie die Oberfläche des Planeten von unten erreichen.

B.2 — 1.5 Punkte

Bestimmen Sie, wie die von der Oberfläche absorbierte Energie pro Flächeneinheit $\varepsilon(x)$ vom Abstand x entlang der Oberfläche abhängt. Skizzieren Sie den Graphen von $\varepsilon(x)$.

Nehmen Sie von nun an an, dass die Wellen beim Erreichen der Oberfläche stattdessen vollständig reflektiert werden. Stellen Sie sich eine bei $z = x = 0$ angeordnete Vorrichtung vor, die dieselbe Geometrie wie die zuvor betrachtete Erdbebenquelle besitzt. Die Vorrichtung kann P-Wellen mit einer frei wählbaren Winkelverteilung aussenden. Wir lassen die Vorrichtung ein Signal in einem engen Bereich von Emissionswinkeln aussenden. Insbesondere liegt der anfängliche Winkel des Signals zur Vertikalen im Intervall $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, wobei $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ und $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ gelten.

B.3 — 2.0 Punkte

In welchem Abstand $x_{\max}$ von der Quelle entlang der Oberfläche liegt der am weitesten entfernte Punkt, den das Signal nicht erreicht? Drücken Sie Ihre Antwort durch θ_0 , $\delta\theta_0$ und die anderen oben angegebenen Konstanten aus.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A.1

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right)$$

Die Kraft zeigt in $+x$ -Richtung, vom Öl weg.

- A.2

$$\rho(T) = \rho_1 \left[1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]^{-3} \approx \rho_1 \left[1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad k = 3k_l.$$

- A.3

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}$$

im Rahmen der Dichtenäherung erster Ordnung.

- A.4 Die gesamte von den Fluiden ausgeübte horizontale Kraft beträgt in führender Ordnung

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2},$$

und ist vom Rücken weg entlang $+x$ gerichtet.

- A.5

$$\tau \sim \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa} = \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Dies ist eine Größenordnungsabschätzung.

- B.1

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0, \quad A = 2z_0, \quad b = 1.$$

- B.2

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

Der Graph ist achsensymmetrisch zur vertikalen Achse, hat sein Maximum bei $\varepsilon(0) = E/(2\pi z_0)$, erreicht bei $x = \pm 2z_0$ die Hälfte seines Maximalwerts und nähert sich wie x^{-2} null an.

- **B.3** Im Grenzfall eines schmalen Winkelbands gilt

$$x_{\max} \simeq \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

Dies ist die äußere Grenze des letzten nicht erreichten Intervalls in Ausbreitungsrichtung des Strahlenbündels. Ein exakter Ausdruck, der die ganzzahlige Anzahl der Reflexionen berücksichtigt, wird unten hergeleitet.

Lösung

A.1

Sei H die Höhe der Ölsäule über den Unterkanten der Platten. An diesen Kanten müssen die Drücke von Öl und Wasser übereinstimmen. Nach Abzug des Atmosphärendrucks gilt

$$\rho_{\text{oil}} g H = \rho_0 g h, \quad H = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} h.$$

Eine Flüssigkeitssäule der Höhe a und der Dichte ρ übt auf eine senkrechte Platte die horizontale Kraft

$$w \int_0^a \rho g (a - u) du = \frac{1}{2} \rho g w a^2$$

aus, wobei u die Höhe über dem unteren Ende der Säule angibt.

Das Öl drückt die rechte Platte in Richtung $+x$; das Wasser drückt sie in Richtung $-x$. Die Beiträge des Atmosphärendrucks auf beiden Seiten heben sich auf. Unter Einbeziehung des Öls oberhalb des äußeren Wasserspiegels ergibt sich

$$F_x = \frac{g w}{2} (\rho_{\text{oil}} H^2 - \rho_0 h^2).$$

Einsetzen von H ergibt

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right) > 0.$$

Die Platte wird also nach außen gedrückt.

A.2

Wir definieren die dimensionslose Temperaturdifferenz

$$q = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}.$$

Bei isotroper Ausdehnung ändern sich alle drei linearen Abmessungen um denselben Faktor. Folglich gilt

$$\frac{V(T)}{V(T_1)} = (1 - k_l q)^3.$$

Die Masse bleibt erhalten, und die Referenzdichte bei T_1 ist ρ_1 , also gilt

$$\rho(T) = \rho_1 (1 - k_l q)^{-3}.$$

Mit der angegebenen Näherungsentwicklung und unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung k_l^2 folgt

$$\rho(T) \approx \rho_1(1 + 3k_l q).$$

Der Vergleich mit Gleichung (2) ergibt

$$k = 3k_l.$$

A.3

Wir verwenden die nach unten gerichtete z -Achse aus Abb. 2. Weit vom Rücken entfernt erstreckt sich die Kruste von $z = h$ bis $z = h + D$. Ihre Temperatur ist

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D},$$

und damit ist ihre Dichte

$$\rho(z) \approx \rho_1 \left[1 + k \left(1 - \frac{z - h}{D} \right) \right].$$

Ihre mittlere Dichte ist

$$\bar{\rho} = \frac{1}{D} \int_h^{h+D} \rho(z) dz = \rho_1 \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Sei p_O der gemeinsame Fluiddruck am Scheitel des Rückens, wo die Kruste die Dicke null hat. Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht ergeben sich die Drücke unmittelbar oberhalb und unterhalb der weit entfernten Kruste:

$$\begin{aligned} p_{\text{top}} &= p_O + \rho_0 g h, \\ p_{\text{bottom}} &= p_O + \rho_1 g (h + D). \end{aligned}$$

Das vertikale Kräftegleichgewicht an einer Säule der weit entfernten, horizontal liegenden Kruste erfordert

$$p_{\text{bottom}} - p_{\text{top}} = \bar{\rho} g D.$$

Somit gilt

$$\rho_1 (h + D) - \rho_0 h = \rho_1 D \left(1 + \frac{k}{2} \right).$$

Nach Kürzen des gemeinsamen Terms $\rho_1 D$ erhält man

$$(\rho_1 - \rho_0) h = \frac{1}{2} \rho_1 k D,$$

also

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0) h}{\rho_1 k}.$$

A.4

Wir berechnen die Druckkräfte an den tatsächlichen Grenzflächen zwischen Wasser und Kruste sowie zwischen Mantel und Kruste.

Wir beschreiben die Ober- und Unterseite der Kruste durch $z = z_t(x)$ und $z = z_b(x)$. Ihre Werte an den Endpunkten sind

$$z_t(0) = z_b(0) = 0, \quad z_t(\infty) = h, \quad z_b(\infty) = h + D.$$

Die Druckfelder der Fluide lauten

$$p_w(z) = p_O + \rho_0 g z, \quad p_m(z) = p_O + \rho_1 g z.$$

Für ein Grenzflächenelement mit horizontaler Länge dx und Breite L enthält die horizontale Komponente der Druckkraft die Steigung der Oberfläche. Das obere Fluid drückt in negative x -Richtung, das untere dagegen in positive x -Richtung:

$$dF_x = L \left[p_m(z_b) \frac{dz_b}{dx} - p_w(z_t) \frac{dz_t}{dx} \right] dx.$$

Die Faktoren, die sich aus der geneigten Fläche und dem Einheitsnormalenvektor ergeben, heben sich auf, sodass dieser Ausdruck keine zusätzliche Näherung für kleine Steigungen erfordert. Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} F_x &= L \int_0^{h+D} (p_O + \rho_1 g z) dz - L \int_0^h (p_O + \rho_0 g z) dz \\ &= p_O L D + \frac{gL}{2} [\rho_1 (h+D)^2 - \rho_0 h^2]. \end{aligned}$$

Gleichwertig dazu ist

$$F_x = \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2 + (p_O + \rho_1 g h) L D + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_0) g L h^2.$$

Aus A.3 folgt bei festem h , dass $D \propto k^{-1}$ gilt. Bei festem Hintergrunddruck sind diese drei Beiträge von den Ordnungen k^{-2} , k^{-1} beziehungsweise k^0 . Der führende Term ist daher

$$F_x \simeq \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2.$$

Einsetzen des Ausdrucks für D ergibt

$$F_x \simeq \frac{2g L h^2 (\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2}.$$

Die Kraft zeigt entlang $+x$, vom Rücken weg. Dies ist die gesamte von den Fluiden ausgeübte Kraft; es wurde keine lithostatische Kraft an einer künstlichen Schnittfläche durch die weit entfernte Kruste abgezogen.

A.5

In führender Ordnung in k besitzt die Kruste die volumetrische Wärmekapazität $\rho_1 c$. Daraus ergibt sich die Temperaturleitfähigkeit

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1 c}.$$

Weit vom Rücken entfernt beträgt die maßgebliche Strecke, über die Wärme diffundieren muss, D . Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

liefert daher die Größenordnungsabschätzung

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi \frac{\Delta T}{D^2}.$$

Die Temperaturdifferenz kürzt sich wie gefordert heraus:

$$\tau \sim \frac{D^2}{\chi} = \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa}.$$

Mit A.3 folgt

$$\tau \sim \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

Eine Dimensionsanalyse bestimmt keinen numerischen Vorfaktor. Die Temperaturdifferenz zwischen den Oberflächen nähert sich asymptotisch null an, statt nach einer endlichen Zeit zu verschwinden.

B.1

In einem Medium, dessen Wellengeschwindigkeit nur von der Tiefe abhängt, bleibt nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz die horizontale Langsamkeit erhalten:

$$\frac{\sin \theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0},$$

wobei $\theta(z)$ der lokale Winkel zur Vertikalen ist. Da

$$v(z) = v_0 \frac{z + z_0}{z_0},$$

erhalten wir

$$\sin \theta(z) = \frac{z + z_0}{z_0} \sin \theta_0.$$

Wir definieren

$$R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}.$$

Auf dem absteigenden Abschnitt des Strahls gilt

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{z + z_0}{\sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}}.$$

Integration mit $x = 0$ bei $z = 0$ ergibt

$$x = \sqrt{R^2 - z_0^2} - \sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}.$$

Die Bahn liegt somit auf dem Kreis

$$(x - x_c)^2 + (z + z_0)^2 = R^2,$$

dessen Mittelpunkt folgende Koordinaten hat:

$$x_c = \sqrt{R^2 - z_0^2} = z_0 \cot \theta_0, \quad z_c = -z_0.$$

Der Strahl kehrt am tiefsten Punkt dieses Kreises um und kehrt symmetrisch zur Oberfläche zurück. Seine beiden Schnittpunkte mit $z = 0$ liegen bei $x = 0$ und $x = 2x_c$. Daher gilt

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0,$$

und

$$A = 2z_0, \quad b = 1.$$

Die Geschwindigkeit v_0 an der Oberfläche beeinflusst die Laufzeiten, kürzt sich jedoch bei der Bestimmung der Strahlgeometrie heraus.

B.2

Die nach unten gerichtete Halbebene umfasst einen Winkelbereich von π . Bei gleichmäßiger Emission entfällt daher die Energie pro Längeneinheit der Quelle

$$dE = \frac{E}{\pi} d\theta$$

auf ein Winkelintervall $d\theta$.

Für Strahlen, die bei $x > 0$ zurückkehren, gilt

$$x = 2z_0 \cot \theta, \quad \left| \frac{dx}{d\theta} \right| = 2z_0 \csc^2 \theta.$$

Die Energieerhaltung zwischen dem ausgesandten Winkelintervall und dem zugehörigen empfangenden Oberflächenstreifen ergibt

$$\varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} |d\theta|.$$

Somit gilt

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{2\pi z_0} \sin^2 \theta.$$

Mit

$$\cot \theta = \frac{x}{2z_0}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + x^2/(4z_0^2)},$$

erhalten wir

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}}.$$

Für die nach links gerichtete Emission ergibt sich derselbe Ausdruck für $x < 0$. Die Normierung lautet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} \left[\arctan \frac{x}{2z_0} \right]_{-\infty}^{\infty} = E.$$

Zur geforderten Skizze: Die Kurve ist glatt und symmetrisch bezüglich $x = 0$ und besitzt ein einziges Maximum $E/(2\pi z_0)$. Bei $x = \pm 2z_0$ beträgt ihre Höhe $E/(4\pi z_0)$, sodass ihre volle Halbwertsbreite $4z_0$ beträgt. Sie bleibt für jedes endliche x positiv, und ihre Ausläufer erfüllen

$$\varepsilon(x) \sim \frac{2Ez_0}{\pi x^2} \quad (|x| \gg z_0).$$

Da E die Energie pro Längeneinheit der Quelle ist, hat ε die Einheit Energie pro Flächeneinheit.

B.3

Bei einer spiegelnden Reflexion an der Oberfläche kehrt sich die vertikale Komponente der Strahlgeschwindigkeit um, während ihre horizontale Komponente erhalten bleibt. Jeder Strahl durchläuft daher wiederholt denselben, jeweils horizontal verschobenen Kreisbogen. Er trifft an den Stellen

$$x_n(\theta) = n\ell(\theta), \quad \ell(\theta) = 2z_0 \cot \theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

auf die Oberfläche.

Sei

$$\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \frac{\delta\theta_0}{2}.$$

Für ein Winkelband, das vollständig innerhalb von $0 < \theta < \pi/2$ liegt, sind der kürzeste und der längste Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Auftreffpunkten an der Oberfläche

$$\ell_{\min} = 2z_0 \cot \theta_+, \quad \ell_{\max} = 2z_0 \cot \theta_-.$$

Da das Strahlenbündel das Winkelintervall ausfüllt, ist das beim n -ten Auftreffen erreichte Oberflächenintervall

$$I_n = [n\ell_{\min}, n\ell_{\max}].$$

Zwischen I_n und I_{n+1} besteht genau dann eine Lücke, wenn

$$n\ell_{\max} < (n+1)\ell_{\min},$$

oder

$$n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) < \ell_{\min}.$$

Setzen wir $\Delta\ell = \ell_{\max} - \ell_{\min}$. Sobald $n\Delta\ell \geq \ell_{\min}$ gilt, überlappen sich benachbarte Intervalle, und dies gilt auch für jedes größere n . Folglich ist die exakte äußere Grenze der letzten Lücke

$$x_{\max} = \ell_{\min} \left\lceil \frac{\ell_{\min}}{\Delta\ell} \right\rceil.$$

Die Aufrundungsfunktion berücksichtigt die ganzzahlige Anzahl der Auftreffvorgänge an der Oberfläche. Die Grenze selbst wird erreicht; nicht erreichte Punkte nähern sich ihr von unten an.

Für die geforderte Näherung eines schmalen Winkelbands gilt

$$\ell_0 = 2z_0 \cot \theta_0,$$

und

$$\Delta\ell \simeq \left| \frac{d\ell}{d\theta} \right|_{\theta_0} \delta\theta_0 = 2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0.$$

Bei festem θ_0 sind für ein hinreichend schmales Winkelband viele Reflexionen erforderlich, bevor sich die Intervalle überlappen. In führender Ordnung kann die ganzzahlige Rundung dann vernachlässigt werden:

$$x_{\max} \simeq \frac{\ell_0^2}{\Delta\ell}.$$

Daher gilt

$$x_{\max} \simeq \frac{(2z_0 \cot \theta_0)^2}{2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta\theta_0}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Elektrostatische Linse

Betrachten Sie einen gleichmäßig geladenen metallischen Ring mit dem Radius R und der Gesamtladung q . Der Ring ist ein hohler Torus mit der Dicke $2a \ll R$. Diese Dicke kann in den Teilen A, B, C und E vernachlässigt werden. Die xy -Ebene fällt mit der Ringebene zusammen, während die z -Achse senkrecht dazu steht, wie in Abbildung 1 gezeigt. In den Teilen A und B benötigen Sie möglicherweise die Formel (Taylorentwicklung)

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \quad \text{wenn } |x| \ll 1.$$

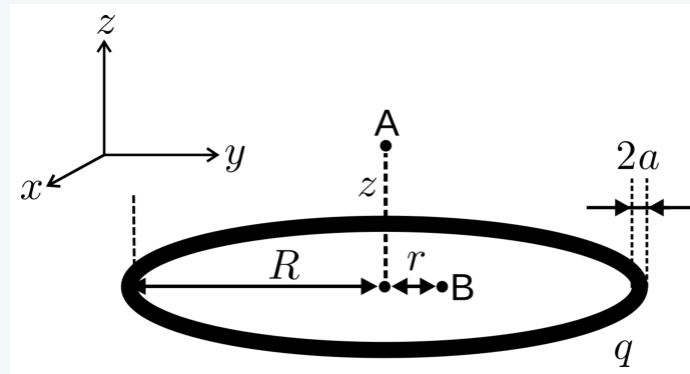


Abbildung 1. Ein geladener Ring mit dem Radius R .

Teil A. Elektrostatistisches Potential auf der Ringachse (1 Punkt)

A.1	Berechnen Sie das elektrostatistische Potential $\Phi(z)$ entlang der Ringachse im Abstand z vom Mittelpunkt des Rings (Punkt A in Abbildung 1).	0.3 Pkt.
A.2	Berechnen Sie das elektrostatistische Potential $\Phi(z)$ bis zur niedrigsten nichtverschwindenden Potenz von z unter der Annahme $z \ll R$.	0.4 Pkt.
A.3	Ein Elektron (Masse m und Ladung $-e$) wird in Punkt A platziert (Abbildung 1, $z \ll R$). Welche Kraft wirkt auf das Elektron? Bestimmen Sie anhand des Ausdrucks für die Kraft das Vorzeichen von q , bei dem die resultierende Bewegung eine Schwingung ist. Das bewegte Elektron beeinflusst die Ladungsverteilung auf dem Ring nicht.	0.2 Pkt.
A.4	Welche Kreisfrequenz ω haben solche harmonischen Schwingungen?	0.1 Pkt.

Teil B. Elektrostatistisches Potential in der Ringebene (1.7 Punkte)

In diesem Teil der Aufgabe sollen Sie das Potential $\Phi(r)$ in der Ringebene ($z = 0$) für $r \ll R$ untersuchen (Punkt B in Abbildung 1). Bis zur niedrigsten nichtverschwindenden Potenz von r ist das elektrostatistische Potential durch $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ gegeben.

B.1	Bestimmen Sie den Ausdruck für β . Möglicherweise benötigen Sie die oben angegebene Taylorentwicklung.	1.5 Pkt.
B.2	Ein Elektron wird in Punkt B platziert (Abbildung 1, $r \ll R$). Welche Kraft wirkt auf das Elektron? Bestimmen Sie anhand des Ausdrucks für die Kraft das Vorzeichen von q , bei dem die resultierende Bewegung eine harmonische Schwingung ist. Das bewegte Elektron beeinflusst die Ladungsverteilung auf dem Ring nicht.	0.2 Pkt.

Teil C. Die Brennweite der idealisierten elektrostatischen Linse: augenblickliches Aufladen (2.3 Punkte)

Man möchte eine Vorrichtung zur Fokussierung von Elektronen bauen — eine elektrostatische Linse. Betrachten wir dazu den folgenden Aufbau. Der Ring steht senkrecht zur z -Achse, wie in Abbildung 2 gezeigt. Es steht eine Quelle zur Verfügung, die auf Abruf Pakete nichtrelativistischer Elektronen erzeugt. Die kinetische Energie dieser Elektronen beträgt $E = mv^2/2$ (v ist die Geschwindigkeit), und sie verlassen die Quelle zu genau gesteuerten Zeitpunkten. Das System ist so programmiert, dass der Ring die meiste Zeit elektrisch neutral ist, seine Ladung jedoch q beträgt, wenn die Elektronen weniger als den Abstand $d/2$ ($d \ll R$) von der Ringebene entfernt sind (schattierter Bereich in Abbildung 2, als „aktiver Bereich“ bezeichnet). Nehmen Sie in Teil C an, dass das Aufladen und Entladen augenblicklich erfolgen und das elektrische Feld ebenfalls augenblicklich „den Raum erfüllt“. Magnetfelder können vernachlässigt werden, und die Geschwindigkeit der Elektronen in z -Richtung kann als konstant angenommen werden. Die bewegten Elektronen stören die Ladungsverteilung auf dem Ring nicht.

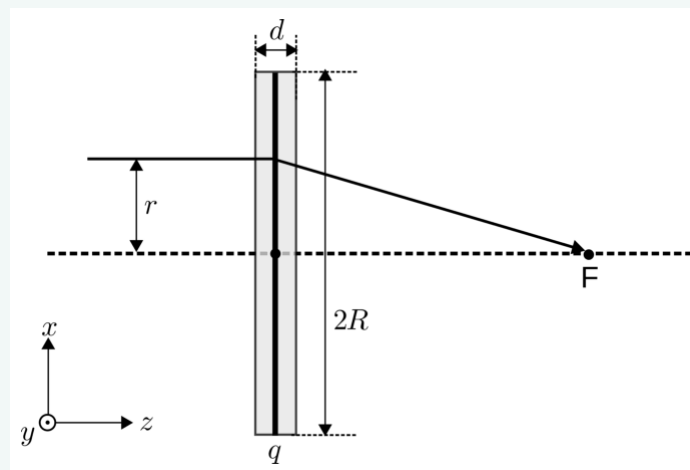


Abbildung 2. Ein Modell einer elektrostatischen Linse.

C.1	Bestimmen Sie die Brennweite f dieser Linse. Nehmen Sie an, dass $f \gg d$. Drücken Sie Ihre Antwort durch die Konstante β aus Frage B.1 und andere bekannte Größen aus. Nehmen Sie an, dass sich das Elektronenpaket vor dem Erreichen des „aktiven Bereichs“ parallel zur z -Achse bewegt und $r \ll R$ gilt. Das Vorzeichen von q ist so gewählt, dass die Linse fokussiert.	1.3 Pkt.
-----	---	-------------

In Wirklichkeit befindet sich die Elektronenquelle auf der z -Achse im Abstand $b > f$ vom Mittelpunkt des Rings. Gehen Sie davon aus, dass sich die Elektronen vor dem Erreichen des „aktiven Bereichs“ nicht mehr parallel zur z -Achse bewegen, sondern von einer Punktquelle unter verschiedenen Winkeln $\gamma \ll 1$ rad zur z -Achse emittiert werden. Die Elektronen werden in einem Punkt im Abstand c vom Mittelpunkt des Rings fokussiert.

C.2	Bestimmen Sie c . Drücken Sie Ihre Antwort durch die Konstante β aus Frage B.1 und andere bekannte Größen aus.	0.8 Pkt.
C.3	Gilt die Gleichung einer dünnen optischen Linse $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$ für die elektrostatische Linse? Zeigen Sie dies, indem Sie $1/b + 1/c$ explizit berechnen.	0.2 Pkt.

Teil D. Der Ring als Kondensator (3 Punkte)

Das oben betrachtete Modell war idealisiert, und wir haben angenommen, dass der Ring augenblicklich aufgeladen wird. In Wirklichkeit erfolgt das Aufladen nicht augenblicklich, da der Ring ein Kondensator mit einer endlichen Kapazität C ist. In diesem Teil untersuchen wir die Eigenschaften dieses Kondensators. Möglicherweise benötigen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1	Berechnen Sie die Kapazität C des Rings. Berücksichtigen Sie, dass der Ring eine endliche Dicke $2a$ hat, beachten Sie aber, dass $a \ll R$ gilt.	2.0 Pkt.
-----	---	----------

Wenn die Elektronen den „aktiven Bereich“ erreichen, wird der Ring an eine Spannungsquelle mit der Spannung V_0 angeschlossen (Abbildung 3). Wenn die Elektronen den „aktiven Bereich“ durchquert haben, wird der Ring geerdet. Der Widerstand der Kontakte beträgt R_0 , und der Widerstand des Rings selbst kann vernachlässigt werden.

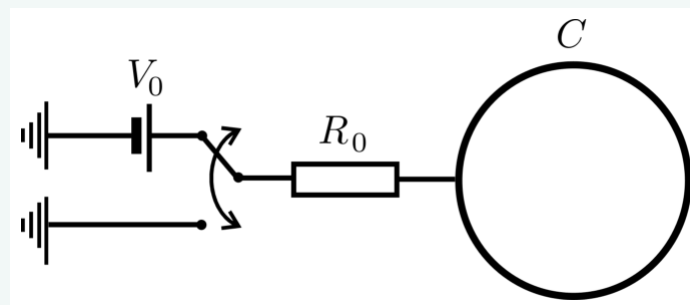


Abbildung 3. Aufladen der elektrostatischen Linse.

D.2	Bestimmen Sie die Ladung auf dem Ring als Funktion der Zeit, $q(t)$, und skizzieren Sie diesen Verlauf. $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt, zu dem sich die Elektronen in der Ringebene befinden. Wie groß ist die Ladung auf dem Ring q_0 , wenn der Betrag von $q(t)$ maximal ist? Die Kapazität des Rings beträgt C (Sie müssen also nicht den in D.1 gefundenen tatsächlichen Ausdruck verwenden). <i>Anmerkung:</i> Die in Abbildung 3 eingezeichnete Polarität dient lediglich der Veranschaulichung. Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass die Linse fokussiert.	1.0 Pkt.
-----	--	----------

Teil E. Brennweite einer realistischeren Linse: nicht augenblickliches Aufladen (2 Punkte)

In diesem Teil der Aufgabe betrachten wir die Wirkung dieser realistischeren Linse. Dabei vernachlässigen wir erneut die Dicke des Rings $2a$ und nehmen an, dass sich die Elektronen vor dem Erreichen des „aktiven Bereichs“ parallel zur z -Achse bewegen. Das Aufladen des Rings erfolgt jedoch nicht mehr augenblicklich.

E.1	Bestimmen Sie die Brennweite f der Linse. Nehmen Sie an, dass $f/v \gg R_0 C$, während d/v und $R_0 C$ von derselben Größenordnung sind. Drücken Sie Ihre Antwort durch die Konstante β aus Teil B und andere bekannte Größen aus.	1.7 Pkt.
E.2	Sie werden feststellen, dass das Ergebnis für f dem in Teil C erhaltenen ähnelt, wobei der Wert q durch q_{eff} ersetzt wird. Bestimmen Sie den Ausdruck für q_{eff} in Abhängigkeit von	0.3 Pkt.

Antworten

Wir verwenden

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad T = \frac{d}{v}, \quad \tau = R_0 C, \quad Q = CV_0.$$

Dabei gilt $e > 0$, das Potential verschwindet im Unendlichen, und V_0 ist die angelegte Spannung mit Vorzeichen: Für eine Fokussierung muss $V_0 < 0$ gelten, also $Q < 0$. Alle Näherungsergebnisse haben die in der Aufgabe geforderte Genauigkeit.

- **A.1:** $\Phi(z) = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$
- **A.2:** $\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right).$
- **A.3:** $\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}.$ Axiale Schwingungen erfordern $q > 0$.
- **A.4:** $\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}},$ für $q > 0$.
- **B.1:** $\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}.$
- **B.2:** $\mathbf{F}_\perp = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp.$ Schwingungen in der Ebene erfordern $q < 0$.
- **C.1:** $f = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta|q|d}.$
- **C.2:** $c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$
- **C.3:** Ja: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{e\beta|q|d}{E} = \frac{1}{f}.$
- **D.1:** $C \approx \frac{4\pi^2\epsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$
- **D.2:**

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[1 - \exp\left(-\frac{t+T/2}{\tau}\right) \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ q_0 \exp\left(-\frac{t-T/2}{\tau}\right), & t > T/2, \end{cases} \quad q_0 = Q \left(1 - e^{-T/\tau}\right) < 0.$$

Der Graph fällt von null auf sein Minimum q_0 bei $t = T/2$ und nähert sich anschließend von unten exponentiell null an.

- **E.1:** $f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}.$
- **E.2:** $q_{\text{eff}} = CV_0 = \frac{q_0}{1 - e^{-d/(vR_0 C)}}.$

Lösung

Für ein Elektron ist die potentielle Energie $U = -e\Phi$. Daher gilt

$$\mathbf{F} = -\nabla U = e\nabla\Phi.$$

Damit sind die Vorzeichen der Kräfte in der gesamten Lösung festgelegt.

A.1

Jedes Ladungselement auf dem Ring hat vom Beobachtungspunkt auf der Ringachse denselben Abstand $\sqrt{R^2 + z^2}$. Nach dem Superpositionsprinzip gilt

$$\Phi(z) = k \int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}}.$$

A.2

Für $|z| \ll R$ gilt

$$\Phi(z) = \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2}.$$

Mit der angegebenen Entwicklung für $\varepsilon = -1/2$ ergibt sich

$$\boxed{\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R^3} z^2}.$$

Der erste nichtkonstante Term ist quadratisch, weil das Potential unter $z \mapsto -z$ unverändert bleibt.

A.3

Durch Ableiten des Potentials auf der Achse erhält man

$$F_z = e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{keqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx -\frac{keq}{R^3} z.$$

Somit gilt

$$\boxed{\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}}.$$

Eine rücktreibende Kraft muss in Richtung $z = 0$ zeigen. Daher ist

$$\boxed{q > 0}$$

für axiale Schwingungen erforderlich.

A.4

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{z} = -\frac{keq}{R^3} z.$$

Der Vergleich mit $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ liefert

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}}.$$

B.1

Wir legen den Beobachtungspunkt nach $(r, 0, 0)$. Ein Ringelement beim Polarwinkel θ hat die Ladung

$$dq = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

und den Abstand

$$s = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$$

von diesem Punkt. Mit $\rho = r/R$ folgt somit

$$\Phi(r) = \frac{kq}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

Die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in ρ ergibt

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho \cos \theta) + \frac{3}{8}(4\rho^2 \cos^2 \theta) \\ &= 1 + \rho \cos \theta + \rho^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Die Winkelmittelwerte lauten

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

Daher gilt

$$\Phi(r) \approx \frac{kq}{R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

Der Vergleich mit $q(\alpha + \beta r^2)$ liefert

$$\alpha = \frac{k}{R}, \quad \boxed{\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}}.$$

B.2

Sei $\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. Wegen $r^2 = x^2 + y^2$ gilt

$$\boxed{\mathbf{F}_\perp = e\nabla_\perp \Phi = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp}.$$

Die Kraft in der Ringebene ist genau dann rücktreibend, wenn

$$\boxed{q < 0}.$$

Für dieses Vorzeichen erfüllt jede transversale Koordinate die Gleichung eines harmonischen Oszillators. Axiale und transversale Stabilität erfordern somit entgegengesetzte Vorzeichen der Ringladung.

C.1

Das Elektron verbringt die Zeit

$$T = \frac{d}{v}$$

im aktiven Bereich. Da $d \ll R$ gilt, kann die transversale Kraft dort mithilfe von B.2 berechnet werden. Außerdem erlaubt uns $f \gg d$, die Änderung der transversalen Position während der Wechselwirkung zu vernachlässigen.

Für ein einfallendes Elektron im transversalen Abstand r beträgt der transversale Kraftstoß

$$m\Delta v_r = F_r T = 2e\beta q r \frac{d}{v}.$$

Die transversale Anfangsgeschwindigkeit ist null, daher gilt

$$v_{r,\text{out}} = \frac{2e\beta q r d}{mv} < 0$$

für die fokussierende Wahl $q < 0$.

Nach dem Verlassen des aktiven Bereichs bewegt sich das Elektron geradlinig. In der Näherung einer dünnen Linse beträgt die Entfernung bis zum Achsenschnittpunkt

$$f = -\frac{vr}{v_{r,\text{out}}}.$$

Folglich gilt

$$f = -\frac{mv^2}{2e\beta q d} = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta|q|d}.$$

Dass sich r herauskürzt, zeigt, dass alle hinreichend achsennahen parallelen Strahlen dieselbe Brennweite haben.

C.2

Ein Elektron, das unter dem Winkel $\gamma \ll 1$ aus einer Quelle im Abstand b emittiert wird, erreicht die Linse bei

$$r \approx b\gamma.$$

Für seine transversale Eintrittsgeschwindigkeit gilt

$$\frac{v_{r,\text{in}}}{v} \approx \gamma \approx \frac{r}{b}.$$

Die Linse bewirkt dieselbe Änderung der transversalen Geschwindigkeit wie in C.1. Somit gilt

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = \frac{r}{b} + \frac{2e\beta q r d}{mv^2} = r \left(\frac{1}{b} + \frac{e\beta q d}{E} \right).$$

Damit die austretende Bahn die Achse im Abstand c hinter dem Ring schneidet, muss gelten

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = -\frac{r}{c}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{b} - \frac{e\beta q d}{E} = \frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b}.$$

Also erhält man

$$c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$$

Die vorgegebene Bedingung $b > f$ stellt sicher, dass $c > 0$ gilt.

C.3

Mit dem gerade erhaltenen Ergebnis folgt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \left(\frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b} \right) = \frac{e\beta|q|d}{E}.$$

Nach C.1 ist dies gleich $1/f$, sodass

$$\boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}}.$$

Die Gleichung der dünnen optischen Linse ist daher im Rahmen der angegebenen Näherungen erfüllt.

D.1

Die Kapazität des isolierten Rings beträgt

$$C = \frac{q}{\Phi_s},$$

wobei Φ_s sein Oberflächenpotential relativ zum Unendlichen ist.

Für einen dünnen Torus führen wir die Ladung pro Längeneinheit ein:

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

Wir wählen eine Zwischenlänge ℓ , für die gilt

$$a \ll \ell \ll R.$$

Wir berechnen das Oberflächenpotential, indem wir die Beiträge eines nahen, näherungsweise geraden Ringabschnitts und des entfernten, gekrümmten Ringabschnitts zusammenfassen.

Lokal ähnelt der Leiter einem Zylinder mit dem Radius a . Sein äußeres Potential kann mit der erforderlichen Genauigkeit durch eine Ladung auf seiner Achse dargestellt werden. Der Beitrag des Abschnitts $-\ell < s < \ell$ ist daher

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{near}} &\approx k\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} \\ &= 2k\lambda \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right) \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{2\ell}{a}.\end{aligned}$$

Für den entfernten Abschnitt kann die Dicke vernachlässigt werden. Sei

$$\delta = \frac{\ell}{R} \ll 1.$$

Der Abstand zwischen zwei Punkten auf dem Ring, die um den Winkel θ voneinander getrennt sind, beträgt $2R \sin(\theta/2)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{far}} &\approx k\lambda \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{R d\theta}{2R \sin(\theta/2)} \\
&= k\lambda \int_{\delta/2}^{\pi-\delta/2} \frac{du}{\sin u} \\
&= 2k\lambda \ln \cot \frac{\delta}{4} \\
&\approx 2k\lambda \ln \frac{4R}{\ell}.
\end{aligned}$$

Beim Addieren der Beiträge fällt die willkürlich gewählte Zwischenlänge heraus:

$$\begin{aligned}
\Phi_s &\approx 2k\lambda \left(\ln \frac{2\ell}{a} + \ln \frac{4R}{\ell} \right) \\
&= 2k\lambda \ln \frac{8R}{a} \\
&= \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R} \ln \frac{8R}{a}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$C \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$$

Der endliche Radius a liefert die untere Abstandsschranke, durch die das Oberflächenpotential endlich bleibt.

D.2

Die Elektronen betreten und verlassen den aktiven Bereich zu den Zeitpunkten

$$t_- = -\frac{T}{2}, \quad t_+ = \frac{T}{2}, \quad T = \frac{d}{v}.$$

Der Ring ist anfangs neutral. Wir definieren

$$\tau = R_0 C, \quad Q = CV_0 < 0.$$

Solange der Ring mit der Quelle verbunden ist, lautet die Schaltungsgleichung

$$R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0,$$

oder

$$\tau \dot{q} + q = Q.$$

Mit $q(t_-) = 0$ ergibt sich

$$q(t) = Q \left[1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], \quad -T/2 \leq t \leq T/2.$$

Wenn der Ring geerdet ist, gilt

$$\tau \dot{q} + q = 0.$$

Die Ladung ist beim Umschalten stetig, daher gilt

$$q(t) = q_0 e^{-(t-T/2)/\tau}, \quad t > T/2,$$

wobei

$$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) = CV_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{d}{vR_0C} \right) \right].$$

Fasst man die Zeitintervalle zusammen, erhält man

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ Q(1 - e^{-T/\tau})e^{-(t-T/2)/\tau}, & t > T/2. \end{cases}$$

Für die geforderte Skizze zeichnen Sie $q(t)$ nach Beginn des Aufladens unterhalb der Zeitachse. Die Ladung ist zunächst null, fällt während des Aufladens stetig mit abnehmender Steilheit, erreicht bei $t = T/2$ ihren negativsten Wert und steigt anschließend exponentiell gegen null an. Die Steigung ändert sich an beiden Umschaltzeitpunkten sprunghaft, während $q(t)$ stetig bleibt.

Hilfreiche Punkte sind:

Zeit	Ladung
$-T/2$	0
0	$Q(1 - e^{-T/(2\tau)})$
$T/2$	$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau})$
$T/2 + \tau$	$q_0 \exp(-1)$
$t \rightarrow +\infty$	0, Annäherung von unten

Somit ist $|q(t)|$ maximal, wenn die Elektronen den aktiven Bereich verlassen.

E.1

Hier sind τ und $T = d/v$ vergleichbar. Daher erfolgen das Aufladen und der wesentliche Teil des Entladens, während sich die Elektronen noch innerhalb eines longitudinalen Abstands der Größenordnung d vom Ring befinden. Da $d \ll R$ gilt, bleibt die transversale Kraft aus B.2 anwendbar:

$$F_r(t) \approx 2e\beta q(t)r.$$

Außerdem bedeutet $f/v \gg \tau$, dass die Fokussierung erst lange nach dem weitgehenden Abklingen der Ladung erfolgt. Während des Kraftpulses ist die transversale Verschiebung klein gegenüber r , sodass r bei der Berechnung des Kraftstoßes konstant gehalten werden kann:

$$m\Delta v_r = 2e\beta r \int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt.$$

Der Beitrag des Aufladens ist

$$\begin{aligned} I_{\text{ch}} &= Q \int_{-T/2}^{T/2} [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}] dt \\ &= Q [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})]. \end{aligned}$$

Der Beitrag des Entladens ist

$$\begin{aligned} I_{\text{dis}} &= q_0 \int_{T/2}^{\infty} e^{-(t-T/2)/\tau} dt \\ &= q_0 \tau = Q\tau(1 - e^{-T/\tau}). \end{aligned}$$

Ihre Summe beträgt

$$\int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt = QT = CV_0 \frac{d}{v}.$$

Folglich gilt

$$\Delta v_r = \frac{2e\beta r Q d}{mv}.$$

Mit derselben Geometrie der dünnen Linse wie in C.1 ergibt sich

$$f = -\frac{vr}{\Delta v_r} = -\frac{mv^2}{2e\beta CV_0 d} = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}.$$

Der Widerstand verändert die Form und Dauer des Ladungspulses, doch seine Beiträge zum gesamten Kraftstoß heben sich zwischen Aufladen und Entladen auf. Die endliche räumliche Ausdehnung der Wechselwirkung führt zu Korrekturen jenseits der angenommenen Genauigkeit der Näherung einer dünnen Linse.

E.2

Durch Vergleich von

$$f = -\frac{E}{e\beta q d} \quad \text{und} \quad f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d},$$

erhalten wir

$$q_{\text{eff}} = CV_0.$$

Gleichwertig folgt mit D.2

$$q_{\text{eff}} = \frac{q_0}{1 - \exp[-d/(vR_0C)]}.$$

Diese effektive Ladung entspricht der Ladung, die der Ring erreichen würde, wenn er unbegrenzt lange an der angelegten Spannung gehalten würde. Ihr Betrag übersteigt den tatsächlichen Spitzenwert der Ladung, weil auch der ausklingende Entladeverlauf zur Fokussierung beiträgt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Teilchen und Wellen

Der Welle-Teilchen-Dualismus, dem zufolge jedes Teilchen als Welle beschrieben werden kann und umgekehrt, ist eines der zentralen Konzepte der Quantenmechanik. In dieser Aufgabe werden wir auf Grundlage dieses Konzepts und nur weniger weiterer grundlegender Annahmen eine Auswahl von Quantenphänomenen untersuchen, die die beiden unterschiedlichen Teilchenarten der Mikrowelt betreffen: Fermionen und Bosonen.

Teil A. Quantenteilchen im Kasten (1.4 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m , das sich in einem eindimensionalen Potentialtopf bewegt, in dem seine potentielle Energie $V(x)$ gegeben ist durch

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ oder } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Während sich ein klassisches Teilchen in einem solchen Potential mit beliebiger kinetischer Energie bewegen kann, sind für ein Quantenteilchen nur bestimmte positive, diskrete Energieniveaus erlaubt. In jedem dieser erlaubten Zustände lässt sich das Teilchen als stehende de-Broglie-Welle mit Knoten an den Wänden beschreiben.

A.1 — 0.4 Punkte

Bestimmen Sie die kleinstmögliche Energie $E_{\min}$ des Quantenteilchens im Potentialtopf. Drücken Sie Ihre Antwort durch m , L und die Planck-Konstante h aus.

Der Zustand des Teilchens mit der kleinstmöglichen Energie heißt Grundzustand, alle übrigen erlaubten Zustände heißen angeregte Zustände. Wir ordnen alle möglichen Energiewerte aufsteigend und bezeichnen sie mit E_n , beginnend mit E_1 für den Grundzustand.

A.2 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie den allgemeinen Ausdruck für die Energie E_n (hier ist $n = 1, 2, 3, \dots$).

A.3 — 0.4 Punkte

Das Teilchen kann nur unter Emission oder Absorption eines Photons mit der entsprechenden Energiedifferenz einen instantanen Übergang von einem Zustand in einen anderen vollziehen. Bestimmen Sie die Wellenlänge λ_{21} des Photons, das beim Übergang des Teilchens vom ersten angeregten Zustand (E_2) in den Grundzustand (E_1) emittiert wird.

Teil B. Optische Eigenschaften von Molekülen (2.1 Punkte)

In diesem Teil untersuchen wir verschiedene optische Eigenschaften des Cyaninmoleküls Cy5, eines häufig verwendeten Farbstoffmoleküls, das in Abb. 1a schematisch dargestellt ist. Seine optischen Eigenschaften werden hauptsächlich durch das Kohlenstoffgerüst bestimmt, das aus abwechselnden Einfach- und Doppelbindungen zwischen Kohlenstoffatomen besteht und in Abb. 1b gezeigt ist; der Einfluss der Ringe an den Molekülenenden sowie der Reste R ist wesentlich geringer. Drei der vier Valenzelektronen jedes C-Atoms (und der N-Atome) im Gerüst bilden die chemischen Bindungen, während die verbleibenden Valenzelektronen „gemeinsam genutzt“ werden und sich entlang des gesamten Gerüsts bewegen können. Die gesamte potentielle Energie jedes dieser Elektronen ist in Abb. 1c durch eine oszillierende dünne Linie dargestellt, deren Minima den Positionen der C- und N-Atome entsprechen.

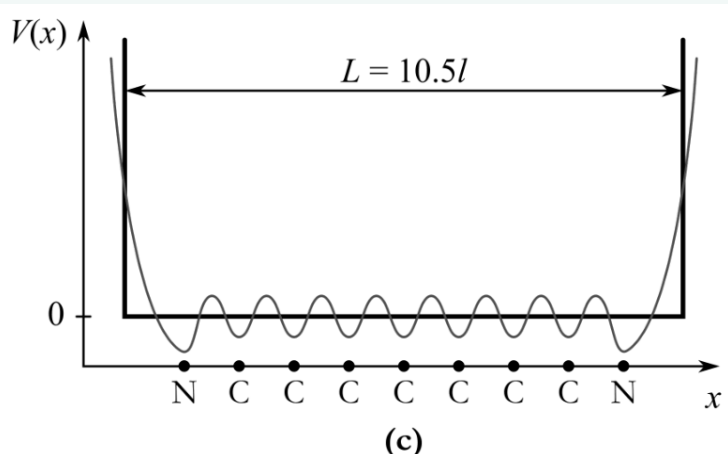
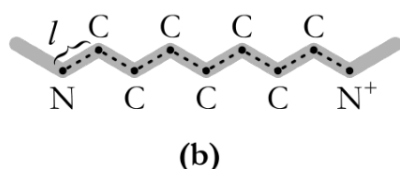
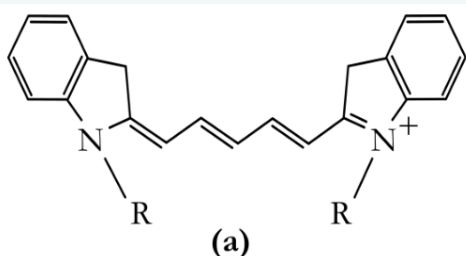


Abbildung 1. (a) Chemische Struktur des Cyaninmoleküls Cy5 (der Einfachheit halber sind Wasserstoffatome nicht dargestellt, und R bezeichnet bestimmte Reste). (b) Das Gerüst des Cy5-Moleküls mit dem mittleren Atomabstand l . (c) Potentielle Energie des Elektrons entlang des Gerüsts (dünne Linie) und ihre Näherung durch die in Gl. 1 angegebene Stufenfunktion (dicke Linie).

Der Einfachheit halber nähern wir dieses Profil der potentiellen Energie durch die einfache Funktion aus Gl. 1 mit der Breite $L = 10.5l$ an (siehe dicke Linie in Abb. 1c); dabei ist $l = 140$ pm der mittlere Atomabstand (siehe auch Abb. 1b). Dadurch erhalten wir ein „Elektronengas“ aus 10 Elektronen (7 von C-Atomen, 2 vom N-Atom und 1 vom N^+ -Ion), die sich in dem in Teil A behandelten eindimensionalen Potentialtopf bewegen. Bei unserer Abschätzung können wir die gegenseitige Wechselwirkung dieser Elektronen vernachlässigen; wir müssen jedoch berücksichtigen, dass Elektronen Fermionen sind und daher dem Pauli-Prinzip gehorchen. Wir vernachlässigen außerdem den Einfluss anderer Elektronen sowie die Bewegung der Atomkerne.

B.1 — 0.8 Punkte

Schätzen Sie die größte Wellenlänge λ eines Photons ab, das vom Cy5-Molekül absorbiert werden kann, wenn sich das Elektronensystem anfangs im Grundzustand befindet. Drücken Sie Ihre Antwort durch l , physikalische Konstanten und einen numerischen Vorfaktor aus und berechnen Sie den Zahlenwert.

B.2 — 0.4 Punkte

Ein weiteres Farbstoffmolekül, Cy3, hat eine ähnliche Struktur, sein Gerüst ist jedoch um 2 Kohlenstoffatome kürzer. Ist sein Absorptionsspektrum gegenüber dem des Cy5-Moleküls zum blauen oder zum roten Spektralbereich hin verschoben? Berechnen Sie näherungsweise den Betrag $\Delta\lambda$ dieser spektralen Verschiebung. Sie dürfen annehmen, dass das Entfernen zweier Kohlenstoffatome die Form des Moleküls nicht verändert und lediglich die Länge des Gerüsts um zwei Atomabstände verkürzt.

Im angeregten Zustand kann das Molekül unter Emission eines Photons spontan in den Grundzustand übergehen. Die mittlere Rate K solcher Ereignisse (d. h. die relative Abnahme der Zahl der Moleküle im angeregten Zustand, dN/N , während der Zeit dt , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) wird durch die Wellenlänge λ des emittierten Photons, das elektrische Übergangsdipolmoment d (das von der Größenordnung $d \simeq el$ ist, wobei e die Elementarladung ist) sowie die Vakuumpermittivität ϵ_0 und die Planck-Konstante h bestimmt.

B.3 — 0.7 Punkte

Bestimmen Sie mithilfe einer Dimensionsanalyse den Ausdruck für die Rate der spontanen Emission in Abhängigkeit von ϵ_0 , h , λ und d . Der numerische Vorfaktor für Ihren Ausdruck ist $= \frac{16}{3}\pi^3$.

B.4 — 0.2 Punkte

Für das Cy5-Molekül gilt $d \approx 2.4 el$. Schätzen Sie die mittlere Fluoreszenzlebensdauer des niedrigsten angeregten Zustands des Cy5-Moleküls, τ_{Cy5} , ab; sie ist der Kehrwert der Rate seines strahlenden Übergangs in den Grundzustand.

Teil C. Bose-Einstein-Kondensation (1.5 Punkte)

Dieser Teil steht nicht in direktem Zusammenhang mit den Teilen A und B. Hier untersuchen wir das kollektive Verhalten bosonischer Teilchen. Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Prinzip und zeigen bei niedrigen Temperaturen oder hohen Dichten ein ausgeprägtes Phänomen, das als Bose-Einstein-Kondensation (BEC) bekannt ist. Dabei handelt es sich um einen Phasenübergang in einen faszinierenden kollektiven Quantenzustand: Eine große Anzahl identischer Teilchen „kondensiert“ in einen einzigen Quantenzustand und beginnt, sich wie eine einzige Welle zu verhalten. Der Übergang wird üblicherweise erreicht, indem eine feste Anzahl von Teilchen unter die kritische Temperatur abgekühlt wird. Grundsätzlich lässt er sich auch herbeiführen, indem man die Temperatur konstant hält und die Teilchendichte über ihren kritischen Wert erhöht.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Teilchendichte beim Übergang. Wie sich zeigt, lassen sich ihre kritischen Werte anhand einer einfachen Beobachtung abschätzen: *Bose-Einstein-Kondensation tritt ein, wenn die de-Broglie-Wellenlänge, die dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Teilchen entspricht, gleich dem charakteristischen Abstand zwischen den Teilchen im Gas ist.*

C.1 — 0.4 Punkte

Gegeben sei ein wechselwirkungsfreies Gas aus ^{87}Rb -Atomen im thermischen Gleichgewicht. Geben Sie die Ausdrücke für ihren typischen Impuls p und ihre typische de-Broglie-Wellenlänge λ_{dB} als Funktion der Atommasse m , der Temperatur T und physikalischer Konstanten an.

C.2 — 0.5 Punkte

Berechnen Sie den typischen Abstand zwischen den Teilchen im Gas, ℓ , als Funktion der Teilchendichte n . Leiten Sie daraus die kritische Temperatur T_c als Funktion der Atommasse, der Teilchendichte und physikalischer Konstanten ab.

Um BEC im Labor zu realisieren, müssen die Experimentatoren Gase auf Temperaturen von nur $T_c = 100 \text{ nK}$ abkühlen.

C.3 — 0.6 Punkte

Wie groß ist die Teilchendichte des Rb-Gases n_c , wenn der Übergang bei einer solchen Temperatur stattfindet? Berechnen Sie zum Vergleich auch die „gewöhnliche“ Teilchendichte n_0 eines idealen Gases bei Standardtemperatur und Standarddruck (STP), d. h. $T_0 = 300 \text{ K}$ und $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Um welchen Faktor ist das „gewöhnliche“ Gas dichter? Sie dürfen annehmen, dass die Masse der Atome 87 atomaren Masseneinheiten (m_{amu}) entspricht.

Teil D. Optische Gitter aus drei Strahlen (5 Punkte)

Die ersten Bose-Einstein-Kondensate wurden bereits 1995 erzeugt, und seitdem hat sich die experimentelle Forschung in vielfältige Richtungen entwickelt. In diesem Teil untersuchen Sie eine besonders fruchtbare Idee: das Kondensat in räumlich periodische Potentiale zu laden, die durch Interferenz mehrerer kohärenter Laserstrahlen erzeugt werden. Aufgrund der Periodizität der entstehenden Interferenzmuster bezeichnet man sie als *optische Gitter*. Die potentielle Energie $V(\vec{r})$ eines Atoms, das sich in einem optischen Gitter bewegt, ist proportional zur lokalen Lichtintensität. Für Ihre Rechnungen dürfen Sie annehmen, dass

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

Dabei ist α eine positive Konstante, und die spitzen Klammern bezeichnen die zeitliche Mittelung, durch die die schnell oszillierenden Terme verschwinden. Das vom i -ten Laser erzeugte elektrische Feld wird beschrieben durch

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\varepsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

mit der Amplitude $E_{0,i}$, dem Wellenvektor $\vec{k}_i$ und dem Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}_i$ der Länge eins.

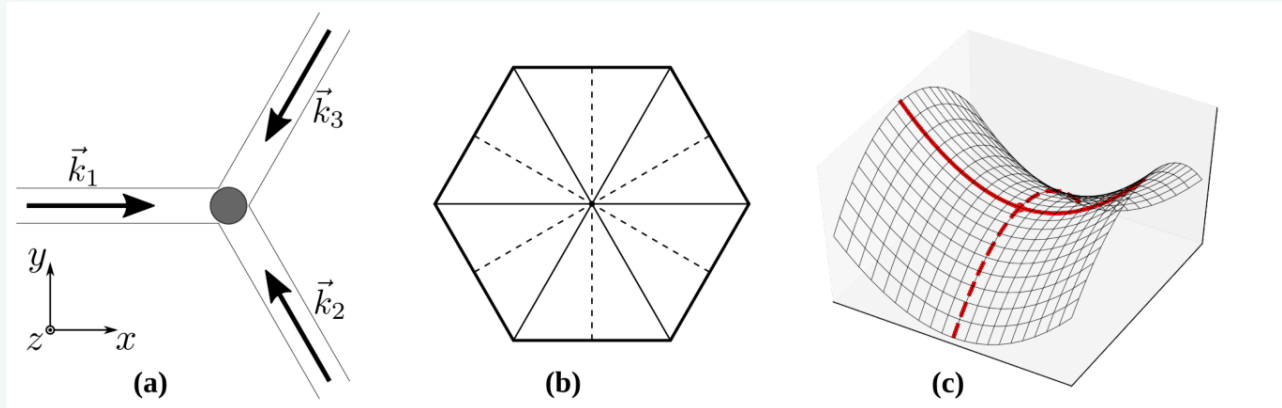


Abbildung 2. (a) Optisches Gitter aus drei Strahlen: Drei ebene Wellen mit den Wellenvektoren $\vec{k}_{1,2,3}$ kreuzen sich und interferieren in dem durch den grauen Kreis gekennzeichneten Bereich. (b) Symmetrien eines regelmäßigen Sechsecks: Durchgezogene und gestrichelte Linien zeigen zwei Gruppen von Symmetrieachsen. (c) Sattelpunkt: ein Punkt auf einer Fläche, an dem die Steigungen in zueinander orthogonalen Richtungen alle null sind, der jedoch kein lokales Extremum der dargestellten Funktion ist. Entlang der durch die durchgezogene Linie markierten Bahn stößt man auf ein scheinbares Minimum. Um ein echtes Minimum von einem Sattelpunkt (hier dargestellt) zu unterscheiden, muss zusätzlich die senkrechte Richtung (gestrichelte Linie) untersucht werden.

Ihre Aufgabe besteht darin, *dreieckige optische Gitter* zu untersuchen, die durch Interferenz dreier kohärenter Laserstrahlen gleicher Intensität entstehen. Ein typischer Aufbau ist in Abb. 2a dargestellt. Hier sind alle drei Strahlen in z -Richtung polarisiert, breiten sich in der xy -Ebene aus und kreuzen sich unter gleichen Winkeln von 120° . Wählen Sie die Richtung der x -Achse parallel zum Wellenvektor $\vec{k}_1$.

D.1 — 1.4 Punkte

Leiten Sie mithilfe der Gln. 2 und 3 den Ausdruck für die potentielle Energie $V(\vec{r})$ als Funktion von $\vec{r} = (x, y)$ in der Ebene der Strahlen her.

Hinweis: Das Ergebnis lässt sich übersichtlich als konstanter Term plus einer Summe aus drei Kosinusfunktionen mit den Argumenten $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$ ausdrücken. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in dieser Form und geben Sie die Vektoren $\vec{b}_i$ an.

D.2 — 0.5 Punkte

Die resultierende potentielle Energie besitzt eine sechszählige Drehachse, d. h., die Potentialverteilung ist unter einer Drehung um ein Vielfaches von 60° um den Ursprung invariant. Beweisen Sie mit einem einfachen Argument, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Die obige Symmetriebetrachtung vereinfacht die Analyse der zweidimensionalen Potentialverteilung $V(\vec{r})$. Wie in Abb. 2b gezeigt, besitzt ein regelmäßiges Sechseck Symmetrielinien, die jeweils gegenüberliegende Eckpunkte (durchgezogene Linien) oder die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten (gestrichelte Linien) verbinden. Daher muss man in unserem Fall keine zweidimensionalen Potentialdarstellungen erstellen und untersuchen, da sich viele Erkenntnisse gewinnen lassen, indem man sich auf die Koordinatenachsen x und y konzentriert, die entlang der Symmetrielinien verlaufen.

D.3 — 1.2 Punkte

Leiten Sie den Verlauf des Potentials $V(\vec{r})$ entlang der Koordinatenachsen her, d. h., bestimmen Sie die Funktionen $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ und $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Bestimmen Sie die Lagen der Extrema von $V_X(x)$ und $V_Y(y)$, jeweils als Funktionen einer einzigen Variablen. Da diese Funktionen periodisch sind, geben Sie in Ihren Aufstellungen bitte nur einen Vertreter jeder Familie periodisch wiederkehrender Minima und Maxima an.

Wir möchten die Lagen der sogenannten *Gitterplätze* bestimmen, also der Minima des vollständigen zweidimensionalen Potentials $V(\vec{r})$. Die ermittelten Minima der Funktionen einer Variablen V_X und V_Y liefern mögliche Positionen, müssen jedoch noch überprüft werden, um Sattelpunkte auszuschließen. Wie in Abb. 2c gezeigt, können Sattelpunkte bei einer Untersuchung entlang einer einzigen Linie wie Minima erscheinen, obwohl sie keine sind.

D.4 — 0.8 Punkte

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Teilaufgabe, um die tatsächlichen Minima des optischen Gitters zu bestimmen: Geben Sie alle äquivalenten Minima an, die dem Ursprung am nächsten liegen (aber nicht mit ihm zusammenfallen). Wie groß ist der Abstand a zwischen den nächstgelegenen Minima, also die Gitterkonstante unseres optischen Gitters? Drücken Sie die Antwort durch die Laserwellenlänge λ_{las} aus.

Die Ladungsneutralität ultrakalter Atome legt nahe, dass ihre Wechselwirkungen erst dann relevant werden, wenn zwei oder mehr Atome denselben Platz eines optischen Gitters besetzen. Experimentatoren können jedoch auch Anordnungen untersuchen, in denen langreichweitige Wechselwirkungen zwischen Atomen auftreten. Ein möglicher Ansatz beruht auf der Erzeugung sogenannter *Rydberg-Atome*, die eine große räumliche Ausdehnung aufweisen und auch andere stark ausgeprägte Eigenschaften besitzen. Rydberg-Atome sind angeregte Atome, bei denen ein Elektron in einen Zustand mit einer sehr hohen Hauptquantenzahl n angehoben wurde. Die Größe eines Rydberg-Atoms lässt sich abschätzen, indem man den Radius der klassischen Kreisbahn dieses Elektrons mit dem Bahndrehimpuls $n\hbar$ berechnet; dabei ist $\hbar$ die reduzierte Planck-Konstante.

D.5 — 1.1 Punkte

Berechnen Sie den Wert von n , bei dem der Radius des Rb-Rydberg-Atoms mit der Wellenlänge des Laserlichts $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ vergleichbar ist. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von λ_{las} und physikalischen Konstanten an und bestimmen Sie ihren Zahlenwert.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier bezeichnet m_e die Elektronenmasse. Für Teil D definieren wir die gemeinsame Feldamplitude E_0 , $U = \alpha E_0^2 > 0$ und

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{las}}}, \quad P_X = \frac{4\pi}{3k}, \quad P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}.$$

- **A.1:** $E_{\min} = \frac{h^2}{8mL^2}$.
- **A.2:** $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- **A.3:** $\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}$.
- **B.1:** $\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 648 \text{ nm}$.
- **B.2:** Eine **Blauverschiebung**: $\lambda_{\text{Cy3}} \simeq 519 \text{ nm}$, und $\Delta\lambda = \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 129 \text{ nm}$.
- **B.3:** $K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}$.
- **B.4:** $\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ eV})^2} \simeq 3.3 \text{ ns}$.
- **C.1:** $p = \sqrt{3mk_B T}$, $\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$.
- **C.2:** $\ell = n^{-1/3}$, $T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}$, im Rahmen der angegebenen Abschätzung für den Übergang.
- **C.3:** $n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $n_0 \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$; das gewöhnliche Gas ist 1.52×10^7 -mal so dicht.
- **D.1:** $V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{b}_i \cdot \vec{r}) \right]$, mit $\vec{b}_1 = k \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\vec{b}_2 = k(0, \sqrt{3})$ und $\vec{b}_3 = k \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
- **D.2:** Die sechs Vektoren $\{\pm\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2, \pm\vec{b}_3\}$ bilden ein regelmäßiges Sechseck. Eine Drehung um 60° vertauscht sie untereinander, und der Kosinus ist eine gerade Funktion, sodass V unverändert bleibt.
- **D.3:** $V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right]$ und $V_Y(y) = -\frac{U}{2} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) \right]^2$.
Modulo P_X hat der Schnitt entlang der x -Achse ein Minimum bei 0 und ein Maximum bei $P_X/2$. Modulo P_Y hat der Schnitt entlang der y -Achse Minima bei 0, $P_Y/2$ und Maxima bei $P_Y/3, 2P_Y/3$.
- **D.4:** $a = \frac{2}{3} \lambda_{\text{las}}$. Die sechs nächstgelegenen Minima sind $(\pm a, 0)$ und $(\pm a/2, \pm \sqrt{3}a/2)$, wobei die Vorzeichen im letzteren Koordinatenpaar unabhängig voneinander sind.

- **D.5:** $n = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}} \simeq 84.7$, entsprechend $n \approx 85$.

Lösung

Für die numerischen Berechnungen werden folgende Werte verwendet:

$$\begin{aligned} h &= 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\ m_e &\simeq 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\ \epsilon_0 &\simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, & k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ m_{\text{amu}} &\simeq 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}. \end{aligned}$$

A.1

Die Welle muss an jeder Wand einen Knoten haben. Die längste nichtverschwindende stehende Welle, die in den Potentialtopf passt, hat über dessen Breite eine halbe Wellenlänge:

$$L = \frac{\lambda_{\text{dB},1}}{2}.$$

Aus der de-Broglie-Beziehung folgt daher

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_{\text{dB},1}} = \frac{h}{2L}.$$

Mit der nichtrelativistischen kinetischen Energie und einer potentiellen Energie von null im Inneren des Potentialtopfs ergibt sich

$$E_{\text{min}} = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Ein Zustand mit der Wellenzahl null kann beide Randbedingungen nur erfüllen, wenn die Welle identisch null ist; er ist daher kein erlaubter Teilchenzustand.

A.2

In der n -ten stehenden Wellenmode passen n halbe Wellenlängen zwischen die Wände:

$$L = n \frac{\lambda_{\text{dB},n}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Folglich gilt

$$\lambda_{\text{dB},n} = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{nh}{2L},$$

und

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

A.3

Nach dem Energieerhaltungssatz ist die Energie des emittierten Photons gleich der Abnahme der Teilchenenergie:

$$\frac{hc}{\lambda_{21}} = E_2 - E_1 = \frac{(4-1)h^2}{8mL^2}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}.$$

B.1

Jedes räumliche Energieniveau kann zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin aufnehmen. Im Grundzustand des Systems aus zehn Elektronen sind daher die Niveaus $n = 1, \dots, 5$ mit jeweils zwei Elektronen besetzt.

Bei der kleinstmöglichen Anregung wird ein Elektron von $n = 5$ auf das erste unbesetzte Niveau $n = 6$ angehoben. Die dafür erforderliche Energie ist

$$\Delta E_{\text{Cy}5} = E_6 - E_5 = \frac{(6^2 - 5^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{11h^2}{8m_e L^2}.$$

Die kleinste Energie eines absorbierten Photons entspricht der größten Wellenlänge:

$$\lambda_{\text{Cy}5} = \frac{hc}{\Delta E_{\text{Cy}5}} = \frac{8m_e c L^2}{11h}.$$

Mit $L = 10.5l$ gilt

$$\lambda_{\text{Cy}5} = \frac{8(10.5)^2}{11} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h}.$$

Einsetzen von $l = 140 \times 10^{-12} \text{ m}$ ergibt

$$\lambda_{\text{Cy}5} \simeq 6.48 \times 10^{-7} \text{ m} = 648 \text{ nm}.$$

B.2

Durch das Entfernen zweier Kohlenstoffatome werden zwei gemeinsam genutzte Elektronen entfernt und der Potentialtopf um $2l$ verkürzt. Cy3 hat daher acht Elektronen, und es gilt

$$L_{\text{Cy}3} = 8.5l.$$

Im Grundzustand sind die Niveaus $n = 1, \dots, 4$ besetzt. Die niedrigste Anregung ist $4 \rightarrow 5$, also

$$\Delta E_{\text{Cy}3} = \frac{(5^2 - 4^2)h^2}{8m_e (8.5l)^2} = \frac{9h^2}{8m_e (8.5l)^2}.$$

Somit gilt

$$\lambda_{\text{Cy}3} = \frac{8(8.5)^2}{9} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{578}{9} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 519 \text{ nm}.$$

Diese Wellenlänge ist kürzer als die von Cy5, die Verschiebung erfolgt also zum **Blauen** hin. Ihr Betrag ist

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_{\text{Cy}5} - \lambda_{\text{Cy}3} \\ &= \left(\frac{882}{11} - \frac{578}{9} \right) \frac{m_e c l^2}{h} \\ &= \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h}. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich

$$\Delta\lambda \simeq 1.29 \times 10^{-7} \text{ m} = 129 \text{ nm}.$$

B.3

Das Dipolmoment hat die Dimension Ladung mal Länge:

$$[d] = \text{C m}.$$

Da

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{J m}},$$

gilt

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0} \right] = \text{J m}^3.$$

Division durch h , dessen Dimension J s ist, und durch λ^3 liefert die erforderliche Dimension einer inversen Zeit:

$$\left[\frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3} \right] = \text{s}^{-1}.$$

Mit dem angegebenen dimensionslosen Vorfaktor ergibt sich

$$K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}.$$

Hier ist K die positive Zerfallsrate. Für die Anzahl $N(t)$ der noch angeregten Moleküle lautet die Zerfallsgleichung $dN/dt = -KN$; die „relative Abnahme“ in der Aufgabenstellung wird als positiver Verlust interpretiert.

B.4

Im gegebenen Modell emittiert der niedrigste angeregte Zustand bei der Rückkehr in den Grundzustand ein Photon der Wellenlänge λ_{Cy5} . Sein Dipolmoment beträgt

$$d = 2.4 \text{ e}l \simeq 5.38 \times 10^{-29} \text{ C m}.$$

Die Rate der spontanen Emission ist

$$K = \frac{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2}{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3} \simeq 3.01 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Bei exponentiellem Zerfall beträgt die mittlere Lebensdauer $1/K$:

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2} \simeq 3.3 \text{ ns}.$$

C.1

Für die in der Aufgabe vorgegebene Temperaturabschätzung liefert der Gleichverteilungssatz die mittlere kinetische Translationsenergie in drei Dimensionen:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Der typische Impuls, der zur Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat gehört, ist daher

$$p = m\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3mk_B T}.$$

Die zugehörige de-Broglie-Wellenlänge ist

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

C.2

Bei der Teilchendichte n beträgt das mittlere Volumen pro Teilchen $1/n$. Der charakteristische lineare Abstand ist folglich

$$\ell = n^{-1/3}.$$

Die Anwendung des in der Aufgabe angegebenen Übergangskriteriums

$$\lambda_{dB}(T_c) = \ell,$$

ergibt

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_B T_c}} = n^{-1/3}.$$

Quadrieren und Umstellen liefert

$$T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}.$$

Dies ist die Abschätzung der kritischen Temperatur, die sich aus dem angegebenen Kriterium der Gleichheit von Wellenlänge und Teilchenabstand ergibt.

C.3

Für Rubidium gilt

$$m = 87m_{\text{amu}} \simeq 1.44467 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad T_c = 100 \text{ nK} = 1.00 \times 10^{-7} \text{ K}.$$

Umstellen des Ergebnisses aus C.2 liefert

$$n_c = \left(\frac{3mk_B T_c}{h^2} \right)^{3/2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}.$$

Der entsprechende Abstand beträgt ungefähr $8.57 \times 10^{-7} \text{ m}$.

Für das gewöhnliche ideale Gas liefert die ideale Gasgleichung

$$p_0 = n_0 k_B T_0.$$

Mit der in der Aufgabe angegebenen Temperatur und dem angegebenen Druck ergibt sich

$$n_0 = \frac{10^5}{k_B(300)} \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\frac{n_0}{n_c} \simeq 1.52 \times 10^7}.$$

Das gewöhnliche Gas ist etwa fünfzehn Millionen Mal so dicht.

D.1

Alle drei Feldamplituden seien E_0 . Wir wählen die Wellenvektoren entsprechend Abb. 2a:

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{k}_3 = k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

wobei $k = 2\pi/\lambda_{\text{las}}$.

Alle Polarisationen liegen entlang der z -Richtung, sodass sich die Felder in dieser Richtung skalar addieren:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{z} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t).$$

Die benötigten zeitlichen Mittelwerte sind

$$\langle \cos^2(\phi - \omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

und

$$\langle \cos(\phi_i - \omega t) \cos(\phi_j - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j).$$

Daher gilt

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2 \left[\frac{3}{2} + \sum_{i < j} \cos((\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}) \right].$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \vec{b}_2 &= \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = k(0, \sqrt{3}), \\ \vec{b}_3 &= \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = k\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Da der Kosinus eine gerade Funktion ist, spielt das für jede Differenz gewählte Vorzeichen keine Rolle. Mit $U = \alpha E_0^2$ folgt

$$\boxed{V(\vec{r}) = -U \left[\frac{3}{2} + \cos(\vec{b}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_2 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_3 \cdot \vec{r}) \right]}.$$

Durch Zusammenfassen des ersten und dritten Kosinusterns erhält man die nützliche Koordinatendarstellung

$$\boxed{V(x, y) = -U \left[\frac{3}{2} + 2 \cos\left(\frac{3kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ky}{2}\right) + \cos(\sqrt{3}ky) \right]}.$$

D.2

Die drei $\vec{b}_i$ haben denselben Betrag $\sqrt{3}k$ und schließen jeweils Winkel von 120° ein. Zusammen mit ihren negativen Vektoren erhält man sechs Vektoren mit aufeinanderfolgenden Winkelabständen von 60° .

Eine Drehung des Ortsvektors um 60° entspricht in jedem Skalarprodukt einer Drehung des jeweiligen $\vec{b}_i$ um -60° . Dabei wird jeder $\vec{b}_i$ auf ein anderes Element der Menge $\{\pm\vec{b}_j\}$ abgebildet. Da

$$\cos(-\vec{b}_j \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}),$$

bleibt die Summe unverändert. Das Potential besitzt somit die angegebene sechszählige Drehsymmetrie.

D.3

Setzt man $y = 0$, so erhält man

$$V_X(x) = -U \left[\frac{5}{2} + 2 \cos \left(\frac{3kx}{2} \right) \right].$$

Die Grundperiode ist

$$P_X = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{3}.$$

Die Ableitung lautet

$$V'_X(x) = 3Uk \sin \left(\frac{3kx}{2} \right).$$

Im Bereich $0 \leq x < P_X$ liegt das Minimum bei $x = 0$ und das Maximum bei $x = P_X/2$.

Für die y -Achse führen wir

$$q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

ein. Dann gilt

$$V_Y(y) = -U \left(\frac{3}{2} + 2 \cos q + \cos 2q \right).$$

Mit $\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$ folgt

$$V_Y(y) = -\frac{U}{2} (1 + 2 \cos q)^2.$$

Die Grundperiode ist

$$P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{\sqrt{3}}.$$

Differenzieren ergibt

$$V'_Y(y) = \sqrt{3}Uk(1 + 2 \cos q) \sin q.$$

Die stationären Punkte erfüllen daher entweder $\sin q = 0$ oder $\cos q = -1/2$.

Jeweils ein Vertreter jeder Familie von Extrema ist:

Schnitt	Koordinate innerhalb einer Periode	Art entlang dieser Achse	Potential
V_X	$x = 0$	Minimum	$-9U/2$
V_X	$x = P_X/2$	Maximum	$-U/2$
V_Y	$y = 0$	Minimum	$-9U/2$
V_Y	$y = P_Y/3$	Maximum	0
V_Y	$y = P_Y/2$	Minimum	$-U/2$
V_Y	$y = 2P_Y/3$	Maximum	0

Somit ist V_X eine Sinuskurve um $-5U/2$. Innerhalb einer Periode steigt V_Y von einem tiefen Minimum auf null, fällt auf ein flacheres Minimum, steigt erneut auf null und kehrt an der nächsten Periodengrenze zum tiefen Minimum zurück.

D.4

Zunächst überprüfen wir das scheinbare flache Minimum bei

$$(x, y) = \left(0, \frac{P_Y}{2}\right).$$

Hier lauten die zweiten Ableitungen des vollständigen Potentials

$$V_{xx} = -\frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{yy} = \frac{3}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0.$$

Die Krümmungen haben entgegengesetzte Vorzeichen; dieser Punkt ist also ein **Sattelpunkt** und kein Gitterplatz.

Im Ursprung gilt

$$V_{xx} = V_{yy} = \frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0,$$

sodass der Ursprung ein echtes Minimum ist.

Um alle echten Minima zu finden, schreiben wir

$$t = \frac{3kx}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

Die Bedingungen für stationäre Punkte lauten

$$\sin t \cos q = 0, \quad \sin q(\cos t + 2 \cos q) = 0.$$

Falls $\cos q \neq 0$, erfordert die Stationarität in x -Richtung $\sin t = 0$. Eine positive Krümmung in x -Richtung verlangt dann

$$\cos t \cos q > 0.$$

Da $\cos t$ und $\cos q$ dasselbe Vorzeichen haben, kann $\cos t + 2 \cos q$ nicht verschwinden. Somit gilt $\sin q = 0$. An den Minima gilt daher

$$t = \pi r, \quad q = \pi s,$$

wobei die ganzen Zahlen r, s dieselbe Parität haben. Die verbleibende Möglichkeit für stationäre Punkte, $\cos q = 0$, erfordert außerdem $\cos t = 0$; die zugehörige Hesse-Matrix hat eine negative Determinante, sodass sich dabei ausschließlich Sattelpunkte ergeben.

Mit $r = 2j + s$ lauten die Gitterplätze

$$\vec{r}_{j,s} = a \left(j + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right), \quad j, s \in \mathbb{Z},$$

mit

$$a = \frac{4\pi}{3k}.$$

An diesen Punkten sind alle drei Interferenzkosinusterme gleich 1, und es gilt

$$V_{\min} = -\frac{9}{2}U.$$

Das Quadrat des Abstands vom Ursprung beträgt

$$|\vec{r}_{j,s}|^2 = a^2(j^2 + js + s^2).$$

Für ganzzahlige Paare, die nicht beide null sind, ist der kleinste Wert der positiven ganzen Zahl $j^2 + js + s^2$ gleich 1. Er tritt an sechs Gitterplätzen auf:

$$\left(a, 0 \right), \left(-a, 0 \right), \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right).$$

Sie bilden ein regelmäßiges Sechseck um den Ursprung. Daher gilt

$$a = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{las}}.$$

D.5

Für ein hoch angeregtes äußeres Elektron wirken der Atomkern und die inneren Elektronen näherungsweise wie ein Atomrumpf mit der Nettoladung $+e$. Wir verwenden das vorgegebene klassische Kreisbahnmodell und vernachlässigen Effekte des Eindringens in den Atomrumpf sowie die Bewegung des wesentlich schwereren Atomrumpfs.

Die Coulomb-Anziehung liefert die Zentripetalkraft:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Der vorgegebene Drehimpuls beträgt

$$m_e v r = n\hbar.$$

Eliminieren von v ergibt

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

also

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2,$$

wobei

$$a_0 \simeq 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Setzen wir den abgeschätzten Radius gleich λ_{las} , so erhalten wir

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{las}}}{a_0}} = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}.$$

Für $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ gilt

$$n = \sqrt{\frac{380 \times 10^{-9}}{5.292 \times 10^{-11}}} \simeq 84.7.$$

Die entsprechende ganzzahlige Hauptquantenzahl ist somit

$$n \approx 85.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.