

IPhO 2019

理论题与解答 · 以色列特拉维夫 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2019/

题目 1: 零长度弹簧与彩虹弹簧

零有效长度弹簧 (ZLS) 是一种弹力与弹簧长度成正比的弹簧, 即当 $L > L_0$ 时, $F = kL$, 其中 L_0 是弹簧的最小长度, 也是其未拉伸时的长度。图 1 给出了 ZLS 的弹力 F 与弹簧长度 L 之间的关系, 其中直线的斜率为劲度系数 k 。

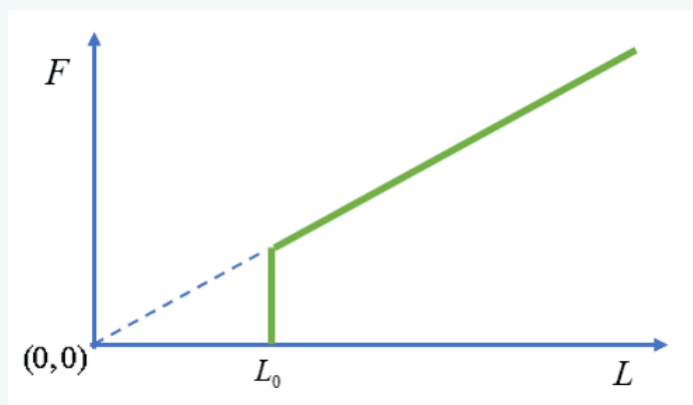


图 1: 弹力 F 与弹簧长度 L 之间的关系

ZLS 可用于地震测量, 并能够非常精确地测量重力加速度 g 的变化。这里, 我们将考虑一根均匀的 ZLS, 其重力 Mg 大于 kL_0 。我们定义相应的无量纲比值 $\alpha = kL_0/Mg < 1$, 以表征弹簧的相对柔软程度。名为“彩虹弹簧” (slinky) 的玩具可能是 (但不一定是) 这样的 ZLS。

部分 A: 静力学 (3.0 分)

A.1	考虑未拉伸的 ZLS 弹簧中长度为 $\Delta\ell$ 的一段, 在失重条件下, 用力 F 将其拉伸。该段的长度 Δy 是 F 、 $\Delta\ell$ 及弹簧参数的什么函数?	0.5 分
A.2	对于长度为 $\Delta\ell$ 的一段弹簧, 计算将其从原长 $\Delta\ell$ 拉伸至长度 Δy 所需做的功 ΔW 。	0.5 分

在本题中, 我们用弹簧未拉伸时某点到弹簧底端的距离 $0 \leq \ell \leq L_0$ 来标记弹簧上的该点。特别地, 对于弹簧上的每一点, ℓ 在弹簧拉伸过程中保持不变。

A.3	假设将弹簧的顶端悬挂起来, 使其在自身重力作用下伸长。悬挂的弹簧达到平衡时, 其总长度 H 是多少? 用 L_0 和 α 表示你的答案。	2.0 分
-----	---	-------

部分 B: 动力学 (5.5 分)

实验表明, 将弹簧悬挂至静止后释放, 它会从顶端开始逐渐收缩, 而下部保持静止 (见图 2)。随着时间推移, 收缩部分作为一个整体运动, 并不断吸纳更多的弹簧线圈, 而静止部分则逐渐变短。弹簧上的每一点只有在运动部分到达该点时才开始运动。只有当弹簧完全收拢、达到其未拉伸时的长度 L_0 时, 弹簧底端才开始运动。此后, 收拢的弹簧在重力作用下作为刚体继续竖直下落, 不发生翻滚。

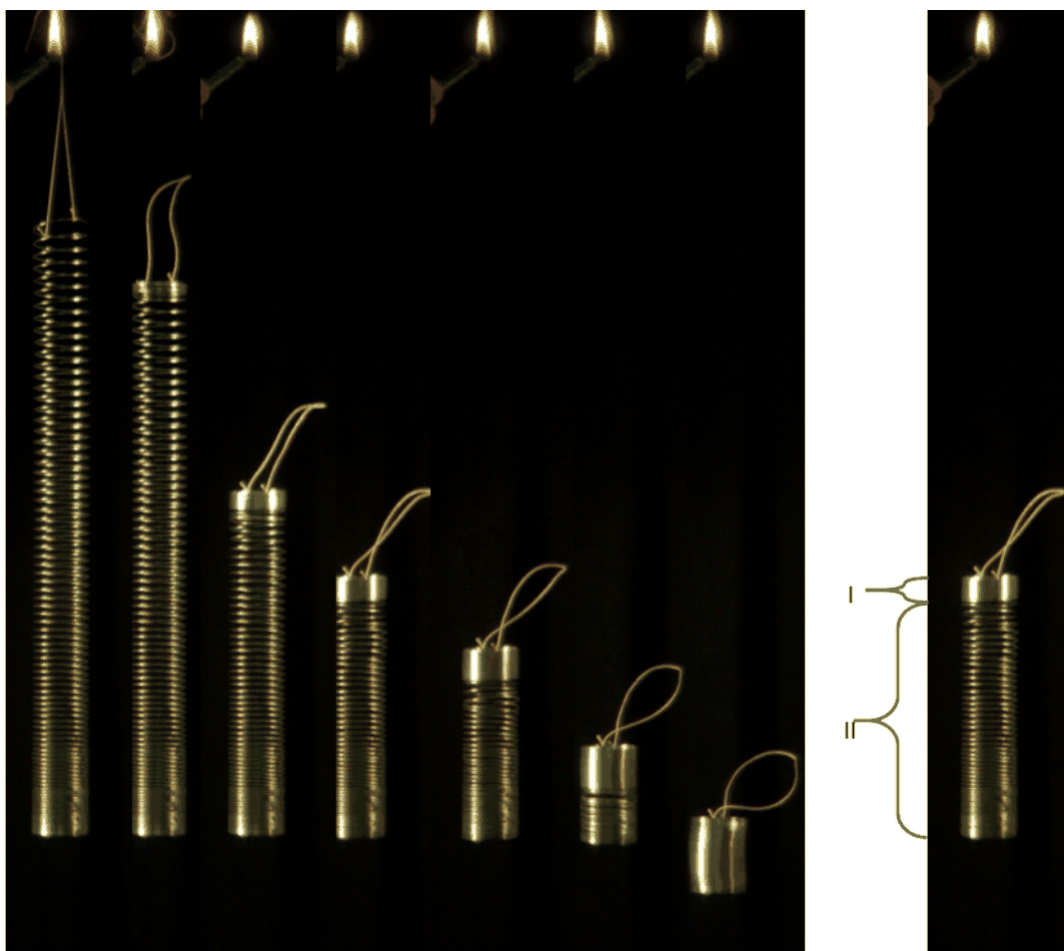


图 2：左：彩虹弹簧自由下落过程中拍摄的一组连续照片。右：弹簧自由下落过程中的运动部分 I 和静止部分 II。

在本题的其余部分中，请根据上述模型求解。可以忽略空气阻力，但不能忽略 L_0 。

B.1	计算从弹簧释放的瞬间起，到其完全收拢并恢复至最小长度 L_0 所需的时间 t_c 。用 L_0 、 g 和 α 表示你的答案。对于 $k = 1.02 \text{ N/m}$ 、 $L_0 = 0.055 \text{ m}$ 、 $M = 0.201 \text{ kg}$ 的弹簧，取 g 为 9.80 m/s^2 ，计算 t_c 的数值。	2.5 分
B.2	在本小题中， ℓ 表示部分 I（图 2 中的运动部分）与部分 II（静止部分）之间分界处的坐标。在静止部分仍然存在的某一时刻，其质量为 $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$ ，运动部分各点以相同的瞬时速度 $v_I(\ell)$ 运动。证明在该时刻（静止部分仍然存在时），运动部分的速度为 $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ 。用 L_0 、 g 和 α 表示常数 A 和 B 。	2.5 分
B.3	根据 B.2，求弹簧释放后、撞击地面前运动过程中，其运动部分的最小速率 $v_{\min}$ 。用 L_0 、 α 、 A 和 B 表示你的答案。	0.5 分

部分 C：能量分析（1.5 分）

C.1	计算从弹簧释放的瞬间起，到弹簧即将撞击地面之前，因生热而损失的机械能 Q 。用 L_0 、 M 、 g 和 α 表示你的答案。	1.5 分
-----	--	-------

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1

$$\Delta y = \Delta \ell \max\left(1, \frac{F}{kL_0}\right)$$

- A.2, 对于 $\Delta y \geq \Delta \ell$:

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2]$$

- A.3

$$H = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2)$$

- B.1

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}} \quad t_c \approx 0.245 \text{ s}$$

- B.2, 取向下的速度为正:

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}$$

收拢过程经过的范围为 $\alpha L_0 \leq \ell < L_0$ 。

- B.3

$$v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

该最小速率出现在运动部分与初始时紧密并拢的底部发生碰撞之后的瞬间。

- C.1

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$$

解答

A.1

在失重条件下，各处张力相同。由于弹簧是均匀的，每一段拉伸后的长度与未拉伸时的长度之比都相同。

当 $F > kL_0$ 时，整根弹簧的长度为 $L = F/k$ ，因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{L}{L_0} = \frac{F}{kL_0}.$$

等价地，该段弹簧的劲度系数为

$$k_{\text{seg}} = \frac{kL_0}{\Delta \ell}.$$

当 $0 \leq F \leq kL_0$ 时，该段弹簧保持最小长度。因此

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta \ell, & 0 \leq F \leq kL_0, \\ \frac{F\Delta \ell}{kL_0}, & F > kL_0. \end{cases}$$

A.2

将张力增大到 kL_0 的过程不产生位移，因此不需要做机械功。在随后的拉伸过程中，当该段弹簧的瞬时长度为 s 时，

$$F(s) = \frac{kL_0}{\Delta \ell} s.$$

准静态拉伸所需做的功为

$$\Delta W = \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} F(s) ds = \frac{kL_0}{\Delta \ell} \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} s ds.$$

因此

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2].$$

这也是弹性势能的增加量。

A.3

单位未拉伸长度的质量为

$$\mu = \frac{M}{L_0}.$$

在物质坐标 ℓ 处，张力支撑着该点下方的全部弹簧：

$$T(\ell) = \mu g \ell = \frac{Mg}{L_0} \ell.$$

只有在 $T(\ell) > kL_0$ 的位置才会发生拉伸。因此，紧密并拢部分与拉伸部分的分界处满足

$$\frac{Mg}{L_0} \ell_* = kL_0, \quad \boxed{\ell_* = \alpha L_0}.$$

因此，弹簧最下方占比为 α 的部分保持未拉伸状态。

设 $y_0(\ell)$ 为平衡时相对于底端的高度。在局部应用 A.1 的结果，得

$$\frac{dy_0}{d\ell} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell}{\alpha L_0}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

积分并利用 $y_0(0) = 0$ ，得

$$y_0(\ell) = \begin{cases} \ell, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

特别地，

$$\boxed{H = y_0(L_0) = \frac{L_0}{2\alpha} (1 + \alpha^2)}.$$

B.1

释放后，重力是唯一的外力。因此，即使内部碰撞耗散能量，质心仍以加速度 g 下落。

初始质心高度为

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} y_0(\ell) d\ell \\ &= \frac{1}{L_0} \left[\int_0^{\alpha L_0} \ell d\ell + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left(\frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2} \right) d\ell \right] \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 + 3\alpha^2 - \alpha^3). \end{aligned}$$

在完全收拢的瞬间，底端尚未移动。弹簧占据从 $y = 0$ 到 $y = L_0$ 的区间，因此

$$y_{\text{cm},c} = \frac{L_0}{2}.$$

所以质心下落的距离为

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c} &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3. \end{aligned}$$

由于质心从静止开始下落，

$$\frac{1}{2} g t_c^2 = \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3,$$

因此

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}}.$$

对于题给数据，

$$\alpha = \frac{1.02(0.055)}{0.201(9.80)} = 0.0284800.$$

使用以下等价表达式较为方便：

$$t_c = \sqrt{\frac{M}{3k}} (1 - \alpha)^{3/2}.$$

数值计算得

$$t_c = 0.2454228 \dots \text{ s} \approx 0.245 \text{ s}.$$

B.2

取向下的速度为正。引入

$$x = L_0 - \ell, \quad D = (1 - \alpha)L_0.$$

这里， x 是已并入运动的紧密并拢部分的弹簧在未拉伸时的长度。该部分的质量和实际长度为

$$m_I = \frac{M}{L_0} x, \quad L_I = x.$$

由于剩余弹簧静止，向下的总动量为 $m_I v_I$ 。从释放时刻起对外力 Mg 作时间积分，得

$$\frac{M}{L_0} x v_I = M g t,$$

即

$$\boxed{x v_I = L_0 g t}.$$

这一动量方程包含了运动部分质量增加的影响。

运动部分的下边界位于高度 $y_0(\ell)$ 处。因此，其顶端的高度为

$$Y_{\text{top}} = y_0(\ell) + L_0 - \ell.$$

当分界处位于初始时被拉伸的部分内时，

$$\begin{aligned} v_I &= -\frac{dY_{\text{top}}}{dt} \\ &= -\left(\frac{\ell}{\alpha L_0} - 1\right)\dot{\ell} \\ &= \frac{D-x}{\alpha L_0}\dot{x}. \end{aligned}$$

将此式与 $x v_I = L_0 g t$ 联立，得

$$x(D-x)\dot{x} = \alpha L_0^2 g t.$$

从 $x = 0, t = 0$ 开始积分，得

$$\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\alpha L_0^2 g t^2}{2}.$$

因此

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha L_0^2 g} \left(D - \frac{2x}{3} \right).$$

代入动量关系式，得

$$\begin{aligned} v_I^2 &= \frac{L_0^2 g^2 t^2}{x^2} \\ &= \frac{g}{\alpha} \left(D - \frac{2x}{3} \right) \\ &= \frac{g}{\alpha} \left[(1-\alpha)L_0 - \frac{2}{3}(L_0 - \ell) \right] \\ &= \frac{2g}{3\alpha}\ell + \frac{gL_0(1-3\alpha)}{3\alpha}. \end{aligned}$$

于是

$$\boxed{v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}}, \quad \boxed{A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1-3\alpha)}{3\alpha}}.$$

运动的分界处在 $\ell = \alpha L_0$ 时到达初始时紧密并拢的底部。因此，这一连续收缩阶段所涵盖的范围为

$$\alpha L_0 \leq \ell < L_0.$$

B.3

由于 $A > 0$ ，运动部分的速率随 ℓ 减小而降低。在即将到达初始时紧密并拢的底部之前，其速率为

$$v_- = \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

此时，运动部分的质量为 $(1 - \alpha)M$ ，而紧密并拢的底部质量为 αM ，仍然静止。弹簧已达到最小总长度，因此这两部分通过一次完全非弹性碰撞结合在一起，这与题设要求此后作刚体运动相符。

在这一瞬时碰撞过程中，重力的冲量可以忽略。由动量守恒，得

$$(1 - \alpha)Mv_- = Mv_c,$$

因此

$$v_c = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

这一速率小于 v_- 。此后，整根弹簧以加速度 g 向下加速，速率增大。因此，

$$v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

作为检验，

$$A\alpha L_0 + B = \frac{gL_0(1 - \alpha)}{3\alpha},$$

所以

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha}} = gt_c,$$

这与完全收拢时总动量的要求一致。

“释放后”排除了释放瞬间完全静止的状态。在题设的连续介质模型中，当 $t \rightarrow 0^+$ 时，运动部分的质量趋于零，因此在总动量趋于零的同时，速率可以趋于一个有限值。

C.1

取弹簧处于最小长度时的弹性势能为零。对无穷小的一段弹簧应用 A.2 的结果，得

$$dU_{\text{el}} = \frac{kL_0}{2} \left[\left(\frac{dy_0}{d\ell} \right)^2 - 1 \right] d\ell.$$

初始时紧密并拢的底部对弹性势能的贡献为零。因此

$$\begin{aligned} U_{\text{el},0} &= \frac{kL_0}{2} \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left[\frac{\ell^2}{\alpha^2 L_0^2} - 1 \right] d\ell \\ &= \frac{kL_0^2}{6\alpha^2} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned}$$

利用 $kL_0 = \alpha Mg$ ，得

$$U_{\text{el},0} = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3).$$

完全收拢之后的瞬间，弹性势能为零，整根弹簧以速率 $v_c = gt_c$ 平动。截至这一时刻，耗散的能量为

$$Q = U_{\text{el},0} + Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) - \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

然而，由质心的自由落体运动可得

$$Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) = \frac{1}{2}Mg^2t_c^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

这两项相消，剩下

$$Q = U_{\text{el},0}.$$

收拢后，弹簧作为刚体下落，不受空气阻力，也不发生翻滚，因此在撞击前不再损失机械能。将结果因式分解，得

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha).$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：微波炉的物理原理

本题讨论微波炉中微波辐射的产生，以及利用微波辐射加热食物的过程。微波辐射由一种称为“磁控管”的装置产生。A 部分讨论磁控管的工作原理，B 部分讨论食物对微波辐射的吸收。

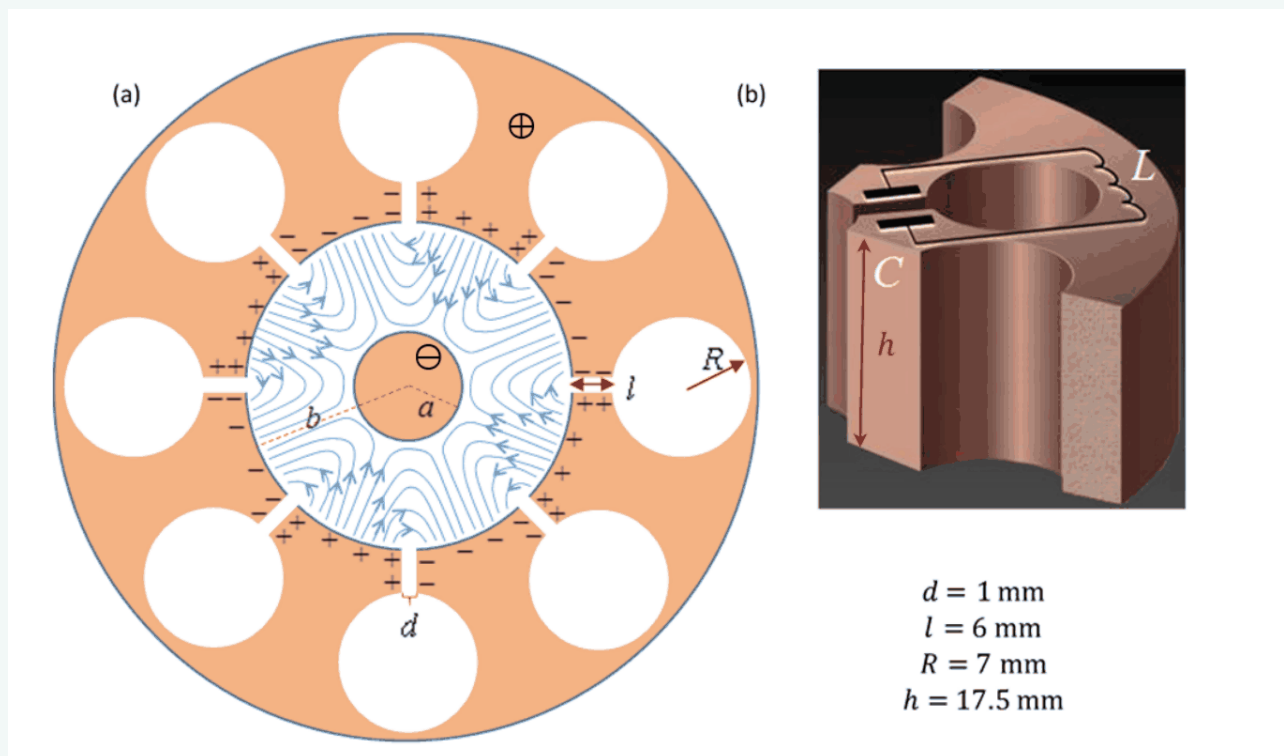


图 1

部分 A: 磁控管的结构与工作原理 (6.6 分)

磁控管是一种产生微波辐射的装置，既可以产生脉冲辐射（用于雷达），也可以产生连续辐射（例如用于微波炉）。磁控管具有一种自放大的振荡模式。给磁控管施加静态（非交变）电压，就能迅速激发这一模式。由此产生的微波辐射被传输到磁控管外。

典型的微波炉磁控管由实心铜圆柱形阴极（半径为 a ）和环绕它的阳极（半径为 b ）组成。阳极呈厚圆柱壳形，其中钻有圆柱形空腔。这些空腔称为“谐振腔”。其中一个谐振腔与天线耦合，天线将微波能量传输出去；以下讨论中我们忽略天线。所有内部空间均为真空。我们考虑一个具有八个谐振腔的典型磁控管，如图 1(a) 所示。单个谐振腔的三维结构如图 1(b) 所示。如图所示，八个空腔中的每一个都相当于一个电感-电容 (LC) 谐振器，其工作频率为 $f = 2.45 \text{ GHz}$ 。

沿磁控管的纵轴施加一个静态匀强磁场，在图 1(a) 中其方向垂直纸面向外。此外，在阳极（正电势）与阴极（负电势）之间施加恒定电压。从阴极发射的电子到达阳极并使其带电，从而激发一种振荡模式，在该模式下，每两个相邻谐振腔的电荷符号相反。空腔的振荡使这些振荡得到放大。

上述过程在阴极与阳极之间的空间中产生频率为前述 $f = 2.45 \text{ GHz}$ 的交变电场（图 1(a) 中的蓝线；图中未画出静电场），它叠加在外加恒定电压所产生的静电场上。在稳态下，阳极与阴极之间交变电场的典型振幅约为该处静电场的 $\frac{1}{3}$ 。阴极与阳极之间空间中的电子运动同时受到电场的静态部分和交变部分的影响。这使得到达阳极的电子将其从静电场获得的能量的约 80% 转移给交变电场。少数发射出的电子返回阴极，释放出更多电子，从而进一步放大交变电场。

每个谐振腔都可以看作一个电容器和一个电感器，见图 1(b)。电容主要来自谐振腔表面的平面部分，而电感则来自圆柱面部分。假设谐振腔中的电流在紧贴其圆柱形空腔表面处均匀流动，且该电流产生的磁场大小为理想无限长螺线管磁场大小的 0.6 倍。确定谐振腔几何形状的各个长度在图 1(b) 中给出。真空介电常数和真空磁导率分别为 $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ 和 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

A.1 — 0.4 分

利用上述数据估算单个谐振腔的频率 f_{est} 。（你的结果可能与实际值 $f = 2.45 \text{ GHz}$ 不同。在本题其余部分中，请使用**实际值**。）

下面的任务 A.2 不涉及磁控管本身，而是帮助引入一些相关的物理知识。考虑一个电子在自由空间中运动，受到沿 y 轴负方向的匀强电场 $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ 和沿 z 轴正方向的匀强磁场 $\vec{B} = B_0\hat{z}$ 的作用（ E_0 和 B_0 均为正数； $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 是按通常方式定向的单位矢量）。用 $\vec{u}(t)$ 表示电子在时刻 t 的速度。电子的漂移速度 $\vec{u}_D$ 定义为其平均速度。分别用 m 和 $-e$ 表示电子的质量和电荷。

A.2 — 1.5 分

对于以下两种情况，分别求出 $\vec{u}_D$ 。此外，在答题纸上画出电子在时间间隔 $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ 内的轨迹（在实验室参考系中），条件分别为：

1. 在 $t = 0$ 时，电子的速度为 $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
2. 在 $t = 0$ 时，电子的速度为 $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ 。

现在我们继续讨论磁控管。阴极与阳极之间的距离为 15 mm。假设由于前述向交变场的能量损失，每个电子的最大动能不超过 $K_{\text{max}} = 800 \text{ eV}$ 。静磁场的大小为 $B_0 = 0.3 \text{ T}$ 。电子的质量和电荷分别为 $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ 和 $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 。

A.3 — 0.4 分

在电子运动近似为圆周运动的参考系中，估算电子运动轨迹的最大半径 r 的数值，并将该参考系视为近似惯性系。

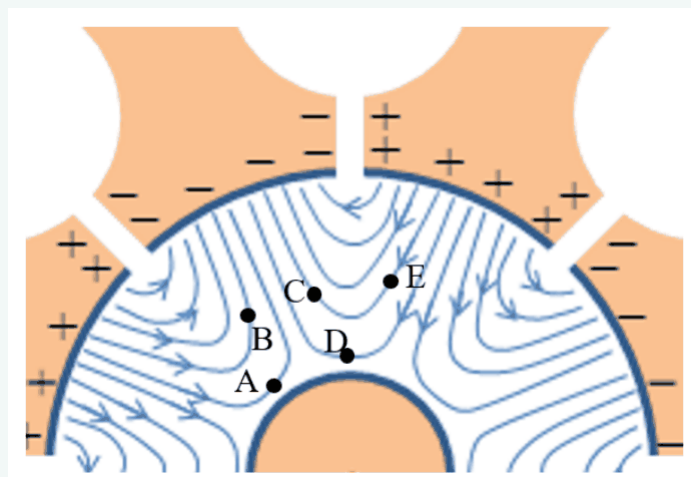


图 2

A.4 — 1.2 分

图 2 描绘了某一时刻阳极与阴极之间的交变电场线（图中未画出静电场）。在答题纸上指出，位于 A、B、C、D 和 E 的电子中，哪些在该时刻向阳极漂移，哪些向阴极漂移，哪些沿垂直于半径的方向漂移。

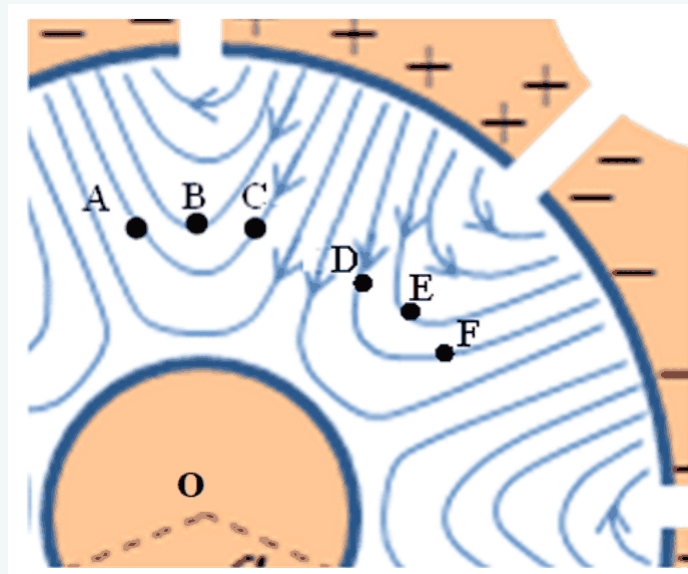


图 3

图 3 描绘了某一时刻阳极与阴极之间的交变电场线（图中未画出静电场）。六个电子在该时刻的位置分别用 A、B、C、D、E 和 F 表示。所有电子到阴极的距离均相同。

A.5 — 1.2 分

考虑图 3 所示的情形。对于六对电子 AB、AC、BC、DE、DF、EF，分别在答题纸上指出，其漂移会使它们的位置矢量（以阴极中心 O 为起点）之间的夹角在该时刻增大还是减小。

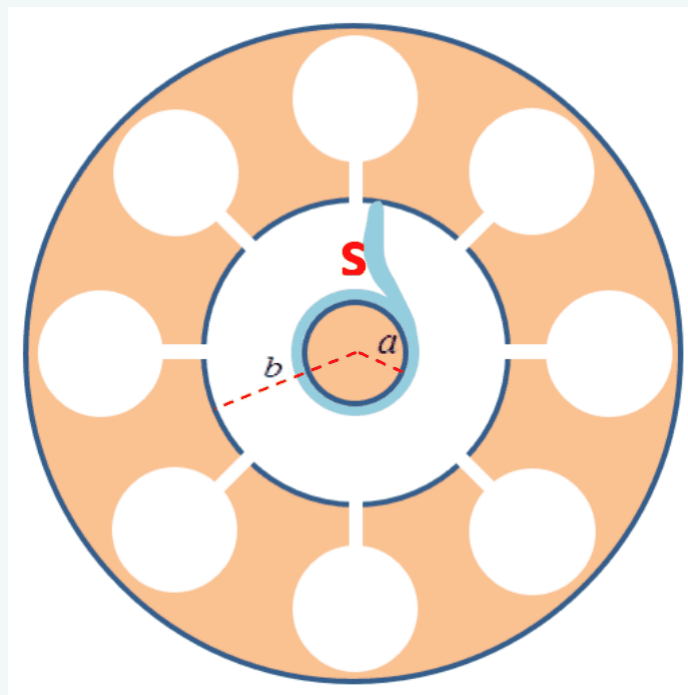


图 4

你在任务 A.5 中发现的规律构成了一种聚焦机制，使阴极与阳极之间空间中的电子集中成辐条状。图 4 描绘了其中一条辐条，记为 S。

A.6 — 0.8 分

在答题纸上画出该时刻的其他辐条。用箭头标出它们的旋转方向，并计算其平均角速度 ω_s 。

作如下近似：阴极与阳极之间中点处的总电场等于沿阴极到阳极的一条径向线上的静电场平均值，并且辐条在该区域内近似沿径向。阴极和阳极的半径（分别为 a 和 b ）在图 4 中定义。

A.7 — 1.1 分

求出使磁控管按上述方式工作所需的静态电压 V_0 的近似表达式。（你求出的表达式给出了磁控管工作所需最小电压的近似值；最佳电压略高于此值。）

部分 B: 微波辐射与水分子的相互作用 (3.4 分)

本部分讨论利用微波辐射（由磁控管天线辐射到食物腔内）进行烹饪，也就是加热有损耗的电介质材料，例如纯水或盐水（后者可作为汤等食物的模型）。

电偶极子由两个相距很小距离 d 、电荷量大小相等且符号相反的电荷 q 和 $-q$ 构成。电偶极矩矢量由负电荷指向正电荷，其大小为 $p = qd$ 。

一个随时间变化的电场 $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ 作用于单个偶极子，其偶极矩为 $\vec{p}(t)$ ，大小恒为 $p_0 = |\vec{p}(t)|$ 。偶极矩与电场之间的夹角为 $\theta(t)$ 。

B.1 — 0.5 分

用 p_0 、 $E(t)$ 、 $\theta(t)$ 及其导数，写出电场作用于偶极子的力矩大小 $\tau(t)$ 以及电场向偶极子传递能量的功率 $H_i(t)$ 的表达式。

水分子具有极性，因此可以视为电偶极子。由于液态水中水分子之间存在很强的氢键，不能将它们视为相互独立的偶极子。而应使用极化强度矢量 $\vec{P}(t)$ ，它是偶极矩密度（水分子集合中单位体积的平均偶极矩）。极化强度 $\vec{P}(t)$ 平行于局部外加交变电场（微波辐射的电场） $\vec{E}(t)$ ，并随时间振荡，其振幅与局部交变电场的振幅成正比，但相位滞后 δ 。

水中某一位置的局部交变电场为 $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$ ，其中 $\omega = 2\pi f$ ，它产生的极化强度为 $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$ ，其中无量纲常数 β 是水的一项性质。

B.2 — 0.5 分

求水在单位体积内吸收的时间平均功率 $\langle H(t) \rangle$ 的表达式。

随时间变化的周期变量 $f(t)$ 在其周期 T 内的时间平均值定义为：

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

现在考虑辐射在水中的传播。水的相对介电常数（在该电磁场频率下）为 ϵ_r ，对应的水的折射率为 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 。电场的瞬时能量密度为 $\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2$ 。电场和磁场的时间平均能量密度相等。

B.3 — 1.1 分

用 $I(z)$ 表示时间平均辐射能流密度（通过单位面积的平均辐射功率）。这里 z 是辐射进入水中的穿透深度，辐射沿 z 方向传播。求能流密度 $I(z)$ 随 z 变化的表达式。结果中可以包含水面处的能流密度 $I(0)$ 。

相位滞后 δ 是水分子间相互作用的结果。它通过关系 $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$ 取决于无量纲介电损耗系数 ε_ℓ 和相对介电常数 ε_r （两者均取决于辐射角频率 ω 和温度）。当 δ 足够小时，水中穿透深度 z 处的电场为：

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

其中 $k_0 = \omega/c$, $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s 为真空中的光速。

B.4 — 0.6 分

采用近似 $\tan \delta \approx \sin \delta$ ，用其他参数表示任务 B.2 中定义的系数 β 。

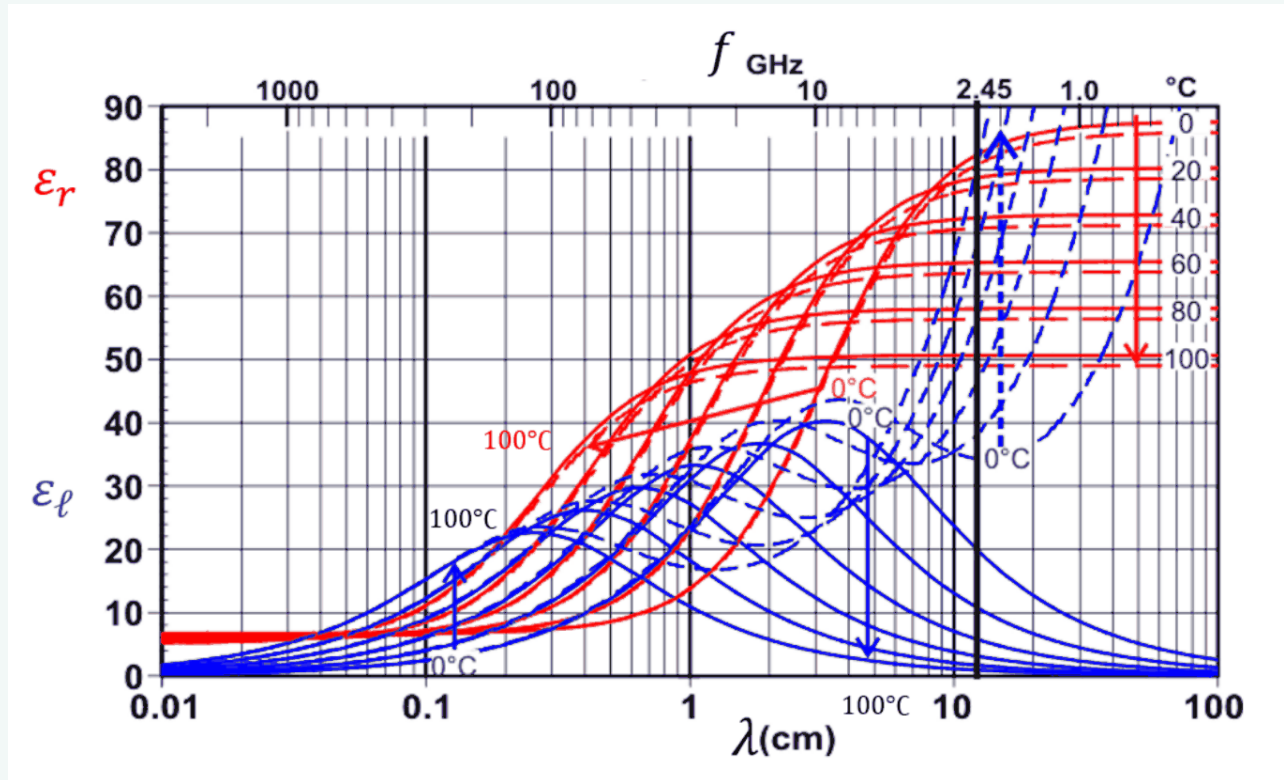


图 5。箭头表示各曲线随温度从 0°C 到 100°C 的变化方向。

图 5 给出了在几个不同温度下，纯水（实线）和稀盐水溶液（虚线）的 ε_ℓ （蓝色）和 ε_r （红色）随波长或频率的变化关系。粗竖线标出了角频率 $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ 。以下仅考虑这一频率的微波辐射。

B.5 — 0.7 分

利用图 5 回答以下问题：

1. 对于 20°C 的水，求单位体积吸收功率降至 $z = 0$ 处数值一半时的穿透深度 $z_{1/2}$ 。
2. 在答题纸上指出，微波辐射在水中的穿透深度随温度升高是增大、减小还是保持不变。
3. 在答题纸上指出，微波辐射在汤（稀盐溶液）中的穿透深度随温度升高是增大、减小还是保持不变。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1: $C \simeq 0.93 \text{ pF}$, $L \simeq 6.6 \text{ nH}$, 由此得到

$$f_{\text{est}} \simeq 2.03 \text{ GHz.}$$

- A.2: 两种情况下均有

$$\vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{x}.$$

令 $\omega_c = eB_0/m$, $\ell = mE_0/(eB_0^2)$, $s = \omega_c t$. 取初始位置为原点, 则所求轨迹为

$$\frac{(x, y)_1}{\ell} = (-s + 4 \sin s, 4[1 - \cos s]),$$

$$\frac{(x, y)_2}{\ell} = (-s - 2 \sin s, -2[1 - \cos s]), \quad 0 < s < 4\pi.$$

它们是向左漂移、带有环圈的长幅摆线, 回旋方向为逆时针。

- A.3:

$$r_{\text{max}} \simeq 3.2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.32 \text{ mm.}$$

- A.4: 我对电场线切线方向的判读结果是: **A 和 B 向阴极漂移; C、D 和 E 向阳极漂移; 没有电子的漂移方向恰好垂直于半径。**下文会说明读图的不确定性。
- A.5: **AB、AC 和 BC 的夹角减小; DE、DF 和 EF 的夹角增大。**
- A.6: 共有**四条辐条**, 彼此相隔 90° 。补画将 S 分别旋转 90° 、 180° 和 270° 后得到的辐条。它们沿**逆时针方向**旋转, 角速度为

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{4} = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

- A.7:

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

- B.1: 以 $|E|$ 表示电场大小, 并以偶极矩与瞬时电场之间的夹角作为角度, 有

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta, \quad H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

不依赖于约定的功率公式为 $H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}$ 。

- B.2:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

- B.3:

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

- B.4:

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

- B.5:

1.

$$z_{1/2} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell} \simeq 1.2 \text{ cm}$$

其中采用了从图中读出的近似值 $\varepsilon_r \simeq 78$ 、 $\varepsilon_\ell \simeq 10$ 。

2. 纯水中的穿透深度随温度升高而增大。

3. 汤中的穿透深度随温度升高而减小。

解答

A.1

构成狭缝的两个近似平行导电面的面积为 hl ，间距为 d 。忽略边缘效应，其电容为

$$C \simeq \frac{\varepsilon_0 hl}{d}.$$

使用图 1 中的尺寸，

$$C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(17.5 \times 10^{-3})(6 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}} = 9.29 \times 10^{-13} \text{ F}.$$

设 I 为绕圆柱形空腔流动的总电流。电流沿高度 h 均匀分布，因此等效面电流密度为 I/h 。具有这一面电流的理想无限长螺线管会产生 $\mu_0 I/h$ 的磁场。应用题目指定的修正，

$$B \simeq 0.6 \frac{\mu_0 I}{h}.$$

将穿过空腔的磁通量近似为 $B\pi R^2$ ，则

$$L = \frac{\Phi}{I} \simeq 0.6 \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = 6.63 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

因此

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{0.6\mu_0\varepsilon_0\pi R^2 l}} \simeq 2.03 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

由于 $C \propto h$ 且 $L \propto h^{-1}$ ，高度被约去。这个估算是近似的，因为我们用理想化的集总电容和电感来表示谐振腔。

A.2

电子遵循洛伦兹力方程，

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

对于题目给定的场，其分量形式为

$$\dot{u}_x = -\omega_c u_y, \quad \dot{u}_y = \omega_c \left(u_x + \frac{E_0}{B_0} \right), \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

定义 $v_D = E_0/B_0$ 。恒定速度 $-v_D\hat{x}$ 使电场力与磁场力相互抵消。更一般地，

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = -v_D\hat{x}.$$

在以此速度平移的参考系中，剩余的速度矢量匀速转动。对于 $u_y(0) = 0$,

$$u_x = -v_D + A \cos(\omega_c t), \quad u_y = A \sin(\omega_c t),$$

其中 $A = u_x(0) + v_D$ 。振荡项的平均值为零，因此两种初始条件给出相同的漂移速度。

取 $x(0) = y(0) = 0$ ，积分得到

$$x = -v_D t + \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad y = \frac{A}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)].$$

对于情况 1, $A = 4v_D$ ；对于情况 2, $A = -2v_D$ 。由此得到答案中给出的轨迹参数方程。

为了准确作图，使用 $\ell = v_D/\omega_c$ 。下列各点描述了第一个回旋周期：

$s = \omega_c t$	情况 1: $(x/\ell, y/\ell)$	情况 2: $(x/\ell, y/\ell)$
0	(0, 0)	(0, 0)
$\pi/2$	$(4 - \pi/2, 4)$	$(-2 - \pi/2, -2)$
π	$(-\pi, 8)$	$(-\pi, -4)$
$3\pi/2$	$(-4 - 3\pi/2, 4)$	$(2 - 3\pi/2, -2)$
2π	$(-2\pi, 0)$	$(-2\pi, 0)$

将这条曲线沿 x 方向平移 $-2\pi\ell$ 后重复，即得到第二个周期的轨迹。

在情况 1 中，电子最初向右运动并向上弯曲；整条曲线位于 $0 \leq y \leq 8\ell$ 内。在情况 2 中，电子最初向左运动并向下弯曲；曲线位于 $-4\ell \leq y \leq 0$ 内。在指定时间间隔结束后，两者都到达 $(-4\pi\ell, 0)$ 。它们的回旋方向均为逆时针，且由于速度始终不为零，两条轨迹都没有尖点。

A.3

在近似惯性的局部漂移参考系中，电场力近似被与参考系速度相对应的磁场力抵消。剩余运动近似为圆周运动：

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = ev_{\perp}B_0, \quad r = \frac{mv_{\perp}}{eB_0}.$$

将全部动能的上限用作回旋运动能量的上限估计，

$$v_{\perp} \lesssim \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}.$$

这里

$$K_{\max} = 800(1.6 \times 10^{-19}) = 1.28 \times 10^{-16} \text{ J},$$

因此

$$v_{\max} \simeq 1.68 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

并且

$$r_{\max} \simeq \frac{\sqrt{2mK_{\max}}}{eB_0} = \frac{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31})(1.28 \times 10^{-16})}}{(1.6 \times 10^{-19})(0.3)} = 3.18 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

所以 $r_{\max} \simeq 0.32 \text{ mm}$ ，远小于 15 mm 的间隙。这支持将回旋视为叠加在其中心漂移之上的小尺度运动。

A.4

令 $\hat{r}$ 沿径向向外， $\hat{\phi}$ 沿逆时针方向。当磁场垂直纸面向外时，

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi}$$

给出

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = \frac{E_\phi}{B_0} \hat{r} - \frac{E_r}{B_0} \hat{\phi}.$$

因此：

- $E_\phi > 0$ 产生朝向阳极的漂移。
- $E_\phi < 0$ 产生朝向阴极的漂移。
- $E_\phi = 0$ 产生垂直于半径的漂移。

静电场沿径向，因此仅对方位角方向的漂移有贡献。径向漂移的分类完全由图示交变电场的切向分量决定。

我对局部切线方向的判读结果如下：

电子	交变电场的切向分量	径向漂移
A	顺时针	朝向阴极
B	顺时针	朝向阴极
C	逆时针	朝向阳极
D	逆时针	朝向阳极
E	逆时针	朝向阳极

这些分类针对的是径向分量；电子也有方位角方向的漂移。切线方向是从示意图中读取的，因此这些分类存在一定的判读不确定性。

A.5

在距阴极中心相同的距离 ρ 处，

$$\dot{\phi} = \frac{u_\phi}{\rho} = -\frac{E_r}{B_0 \rho}.$$

静电场沿径向向内，使六个电子在该半径处具有相同的逆时针角速度。因此，只有交变电场径向分量的差异才会影响它们的瞬时角间距。

对于 A、B 和 C，图 3 显示交变电场的径向分量从 A 处向外，经 B 处近似为零，变为 C 处向内。因此，

$$\dot{\phi}_A < \dot{\phi}_B < \dot{\phi}_C.$$

它们的位置满足 $\phi_A > \phi_B > \phi_C$ 。因此，后方电子比前方电子运动得更快，三个角间距都减小：

$$\frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_B) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_C) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_B - \phi_C) < 0.$$

对于 D、E 和 F，交变电场径向分量的变化方式相反：D 处向内，E 处近似为零，F 处向外。因此

$$\dot{\phi}_D > \dot{\phi}_E > \dot{\phi}_F.$$

由于 $\phi_D > \phi_E > \phi_F$ ，三个角间距都增大。

电子对	角间距的变化
AB	减小
AC	减小
BC	减小
DE	增大
DF	增大
EF	增大

A.6

相邻谐振腔的振荡相位相反。因此，在给定时刻，相隔的角向区域使电子聚焦，而其间的区域使电子分散。所以八个谐振腔产生四条辐条。

图中应补画三条与 S 相同的辐条，它们由 S 绕阴极中心分别旋转 90° 、 180° 和 270° 得到。它们的形状应具有相同的弯曲方向。

静电场指向内侧。它产生的漂移方向为

$$(-\hat{r}) \times \hat{z} = +\hat{\phi},$$

因此辐条沿逆时针方向旋转。

经过半个振荡周期后，谐振腔的极性反转。一条辐条必须前进至下一个谐振腔的位置，即转过角度 $2\pi/8 = \pi/4$ 。因此

$$\omega_s = \frac{\pi/4}{T/2} = \frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{4}.$$

使用 $f = 2.45 \times 10^9 \text{ Hz}$,

$$\omega_s = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

等价地，辐条每秒旋转 6.125×10^8 圈。

A.7

在题目指定的近似下，间隙中点处的电场大小为

$$E_{\text{mid}} \simeq \frac{V_0}{b-a}.$$

中点处的半径为

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}.$$

该处电子的漂移速度必须等于辐条的切向速度：

$$\frac{E_{\text{mid}}}{B_0} \simeq \omega_s \rho_{\text{mid}}.$$

因此，

$$\frac{V_0}{B_0(b-a)} \simeq \omega_s \frac{a+b}{2},$$

由此得到

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

代入给定的 B_0 和 f ，也可写为

$$V_0 \simeq (5.77 \times 10^8 \text{ V m}^{-2})(b^2 - a^2),$$

其中 a 和 b 以米为单位。

B.1

两个电荷所受的力构成力偶。力矩为

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

因此，将 θ 定义为偶极矩与瞬时电场之间的夹角时，

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta.$$

力矩使该夹角趋于减小。因此，与 θ 共轭的带符号力矩分量为 $-p_0 |E| \sin \theta$ ，从而得到机械功率

$$H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

特别地，趋向与电场对齐的偶极子满足 $\dot{\theta} < 0$ ，因此电场传递的功率为正。

无需约定角度的定义也能推导出这一结果。若 $\vec{r}_+$ 和 $\vec{r}_-$ 为两个电荷的位置，则

$$H_i = q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_+ - q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_- = \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)].$$

因此

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

如果改为从固定的 x 轴正方向量取 θ ，并令 $E(t)$ 表示带符号的分量，则上式变为

$$H_i = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta) = -p_0 E(t) \sin \theta \dot{\theta}.$$

传递给偶极子的机械功率中没有 $\dot{E}$ 项。

B.2

将单位体积内各个偶极子的功率相加，得到

$$H(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

给定极化强度的导数为

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \beta \epsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \hat{x}.$$

因此

$$H(t) = \beta \epsilon_0 \omega E_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t - \delta).$$

利用

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta,$$

以及周期平均值

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

得到

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

当相位滞后为正时，平均吸收功率为正。

B.3

用 $\mathcal{E}(z)$ 表示局部电场振幅。平均电场能量密度为

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

平均磁场能量密度与其相等，因此

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

采用题目中电介质波动模型的传播速度 c/n ,

$$I(z) = \frac{c}{n} \langle u \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2(z),$$

其中 $n^2 = \varepsilon_r$ 。

对厚度为 dz 的薄层应用能量守恒，得到

$$-\frac{dI}{dz} = \langle H \rangle.$$

代入 B.2 的结果并消去 $\mathcal{E}^2$,

$$-\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega \mathcal{E}^2 \sin \delta = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} I.$$

对于温度固定的均匀介质，该系数为常数。积分得到

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

因此，功率的衰减系数为

$$\alpha = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc}.$$

B.4

式 (2) 给出的电场振幅正比于

$$e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta}.$$

由于强度正比于该振幅的平方，

$$I(z) = I(0) e^{-n k_0 z \tan \delta}.$$

与 B.3 比较，并使用 $k_0 = \omega/c$ ，得到

$$\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} = \frac{n \omega}{c} \tan \delta.$$

因此

$$\beta \sin \delta = n^2 \tan \delta.$$

在所要求的近似 $\tan \delta \simeq \sin \delta$ 下,

$$\boxed{\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.}$$

这一结果是在题目指定的电介质近似和小损耗近似下得到的。

B.5

利用给定关系 $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$, 功率衰减系数为

$$\alpha = nk_0 \tan \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\ell}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

在温度均匀时, 单位体积内的局部吸收功率正比于局部强度:

$$\langle H(z) \rangle = \alpha I(z).$$

因此, 它具有相同的指数变化关系,

$$\frac{\langle H(z) \rangle}{\langle H(0) \rangle} = e^{-\alpha z}.$$

1. 20°C 时的半功率深度。

由条件 $e^{-\alpha z_{1/2}} = 1/2$ 得到

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell}.$$

在标出的频率处, 从 20°C 对应的实线读出的近似值为

$$\varepsilon_r \simeq 78, \quad \varepsilon_\ell \simeq 10.$$

因此,

$$z_{1/2} \simeq \frac{(3.0 \times 10^8) \sqrt{78} \ln 2}{(2\pi)(2.45 \times 10^9)(10)} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

因此, 根据图像得到的半功率深度约为

$$\boxed{z_{1/2} \simeq 1.2 \text{ cm}.}$$

这是半功率深度; 电场振幅衰减的指数只有功率衰减指数的一半。

2. 温度升高时的纯水。

在频率固定时,

$$z_{1/2} \propto \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\varepsilon_\ell}.$$

蓝色实线表明, ε_ℓ 随温度升高而显著减小。相比之下, $\sqrt{\varepsilon_r}$ 的相对减小幅度小得多。因此, 这一比值增大:

$$\boxed{\text{纯水中的穿透深度随温度升高而增大。}}$$

3. 温度升高时的汤。

在相同频率下, 蓝色虚线表明介电损耗随温度升高而增大, 而红色虚线表明 ε_r 减小。这两种变化都会使 $\sqrt{\varepsilon_r}/\varepsilon_\ell$ 减小。因此

解答已与官方解答核对。

题目 3：热声发动机

热声发动机是一种将热量转化为声功率，即声波（一种机械功形式）的装置。与许多其他热机一样，它也可以逆向运行，成为制冷机，利用声音将热量从低温热源泵送至高温热源。较高的工作频率减小了热传导，并使其无需设置任何封闭的工作腔。与许多其他类型的发动机不同，热声发动机除工质本身外没有任何运动部件。

热声机械的效率通常低于其他类型的发动机，但在建造和维护成本方面具有优势。这为可再生能源应用带来了机会，例如太阳能热发电站和余热利用。我们的分析将着重于系统内部声能的产生，而不考虑为外部装置供能时声能的提取或转换。

部分 A：封闭管内的声波（3.7 分）

考虑一根长度为 L 、横截面积为 S 的绝热管，其轴线沿 x 方向。管的两端分别位于 $x = 0$ 和 $x = L$ 。管内充满理想气体，两端均密封。平衡时，气体的温度为 T_0 ，压强为 p_0 ，质量密度为 ρ_0 。假设可以忽略黏性，且气体仅沿 x 方向运动。气体的性质在与之垂直的 y 和 z 方向上均匀一致。

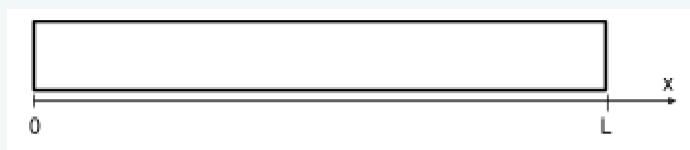


图 1

A.1 (0.3 分)

当形成声驻波时，各气体微元沿 x 方向以角频率 ω 振动。振幅取决于各微元沿管的平衡位置 x 。每个气体微元相对于其平衡位置 x 的纵向位移为

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

（请注意，这里的 u 表示气体微元的位移）

其中， $a \ll L$ 为正常量， $k = 2\pi/\lambda$ 为波数， λ 为波长。该系统中可能的最大波长 $\lambda_{\max}$ 是多少？

本题始终假设振动模式满足 $\lambda = \lambda_{\max}$ 。

现在，考虑一小薄层气体，静止时位于 x 与 $x + \Delta x$ 之间（ $\Delta x \ll L$ ）。在 A.1 中位移波的作用下，该气体微团沿 x 轴振动，其体积及其他热力学性质也随之变化。

在以下各问中，均假设这些热力学性质的变化相对于未受扰动时的值很小。

A.2 (0.5 分)

气体微团的体积 $V(x, t)$ 在平衡值 $V_0 = S\Delta x$ 附近振荡，其形式为

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

求 $V_1(x)$ 的表达式，用 V_0 、 a 、 k 和 x 表示。

A.3 (0.7 分)

假设在声波作用下，气体的总压强近似具有以下形式

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

考虑作用在气体微团上的力，计算压强振荡振幅 $p_1(x)$ 的最低阶表达式，用位置 x 、平衡密度 ρ_0 、位移振幅 a 以及波的参数 k 和 ω 表示。

在声频范围内，可以忽略气体的热传导。我们将气体微团的膨胀和收缩视为纯绝热过程，满足关系 $pV^\gamma = \text{const}$ ，其中 γ 为绝热指数。

A.4 (0.3 分)

利用上述关系及前面各问的结果，在一阶近似下求管内声波传播速度 $c = \omega/k$ 的表达式。用 p_0 、 ρ_0 和绝热指数 γ 表示答案。

A.5 (0.7 分)

声波引起的绝热膨胀和收缩使气体温度发生变化，其形式为：

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

计算温度振荡的振幅 $T_1(x)$ ，用 T_0 、 γ 、 a 、 k 和 x 表示。

A.6 (1.2 分)

仅在本问中，我们假设管壁与气体之间存在微弱的热相互作用。因此，声驻波几乎保持不变，但气体可以与管壁交换少量热量。可以忽略黏性产生的热量。

对于图 2 中的各点（A、C 位于管的两端，B 位于中央），分别说明经过较长时间后，该点处管壁的温度会升高、降低还是保持不变。

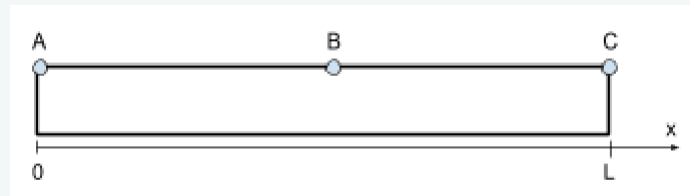


图 2

部分 B：外部热接触引起的声波放大 (6.3 分)

在管内放置一组彼此留有适当间距的固体薄板，组成板叠。板叠中的各板均平行于管轴，以免阻碍气体沿管流动。板叠的中心位于 $x_0 = L/4$ ，沿管轴方向的宽度为 $\ell \ll L$ ，并占满管的整个横截面。

板叠左右两端维持温差 τ 。板叠左端位于 $x_H = x_0 - \ell/2$ ，由外部热源维持在温度 $T_H = T_0 + \tau/2$ ；同时，其右端位于 $x_C = x_0 + \ell/2$ ，维持在温度 $T_C = T_0 - \tau/2$ 。

板叠允许少量纵向热流通过，以在两端之间维持恒定的温度梯度，使得 $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell} \tau$ 。

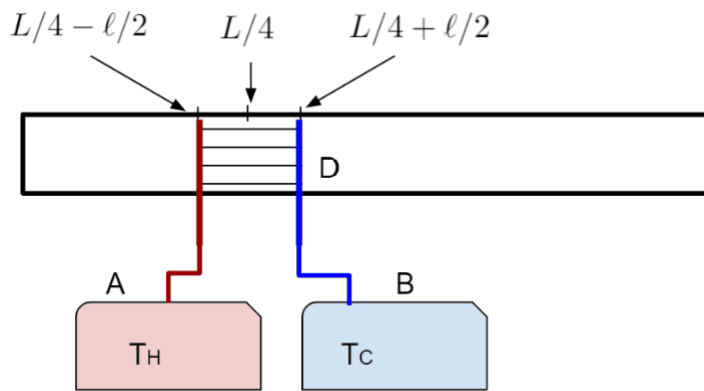


图 3. 系统示意图。(A) 和 (B) 分别表示高温热源和低温热源。(D) 表示板叠。

为分析板叠与气体之间的热接触对管内声波的影响，作如下假设：

- 与上一部分相同，所有热力学性质的变化相对于未受扰动时的值都很小。
- 系统以波长为最大可能波长的基频驻波模式运行。板叠的存在仅使该模式发生微小变化。
- 板叠的长度远小于波长， $\ell \ll \lambda_{\max}$ ，且可以放置在距位移波节和压强波节均足够远的位置，从而可认为位移 $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ 和压强 $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ 在板叠的整个长度上均匀一致。
- 可以忽略气体微团进出板叠所引起的任何边缘效应。
- 板叠两端之间，即高温热源与低温热源之间的温差，相对于绝对温度很小： $\tau \ll T_0$ 。
- 通过板叠、通过气体以及沿管壁的热传导均可忽略。只有气体运动引起的对流以及气体与板叠之间的热传导对热传递有显著贡献。

B.1 (0.4 分)

考虑板叠区域内一个特定的气体微团，其初始位置为 $x_0 = L/4$ 。当该微团在板叠内运动时，附近板叠部分的局部温度按如下方式变化：

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

用 a 、 τ 和 ℓ 表示 T_{st} 。

B.2 (1.0 分)

当温差超过哪个临界值 τ_{cr} 时，气体会将热量从高温热源输送到低温热源？用 T_0 、 γ 、 k 和 ℓ 表示 τ_{cr} 。

B.3 (0.8 分)

求流入一个小气体微团的热流率 $\frac{dQ}{dt}$ 的一般近似表达式，将其写成体积变化率和压强变化率的线性函数。用体积变化率 $\frac{dV}{dt}$ 、压强变化率 $\frac{dp}{dt}$ 、微团压强和体积未受扰动时的平衡值 p_0 、 V_0 以及绝热指数 γ 表示答案。（可以使用定容摩尔热容表达式 $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ ，其中 R 为气体常量。）

微团与板叠之间有限的热流率使微团的压强振荡与体积振荡之间产生相位差。我们将考察这一相位差如何产生功。

设从板叠流入微团的热流率正比于微团与相邻板叠微元之间的温差，近似为

$\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$ 。这里， T_1 和 T_{st} 分别为 A.5 和 B.1 中气体微团与相邻板叠的温度振荡振幅， $\beta > 0$ 为常量。假设在机器的工作频率下，这一热流引起的气体温度变化与 T_1 和 T_{st} 相比均可忽略。

B.4 (1.9 分)

为了计算功，我们将考虑运动中的微团因与板叠热接触而产生的体积变化。将受板叠影响的微团压强和体积写成如下形式：

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

给定 p_a 和 p_b ，求系数 V_a 和 V_b 。用 $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a$ 和 ℓ 表示答案。

B.5 (0.8 分)

求气体微团在一个周期内产生的单位体积声功 w 的近似表达式。对板叠的体积积分，求气体在一个周期内产生的总功 W_{tot} 。用 $\gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, k$ 和 S 表示 W_{tot} 。

B.6 (0.8 分)

求一个周期内从平面 $x = x_0$ 左侧输送到右侧的热量 Q_{tot} 的近似表达式。用 $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, \ell$ 表示答案。

(提示：对于对流引起的热流，可以使用公式 $j = Q \frac{du}{dt}$ 。)

B.7 (0.6 分)

求热声发动机的效率 η 。效率定义为产生的声功与从高温热源吸收的热量之比。用高温热源与低温热源之间的温差 τ 、临界温差 τ_{cr} 以及卡诺效率 $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ 表示答案。

题目译自官方英文原文。

答案

系数 V_1, p_1, T_1 是给定振荡形式中的带符号系数。全文均有 $k = \pi/L$ 。

- A.1

$$\lambda_{\text{max}} = 2L.$$

- A.2

$$V_1(x) = V_0 a k \cos(kx).$$

- A.3

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

- A.4

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

- A.5

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

- A.6 A：升高；B：降低；C：升高。

• B.1

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

• B.2

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k\ell.$$

当 $\tau > \tau_{\text{cr}}$ 时, 热量从高温端输送到低温端。

• B.3

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{\gamma p_0 dV/dt + V_0 dp/dt}{\gamma - 1}.$$

• B.4

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right], \quad V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

• B.5

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

• B.6

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

• B.7

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c, \quad \tau > \tau_{\text{cr}}.$$

解答

求振荡的热力学量时, 我们保留一阶扰动。功和输送热量的周期平均值在波振幅的二阶才首次出现非零项。热耦合很弱, 因此在已经正比于该耦合强度的表达式中, 可以使用未受扰动的波振幅。

A.1

密封的刚性端面要求纵向位移为零:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

第一个条件已经满足。第二个条件给出

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

取 $n = 0$ 时不存在波。因此

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}.$$

最长波长对应于 $n = 1$:

$$\lambda_{\max} = 2L, \quad k = \frac{\pi}{L}.$$

A.2

微团的两个边界移动到

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t).$$

因此,

$$V(x, t) = S [\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)].$$

当 $k\Delta x \ll 1$ 时,

$$V(x, t) \simeq S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = V_0 [1 + ak \cos(kx) \cos(\omega t)].$$

所以,

$$V_1(x) = V_0 ak \cos(kx).$$

A.3

在一阶近似下, 微团所受压力的合力为

$$F_x = S[p(x, t) - p(x + \Delta x, t)] \simeq -S\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

微团的质量为 $\rho_0 S\Delta x$ 。因此, 牛顿第二定律变为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

代入给定的振荡形式,

$$-\rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = p_1'(x) \cos(\omega t),$$

于是

$$p_1'(x) = -\rho_0 a \omega^2 \sin(kx).$$

积分得

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx) + C.$$

不存在空间上均匀的声致压缩: 总体积变化正比于

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L, t) - u(0, t) = 0.$$

A.4 中将明确写出的线性绝热压强与压缩量关系, 因而要求压强扰动的空间平均值为零。由于 $\int_0^L \cos(kx) dx = 0$, 可确定 $C = 0$ 。因此

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4

将 $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ 线性化,

$$\frac{\delta p}{p_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0.$$

利用 $\delta p = -p_1 \cos(\omega t)$ 和 $\delta V = V_1 \cos(\omega t)$,

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{V_1}{V_0} = \gamma p_0 a k \cos(kx).$$

与 A.3 比较得

$$\frac{\rho_0 a \omega^2}{k} = \gamma p_0 a k,$$

因此

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

A.5

对于一定量的理想气体,

$$pV = nRT.$$

其线性化形式为

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} + \frac{\delta V}{V_0}.$$

利用 A.4 中的绝热关系,

$$\frac{\delta T}{T_0} = -(\gamma - 1) \frac{\delta V}{V_0} = -(\gamma - 1) a k \cos(kx) \cos(\omega t).$$

与给定的温度振荡形式比较,

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

A.6

考虑管左半部的一个微团, 此处 $\cos(kx) > 0$ 。

当微团向右偏移时, 它膨胀并冷却。因此, 它在相对偏右的位置从管壁吸热。当微团向左偏移时, 它受到压缩并升温, 因而在相对偏左的位置向管壁放热。这一过程反复进行, 将热量输送至左端。

在管的右半部, $\cos(kx) < 0$, 因此上述对应关系反转: 微团向中央偏移时吸热, 向右端偏移时放热。

因此, 声学运动将热量从中央区域泵送至两端:

$$A: \text{温度升高}, \quad B: \text{温度降低}, \quad C: \text{温度升高}.$$

虽然平衡位置恰在中央的微团的一阶温度振荡为零, 但邻近微团会经过中央区域并带走热量。平均热效应是振幅的二阶效应; 它并非由某一个平衡位置处的一阶温度决定。

B.1

在板叠中心,

$$kx_0 = \frac{\pi}{L} \frac{L}{4} = \frac{\pi}{4},$$

因此微团的位移为

$$u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t).$$

它的瞬时位置为 $x_0 + u(x_0, t)$ 。将其代入板的温度分布得

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} u(x_0, t) = T_0 - \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} \cos(\omega t).$$

因此,

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

B.2

板叠中心处气体的绝热温度振幅为

$$T_1(x_0) = \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

当微团运动至最左端时, 气体温度为 $T_0 + T_1$, 而相邻板叠的温度为 $T_0 + T_{\text{st}}$. 若要在此处吸热, 微团必须满足

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

在最右端, 同一条件使板叠的温度低于气体温度, 因此微团在此处放热. 所以, 微团将热量从高温端输送到低温端的条件恰为

$$\frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} > \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

因此, 临界温差为

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

等号成立时, 气体与相邻板叠的温度振荡相同, 因此最低阶的热交换为零. 低于此阈值时, 热输送方向反转。

B.3

规定流入微团的热量为正, 即 $dQ > 0$, 气体对外做功为正, 即 $p dV > 0$. 热力学第一定律为

$$dQ = dU + p dV.$$

对于理想气体,

$$U = n c_v T = \frac{n R T}{\gamma - 1} = \frac{p V}{\gamma - 1}.$$

因此

$$dQ = \frac{V dp + p dV}{\gamma - 1} + p dV = \frac{V dp + \gamma p dV}{\gamma - 1}.$$

在一阶近似下, 与微小变化率相乘的系数可以用平衡值代替:

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{V_0 dp/dt + \gamma p_0 dV/dt}{\gamma - 1}.$$

B.4

由 B.1 和 B.2,

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\sqrt{2}\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

为简便起见, 定义

$$\Delta T \equiv \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\ell}.$$

于是，给定的输入热流率为

$$\dot{Q} = -\beta V_0 \Delta T \cos(\omega t).$$

对压强和体积表达式求导，

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \omega p_a \cos(\omega t) + \omega p_b \sin(\omega t), \\ \dot{V} &= \omega V_a \cos(\omega t) - \omega V_b \sin(\omega t).\end{aligned}$$

代入 B.3 得

$$\dot{Q} = \frac{\omega}{\gamma - 1} [(V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) \cos(\omega t) + (V_0 p_b - \gamma p_0 V_b) \sin(\omega t)].$$

比较正弦项的系数，

$$V_0 p_b - \gamma p_0 V_b = 0,$$

因此

$$\boxed{V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

比较余弦项的系数，

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} (V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) = -\beta V_0 \Delta T.$$

于是

$$\boxed{V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right].}$$

正比于 β 的项提供了使周期净功非零所需的体积振荡分量。

B.5

微团在一个周期内所做的功为

$$W_{\text{parcel}} = \oint p dV.$$

令 $\theta = \omega t$ ，恒定压强项的积分为零，剩下

$$W_{\text{parcel}} = \int_0^{2\pi} (p_a \sin \theta - p_b \cos \theta)(V_a \cos \theta - V_b \sin \theta) d\theta.$$

利用

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi,$$

得到

$$W_{\text{parcel}} = -\pi(p_a V_b + p_b V_a).$$

代入 B.4 后，含 $p_a p_b$ 的项相互抵消：

$$W_{\text{parcel}} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta V_0 p_b}{\gamma p_0 \omega} \Delta T.$$

因此，单位平衡体积所做的功为

$$w = \frac{W_{\text{parcel}}}{V_0} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta p_b}{\gamma p_0 \omega} \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\ell}.$$

由于此式已经是热耦合的一阶量，使用未受扰动的压强系数：

$$p_b \simeq p_1(x_0) = \gamma p_0 a k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\gamma p_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

因此

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

板叠很短，因此这一功密度在其气体体积 $S\ell$ 内近似均匀。所以

$$W_{\text{tot}} \simeq w S \ell,$$

得到

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

在发动机工作区间 $\tau > \tau_{\text{cr}}$ 内，功为正。

B.6

令 $q(t)$ 表示单位平衡气体体积从板叠获得的热量，以任意常量为参考零点。在所保留的近似阶数下，

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V_0} = -\beta \Delta T \cos(\omega t).$$

积分得

$$q(t) = -\frac{\beta \Delta T}{\omega} \sin(\omega t) + q_*.$$

板叠中心处微团的速度为

$$v(t) = \dot{u}(x_0, t) = -\frac{a\omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

由于 q 以单位体积计，单位面积的对流热流为

$$j(t) = q(t)v(t).$$

任意常量不产生净输送，因为速度的平均值为零。纯绝热部分的周期平均贡献也为零：它正比于 $\cos(\omega t)$ ，而速度正比于 $\sin(\omega t)$ 。因此，通过横截面输送的净热量为

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= S \int_0^{2\pi/\omega} q(t)v(t) dt \\ &= \frac{S\beta a \Delta T}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{\pi S \beta a \Delta T}{\sqrt{2} \omega}. \end{aligned}$$

代入 ΔT ,

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi \beta a^2 S}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

当 $\tau > \tau_{\text{cr}}$ 时, 符号为正, 表示热量从左向右输送。

B.7

在短板叠和小温差所对应的近似精度下, 从高温热源吸收的热量近似等于通过板叠中心输送的热量:

$$Q_H \simeq Q_{\text{tot}}.$$

两者之差与声功同阶。由于效率本身很小, 计入这一差异只会对效率产生更高阶的修正。

利用 B.5 和 B.6,

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_H} \simeq \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma - 1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0}.$$

另一方面,

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0 - \tau/2}{T_0 + \tau/2} = \frac{\tau}{T_0 + \tau/2} \simeq \frac{\tau}{T_0},$$

因为 $\tau \ll T_0$ 。因此,

$$\boxed{\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c.}$$

发动机运行时, $\tau > \tau_{\text{cr}}$, 因此效率低于卡诺效率。当温差从上方趋近阈值时, 在这一近似阶数下, 效率趋近卡诺效率, 而输出功和热输送量均趋于零。在阈值处, 两者之比并不能定义具有有限输出功的发动机效率。

解答已与官方解答核对。