

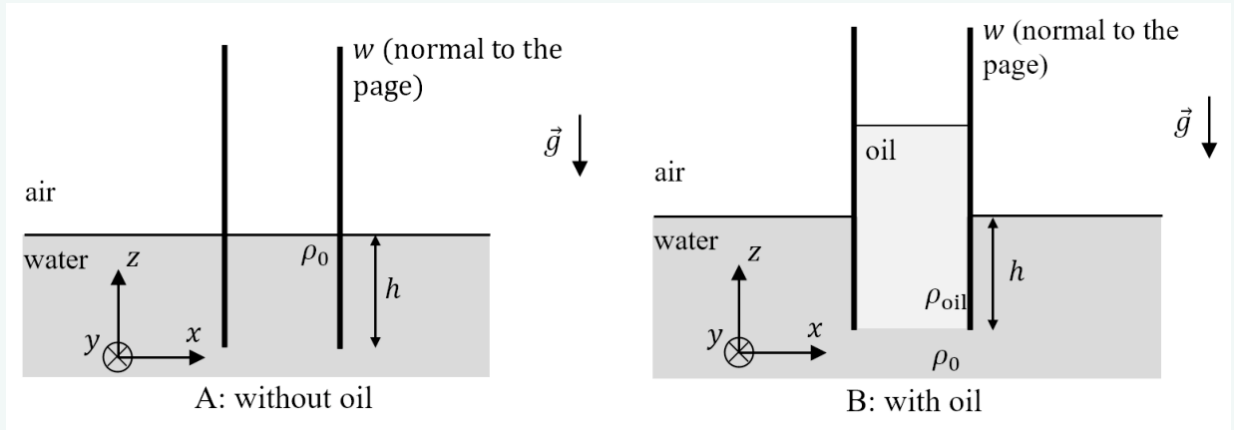
## المسألة 1: فيزياء الكواكب

تتكون هذه المسألة من مسألتين مستقلتين تتعلقان بباطن الكواكب. يمكن إهمال تأثيرات تقوس أسطح الكواكب. قد تحتاج إلى استخدام الصيغة

$$(1 + x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x, \quad \text{عندما } |x| \ll 1. \quad (1)$$

## الجزء A. حيد وسط المحيط (5.0 نقاط)

اعتبر وعاءً كبيراً من الماء موضوعاً في مجال جاذبية منتظم تسارع السقوط الحر فيه  $g$ . تُثبت لوحان مستطيلان رأسيان متوازيان داخل الوعاء بحيث تكون حوافهما الرأسية متلامسة بإحكام، ومن دون فجوات، مع جدران الوعاء الرأسية. يُغمر طول  $h$  من كل لوح في الماء (الشكل 1). عرض اللوحين على امتداد المحور  $y$  هو  $w$ ، وكثافة الماء هي  $\rho_0$ .



الشكل 1. لوحان متوازيان في الماء.

يُصب زيت كثافته  $\rho_{oil} < \rho_0$  في الحيز بين اللوحين حتى يصل المستوى السفلي للزيت إلى الحافتين السفليتين للوحين. افترض أن اللوحين وحواف الوعاء مرتفعة بما يكفي لمنع فيضان الزيت من فوقها. يمكن إهمال التوتر السطحي واختلاط المائعين.

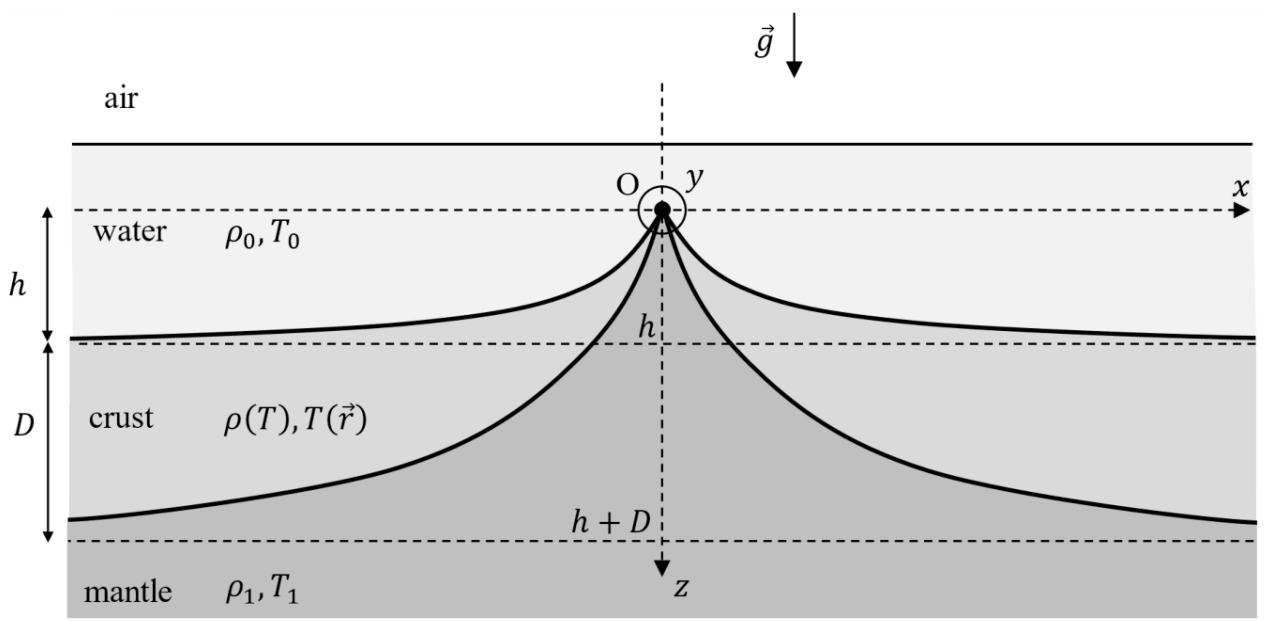
## 0.8 — A.1 نقطة

ما المركبة على المحور  $x$  للقوة المحصلة  $F_x$  المؤثرة في اللوح الأيمن (مقداراً واتجاهاً)؟

يوضح الشكل 2 مقطعاً عرضياً لحيد وسط المحيط. يتكون الحيد من طبقات تملأ بعضها بعضاً من الوشاح والقشرة ومياه المحيط. يتكون الوشاح من صخور نفترض أنها قادرة على الجريان على المقاييس الزمنية الجيولوجية، ولذلك سنعامله في هذه المسألة بوصفه مائعاً. سمك القشرة أصغر بكثير من مقياس الطول المميز في اتجاه  $x$ ، لذا تتصرف القشرة كصفحة قابلة للانثناء بحرية. يمكن، بدقة عالية، نمذجة حيد كهذا بنظام ثنائي الأبعاد، لا تتغير فيه المتغيرات على امتداد المحور  $y$ ، العمودي على مستوى الشكل 2. افترض أن طول الحيد  $L$  على امتداد المحور  $y$  أكبر بكثير من أي طول آخر يرد في هذه المسألة.

يُفترض أن سمك القشرة يساوي صفراً عند مركز الحيد. ومع ازدياد المسافة الأفقية  $x$  عن المركز، يزداد سمك القشرة ويقترب من سمك ثابت  $D$  عندما  $x \rightarrow \infty$ . وبالمقابل، يهبط قاع المحيط بمقدار رأسي  $h$  أسفل قمة الحيد  $O$ ، التي نعرفها بأنها مبدأ نظام إحداثياتنا (انظر الشكل 2). يمكن افتراض أن كثافة الماء  $\rho_0$  ودرجة حرارته  $T_0$  ثابتتان في المكان والزمان. ويمكن افتراض الأمر نفسه لكثافة الوشاح  $\rho_1$  ودرجة حرارته  $T_1$ . ودرجة حرارة القشرة  $T$  ثابتة أيضاً مع الزمن، لكنها قد تعتمد على الموضع.

من المعلوم أن مادة القشرة تتمدد خطياً مع درجة الحرارة  $T$  بدقة عالية. وبما أننا نفترض ثبات درجتي حرارة الماء والوشاح، فمن الملائم استخدام معامل تمدد حراري معاد التحجيم. وعندئذ يكون  $l(T) = l_1[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$  حيث  $l$  طول قطعة من مادة القشرة، و  $l_1$  طولها عند درجة الحرارة  $T_1$ ، و  $k_l$  معامل التمدد الحراري المعاد تحجيمه، الذي يمكن افتراض ثباته.



الشكل 2. حيد وسط المحيط. لاحظ أن المحور  $z$  يتجه إلى الأسفل.

#### 0.6 — A.2 نقطة

بافتراض أن القشرة متساوية الخواص، أوجد اعتماد كثافتها  $\rho$  على درجة حرارتها  $T$ . وبافتراض أن  $|k_l| \ll 1$ ، اكتب إجابتك بالصيغة التقريبية

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[ 1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

حيث تُهمل الحدود من الرتبة  $k_l^2$  وما فوقها. ثم حدد الثابت  $k$ .

من المعلوم أن  $k > 0$ . كذلك يمكن افتراض ثبات الموصلية الحرارية للقشرة  $k$ . ونتيجة لذلك، تعتمد درجة حرارة القشرة خطياً على العمق في المناطق البعيدة جداً عن محور الحيد.

#### 1.1 — A.3 نقطة

بافتراض أن كلاً من الوشاح والماء يتصرف كمائع غير قابل للانضغاط في حالة اتزان هيدروستاتيكي، عبّر عن سمك القشرة البعيد  $D$  بدلالة  $h$  و  $\rho_0$  و  $\rho_1$  و  $k$ . يمكن إهمال أي حركة للمادة.

#### 1.6 — A.4 نقطة

أوجد، إلى الرتبة السائدة في  $k$ ، القوة الأفقية المحصلة  $F$  المؤثرة في النصف الأيمن ( $x > 0$ ) من القشرة بدلالة  $h$  و  $L$  و  $k$  و  $g$ .

افتراض أن القشرة معزولة حرارياً عن بقية الأرض. نتيجة للتوصيل الحراري، ستتقارب درجتا حرارة السطحين العلوي والسفلي للقشرة حتى تبلغ القشرة الاتزان الحراري. الحرارة النوعية للقشرة هي  $c$ ، ويمكن افتراض ثباتها.

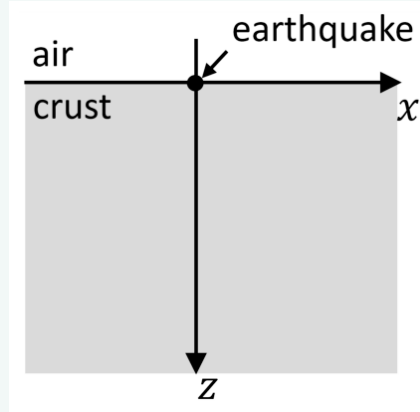
#### 0.9 — A.5 نقطة

باستخدام تحليل الأبعاد أو تحليل رتبة المقدار، قدر الزمن المميز  $\tau$  الذي يقترب خلاله الفرق بين درجتي حرارة السطحين العلوي والسفلي للقشرة، بعيداً عن محور الحيد، من الصفر. يمكنك افتراض أن  $\tau$  لا يعتمد على درجتي الحرارة الابتدائيتين لسطحي القشرة.

## الجزء B. الموجات الزلزالية في وسط طبقي (5.0 نقاط)

افترض وقوع زلزال قصير المدة عند سطح كوكب ما. يمكن افتراض أن الموجات الزلزالية تنبعث من مصدر خطي يقع عند  $z = x = 0$ ، حيث  $x$  هو الإحداثي الأفقي و  $z$  هو العمق تحت السطح (الشكل 3). ويمكن افتراض أن طول مصدر الموجات الزلزالية أكبر بكثير من أي طول آخر يؤخذ في الاعتبار في هذا السؤال.

نتيجة للزلزال، ينبعث تدفق منتظم مما يُسمى الموجات الطولية P في جميع الاتجاهات الواقعة في المستوى  $z-x$  والتي لها مركبة موجبة على المحور  $z$ . ولأن نظرية الموجات في الأجسام الصلبة معقدة عمومًا، فإننا نهمل في هذه المسألة جميع الموجات الأخرى المنبعثة من الزلزال. قشرة الكوكب طبقية بحيث تعتمد سرعة موجات P، وهي  $v$ ، على العمق  $z$  وفقًا للعلاقة  $v = v_0(1 + z/z_0)$ ، حيث  $v_0$  هي السرعة عند السطح و  $z_0$  ثابت موجب معلوم.



الشكل 3. نظام الإحداثيات المستخدم في الجزء B.

### 1.5 — B.1 نقطة

اعتبر شعاعًا واحدًا منبعثًا من الزلزال يصنع زاوية ابتدائية  $0 < \theta_0 < \pi/2$  مع المحور  $z$  وينتقل في المستوى  $z-x$ . ما الإحداثي الأفقي  $x_1(\theta_0) \neq 0$  الذي يمكن عنده رصد هذا الشعاع على سطح الكوكب؟ من المعلوم أن مسار الشعاع قوس دائرة. اكتب إجابتك على الصورة  $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ ، حيث  $A$  و  $b$  ثابتان مطلوب إيجادهما.

إذا لم تتمكن من إيجاد  $A$  و  $b$ ، فيمكنك في الأسئلة التالية استخدام النتيجة  $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$  بوصفها معطاة. افترض أن الطاقة الكلية لكل وحدة طول من المصدر، المنطلقة على هيئة موجات P داخل القشرة أثناء الزلزال، هي  $E$ . وافترض أن الموجات تُمتص تمامًا عندما تصل إلى سطح الكوكب من الأسفل.

### 1.5 — B.2 نقطة

أوجد اعتماد كثافة الطاقة لكل وحدة مساحة  $\varepsilon(x)$  التي يمتصها السطح على المسافة على امتداد السطح  $x$ . ارسم منحنى تقريبيًا للدالة  $\varepsilon(x)$ .

من الآن فصاعدًا، افترض أن الموجات تنعكس انعكاسًا تامًا عند وصولها إلى السطح بدلًا من امتصاصها. تخيل جهازًا موضوعًا عند  $z = x = 0$  له الشكل الهندسي نفسه لمصدر الزلزال الذي تناولناه سابقًا. يستطيع الجهاز إصدار موجات P بتوزيع زاوي يُختار بحرية. نجعل الجهاز يصدر إشارة ضمن نطاق ضيق من زوايا الانبعاث. وعلى وجه التحديد، تقع الزاوية الابتدائية التي تصنعها الإشارة مع الاتجاه الرأسي ضمن الفترة  $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ ، حيث  $0 < \theta_0 < \pi/2$  و  $1 \ll \delta\theta_0$  و  $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ .

### 2.0 — B.3 نقطة

على أي مسافة  $x_{\max}$  من المصدر، مقيسة على امتداد السطح، تقع أبعد نقطة لا تصل إليها الإشارة؟ اكتب إجابتك بدلالة  $\theta_0$  و  $\delta\theta_0$  والثوابت الأخرى المعطاة أعلاه.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

## الإجابات

A.1 •

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left( \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right)$$

تتجه القوة في اتجاه  $+x$ ، مبتعدةً عن الزيت.

A.2 •

$$\rho(T) = \rho_1 \left[ 1 - k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]^{-3} \approx \rho_1 \left[ 1 + 3k_l \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad k = 3k_l.$$

A.3 •

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}$$

ضمن تقريب الكثافة من الرتبة الأولى.

A.4 • القوة الأفقية الكلية التي تؤثر بها الموائع، إلى الرتبة السائدة، هي

$$F_x \simeq \frac{2gLh^2(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2},$$

وتتجه مبتعدةً عن الحديد، على امتداد  $+x$ .

A.5 •

$$\tau \sim \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa} = \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

هذا تقدير لرتبة المقدار.

B.1 •

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0, \quad A = 2z_0, \quad b = 1.$$

B.2 •

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

المنحنى زوجي، وتبلغ قيمته العظمى  $\varepsilon(0) = E/(2\pi z_0)$  ويبلغ نصف قيمته العظمى عند  $x = \pm 2z_0$ ، ويقترب من الصفر وفقاً لـ  $x^{-2}$ .

B.3 • في حد النطاق الضيق،

$$x_{\max} \simeq \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

هذا هو الحد الخارجي لآخر فترة لا تصل إليها الإشارة على امتداد اتجاه انتشار الحزمة. ويُشتق أدناه تعبير دقيق يأخذ في الحسبان العدد الصحيح للانعكاسات.

## الحل

### A.1

لتكن  $H$  ارتفاع عمود الزيت فوق الحافتين السفليتين للوحين. يجب أن يتساوى ضغطا الزيت والماء عند هاتين الحافتين. وبعد طرح الضغط الجوي،

$$\rho_{\text{oil}} g H = \rho_0 g h, \quad H = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} h.$$

يؤثر عمود مائع ارتفاعه  $a$  وكثافته  $\rho$  بقوة أفقية

$$w \int_0^a \rho g (a - u) du = \frac{1}{2} \rho g w a^2$$

في لوح رأسي، حيث يقيس  $u$  الارتفاع فوق قاع العمود.

يدفع الزيت اللوح الأيمن نحو  $+x$ ، ويدفعه الماء نحو  $-x$ . يُلغى تأثير الضغط الجوي بين الجانبين. وباحتساب الزيت الموجود فوق مستوى الماء الخارجي نحصل على

$$F_x = \frac{g w}{2} (\rho_{\text{oil}} H^2 - \rho_0 h^2).$$

بالتعويض عن  $H$ ،

$$F_x = \frac{\rho_0 g w h^2}{2} \left( \frac{\rho_0}{\rho_{\text{oil}}} - 1 \right) > 0.$$

إذن يُدفع اللوح نحو الخارج.

### A.2

نعرف فرق درجة الحرارة اللابيدي

$$q = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}.$$

يغير التمدد المتساوي الخواص الأبعاد الخطية الثلاثة جميعها بالعامل نفسه. وبالتالي،

$$\frac{V(T)}{V(T_1)} = (1 - k_l q)^3.$$

نُحفظ الكتلة، والكثافة المرجعية عند  $T_1$  هي  $\rho_1$ ، لذا

$$\rho(T) = \rho_1 (1 - k_l q)^{-3}.$$

باستخدام التوسع المعطى وإهمال الحدود من الرتبة  $k_l^2$ ،

$$\rho(T) \approx \rho_1 (1 + 3k_l q).$$

تعطي المقارنة مع المعادلة (2)

$$k = 3k_l.$$

### A.3

نستخدم المحور  $z$  المتجه إلى الأسفل في الشكل 2. بعيداً عن الحيد، تمتد القشرة من  $z = h$  إلى  $z = h + D$ . ودرجة حرارتها هي

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z - h}{D},$$

ولذلك تكون كثافتها

$$\rho(z) \approx \rho_1 \left[ 1 + k \left( 1 - \frac{z - h}{D} \right) \right].$$

ومتوسط كثافتها هو

$$\bar{\rho} = \frac{1}{D} \int_h^{h+D} \rho(z) dz = \rho_1 \left(1 + \frac{k}{2}\right).$$

ليكن  $p_O$  ضغط المائع المشترك عند قمة الحيد، حيث يكون سمك القشرة صفرًا. يعطي الاتزان الهيدروستاتيكي الضغطين مباشرة فوق القشرة البعيدة وتحتها:

$$p_{\text{top}} = p_O + \rho_0 gh,$$

$$p_{\text{bottom}} = p_O + \rho_1 g(h + D).$$

يتطلب اتزان القوى الرأسية على عمود من القشرة في المنطقة البعيدة التي تكون فيها القشرة أفقية أن يكون

$$p_{\text{bottom}} - p_{\text{top}} = \bar{\rho} gD.$$

ومن ثم

$$\rho_1(h + D) - \rho_0 h = \rho_1 D \left(1 + \frac{k}{2}\right).$$

بعد حذف الحد المشترك  $\rho_1 D$ ،

$$(\rho_1 - \rho_0)h = \frac{1}{2} \rho_1 kD,$$

وعليه

$$D = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)h}{\rho_1 k}.$$

#### A.4

نحسب قوى الضغط على السطحين الفاصلين الفعليين بين الماء والقشرة وبين الوشاح والقشرة.

نكتب سطحي القشرة العلوي والسفلي على الصورة  $z = z_t(x)$  و  $z = z_b(x)$ . وقيمهما عند الطرفين هي

$$z_t(0) = z_b(0) = 0, \quad z_t(\infty) = h, \quad z_b(\infty) = h + D.$$

حقلا ضغط المائعين هما

$$p_w(z) = p_O + \rho_0 gz, \quad p_m(z) = p_O + \rho_1 gz.$$

لعنصر من السطح الفاصل طوله الأفقي  $dx$  وعرضه  $L$ ، تتضمن المركبة الأفقية لقوة الضغط ميل السطح. يدفع المائع العلوي في اتجاه  $x$  السالب، بينما يدفع المائع السفلي في اتجاه  $x$  الموجب:

$$dF_x = L \left[ p_m(z_b) \frac{dz_b}{dx} - p_w(z_t) \frac{dz_t}{dx} \right] dx.$$

تُختزل العوامل الناشئة عن مساحة السطح المائل ومتجه الوحدة العمودي عليه، لذا لا يتطلب هذا التعبير تقريبًا إضافيًا لصغر الميل. وبالتكامل،

$$\begin{aligned} F_x &= L \int_0^{h+D} (p_O + \rho_1 gz) dz - L \int_0^h (p_O + \rho_0 gz) dz \\ &= p_O LD + \frac{gL}{2} [\rho_1(h + D)^2 - \rho_0 h^2]. \end{aligned}$$

وبصورة مكافئة،

$$F_x = \frac{1}{2} \rho_1 gLD^2 + (p_O + \rho_1 gh)LD + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_0)gLh^2.$$

من A.3، نجد أن  $D \propto k^{-1}$  عند ثبات  $h$ . ومع ثبات الضغط الخلفي، تكون هذه المساهمات الثلاث من الرتب  $k^{-2}$  و  $k^{-1}$  و  $k^0$  على الترتيب. ومن ثم يكون الحد السائد

$$F_x \simeq \frac{1}{2} \rho_1 g L D^2.$$

بالتعويض عن  $D$  بتعبيره،

$$F_x \simeq \frac{2g L h^2 (\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1 k^2}.$$

تتجه هذه القوة على امتداد  $+x$ ، مبتعدةً عن الحديد. وهي القوة الكلية التي تؤثر بها الموائع؛ ولم تُطرح منها أي قوة ضغط صخري على مقطع افتراضي عبر القشرة البعيدة.

## A.5

إلى الرتبة السائدة في  $k$ ، تكون السعة الحرارية الحجمية للقشرة  $\rho_1 c$ ، مما يعطي الانتشارية الحرارية

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1 c}.$$

بعيداً عن الحديد، تكون المسافة ذات الصلة التي يجب أن تنتشر الحرارة عبرها هي  $D$ . لذلك تعطي معادلة الحرارة،

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

التقدير التالي للمقياس المميز

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi \frac{\Delta T}{D^2}.$$

يُختزل فرق درجة الحرارة، كما هو مطلوب:

$$\tau \sim \frac{D^2}{\chi} = \frac{\rho_1 c D^2}{\kappa}.$$

باستخدام A.3،

$$\tau \sim \frac{4c(\rho_1 - \rho_0)^2 h^2}{\kappa \rho_1 k^2}.$$

لا يحدد تحليل الأبعاد معاملاً عددياً. ويقترب الفرق بين درجتي حرارة السطحين من الصفر تقاربياً، بدلاً من أن ينعدم عند زمن منتهٍ.

## B.1

في وسط تعتمد فيه سرعة الموجة على العمق فقط، يحافظ قانون سنيل على ثبات البطاء الأفقي:

$$\frac{\sin \theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin \theta_0}{v_0},$$

حيث  $\theta(z)$  هي الزاوية المحلية مع الاتجاه الرأسي. وبما أن

$$v(z) = v_0 \frac{z + z_0}{z_0},$$

نحصل على

$$\sin \theta(z) = \frac{z + z_0}{z_0} \sin \theta_0.$$

نعرف

$$R = \frac{z_0}{\sin \theta_0}.$$

على الجزء الهابط من الشعاع،

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{z + z_0}{\sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}}.$$

يعطي التكامل، مع الشرط  $x = 0$  عند  $z = 0$ ،

$$x = \sqrt{R^2 - z_0^2} - \sqrt{R^2 - (z + z_0)^2}.$$

إذن يقع المسار على الدائرة

$$(x - x_c)^2 + (z + z_0)^2 = R^2,$$

التي إحداثيا مركزها هما

$$x_c = \sqrt{R^2 - z_0^2} = z_0 \cot \theta_0, \quad z_c = -z_0.$$

ينعطف الشعاع عند أعمق نقطة من هذه الدائرة ويعود إلى السطح بصورة متناظرة. ونقطتا تقاطعه مع  $z = 0$  هما  $x = 2x_c$  و  $x = 0$ . لذلك

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot \theta_0,$$

و

$$A = 2z_0, \quad b = 1.$$

تؤثر السرعة السطحية  $v_0$  في أزمنة الانتقال، لكنها تُختزل من العلاقات الهندسية لمسار الشعاع.

## B.2

يمتد نصف المستوى السفلي على مجال زاوي مقداره  $\pi$ . لذلك يخصص الانبعاث المنتظم طاقة لكل وحدة طول من المصدر مقدارها

$$dE = \frac{E}{\pi} d\theta$$

لفترة زاوية  $d\theta$ .

للأشعة العائدة عند  $x > 0$ ،

$$x = 2z_0 \cot \theta, \quad \left| \frac{dx}{d\theta} \right| = 2z_0 \csc^2 \theta.$$

يعطي حفظ الطاقة بين الفترة الزاوية المنبعثة والشريط السطحي المستقبل لها

$$\varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} |d\theta|.$$

ومن ثم

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{2\pi z_0} \sin^2 \theta.$$

باستخدام

$$\cot \theta = \frac{x}{2z_0}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + x^2/(4z_0^2)},$$

نجد

$$\varepsilon(x) = \frac{2Ez_0}{\pi(x^2 + 4z_0^2)}.$$

يعطي الانبعاث المتجه إلى اليسار التعبير نفسه عند  $x < 0$ . وشرط التطبيع هو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx = \frac{E}{\pi} \left[ \arctan \frac{x}{2z_0} \right]_{-\infty}^{\infty} = E.$$

لرسم التقريبي المطلوب: المنحنى أملس ومتناظر حول  $x = 0$ ، وله قيمة عظمى واحدة هي  $E/(2\pi z_0)$ . عند  $x = \pm 2z_0$  يكون ارتفاعه  $E/(4\pi z_0)$ ، لذا فإن عرضه الكامل عند نصف القيمة العظمى هو  $4z_0$ . ويبقى موجباً عند كل قيمة منتهية لـ  $x$ ، ويحقق طرفاه

$$\varepsilon(x) \sim \frac{2Ez_0}{\pi x^2} \quad (|x| \gg z_0).$$

بما أن  $E$  طاقة لكل وحدة طول من المصدر، فإن وحدات  $\varepsilon$  هي طاقة لكل وحدة مساحة.

### B.3

عند انعكاس مرآوي على السطح، تنعكس المركبة الرأسية لسرعة الشعاع، بينما تبقى مركبته الأفقية محفوظة. لذلك يكرر كل شعاع القوس نفسه مزاحاً أفقياً. وتقع نقاط لقاءه بالسطح عند

$$x_n(\theta) = n\ell(\theta), \quad \ell(\theta) = 2z_0 \cot \theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

لتكن

$$\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \frac{\delta\theta_0}{2}.$$

لنطاق يقع بكامله ضمن  $0 < \theta < \pi/2$ ، تكون أقصر وأطول مسافتين بين لقاءين متتاليين بالسطح هما

$$\ell_{\min} = 2z_0 \cot \theta_+, \quad \ell_{\max} = 2z_0 \cot \theta_-.$$

لأن الحزمة تملأ الفترة الزاوية، فإن الفترة السطحية التي تصل إليها عند اللقاء رقم  $n$  هي

$$I_n = [n\ell_{\min}, n\ell_{\max}].$$

توجد فجوة بين  $I_n$  و  $I_{n+1}$  إذا وفقط إذا

$$n\ell_{\max} < (n+1)\ell_{\min},$$

أو

$$n(\ell_{\max} - \ell_{\min}) < \ell_{\min}.$$

نضع  $\Delta\ell = \ell_{\max} - \ell_{\min}$ . ما إن يتحقق  $n\Delta\ell \geq \ell_{\min}$ ، حتى تتداخل الفترات المتجاورة، وتستمر في التداخل لكل قيمة أكبر لـ  $n$ . وبناءً عليه، فإن الحد الخارجي الدقيق لآخر فجوة هو

$$x_{\max} = \ell_{\min} \left\lceil \frac{\ell_{\min}}{\Delta\ell} \right\rceil.$$

تأخذ دالة السقف في الحساب أن عدد مرات اللقاء بالسطح عدد صحيح. وتصل الإشارة إلى الحد نفسه؛ أما النقاط التي لا تصل إليها فتقترب منه من جهة القيم الأصغر.

لتقريب النطاق الضيق المطلوب،

$$\ell_0 = 2z_0 \cot \theta_0,$$

و

$$\Delta\ell \simeq \left| \frac{d\ell}{d\theta} \right|_{\theta_0} \delta\theta_0 = 2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta\theta_0.$$

عند ثبات  $\theta_0$ ، يتطلب النطاق الضيق بما يكفي انعكاسات كثيرة قبل أن تتداخل الفترات. وعندئذ يمكن، إلى الرتبة السائدة، إهمال التقريب إلى عدد صحيح:

$$x_{\max} \simeq \frac{\ell_0^2}{\Delta\ell}.$$

لذلك

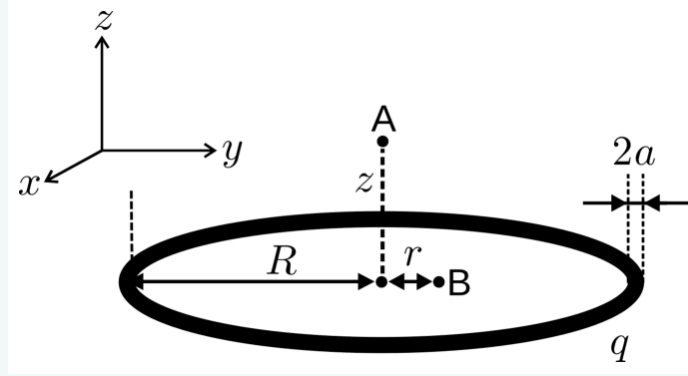
$$x_{\max} \simeq \frac{(2z_0 \cot \theta_0)^2}{2z_0 \csc^2 \theta_0 \delta \theta_0} = \frac{2z_0 \cos^2 \theta_0}{\delta \theta_0}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

## المسألة 2: عدسة كهروستاتيكية

لنعتبر حلقة معدنية مشحونة بانتظام، نصف قطرها  $R$  وشحنتها الكلية  $q$ . الحلقة طارة مجوفة بسماكة  $2a \ll R$ . يمكن إهمال هذه السماكة في الأجزاء A و B و C و E. ينطبق المستوى  $xy$  على مستوى الحلقة، بينما يكون المحور  $z$  عمودياً عليه، كما يوضح الشكل 1. قد تحتاج في الجزأين A و B إلى استخدام الصيغة الآتية (متسلسلة تايلور)

$$(1+x)^\epsilon \approx 1 + \epsilon x + \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon-1)x^2, \quad \text{عندما } |x| \ll 1.$$



الشكل 1. حلقة مشحونة نصف قطرها  $R$ .

### الجزء A. الجهد الكهروستاتيكي على محور الحلقة (1 نقطة)

|             |     |                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.3<br>نقطة | A.1 | احسب الجهد الكهروستاتيكي $\Phi(z)$ على طول محور الحلقة على مسافة $z$ من مركزها (النقطة A في الشكل 1).                                                                                                                                      |
| 0.4<br>نقطة | A.2 | احسب الجهد الكهروستاتيكي $\Phi(z)$ حتى أدنى قوة غير صفرية لـ $z$ ، بافتراض أن $z \ll R$ .                                                                                                                                                  |
| 0.2<br>نقطة | A.3 | يوضع إلكترون (كتلته $m$ وشحنته $-e$ ) عند النقطة A (الشكل 1، $z \ll R$ ). ما القوة المؤثرة في الإلكترون؟ بالاستناد إلى تعبير القوة، حدد إشارة $q$ التي تجعل الحركة الناتجة اهتزازية. لا يؤثر الإلكترون المتحرك في توزيع الشحنة على الحلقة. |
| 0.1<br>نقطة | A.4 | ما التردد الزاوي $\omega$ لهذه الاهتزازات التوافقية؟                                                                                                                                                                                       |

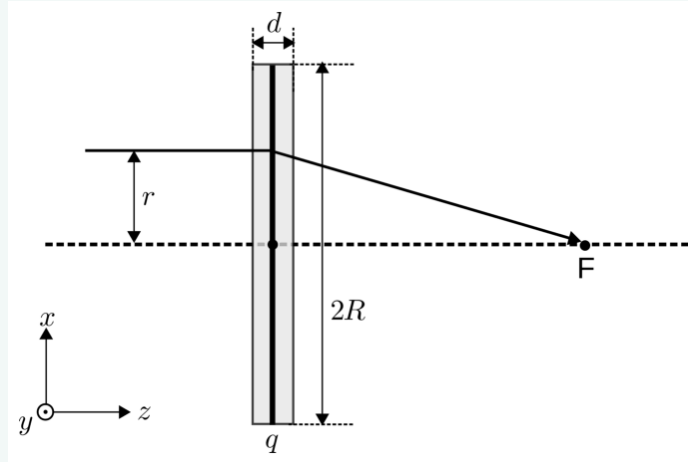
### الجزء B. الجهد الكهروستاتيكي في مستوى الحلقة (1.7 نقطة)

في هذا الجزء من المسألة، عليك تحليل الجهد  $\Phi(r)$  في مستوى الحلقة ( $z = 0$ ) عندما  $r \ll R$  (النقطة B في الشكل 1). حتى أدنى قوة غير صفرية لـ  $r$ ، يُعطى الجهد الكهروستاتيكي بالعلاقة  $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ .

|             |     |                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.5<br>نقطة | B.1 | أوجد تعبير $\beta$ . قد تحتاج إلى استخدام صيغة متسلسلة تايلور المعطاة أعلاه.                                                                                                                                              |
| 0.2<br>نقطة | B.2 | يوضع إلكترون عند النقطة B (الشكل 1، $r \ll R$ ). ما القوة المؤثرة في الإلكترون؟ بالاستناد إلى تعبير القوة، حدد إشارة $q$ التي تجعل الحركة الناتجة اهتزازية توافقية. لا يؤثر الإلكترون المتحرك في توزيع الشحنة على الحلقة. |

### الجزء C. البعد البؤري للعدسة الكهروستاتيكية المثالية: الشحن اللحظي (2.3 نقطة)

نريد بناء جهاز لتجميع الإلكترونات، أي عدسة كهروستاتيكية. لننظر في التركيب الآتي. توضع الحلقة عمودياً على المحور  $z$ ، كما يوضح الشكل 2. لدينا مصدر ينتج عند الطلب حزمة من الإلكترونات غير النسبية. الطاقة الحركية لهذه الإلكترونات هي  $E = mv^2/2$  (حيث  $v$  هي السرعة)، وتغادر المصدر في لحظات مضبوطة بدقة. يُبرمج النظام بحيث تكون الحلقة متعادلة الشحنة معظم الوقت، لكن شحنتها تصبح  $q$  عندما تكون الإلكترونات على مسافة أقل من  $d/2$  ( $d \ll R$ ) من مستوى الحلقة (المنطقة المظلمة في الشكل 2، وتسمى «المنطقة الفعالة»). افترض في الجزء C أن عمليتي الشحن والتفريغ لحظيتان، وأن المجال الكهربائي «يملاً الفضاء» لحظياً أيضاً. يمكن إهمال المجالات المغناطيسية وافترض أن سرعة الإلكترونات في اتجاه  $z$  ثابتة. لا تخل الإلكترونات المتحركة بتوزيع الشحنة على الحلقة.



الشكل 2. نموذج لعدسة كهروستاتيكية.

|             |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.3<br>نقطة | C.1 | حدد البعد البؤري $f$ لهذه العدسة. افترض أن $f \gg d$ . عبّر عن إجابتك بدلالة الثابت $\beta$ من السؤال B.1 والكميات المعروفة الأخرى. افترض أن حزمة الإلكترونات، قبل بلوغ «المنطقة الفعالة»، تكون موازية للمحور $z$ ، وأن $r \ll R$ . تكون إشارة $q$ بحيث تكون العدسة مجمعة. |
|-------------|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

في الواقع، يوضع مصدر الإلكترونات على المحور  $z$  على مسافة  $b > f$  من مركز الحلقة. اعتبر أن الإلكترونات لم تعد موازية للمحور  $z$  قبل بلوغ «المنطقة الفعالة»، بل تنبعث من مصدر نقطي ضمن نطاق من الزوايا المختلفة  $\gamma \ll 1$  راديان مع المحور  $z$ . تتجمع الإلكترونات في نقطة تقع على مسافة  $c$  من مركز الحلقة.

|             |     |                                                                                                                                            |
|-------------|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.8<br>نقطة | C.2 | أوجد $c$ . عبّر عن إجابتك بدلالة الثابت $\beta$ من السؤال B.1 والكميات المعروفة الأخرى.                                                    |
| 0.2<br>نقطة | C.3 | هل تتحقق معادلة العدسة البصرية الرقيقة $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$ للعدسة الكهروستاتيكية؟ بيّن ذلك بحساب $1/b + 1/c$ صراحةً. |

### الجزء D. الحلقة بوصفها مكثفًا (3 نقاط)

كان النموذج الذي تناولناه أعلاه مثاليًا، وافترضنا أن الحلقة تُشحن لحظياً. في الواقع، لا يحدث الشحن لحظياً، لأن الحلقة مكثف ذو سعة محدودة  $C$ . سنحلل في هذا الجزء خصائص هذا المكثف. قد تحتاج إلى التكاملين الآتيين:

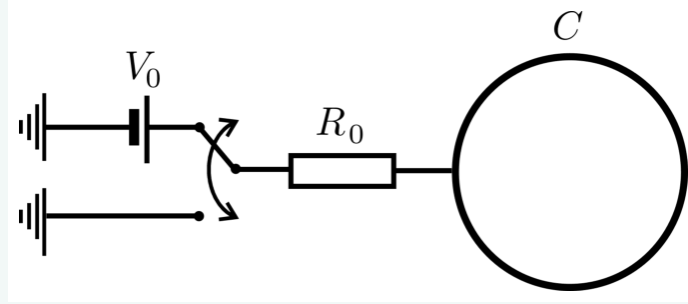
$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

|          |     |                                                                                     |
|----------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.0 نقطة | D.1 | احسب السعة $C$ للحلقة. اعتبر أن للحلقة عرضاً محدوداً $2a$ ، لكن تذكر أن $a \ll R$ . |
|----------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|

عندما تصل الإلكترونات إلى «المنطقة الفعالة»، تُوصَل الحلقة بمصدر جهد  $V_0$  (الشكل 3). وعندما تجتاز الإلكترونات «المنطقة الفعالة»، تُوصَل الحلقة بالأرضي. مقاومة التلامسات هي  $R_0$ ، ويمكن إهمال مقاومة الحلقة نفسها.



الشكل 3. شحن العدسة الكهروستاتيكية.

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.0 نقطة | حدد شحنة الحلقة بدلالة الزمن، $q(t)$ ، وارسم رسمًا تخطيطيًا لهذا الاعتماد. يقابل $t = 0$ اللحظة التي تكون فيها الإلكترونات في مستوى الحلقة. ما شحنة الحلقة $q_0$ عندما تبلغ القيمة المطلقة لـ $q(t)$ أقصاها؟ سعة الحلقة هي $C$ (أي إنك لست مضطراً إلى استخدام التعبير الفعلي الذي وجدته في D.1). ملاحظة: القطبية المرسومة في الشكل 3 توضيحية فقط. يجب اختيار الإشارة بحيث تكون العدسة مجمعة. | D.2 |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

### الجزء E. البعد البؤري لعدسة أكثر واقعية: الشحن غير اللحظي (2 نقطة)

في هذا الجزء من المسألة، سندرس عمل هذه العدسة الأكثر واقعية. سنهمل هنا مجدداً عرض الحلقة  $2a$ ، وسنفترض أن الإلكترونات تتحرك موازية للمحور  $z$  قبل بلوغ «المنطقة الفعالة». لكن شحن الحلقة لم يعد لحظياً.

|          |                                                                                                                                                                              |     |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.7 نقطة | أوجد البعد البؤري $f$ للعدسة. افترض أن $R_0 C \gg f/v$ ، لكن $d/v$ و $R_0 C$ من رتبة المقدار نفسها. عبّر عن إجابتك بدلالة الثابت $\beta$ من الجزء B والكميات المعطاة الأخرى. | E.1 |
| 0.3 نقطة | ستجد أن نتيجة $f$ مشابهة للنتيجة التي حصلت عليها في الجزء C، مع استبدال القيمة $q$ بـ $q_{\text{eff}}$ . أوجد تعبير $q_{\text{eff}}$ بدلالة الكميات المعطاة في نص المسألة.   | E.2 |

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

## الإجابات

نستخدم

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad T = \frac{d}{v}, \quad \tau = R_0 C, \quad Q = CV_0.$$

هنا  $e > 0$ ، وينعدم الجهد عند اللانهاية، و  $V_0$  هو الجهد المطبق بإشارته: يتطلب التجميع  $V_0 < 0$ ، ومن ثم  $Q < 0$ . جميع النتائج التقريبية لها الدقة المحددة في المسألة.

$$\Phi(z) = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad \text{A.1}$$

$$\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right) \quad \text{A.2}$$

$$\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}} \quad \text{A.3} \quad \text{تتطلب الاهتزازات المحورية } q > 0.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} \quad \text{A.4} \quad \text{عندما } q > 0.$$

$$\beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{B.1}$$

$$\mathbf{F}_\perp = 2e\beta q \mathbf{r}_\perp = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_\perp \quad \text{B.2} \quad \text{تتطلب الاهتزازات في المستوى } q < 0.$$

$$.f = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta|q|d} : \mathbf{C.1} \cdot$$

$$.c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f} : \mathbf{C.2} \cdot$$

$$.\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{e\beta|q|d}{E} = \frac{1}{f} : \mathbf{C.3} \cdot \text{نعم:}$$

$$.C \approx \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R}{\ln(8R/a)} : \mathbf{D.1} \cdot$$

$$:\mathbf{D.2} \cdot$$

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t + T/2}{\tau}\right) \right], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ q_0 \exp\left(-\frac{t - T/2}{\tau}\right), & t > T/2, \end{cases} \quad q_0 = Q \left( 1 - e^{-T/\tau} \right) < 0.$$

ينخفض المنحنى من الصفر إلى قيمته الدنيا  $q_0$  عند  $t = T/2$ ، ثم يقترب من الصفر أسياً من جهة القيم السالبة.

$$.f = -\frac{E}{e\beta C V_0 d} = \frac{E}{e\beta C |V_0| d} : \mathbf{E.1} \cdot$$

$$.q_{\text{eff}} = C V_0 = \frac{q_0}{1 - e^{-d/(v R_0 C)}} : \mathbf{E.2} \cdot$$

## الحل

طاقة الوضع للإلكترون هي  $U = -e\Phi$ . لذلك

$$\mathbf{F} = -\nabla U = e\nabla\Phi.$$

وهذا يحدد إشارات القوة في جميع مراحل الحل.

### A.1

يقع كل عنصر شحنة على الحلقة على المسافة نفسها  $\sqrt{R^2 + z^2}$  من نقطة الرصد على محورها. ويعطي مبدأ التراكب

$$\Phi(z) = k \int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{kq}{\sqrt{R^2 + z^2}}}.$$

### A.2

عندما  $|z| \ll R$ ،

$$\Phi(z) = \frac{kq}{R} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2}.$$

باستخدام المتسلسلة المعطاة مع  $\epsilon = -1/2$ ،

$$\boxed{\Phi(z) \approx \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R^3} z^2}.$$

أول حد غير ثابت تربيعي، لأن الجهد لا يتغير تحت التحويل  $z \mapsto -z$ .

### A.3

باشتقاق الجهد المحوري،

$$F_z = e \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{keqz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx -\frac{keq}{R^3} z.$$

إذن

$$\mathbf{F} \approx -\frac{keq}{R^3} z \hat{\mathbf{z}}.$$

يجب أن تتجه قوة الإرجاع نحو  $z = 0$ . وبالتالي، فإن

$$q > 0$$

شرط لازم للاهتزازات المحورية.

**A.4**

تصبح معادلة نيوتن

$$m\ddot{z} = -\frac{keq}{R^3} z.$$

وبالمقارنة مع  $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$  نحصل على

$$\omega = \sqrt{\frac{keq}{mR^3}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}.$$

**B.1**

لنضع نقطة الرصد عند  $(r, 0, 0)$ . يحمل عنصر من الحلقة عند الزاوية القطبية  $\theta$  شحنة

$$dq = \frac{q}{2\pi} d\theta$$

ويبعد مسافة

$$s = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$$

عن تلك النقطة. ومن ثم، بوضع  $\rho = r/R$ ،

$$\Phi(r) = \frac{kq}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}.$$

بالتوسيع حتى الرتبة الثانية في  $\rho$ ،

$$\begin{aligned} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta)^{-1/2} &\approx 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho \cos \theta) + \frac{3}{8}(4\rho^2 \cos^2 \theta) \\ &= 1 + \rho \cos \theta + \rho^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

المتوسطان الزاويان هما

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}.$$

لذلك

$$\Phi(r) \approx \frac{kq}{R} \left( 1 + \frac{r^2}{4R^2} \right).$$

وبالمقارنة مع  $q(\alpha + \beta r^2)$ ،

$$\alpha = \frac{k}{R}, \quad \beta = \frac{k}{4R^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^3}.$$

**B.2**

ليكن  $\mathbf{r}_\perp = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$  بما أن  $r^2 = x^2 + y^2$

$$\mathbf{F}_{\perp} = e \nabla_{\perp} \Phi = 2e\beta q \mathbf{r}_{\perp} = \frac{keq}{2R^3} \mathbf{r}_{\perp}.$$

تكون القوة قوة إرجاع في مستوى الحلقة إذا وفقط إذا

$$q < 0.$$

عند هذه الإشارة، يحقق كل إحداثي عرضي معادلة مهتز توافق. وهكذا، يتطلب الاستقرار المحوري والاستقرار العرضي إشارتين متعاكستين لشحنة الحلقة.

### C.1

يمضي الإلكترون زمنًا

$$T = \frac{d}{v}$$

في المنطقة الفعالة. وبما أن  $d \ll R$ ، يمكن حساب القوة العرضية فيها باستخدام B.2. كذلك، تتيح لنا العلاقة  $d \gg f$  إهمال تغير الموضع العرضي أثناء التفاعل.

لإلكترون ساقط على بعد عرضي  $r$ ، يكون الدفع العرضي الذي يتلقاه

$$m\Delta v_r = F_r T = 2e\beta q r \frac{d}{v}.$$

السرعة العرضية عند السقوط تساوي صفرًا، لذا

$$v_{r,\text{out}} = \frac{2e\beta q r d}{mv} < 0$$

عند اختيار  $q < 0$  اللازم للتجميع.

بعد مغادرة المنطقة الفعالة، يتحرك الإلكترون في خط مستقيم. ضمن دقة تقريب العدسة الرقيقة، تكون المسافة حتى المحور

$$f = -\frac{vr}{v_{r,\text{out}}}.$$

وبالتالي،

$$f = -\frac{mv^2}{2e\beta q d} = -\frac{E}{e\beta q d} = \frac{E}{e\beta |q| d}.$$

يبين اختزال  $r$  أن لجميع الأشعة المتوازية القريبة بما يكفي من المحور البعد البؤري نفسه.

### C.2

يصل إلكترون منبعث بزاوية  $\gamma \ll 1$  من مصدر على مسافة  $b$  إلى العدسة عند

$$r \approx b\gamma.$$

وتحقق سرعته العرضية الداخلة

$$\frac{v_{r,\text{in}}}{v} \approx \gamma \approx \frac{r}{b}.$$

تُحدث العدسة التغير نفسه في السرعة العرضية كما في C.1. إذن

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = \frac{r}{b} + \frac{2e\beta q r d}{mv^2} = r \left( \frac{1}{b} + \frac{e\beta q d}{E} \right).$$

لكي يقطع المسار الخارج المحور على مسافة  $c$  بعد الحلقة،

$$\frac{v_{r,\text{out}}}{v} = -\frac{r}{c}.$$

ينتج من ذلك أن

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{b} - \frac{e\beta qd}{E} = \frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b}.$$

لذلك

$$c = \frac{bE}{e\beta|q|bd - E} = \frac{bf}{b - f}.$$

يضمن الشرط المحدد  $b > f$  أن  $c > 0$ .

### C.3

باستخدام النتيجة التي حصلنا عليها للتو،

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \left( \frac{e\beta|q|d}{E} - \frac{1}{b} \right) = \frac{e\beta|q|d}{E}.$$

وفقاً لـ C.1، يساوي هذا  $1/f$ ، ومن ثم

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}.$$

إذن تتحقق معادلة العدسة البصرية الرقيقة ضمن التقريبات المذكورة.

### D.1

سعة الحلقة المعزولة هي

$$C = \frac{q}{\Phi_s},$$

حيث  $\Phi_s$  هو جهد سطحها بالنسبة إلى اللانهاية.

لطارة رقيقة، نعزف الشحنة لكل وحدة طول

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}.$$

نختار طولاً وسيطاً  $\ell$  يحقق

$$a \ll \ell \ll R.$$

نحسب جهد السطح بجمع مساهمة جزء قريب من الحلقة، مستقيم تقريباً، ومساهمة جزئها المنحني البعيد.

يشبه الموصل محلياً أسطوانة نصف قطرها  $a$ . ويمكن تمثيل جهده الخارجي، ضمن الدقة المطلوبة، بشحنة على محوره. لذا تكون مساهمة القطعة  $-\ell < s < \ell$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{near}} &\approx k\lambda \int_{-\ell}^{\ell} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} \\ &= 2k\lambda \ln \left( \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right) \\ &\approx 2k\lambda \ln \frac{2\ell}{a}. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الجزء البعيد، يمكن إهمال السماكة. ليكن

$$\delta = \frac{\ell}{R} \ll 1.$$

المسافة بين نقطتين على الحلقة تفصل بينهما زاوية  $\theta$  هي  $2R \sin(\theta/2)$ . ومن ثم

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{far}} &\approx k\lambda \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{R d\theta}{2R \sin(\theta/2)} \\
&= k\lambda \int_{\delta/2}^{\pi-\delta/2} \frac{du}{\sin u} \\
&= 2k\lambda \ln \cot \frac{\delta}{4} \\
&\approx 2k\lambda \ln \frac{4R}{\ell}.
\end{aligned}$$

بجمع المساهمتين يُحذف الطول الوسيط الاعتباضي:

$$\begin{aligned}
\Phi_s &\approx 2k\lambda \left( \ln \frac{2\ell}{a} + \ln \frac{4R}{\ell} \right) \\
&= 2k\lambda \ln \frac{8R}{a} \\
&= \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0 R} \ln \frac{8R}{a}.
\end{aligned}$$

إذن

$$C \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 R}{\ln(8R/a)}.$$

يوفر نصف القطر المحدود  $a$  حد القطع عند المسافات الصغيرة الذي يجعل جهد السطح محدوداً.

## D.2

تدخل الإلكترونات المنطقة الفعالة وتغادرها عند

$$t_- = -\frac{T}{2}, \quad t_+ = \frac{T}{2}, \quad T = \frac{d}{v}.$$

تكون الحلقة متعادلة في البداية. نعرّف

$$\tau = R_0 C, \quad Q = CV_0 < 0.$$

أثناء توصيل الحلقة بالمصدر، تكون معادلة الدارة

$$R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0,$$

أو

$$\tau \dot{q} + q = Q.$$

مع  $q(t_-) = 0$

$$q(t) = Q \left[ 1 - e^{-(t+T/2)/\tau} \right], \quad -T/2 \leq t \leq T/2.$$

عندما تُورّض الحلقة،

$$\tau \dot{q} + q = 0.$$

تكون الشحنة متصلة عند التبديل، لذا

$$q(t) = q_0 e^{-(t-T/2)/\tau}, \quad t > T/2,$$

حيث

$$q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau}) = CV_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{d}{vR_0 C} \right) \right].$$

بجمع الفترات،

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < -T/2, \\ Q [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}], & -T/2 \leq t \leq T/2, \\ Q(1 - e^{-T/\tau})e^{-(t-T/2)/\tau}, & t > T/2. \end{cases}$$

لرسم المخطط المطلوب، ارسم  $q(t)$  أسفل محور الزمن بعد بدء الشحن. تكون الشحنة صفراً في البداية، ثم تنخفض باستمرار وبانحدار تتناقص شدته أثناء الشحن، وتبلغ أكثر قيمها سلبية عند  $t = T/2$ ، ثم ترتفع أسياً نحو الصفر. يتغير ميل المنحنى بصورة غير متصلة عند لحظتي التبديل، بينما تبقى  $q(t)$  متصلة.

من النقاط المفيدة:

| الزمن                   | الشحنة                              |
|-------------------------|-------------------------------------|
| $-T/2$                  | 0                                   |
| 0                       | $Q(1 - e^{-T/(2\tau)})$             |
| $T/2$                   | $q_0 = Q(1 - e^{-T/\tau})$          |
| $T/2 + \tau$            | $q_0 \exp(-1)$                      |
| $t \rightarrow +\infty$ | 0، مع الاقتراب من جهة القيم السالبة |

إذن تبلغ  $|q(t)|$  أقصاها عندما تغادر الإلكترونات المنطقة الفعالة.

## E.1

هنا  $\tau = d/v$  و  $T = d/v$  متقاربان في المقدار. لذلك يحدث الشحن والجزء المعتد به من التفريغ بينما تبقى الإلكترونات ضمن مسافة طولية من الحلقة من رتبة  $d$ . وبما أن  $d \ll R$ ، تظل القوة العرضية من B.2 صالحة:

$$F_r(t) \approx 2e\beta q(t)r.$$

كذلك، تعني العلاقة  $f/v \gg \tau$  أن التجميع يحدث بعد زمن طويل من تضاؤل الشحنة إلى حد كبير. خلال نبضة القوة، تكون الإزاحة العرضية صغيرة مقارنةً بـ  $r$ ، لذا يمكن تثبيت  $r$  عند حساب الدفع:

$$m\Delta v_r = 2e\beta r \int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt.$$

مساهمة الشحن هي

$$\begin{aligned} I_{\text{ch}} &= Q \int_{-T/2}^{T/2} [1 - e^{-(t+T/2)/\tau}] dt \\ &= Q [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})]. \end{aligned}$$

ومساهمة التفريغ هي

$$\begin{aligned} I_{\text{dis}} &= q_0 \int_{T/2}^{\infty} e^{-(t-T/2)/\tau} dt \\ &= q_0 \tau = Q\tau(1 - e^{-T/\tau}). \end{aligned}$$

ومجموعهما هو

$$\int_{-T/2}^{\infty} q(t) dt = QT = CV_0 \frac{d}{v}.$$

وبالتالي،

$$\Delta v_r = \frac{2e\beta r Q d}{mv}.$$

باستخدام هندسة العدسة الرقيقة نفسها كما في C.1،

$$f = -\frac{vr}{\Delta v_r} = -\frac{mv^2}{2e\beta CV_0 d} = -\frac{E}{e\beta CV_0 d} = \frac{E}{e\beta C|V_0|d}.$$

تغير المقاومة شكل نبضة الشحنة ومدتها، لكن مساهماتها في الدفع الكلي تتلاشى بين الشحن والتفريغ. ويؤدي الامتداد المحدود للتفاعل إلى تصحيحات تتجاوز الدقة المفترضة لتقريب العدسة الرقيقة.

## E.2

بمقارنة

$$f = -\frac{E}{e\beta qd} \quad \text{و} \quad f = -\frac{E}{e\beta CV_0 d},$$

نحصل على

$$q_{\text{eff}} = CV_0.$$

وبصورة مكافئة، باستخدام D.2،

$$q_{\text{eff}} = \frac{q_0}{1 - \exp[-d/(vR_0C)]}.$$

تساوي هذه الشحنة الفعالة الشحنة التي ستبلغها الحلقة إذا أُبقيت عند الجهد المطبق إلى أجل غير مسمى. ويتجاوز مقدارها القيمة العظمى الفعلية للشحنة، لأن ذيل التفريغ يسهم أيضاً في التجميع.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

## المسألة 3: الجسيمات والموجات

تُعد ازدواجية الموجة والجسيم، التي تنص على أن كل جسيم يمكن وصفه بموجة والعكس صحيح، أحد المفاهيم الأساسية لميكانيكا الكم. في هذه المسألة، سنعتمد على هذا المفهوم وعلى بضعة افتراضات أساسية أخرى فقط لاستكشاف مجموعة من الظواهر الكمومية التي تشمل النوعين المختلفين من جسيمات العالم المجهرى: الفرميونات والبوزونات.

### الجزء A. جسيم كمومي في صندوق (1.4 نقطة)

اعتبر جسيماً كتلته  $m$  يتحرك في بئر جهد أحادي البعد، حيث تُعطى طاقة وضعه  $V(x)$  بالعلاقة

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ أو } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

بينما يستطيع الجسيم الكلاسيكي التحرك في مثل هذا الجهد بأي طاقة حركية، لا يُسمح للجسيم الكمومي إلا ببعض مستويات الطاقة الموجبة المنفصلة المحددة. وفي أي حالة مسموحة من هذه الحالات، يمكن وصف الجسيم بموجة دي برولي واقفة لها عقد عند الجدران.

### 0.4 — A.1 نقطة

حدّد أقل طاقة ممكنة  $E_{\min}$  للجسيم الكمومي في البئر. عبّر عن إجابتك بدلالة  $m$  و  $L$  وثابت بلانك  $h$ .

تُسمّى حالة الجسيم ذات أقل طاقة ممكنة الحالة الأرضية، وتُسمّى سائر الحالات المسموحة حالات مثارة. لترتّب جميع قيم الطاقة الممكنة ترتيباً تصاعدياً ونرمز إليها بـ  $E_n$ ، بدءاً من  $E_1$  للحالة الأرضية.

### 0.6 — A.2 نقطة

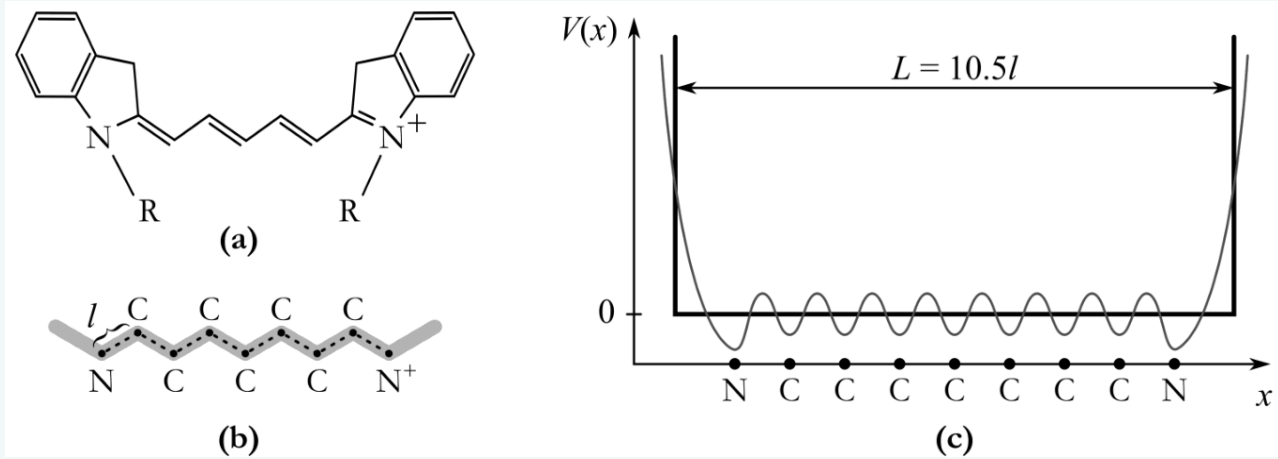
أوجد التعبير العام للطاقة  $E_n$  (حيث  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

### 0.4 — A.3 نقطة

لا يمكن للجسيم أن ينتقل انتقالاً لحظياً من حالة إلى أخرى إلا بإصدار فوتون أو امتصاصه، بحيث تساوي طاقته فرق الطاقة الموافق. أوجد الطول الموجي  $\lambda_{21}$  للفوتون المنبعث أثناء انتقال الجسيم من الحالة المثارة الأولى ( $E_2$ ) إلى الحالة الأرضية ( $E_1$ ).

## الجزء B. الخصائص البصرية للجزيئات (2.1 نقطة)

في هذا الجزء، سندرس عددًا من الخصائص البصرية لجزيء السيانيين Cy5، وهو جزيء صبغة واسع الاستخدام، مُبَيَّن تخطيطيًا في الشكل 1a. تتحدد خصائصه البصرية أساسًا بالهيكل الكربوني المكوّن من روابط أحادية ومزدوجة متناوبة بين ذرات الكربون، والمبيّن في الشكل 1b، في حين أن تأثير الحلقات عند طرفي الجزيء وكذلك الجذور R أصغر بكثير. تشكّل ثلاثة من إلكترونات التكافؤ الأربعة لكل ذرة C (ولذرات N) في الهيكل الروابط الكيميائية، بينما تكون إلكترونات التكافؤ المتبقية «مشاركة» ويمكنها التحرك على امتداد الهيكل كله. يُبيّن الخط الرفيع المتذبذب في الشكل 1c طاقة الوضع المحصلة لكل إلكترون من هذه الإلكترونات، وتوافق قيمها الصغرى مواضع ذرات C وN.



الشكل 1. (a) البنية الكيميائية لجزيء السيانيين Cy5 (للتبسيط، لم تُرسم ذرات الهيدروجين، ويرمز R إلى بعض الجذور). (b) هيكل جزيء Cy5، حيث  $l$  هو متوسط المسافة بين الذرات. (c) طاقة وضع الإلكترون على امتداد الهيكل (الخط الرفيع) وتقريبها بالدالة الدرجية المعطاة في المعادلة 1 (الخط السميك).

للتبسيط، سنقرّب منحنى طاقة الوضع هذا بدالة بسيطة معطاة في المعادلة 1 بعرض  $L = 10.5l$  (انظر الخط السميك في الشكل 1c)، حيث  $l = 140 \text{ pm}$  هو متوسط المسافة بين الذرات (انظر أيضًا الشكل 1b). ونتيجة لذلك، نحصل على «غاز إلكترونات» يتكوّن من 10 إلكترونات (7 من ذرات C، و2 من ذرة N، و1 من أيون  $N^+$ ) تتحرك في بئر جهد أحادي البعد كما نوقش في الجزء A. يمكننا في تقديرنا إهمال التأثير المتبادل بين هذه الإلكترونات؛ غير أنه ينبغي مراعاة أن الإلكترونات فرميونات، ومن ثم تخضع لمبدأ استبعاد باولي. ونهمل أيضًا تأثير الإلكترونات الأخرى وحركة النوى.

### 0.8 — B.1 نقطة

قدّر أكبر طول موجي  $\lambda$  لفوتون يمكن أن يمتصه جزيء Cy5، بافتراض أن المنظومة الإلكترونية في حالتها الأرضية ابتداءً. عبّر عن إجابتك بدلالة  $l$  والثوابت الفيزيائية ومعامل عددي، واحسب القيمة العددية.

### 0.4 — B.2 نقطة

لجزيء صبغة آخر، Cy3، بنية مشابهة، لكن هيكله أقصر بمقدار ذرتي كربون. هل ينزاح طيف امتصاصه نحو المنطقة الأكثر زرقة أم الأكثر حمرة من الطيف مقارنة بجزيء Cy5؟ قدّر عدديًا مقدار  $\Delta\lambda$  لهذه الإزاحة الطيفية. يمكنك افتراض أن إزالة ذرتي كربون لا تغيّر شكل الجزيء، بل تقصّر طول الهيكل فقط بمقدار مسافتين بين ذرتين.

عندما يكون الجزيء في الحالة المثارة، يمكنه أن ينتقل تلقائيًا إلى الحالة الأرضية مع إصدار فوتون. يتحدد المعدل المتوسط  $K$  لهذه الأحداث (أي النقص النسبي في عدد الجزيئات الموجودة في الحالة المثارة،  $dN/N$ ، خلال الزمن  $dt$ ، حيث  $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ ) بالطول الموجي  $\lambda$  للفوتون المنبعث، وعزم ثنائي القطب الكهربائي للانتقال  $d$  (وهو من رتبة  $d \simeq el$ ، حيث  $e$  هي الشحنة الأولية)، وكذلك بسماحية الفراغ  $\epsilon_0$  وثابت بلانك  $h$ .

### 0.7 — B.3 نقطة

باستخدام تحليل الأبعاد، حدّد التعبير عن معدل الانبعاث التلقائي بدلالة  $\epsilon_0$  و  $h$  و  $\lambda$  و  $d$ . المعامل العددي في تعبيرك هو  $\frac{16}{3} \pi^3$ .

## 0.2 — B.4 نقطة

لجزيء Cy5، لدينا  $d \approx 2.4 \text{ el}$ . قدر متوسط عمر الفلورة لأدنى حالة مثارة لجزيء Cy5،  $\tau_{\text{Cy5}}$ ، وهو مقلوب معدل انتقاله الإشعاعي إلى الحالة الأرضية.

### الجزء C. تكاثف بوز-أينشتاين (1.5 نقطة)

لا يرتبط هذا الجزء مباشرة بالجزئين A و B. سندرس هنا السلوك الجماعي للجسيمات البوزونية. لا تخضع البوزونات لمبدأ استبعاد باولي، وتشهد عند درجات الحرارة المنخفضة أو الكثافات العالية ظاهرة لافتة تُعرف باسم تكاثف بوز-أينشتاين (BEC). وهذه الظاهرة انتقال طوري إلى حالة كمومية جماعية مثيرة للاهتمام: إذ «يتكاثف» عدد كبير من الجسيمات المتطابقة في حالة كمومية واحدة، ويبدأ بالتصرف كموجة واحدة. يُبلغ هذا الانتقال عادة بتبريد عدد ثابت من الجسيمات إلى ما دون درجة الحرارة الحرجة. ومن حيث المبدأ، يمكن أيضاً إحداثه بإبقاء درجة الحرارة ثابتة وزيادة كثافة الجسيمات إلى ما يتجاوز قيمتها الحرجة.

نبدأ باستكشاف العلاقة بين درجة الحرارة وكثافة الجسيمات عند الانتقال. ويتبين أنه يمكن استنتاج تقديرات لقيمتيهما الحرجتين من ملاحظة بسيطة: يحدث تكاثف بوز-أينشتاين عندما يكون طول موجة دي برولي الموافق لمتوسط مربع سرعة الجسيمات مساوياً للمسافة المميزة بين الجسيمات في الغاز.

## 0.4 — C.1 نقطة

لغاز غير متأثر من ذرات  $^{87}\text{Rb}$  في حالة اتزان حراري، اكتب التعبيرين عن كمية حركتها الخطية النموذجية  $p$  وطول موجة دي برولي النموذجي  $\lambda_{\text{dB}}$  بدلالة كتلة الذرة  $m$  ودرجة الحرارة  $T$  والثابت الفيزيائية.

## 0.5 — C.2 نقطة

احسب المسافة النموذجية بين الجسيمات في الغاز،  $\ell$ ، بدلالة كثافة الجسيمات  $n$ . ومن ثم استنتج درجة الحرارة الحرجة  $T_c$  بدلالة كتلة الذرات وكثافتها والثوابت الفيزيائية.

لتحقيق تكاثف بوز-أينشتاين في المختبر، يتعين على التجريبيين تبريد الغازات إلى درجات حرارة منخفضة تصل إلى  $T_c = 100 \text{ nK}$ .

## 0.6 — C.3 نقطة

ما كثافة جسيمات غاز  $\text{Rb}$ ،  $n_c$ ، إذا حدث الانتقال عند درجة الحرارة هذه؟ وللمقارنة، احسب أيضاً كثافة الجسيمات «العادية»  $n_0$  لغاز مثالي عند درجة الحرارة والضغط القياسيين (STP)، أي  $T_0 = 300 \text{ K}$  و  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . بكم مرة يكون الغاز «العادي» أعلى كثافة؟ يمكنك افتراض أن كتلة الذرات تساوي 87 وحدة كتلة ذرية ( $m_{\text{amu}}$ ).

### الجزء D. شبكات بصرية بثلاث حزم (5 نقاط)

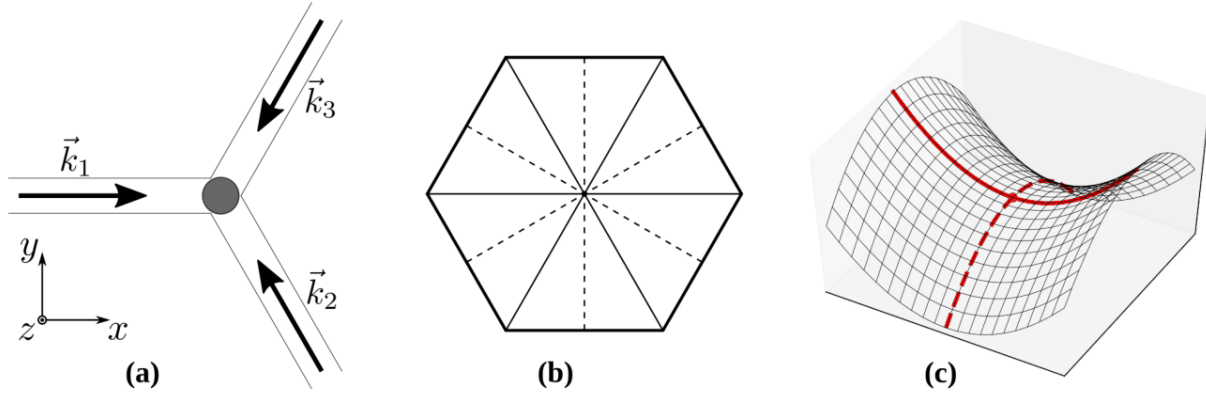
أُنْتُجَت أولى مكثفات بوز-أينشتاين في عام 1995، ومنذ ذلك الحين تفرّع العمل التجريبي في اتجاهات متنوعة. في هذا الجزء، ستبحث فكرة مثمرة على نحو خاص تتمثل في إدخال المكثف في جهود دورية مكانياً تنشأ من تداخل عدد من حزم الليزر المترابطة. وبسبب الطبيعة الدورية لأنماط التداخل الناتجة، يُشار إليها باسم *الشبكات البصرية*. تتناسب طاقة الوضع  $V(\vec{r})$  لذرة تتحرك في شبكة بصرية مع شدة الضوء المحلية، ويمكنك في حساباتك افتراض أن

$$V(\vec{r}) = -\alpha \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

هنا،  $\alpha$  ثابت موجب، وتشير الأقواس الزاوية إلى أخذ المتوسط الزمني الذي يزيل الحدود سريعة التذبذب. يُوصف المجال الكهربائي الناتج عن الليزر ذي الرقم  $i$  بالعلاقة

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

حيث  $E_{0,i}$  هي السعة، و  $\vec{k}_i$  متجه الموجة، و  $\vec{e}_i$  متجه الاستقطاب الوحدوي.



الشكل 2. (a) شبكة بصرية بثلاث حزم: تتقاطع ثلاث موجات مستوية ذات متجهات موجية  $\vec{k}_{1,2,3}$  وتتداخل في المنطقة المشار إليها بالدائرة الرمادية. (b) تناظرات سداسي منتظم: تُبين الخطوط المتصلة والمنقطعة مجموعتين من محاور التناظر. (c) نقطة سرجية: نقطة على سطح تكون عندها الميول في الاتجاهات المتعامدة جميعها صفراً، لكنها ليست قيمة قصوى أو صغرى محلية للدالة المرسومة. عند السير على المسار المحدد بالخط المتصل، نصادف قيمة صغرى ظاهرية. ويلزم تحليل إضافي في الاتجاه العمودي (الخط المنقطع) للتمييز بين قيمة صغرى حقيقية ونقطة سرجية (كما في الرسم).

مهمتك هي دراسة الشبكات البصرية /الثلاثية التي تنتج من تداخل ثلاث حزم ليزر مترابطة ومتساوية الشدة. يُبين الشكل 2a ترتيباً نموذجياً. هنا، تكون الحزم الثلاث جميعها مستقطبة في اتجاه  $z$ ، وتنتشر في المستوى  $xy$ ، وتتقاطع بزوايا متساوية قدرها  $120^\circ$ . اختر اتجاه المحور  $x$  موازياً لمتجه الموجة  $\vec{k}_1$ .

#### 1.4 — D.1 نقطة

باستخدام المعادلتين 2 و3، استخرج التعبير عن طاقة الوضع  $V(\vec{r})$  بدلالة  $\vec{r} = (x, y)$  في مستوى الحزم.

تلميح: يمكن التعبير عن النتيجة بصورة موجزة على هيئة حد ثابت مضاف إليه مجموع ثلاث دوال جيب تمام ذات وسائط  $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$ . اكتب نتيجتك بهذه الصورة وحدد المتجهات  $\vec{b}_i$ .

#### 0.5 — D.2 نقطة

لطاقة الوضع الناتجة محور تناظر دوراني سداسي، أي إن توزيع الجهد لا يتغير عند الدوران حول نقطة الأصل بزواوية تساوي مضاعفاً لـ  $60^\circ$ . قدم حجة بسيطة تثبت أن هذا هو الحال فعلاً.

تُبسّط ملاحظة التناظر أعلاه تحليل توزيع الجهد ثنائي البعد  $V(\vec{r})$ . وكما هو مبين في الشكل 2b، للسداسي المنتظم خطوط تناظر تصل، على الترتيب، بين الرؤوس المتقابلة (الخطوط المتصلة) وبين منتصفات الأضلاع المتقابلة (الخطوط المنقطعة). لذلك، لا نحتاج في حالتنا إلى إنشاء رسوم ثنائية الأبعاد للجهد ودراستها، إذ يمكن استنتاج الكثير بالتركيز على محوري الإحداثيات  $x$  و  $y$  الممتدين على طول خطي تناظر.

#### 1.2 — D.3 نقطة

اشتق سلوك الجهد  $V(\vec{r})$  على امتداد محوري الإحداثيات، أي حدد الدالتين  $V_X(x) \equiv V(x, 0)$  و  $V_Y(y) \equiv V(0, y)$ . حدد مواضع القيم القصوى والصغرى لـ  $V_X(x)$  و  $V_Y(y)$  بوصفهما دالتين في متغير واحد. ولأن هاتين الدالتين دوريتان، أدرج في قوائمك ممثلاً واحداً فقط لكل عائلة من القيم الصغرى والعظمى المتكررة دورياً.

نحن مهتمون بتحديد مواضع ما يُسمى مواقع الشبكة، أي القيم الصغرى للجهد الكامل ثنائي البعد  $V(\vec{r})$ . تحدّد القيم الصغرى التي حصلنا عليها للدالتين ذاتي المتغير الواحد  $V_X$  و  $V_Y$  مواضعها المحتملة، لكن لا بد من فحصها لاستبعاد النقاط السرجية. وكما هو مبين في الشكل 2c، قد تبدو النقاط السرجية كأنها قيم صغرى عند دراستها على طول خط واحد، لكنها ليست كذلك.

## 0.8 — D.4 نقطة

راجع نتائجك في السؤال السابق لتحديد القيم الصغرى الفعلية للشبكة البصرية: حدّد جميع القيم الصغرى المتكافئة الأقرب إلى نقطة الأصل (ولكن غير المنطبقة عليها). ما المسافة  $a$  بين أقرب قيمتين صغريين، أي ما ثابت شبكتنا البصرية؟ عبّر عن الإجابة بدلالة الطول الموجي لليزر  $\lambda_{\text{las}}$ .

يشير التعادل الكهربائي للذرات فائقة البرودة إلى أن تأثيراتها لا تصبح ذات أهمية إلا عندما تشغل ذرتان أو أكثر الموقع نفسه في شبكة بصرية. غير أن التجريبيين قادرين أيضاً على استكشاف ترتيبات تدعم تأثيرات ذرية بعيدة المدى. تعتمد إحدى الطرق الممكنة على إنشاء ما يُسمّى ذرات ريديبرغ، وهي ذرات كبيرة الحجم فعلياً وتتسم بخصائص أخرى معززة بشدة. ذرات ريديبرغ ذرات مثارة انتقل فيها إلكترون واحد إلى حالة ذات عدد كم رئيسي  $n$  كبير جداً. يمكن تقدير حجم ذرة ريديبرغ بحساب نصف قطر المدار الدائري الكلاسيكي لذلك الإلكترون عندما تكون كمية حركته الزاوية المدارية  $n\hbar$ ، حيث  $\hbar$  هو ثابت بلانك المختزل.

## 1.1 — D.5 نقطة

احسب قيمة  $n$  التي تقابل نصف قطر لذرة ريديبرغ من Rb مماثلاً للطول الموجي لضوء الليزر  $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ . أعط إجابتك بدلالة  $\lambda_{\text{las}}$  والثوابت الفيزيائية، وأوجد قيمتها العددية.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

## الإجابات

يرمز  $m_e$  هنا إلى كتلة الإلكترون. وللجزء D، نعرّف سعة المجال المشتركة  $E_0$ ، و  $U = \alpha E_0^2 > 0$ ، و

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{las}}}, \quad P_X = \frac{4\pi}{3k}, \quad P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}.$$

$$E_{\min} = \frac{h^2}{8mL^2} \quad \text{A.1} \cdot$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad \text{A.2} \cdot$$

$$\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h} \quad \text{A.3} \cdot$$

$$\lambda_{\text{Cy5}} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 648 \text{ nm} \quad \text{B.1} \cdot$$

$$\Delta\lambda = \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 129 \text{ nm}, \lambda_{\text{Cy3}} \simeq 519 \text{ nm} \quad \text{B.2} \cdot$$

$$K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3} \quad \text{B.3} \cdot$$

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ eV})^2} \simeq 3.3 \text{ ns} \quad \text{B.4} \cdot$$

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}, p = \sqrt{3mk_B T} \quad \text{C.1} \cdot$$

$$T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B}, \ell = n^{-1/3} \quad \text{C.2} \cdot$$

$$n_0 \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}, n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3} \quad \text{C.3} \cdot$$

$$V(\vec{r}) = -U \left[ \frac{3}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{b}_i \cdot \vec{r}) \right] \quad \text{D.1} \cdot$$

$$\vec{b}_3 = k \left( -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

• **D.2:** تشكّل المتجهات الستة  $\{\pm\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2, \pm\vec{b}_3\}$  سداسياً منتظماً. يبدّل دوران بزاوية  $60^\circ$  هذه المتجهات فيما بينها، وجيب التمام دالة زوجية، لذا لا يتغير  $V$ .

• **D.3:**  $V_X(x) = -U \left[ \frac{5}{2} + 2 \cos \left( \frac{3kx}{2} \right) \right]$  و  $V_Y(y) = -\frac{U}{2} \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{\sqrt{3}ky}{2} \right) \right]^2$ . بتريدي  $P_X$ .

للمقطع على محور  $x$  قيمة صغرى عند 0 وقيمة عظمى عند  $P_X/2$ . وبتريدي  $P_Y$ ، للمقطع على محور  $y$  قيمتان صغريان عند  $P_Y/2$  و  $3P_Y/2$  وقيمتان عظميان عند  $2P_Y/3$  و  $P_Y/3$ .

• **D.4:**  $a = \frac{2}{3} \lambda_{\text{las}}$ . أقرب ست قيم صغرى تقع عند  $(\pm a, 0)$  و  $(\pm a/2, \pm \sqrt{3}a/2)$ ، مع استقلال الإشارتين في الزوج الأخير.

• **D.5:**  $n = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}} \simeq 84.7$ ، وهو ما يقابل  $n \simeq 85$ .

## الحل

تستخدم الحسابات العددية القيم

$$\begin{aligned} h &= 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \\ m_e &\simeq 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \\ \epsilon_0 &\simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}, & k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \\ m_{\text{amu}} &\simeq 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}. \end{aligned}$$

### A.1

يجب أن تكون للموجة عقدة عند كل جدار. أطول موجة واقفة غير منعقدة تلائم البئر يمتد نصف طولها الموجي على عرض البئر:

$$L = \frac{\lambda_{\text{dB},1}}{2}.$$

ومن ثم تعطي علاقة دي برولي

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_{\text{dB},1}} = \frac{h}{2L}.$$

وباستخدام الطاقة الحركية غير النسبية، مع انعدام طاقة الوضع داخل البئر،

$$E_{\text{min}} = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

لا يمكن لحالة ذات عدد موجي صفري أن تحقق الشرطين الحديين معاً إلا إذا كانت الموجة منعقدة في كل موضع، ولذلك فهي ليست حالة مسموحة للجسيم.

### A.2

في النمط  $n$  للموجة الواقفة، يتسع الحيز بين الجدارين لـ  $n$  من أنصاف الأطوال الموجية:

$$L = n \frac{\lambda_{\text{dB},n}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وبالتالي،

$$\lambda_{\text{dB},n} = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{nh}{2L},$$

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

### A.3

بموجب حفظ الطاقة، تساوي طاقة الفوتون المنبعث النقص في طاقة الجسيم:

$$\frac{hc}{\lambda_{21}} = E_2 - E_1 = \frac{(4 - 1)h^2}{8mL^2}.$$

ومن ثم

$$\lambda_{21} = \frac{8mL^2}{3h}.$$

### B.1

يمكن لكل مستوى طاقة مكاني أن يستوعب إلكترونين ذوي لفين مغزليين متعاكسين. لذا تملأ الحالة الأرضية للمنظومة ذات الإلكترونات العشرة المستويات  $5, \dots, 1, n$ ، بالإلكترونين في كل مستوى.

تتمثل أصغر إثارة ممكنة في رفع إلكترون من  $n = 5$  إلى أول مستوى غير مشغول،  $n = 6$ . وتكون طاقتها

$$\Delta E_{Cy5} = E_6 - E_5 = \frac{(6^2 - 5^2)h^2}{8m_e L^2} = \frac{11h^2}{8m_e L^2}.$$

تقابل أصغر طاقة فوتون ممتص أكبر طول موجي:

$$\lambda_{Cy5} = \frac{hc}{\Delta E_{Cy5}} = \frac{8m_e c L^2}{11h}.$$

ومع  $L = 10.5l$

$$\lambda_{Cy5} = \frac{8(10.5)^2}{11} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{882}{11} \frac{m_e c l^2}{h}.$$

بالتعويض بـ  $l = 140 \times 10^{-12} \text{ m}$

$$\lambda_{Cy5} \simeq 6.48 \times 10^{-7} \text{ m} = 648 \text{ nm}.$$

### B.2

تؤدي إزالة ذرتي كربون إلى إزالة إلكترونين مشتركين وتقصير البئر بمقدار  $2l$ . ولذلك يحتوي Cy3 على ثمانية إلكترونات، ويكون

$$L_{Cy3} = 8.5l.$$

تملأ حالته الأرضية المستويات  $4, \dots, 1, n$ . وأدنى إثارة هي  $5 \rightarrow 4$ ، لذا

$$\Delta E_{Cy3} = \frac{(5^2 - 4^2)h^2}{8m_e (8.5l)^2} = \frac{9h^2}{8m_e (8.5l)^2}.$$

إذن

$$\lambda_{Cy3} = \frac{8(8.5)^2}{9} \frac{m_e c l^2}{h} = \frac{578}{9} \frac{m_e c l^2}{h} \simeq 519 \text{ nm}.$$

هذا الطول الموجي أقصر من الطول الموجي لـ Cy5، لذا يكون الانزياح نحو الأزرق. ومقداره

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_{Cy5} - \lambda_{Cy3} \\ &= \left( \frac{882}{11} - \frac{578}{9} \right) \frac{m_e c l^2}{h} \\ &= \frac{1580}{99} \frac{m_e c l^2}{h}. \end{aligned}$$

وعليه

$$\Delta\lambda \simeq 1.29 \times 10^{-7} \text{ m} = 129 \text{ nm}.$$

### B.3

أبعاد عزم ثنائي القطب هي أبعاد الشحنة مضروبة في الطول:

$$[d] = \text{C m}.$$

وبما أن

$$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{J m}},$$

فإن

$$\left[ \frac{d^2}{\varepsilon_0} \right] = \text{J m}^3.$$

تؤدي القسمة على  $h$ ، الذي أبعاده  $\text{J s}$ ، وعلى  $\lambda^3$  إلى الحصول على بُعد مقلوب الزمن المطلوب:

$$\left[ \frac{d^2}{\varepsilon_0 h \lambda^3} \right] = \text{s}^{-1}.$$

وباستخدام المعامل العديم الأبعاد المعطى،

$$K = \frac{16\pi^3 d^2}{3\varepsilon_0 h \lambda^3}.$$

هنا  $K$  هو معدل الاضمحلال الموجب. وبالنسبة إلى عدد الجزيئات التي تبقى مثارة  $N(t)$ ، فإن معادلة الاضمحلال هي  $dN/dt = -KN$ ؛ ويُفسَّر «النقص النسبي» الوارد في نص المسألة بوصفه مقدار الفقد الموجب.

### B.4

وفق النموذج المعطى، تُصدر أدنى حالة مثارة فوتوناً بطول موجي  $\lambda_{\text{Cy5}}$  عند عودتها إلى الحالة الأرضية. ويكون عزم ثنائي القطب لها

$$d = 2.4 \text{ e}l \simeq 5.38 \times 10^{-29} \text{ C m}.$$

ومعدل الانبعاث التلقائي هو

$$K = \frac{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2}{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3} \simeq 3.01 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

في الاضمحلال الأسّي، يكون متوسط العمر  $1/K$ :

$$\tau_{\text{Cy5}} = \frac{3\varepsilon_0 h \lambda_{\text{Cy5}}^3}{16\pi^3 (2.4 \text{ e}l)^2} \simeq 3.3 \text{ ns}.$$

### C.1

لإجراء تقدير درجة الحرارة المحدد في المسألة، يعطي مبدأ تساوي توزيع الطاقة متوسط الطاقة الحركية الانتقالية في ثلاثة أبعاد:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

ومن ثم تكون كمية الحركة النموذجية المرتبطة بسرعة الجذر التربيعي لمتوسط المربع

$$p = m \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3mk_B T}.$$

ويكون طول موجة دي برولي الموافق لها

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T}}.$$

## C.2

عند كثافة عددية  $n$ ، يكون متوسط الحجم متاح لكل جسيم  $1/n$ . وبالتالي تكون المسافة الخطية المميزة

$$\ell = n^{-1/3}.$$

بتطبيق معيار الانتقال الوارد في المسألة،

$$\lambda_{\text{dB}}(T_c) = \ell,$$

نحصل على

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T_c}} = n^{-1/3}.$$

وبالتربيع وإعادة الترتيب،

$$T_c = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_{\text{B}}}.$$

هذا هو تقدير درجة الحرارة المستنتج من معيار الطول الموجي والمسافة الفاصلة المذكور.

## C.3

بالنسبة إلى الروبيديوم،

$$m = 87m_{\text{amu}} \simeq 1.44467 \times 10^{-25} \text{ kg}, \quad T_c = 100 \text{ nK} = 1.00 \times 10^{-7} \text{ K}.$$

بحل نتيجة C.2 لإيجاد الكثافة،

$$n_c = \left( \frac{3mk_{\text{B}}T_c}{h^2} \right)^{3/2}.$$

وعدياً،

$$n_c \simeq 1.59 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}.$$

تبلغ المسافة الفاصلة الموافقة نحو  $8.57 \times 10^{-7} \text{ m}$ .

أما للغاز المثالي العادي، فيعطي قانون الغاز المثالي

$$p_0 = n_0 k_{\text{B}} T_0.$$

وباستخدام درجة الحرارة والضغط المحددين في السؤال،

$$n_0 = \frac{10^5}{k_{\text{B}}(300)} \simeq 2.41 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

إذن

$$\frac{n_0}{n_c} \simeq 1.52 \times 10^7.$$

الغاز العادي أعلى كثافة بنحو خمسة عشر مليون مرة.

## D.1

لتكن سعات المجالات الثلاثة جميعها  $E_0$ . نختار متجهات الموجة بما يتفق مع الشكل 2a،

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{k}_3 = k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$k = 2\pi/\lambda_{\text{las}} \text{ حيث}$$

جميع الاستقطابات في اتجاه  $z$ ، لذا تُجمع المجالات ككميات قياسية في ذلك الاتجاه:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{z} \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t).$$

المتوسطات الزمنية المطلوبة هي

$$\langle \cos^2(\phi - \omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

و

$$\langle \cos(\phi_i - \omega t) \cos(\phi_j - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j).$$

وعليه

$$\langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2 \left[ \frac{3}{2} + \sum_{i < j} \cos((\vec{k}_i - \vec{k}_j) \cdot \vec{r}) \right].$$

نعرف

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k \left( \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \vec{b}_2 &= \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = k(0, \sqrt{3}), \\ \vec{b}_3 &= \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = k \left( -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

بما أن جيب التمام دالة زوجية، فلا تؤثر الإشارة المختارة لكل فرق. ومع  $U = \alpha E_0^2$

$$V(\vec{r}) = -U \left[ \frac{3}{2} + \cos(\vec{b}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_2 \cdot \vec{r}) + \cos(\vec{b}_3 \cdot \vec{r}) \right].$$

يعطي جمع حدي جيب التمام الأول والثالث الصيغة الإحداثية المفيدة

$$V(x, y) = -U \left[ \frac{3}{2} + 2 \cos\left(\frac{3kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ky}{2}\right) + \cos(\sqrt{3}ky) \right].$$

## D.2

للمتجهات الثلاثة  $\vec{b}_i$  المقدار نفسه  $\sqrt{3}k$ ، وتفصل بينها زوايا مقدارها  $120^\circ$ . وبإضافة متجهاتها المعاكسة، نحصل على ستة متجهات بفواصل زاوية متتالية مقدارها  $60^\circ$ .

يكافئ تدوير متجه الموضع بزاوية  $60^\circ$ ، في كل حاصل ضرب قياسي، تدوير متجه  $\vec{b}_i$  الموافق بزاوية  $-60^\circ$ . وهذا يحول كل  $\vec{b}_i$  إلى عنصر آخر من المجموعة  $\{\pm \vec{b}_j\}$ . وبما أن

$$\cos(-\vec{b}_j \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{b}_j \cdot \vec{r}),$$

فإن المجموع لا يتغير. ومن ثم يمتلك الجهد التناظر الدوراني السداسي المذكور.

## D.3

بوضع  $y = 0$

$$V_X(x) = -U \left[ \frac{5}{2} + 2 \cos\left(\frac{3kx}{2}\right) \right].$$

دورها الأساسي هو

$$P_X = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{3}.$$

والمشتقة هي

$$V'_X(x) = 3Uk \sin\left(\frac{3kx}{2}\right).$$

ضمن  $0 \leq x < P_X$ ، تقع القيمة الصغرى عند  $x = 0$ ، والقيمة العظمى عند  $x = P_X/2$ . بالنسبة إلى المحور  $y$ ، نعرّف

$$q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

وعندئذ

$$V_Y(y) = -U \left( \frac{3}{2} + 2 \cos q + \cos 2q \right).$$

وباستخدام  $\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$ ،

$$V_Y(y) = -\frac{U}{2}(1 + 2 \cos q)^2.$$

دورها الأساسي هو

$$P_Y = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k} = \frac{2\lambda_{\text{las}}}{\sqrt{3}}.$$

ويعطي الاشتقاق

$$V'_Y(y) = \sqrt{3}Uk(1 + 2 \cos q) \sin q.$$

ومن ثم تحقق النقاط الساكنة إما  $\sin q = 0$  أو  $\cos q = -1/2$ .

فيما يلي ممثل واحد لكل عائلة من القيم القصوى والصغرى:

| المقطع | الإحداثي خلال دور واحد | الطبيعة على امتداد ذلك المحور | الجهد   |
|--------|------------------------|-------------------------------|---------|
| $V_X$  | $x = 0$                | قيمة صغرى                     | $-9U/2$ |
| $V_X$  | $x = P_X/2$            | قيمة عظمى                     | $-U/2$  |
| $V_Y$  | $y = 0$                | قيمة صغرى                     | $-9U/2$ |
| $V_Y$  | $y = P_Y/3$            | قيمة عظمى                     | $0$     |
| $V_Y$  | $y = P_Y/2$            | قيمة صغرى                     | $-U/2$  |
| $V_Y$  | $y = 2P_Y/3$           | قيمة عظمى                     | $0$     |

إذن تتغير  $V_X$  تغيراً جيبيّاً حول  $-5U/2$ . وخلال دور واحد، ترتفع  $V_Y$  من قيمة صغرى عميقة إلى الصفر، ثم تنخفض إلى قيمة صغرى أقل عمقاً، ثم ترتفع إلى الصفر مجدداً، وتعود إلى القيمة الصغرى العميقة عند حد الدور التالي.

#### D.4

نبدأ بفحص القيمة الصغرى الضحلة ظاهرياً عند

$$(x, y) = \left(0, \frac{P_Y}{2}\right).$$

هنا تكون المشتقات الثانية للجهد الكامل

$$V_{xx} = -\frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{yy} = \frac{3}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0.$$

للاحناءين إشارتان متعاكستان، لذا فهذه النقطة **سرجية** وليست موقعاً من مواقع الشبكة.  
عند نقطة الأصل،

$$V_{xx} = V_{yy} = \frac{9}{2}Uk^2, \quad V_{xy} = 0,$$

لذا فإن نقطة الأصل موضع قيمة صغرى حقيقية.

لتحديد مواضع جميع القيم الصغرى الحقيقية، نكتب

$$t = \frac{3kx}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{3}ky}{2}.$$

شرطا السكون هما

$$\sin t \cos q = 0, \quad \sin q(\cos t + 2 \cos q) = 0.$$

إذا كان  $\cos q \neq 0$ ، فإن السكون في اتجاه  $x$  يتطلب  $\sin t = 0$ . وعندئذٍ يتطلب الانحناء الموجب في اتجاه  $x$  أن يكون

$$\cos t \cos q > 0.$$

وبما أن  $\cos t$  و  $\cos q$  لهما الإشارة نفسها، فلا يمكن أن ينعدم  $\cos t + 2 \cos q$ . لذا  $\sin q = 0$ . ومن ثم تحقق القيم الصغرى

$$t = \pi r, \quad q = \pi s,$$

حيث العدان الصحيحان  $r, s$  كلاهما زوجي أو كلاهما فردي. أما الاحتمال المتبقي للسكون،  $\cos q = 0$ ، فيتطلب أيضاً  $\cos t = 0$ ؛ ومحدد مصفوفة هيس فيه سالب، لذا فهو لا يعطي إلا نقاطاً سرجية.

بكتابة  $r = 2j + s$ ، تكون مواقع الشبكة

$$\vec{r}_{j,s} = a \left( j + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}s}{2} \right), \quad j, s \in \mathbb{Z},$$

حيث

$$a = \frac{4\pi}{3k}.$$

عند هذه النقاط، تساوي حدود جيب التمام الثلاثة الناتجة عن التداخل 1 جميعها، و

$$V_{\min} = -\frac{9}{2}U.$$

مربع المسافة من نقطة الأصل هو

$$|\vec{r}_{j,s}|^2 = a^2(j^2 + js + s^2).$$

بالنسبة إلى أزواج الأعداد الصحيحة غير الصفريّة، فإن أصغر قيمة للعدد الصحيح الموجب  $j^2 + js + s^2$  هي 1. وتتحقق عند ستة مواقع:

$$\left[ (a, 0), (-a, 0), \left( \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left( -\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left( \frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \left( -\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right) \right].$$

تشكّل هذه المواقع سداسياً منتظماً حول نقطة الأصل. وعليه

$$a = \frac{4\pi}{3k} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{las}}.$$

## D.5

بالنسبة إلى إلكترون خارجي شديد الإثارة، تؤثر النواة والإلكترونات الداخلية تقريباً بوصفها قلباً ذا شحنة محصلة  $+e$ . نستخدم نموذج المدار الدائري الكلاسيكي المذكور، مع إهمال تأثيرات اختراق القلب وحركة القلب الأثقل بكثير.

يوفر تجاذب كولوم القوة الجاذبة المركزية:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

وكمية الحركة الزاوية المحددة هي

$$m_e v r = n\hbar.$$

بحذف  $v$ ،

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

ومن ثم

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2,$$

حيث

$$a_0 \simeq 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

بأخذ نصف القطر المقدّر مساوياً لـ  $\lambda_{\text{las}}$ ،

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{las}}}{a_0}} = \sqrt{\frac{m_e e^2 \lambda_{\text{las}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}.$$

عندما  $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$

$$n = \sqrt{\frac{380 \times 10^{-9}}{5.292 \times 10^{-11}}} \simeq 84.7.$$

إذن العدد الصحيح الموافق لعدد الكم الرئيسي هو

$$\boxed{n \approx 85}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.