

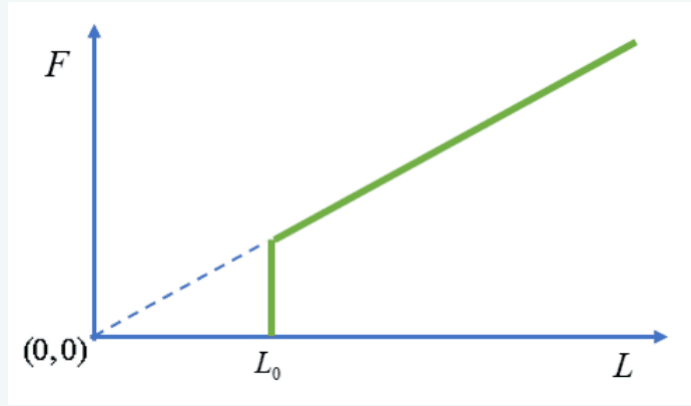
IPhO 2019

Teorik sorular ve çözümler · Tel Aviv, İsrail · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2019/

Soru 1: Sıfır uzunluklu yaylar ve slinky sarmalları

Etkin uzunluğu sıfır olan bir yay (ZLS), kuvvetin yayın uzunluğuyla orantılı olduğu bir yaydır: $L > L_0$ için $F = kL$; burada L_0 , yayın hem en küçük uzunluğu hem de gerilmemiş uzunluğudur. Şekil 1, bir ZLS için F kuvveti ile L yay uzunluğu arasındaki ilişkiyi göstermektedir; doğrunun eğimi yay sabiti k 'dir.



Şekil 1: F kuvveti ile L yay uzunluğu arasındaki ilişki

ZLS, sismografide kullanışlıdır ve yerçekimi ivmesi g 'deki değişimlerin çok hassas biçimde ölçülmesini sağlar. Burada, ağırlığı Mg , kL_0 'dan büyük olan homojen bir ZLS ele alacağız. Yayın göreceli yumuşaklığını nitelemek için buna karşılık gelen boyutsuz bir oranı, $\alpha = kL_0/Mg < 1$, tanımlıyoruz. "Slinky" olarak bilinen oyuncak böyle bir ZLS olabilir (ancak olması şart değildir).

Bölüm A: Statik (3.0 puan)

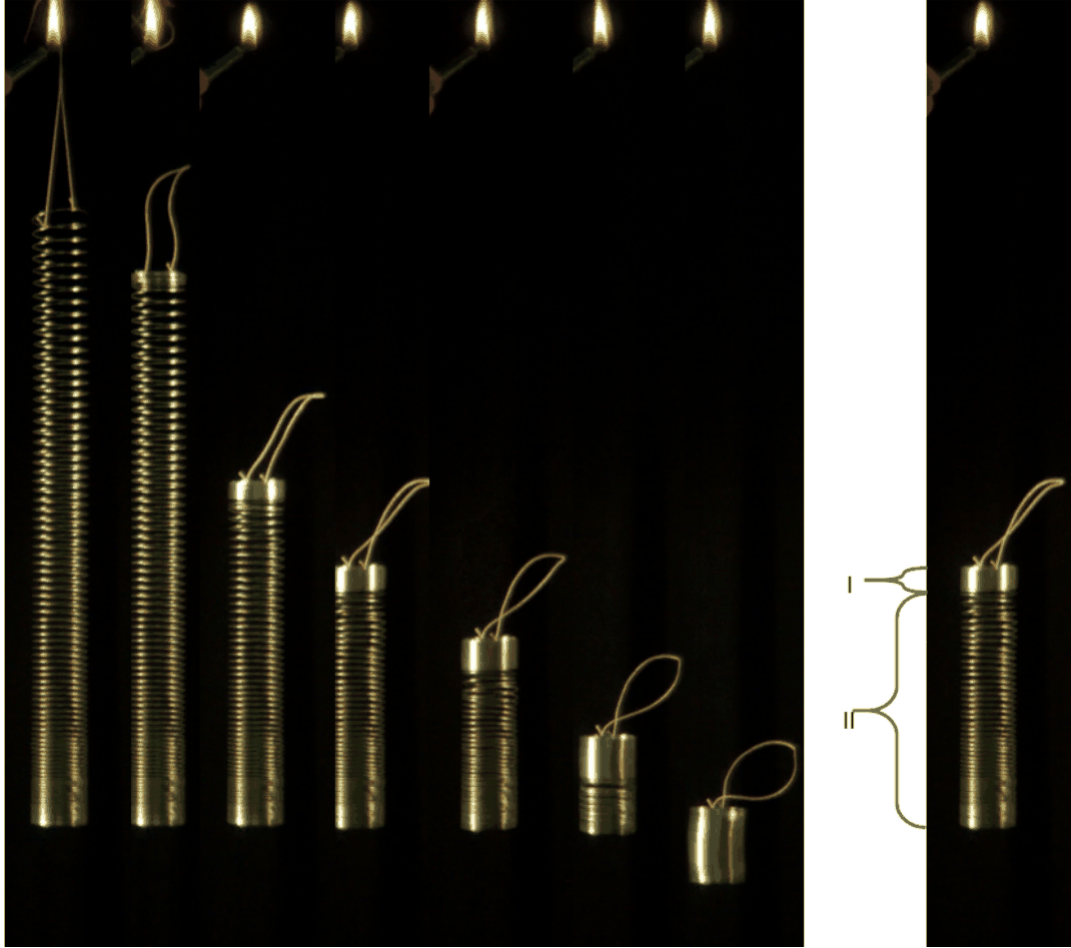
A.1	Gerilmemiş ZLS yayının $\Delta\ell$ uzunluğundaki bir parçasının, ağırlıksızlık koşullarında F kuvvetiyle gerildiğini düşünün. Bu parçanın Δy uzunluğu, F , $\Delta\ell$ ve yayın parametrelerinin bir fonksiyonu olarak nedir?	0.5 puan
A.2	$\Delta\ell$ uzunluğundaki bir parçayı, başlangıçtaki $\Delta\ell$ uzunluğundan Δy uzunluğuna germek için gereken ΔW işini hesaplayın.	0.5 puan

Bu soru boyunca, yay üzerindeki bir noktayı, yay gerilmemiş durumdayken yayın alt ucuna olan $0 \leq \ell \leq L_0$ uzaklığıyla belirteceğiz. Özellikle, yay üzerindeki her nokta için ℓ , yay gerilirken değişmeden kalır.

A.3	Yayı üst ucundan astığımızı ve böylece kendi ağırlığı altında gerildiğini varsayın. Asılı yayın denge durumundaki toplam H uzunluğu nedir? Yanıtlarınızı L_0 ve α cinsinden ifade edin.	2.0 puan
-----	--	-------------

Bölüm B: Dinamik (5.5 puan)

Deneyler, yay asılı ve durgun durumdayken serbest bırakıldığında, alt kısmı hareketsiz kalırken üstten başlayarak giderek büzüldüğünü göstermektedir (bkz. Şekil 2). Zaman ilerledikçe, büzülen kısım tek bir katı parça gibi hareket eder ve yayın diğer sarımlarını da bünyesine katarken, hareketsiz kısım kısalır. Yay üzerindeki her nokta, ancak hareketli kısım kendisine ulaştığında hareket etmeye başlar. Yayın alt ucu, ancak yay tamamen büzülüp gerilmemiş uzunluğu L_0 'a ulaştığında hareket etmeye başlar. Bundan sonra büzülmüş yay, yerçekiminin etkisi altında rijit bir cisim olarak, takla atmadan, düşey doğrultuda aşağıya düşmeye devam eder.



Şekil 2: Sol: Slinky'nin serbest düşüşü sırasında çekilmiş bir dizi fotoğraf. Sağ: Yayın serbest düşüşü sırasında hareketli kısım I ve hareketsiz kısım II.

Sorunun kalan bölümlerinde, çözümünüzü burada açıklanan modele dayandırmanız istenmektedir. Hava direncini ihmal edebilirsiniz, ancak L_0 'ı ihmal etmenize izin verilmemektedir.

B.1	Yayın serbest bırakıldığı andan, tamamen büzülerek yeniden en küçük uzunluğu L_0 'a ulaşmasına kadar geçen t_c süresini hesaplayın. Yanıtınızı L_0 , g ve α cinsinden ifade edin. $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ ve $M = 0.201 \text{ kg}$ olan bir yay için, g 'yi 9.80 m/s^2 olarak t_c 'nin sayısal değerini hesaplayın.	2.5 puan
B.2	Bu soruda ℓ , I (Şekil 2'deki hareketli kısım) ve II (hareketsiz kısım) arasındaki sınırın koordinatını belirtmek için kullanılmaktadır. Hareketsiz kısmın hâlâ var olduğu belirli bir anda, bu kısmın kütlesi $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ 'dir ve hareketli kısmın her noktası aynı anlık $v_I(\ell)$ hızıyla hareket etmektedir. Bu anda (hareketsiz bir kısım varken) hareketli kısmın hızının $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ olduğunu gösterin. A ve B sabitlerini L_0 , g ve α cinsinden ifade edin.	2.5 puan

B.3	B.2'ye dayanarak, yayın hareketli kısmının serbest bırakıldıktan sonra ve yere çarpmadan önceki hareketi boyunca sahip olduğu en küçük $v_{\min}$ süratini bulun. Yanıtınızı L_0 , α , A ve B cinsinden ifade edin.	0.5 puan
------------	--	-------------

Bölüm C: Enerji (1.5 puan)

C.1	Yayın serbest bırakıldığı andan yere çarpmasından hemen öncesine kadar, ısıya dönüşerek kaybolan mekanik enerji miktarı Q 'yu hesaplayın. Yanıtınızı L_0 , M , g ve α cinsinden ifade edin.	1.5 puan
------------	--	-------------

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- A.1

$$\Delta y = \Delta \ell \max\left(1, \frac{F}{kL_0}\right)$$

- A.2, $\Delta y \geq \Delta \ell$ için:

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2]$$

- A.3

$$H = \frac{L_0}{2\alpha} (1 + \alpha^2)$$

- B.1

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}} \quad t_c \approx 0.245 \text{ s}$$

- B.2, aşağı yönlü hız pozitif alınırsa:

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}$$

Büzülme, $\alpha L_0 \leq \ell < L_0$ aralığı boyunca ilerler.

- B.3

$$v_{\min} = (1 - \alpha) \sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

Bu, hareketli kısmın başlangıçta sıkışık olan alt kısım ile çarpışmasından hemen sonra gerçekleşir.

- C.1

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^2 (1 + 2\alpha)$$

Çözüm

A.1

Ağırlıksızlık koşullarında gerilme kuvveti her yerde aynıdır. Yay homojen olduğundan, her parçanın gerilmiş uzunluğunun gerilmemiş uzunluğuna oranı aynıdır.

$F > kL_0$ olduğunda, yayın tamamının uzunluğu $L = F/k$ olur; dolayısıyla

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{L}{L_0} = \frac{F}{kL_0}.$$

Eşdeğer olarak, parçanın yay sabiti

$$k_{\text{seg}} = \frac{kL_0}{\Delta \ell}.$$

$0 \leq F \leq kL_0$ için parça en küçük uzunluğunda kalır. Böylece

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta \ell, & 0 \leq F \leq kL_0, \\ \frac{F \Delta \ell}{kL_0}, & F > kL_0. \end{cases}$$

A.2

Gerilme kuvvetini kL_0 'a kadar artırmak herhangi bir yer değiştirmeye yol açmaz ve bu nedenle mekanik iş gerektirmez. Daha sonraki gerilme sırasında, parçanın anlık uzunluğu s iken,

$$F(s) = \frac{kL_0}{\Delta \ell} s.$$

Kuazistatik germe için gereken iş

$$\Delta W = \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} F(s) ds = \frac{kL_0}{\Delta \ell} \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} s ds.$$

Böylece

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2].$$

Bu, aynı zamanda esneklik potansiyel enerjisindeki artıştır.

A.3

Birim gerilmemiş uzunluk başına kütle

$$\mu = \frac{M}{L_0}.$$

ℓ malzeme koordinatında, gerilme kuvveti bu noktanın altında kalan yayın tamamını taşır:

$$T(\ell) = \mu g \ell = \frac{Mg}{L_0} \ell.$$

Gerilme yalnızca $T(\ell) > kL_0$ olan yerlerde gerçekleşir. Bu nedenle sıkışık ve gerilmiş kısımlar arasındaki sınır

$$\frac{Mg}{L_0} \ell_* = kL_0, \quad \boxed{\ell_* = \alpha L_0}.$$

Böylece yayın en alttaki α oranındaki kısmı gerilmemiş olarak kalır.

$y_0(\ell)$, denge durumunda alt uçtan ölçülen yükseklik olsun. A.1 yerel olarak uygulanırsa,

$$\frac{dy_0}{d\ell} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell}{\alpha L_0}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

$y_0(0) = 0$ koşuluyla integral alınır

$$y_0(\ell) = \begin{cases} \ell, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

Özel olarak,

$$H = y_0(L_0) = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2).$$

B.1

Serbest bırakıldıktan sonra, tek dış kuvvet yerçekimi kuvvetidir. Dolayısıyla, iç çarpışmalar enerji kaybına yol açsa da kütle merkezi g ivmesiyle düşer.

Kütle merkezinin başlangıçtaki yüksekliği

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} y_0(\ell) d\ell \\ &= \frac{1}{L_0} \left[\int_0^{\alpha L_0} \ell d\ell + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left(\frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2} \right) d\ell \right] \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 + 3\alpha^2 - \alpha^3). \end{aligned}$$

Tam büzülme anında alt uç henüz hareket etmemiştir. Yay, $y = 0$ ile $y = L_0$ arasındaki bölgeyi kaplar; dolayısıyla

$$y_{\text{cm},c} = \frac{L_0}{2}.$$

Bu nedenle kütle merkezinin düştüğü mesafe

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c} &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3. \end{aligned}$$

Başlangıçta durgun olduğundan,

$$\frac{1}{2} g t_c^2 = \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3,$$

ve buradan

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}}.$$

Verilen değerler için,

$$\alpha = \frac{1.02(0.055)}{0.201(9.80)} = 0.0284800.$$

Şu eşdeğer ifadeyi kullanmak uygundur:

$$t_c = \sqrt{\frac{M}{3k}}(1 - \alpha)^{3/2}.$$

Sayısal olarak,

$$t_c = 0.2454228 \dots \text{ s} \approx 0.245 \text{ s}.$$

B.2

Aşağı yönlü hızları pozitif alalım. Şu tanımları yapalım:

$$x = L_0 - \ell, \quad D = (1 - \alpha)L_0.$$

Burada x , hareketli sıkışık parçaya o ana kadar katılmış olan kısmın gerilmemiş uzunluğudur. Bu parçanın kütlesi ve gerçek uzunluğu

$$m_I = \frac{M}{L_0}x, \quad L_I = x.$$

Yayın geri kalanı hareketsiz olduğundan, aşağı yönlü toplam momentum $m_I v_I$ 'dir. Serbest bırakılma anından itibaren Mg dış kuvvetinin zamana göre integrali alınırsa

$$\frac{M}{L_0}xv_I = Mgt,$$

ya da

$$xv_I = L_0gt.$$

Bu momentum denklemi, hareketli parçanın kütle kazanmasının etkisini de içerir.

Hareketli parçanın alt sınırı $y_0(\ell)$ yüksekliğindedir. Dolayısıyla üst ucu şu yüksekliktedir:

$$Y_{\text{top}} = y_0(\ell) + L_0 - \ell.$$

Sınır, başlangıçta gerilmiş olan kısımdayken,

$$\begin{aligned} v_I &= -\frac{dY_{\text{top}}}{dt} \\ &= -\left(\frac{\ell}{\alpha L_0} - 1\right)\dot{\ell} \\ &= \frac{D - x}{\alpha L_0}\dot{x}. \end{aligned}$$

Bu ifade $xv_I = L_0gt$ ile birleştirilirse,

$$x(D - x)\dot{x} = \alpha L_0^2gt.$$

$x = 0$, $t = 0$ 'dan başlayarak integral alınırsa,

$$\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\alpha L_0^2gt^2}{2}.$$

Dolayısıyla

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha L_0^2g} \left(D - \frac{2x}{3} \right).$$

Momentum bağıntısında yerine konursa

$$\begin{aligned}
v_I^2 &= \frac{L_0^2 g^2 t^2}{x^2} \\
&= \frac{g}{\alpha} \left(D - \frac{2x}{3} \right) \\
&= \frac{g}{\alpha} \left[(1 - \alpha)L_0 - \frac{2}{3}(L_0 - \ell) \right] \\
&= \frac{2g}{3\alpha} \ell + \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Böylece

$$\boxed{v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}}, \quad \boxed{A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}}.$$

Hareketli sınır, başlangıçta sıkışık olan alt kısma $\ell = \alpha L_0$ 'da ulaşır. Dolayısıyla bu sürekli büzülme evresi şu aralığı kapsar:

$$\alpha L_0 \leq \ell < L_0.$$

B.3

$A > 0$ olduğundan, ℓ azaldıkça hareketli parça yavaşlar. Başlangıçta sıkışık olan alt kısma ulaşmasından hemen önce sürati

$$v_- = \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Bu anda hareketli kütle $(1 - \alpha)M$ iken, sıkışık alt kısmın αM kütlesi hâlâ hareketsizdir. Yay, en küçük toplam uzunluğuna ulaşmıştır; dolayısıyla bu kısımlar, sonrasında öngörülen rijit cisim hareketinin gerektirdiği üzere, tamamen esnek olmayan bir çarpışmayla birleşir.

Bu anlık çarpışma sırasında yerçekimi kuvvetinin itmesi ihmal edilebilir. Momentumun korunumundan

$$(1 - \alpha)Mv_- = Mv_c,$$

ve dolayısıyla

$$v_c = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Bu değer v_- 'den küçüktür. Ardından yayın tamamı aşağı doğru g ivmesiyle hızlanır, dolayısıyla sürati artar. Sonuç olarak,

$$\boxed{v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}}.$$

Bir kontrol olarak,

$$A\alpha L_0 + B = \frac{gL_0(1 - \alpha)}{3\alpha},$$

dolayısıyla

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha}} = gt_c,$$

ki tam büzülme anındaki toplam momentum da bunu gerektirir.

Serbest bırakılma anındaki tam hareketsiz durum, "serbest bırakıldıktan sonra" ifadesiyle kapsam dışında tutulmuştur. Öngörülen sürekli ortam modelinde, $t \rightarrow 0^+$ iken hareketli parçanın kütlesi sıfıra yaklaşır; bu da toplam momentum sıfıra yaklaşırken süratin sonlu bir limit değerine sahip olmasına izin

verir.

C.1

Yayın en küçük uzunluğundaki esneklik potansiyel enerjisini sıfır seçelim. A.2 sonsuz küçük bir parçaya uygulanırsa

$$dU_{el} = \frac{kL_0}{2} \left[\left(\frac{dy_0}{d\ell} \right)^2 - 1 \right] d\ell.$$

Başlangıçta sıkışık olan alt kısmın katkısı sıfırdır. Böylece

$$\begin{aligned} U_{el,0} &= \frac{kL_0}{2} \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left[\frac{\ell^2}{\alpha^2 L_0^2} - 1 \right] d\ell \\ &= \frac{kL_0^2}{6\alpha^2} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned}$$

$kL_0 = \alpha Mg$ kullanılarak,

$$U_{el,0} = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3).$$

Tam büzülmeden hemen sonra, esneklik enerjisi sıfırdır ve yayın tamamı $v_c = gt_c$ süratiyle öteleme hareketi yapar. Bu ana kadar ısıya dönüşen enerji

$$Q = U_{el,0} + Mg(y_{cm,0} - y_{cm,c}) - \frac{1}{2} Mv_c^2.$$

Ancak kütle merkezinin serbest düşüşünden

$$Mg(y_{cm,0} - y_{cm,c}) = \frac{1}{2} Mg^2 t_c^2 = \frac{1}{2} Mv_c^2.$$

Bu iki terim birbirini götürür ve geriye

$$Q = U_{el,0}.$$

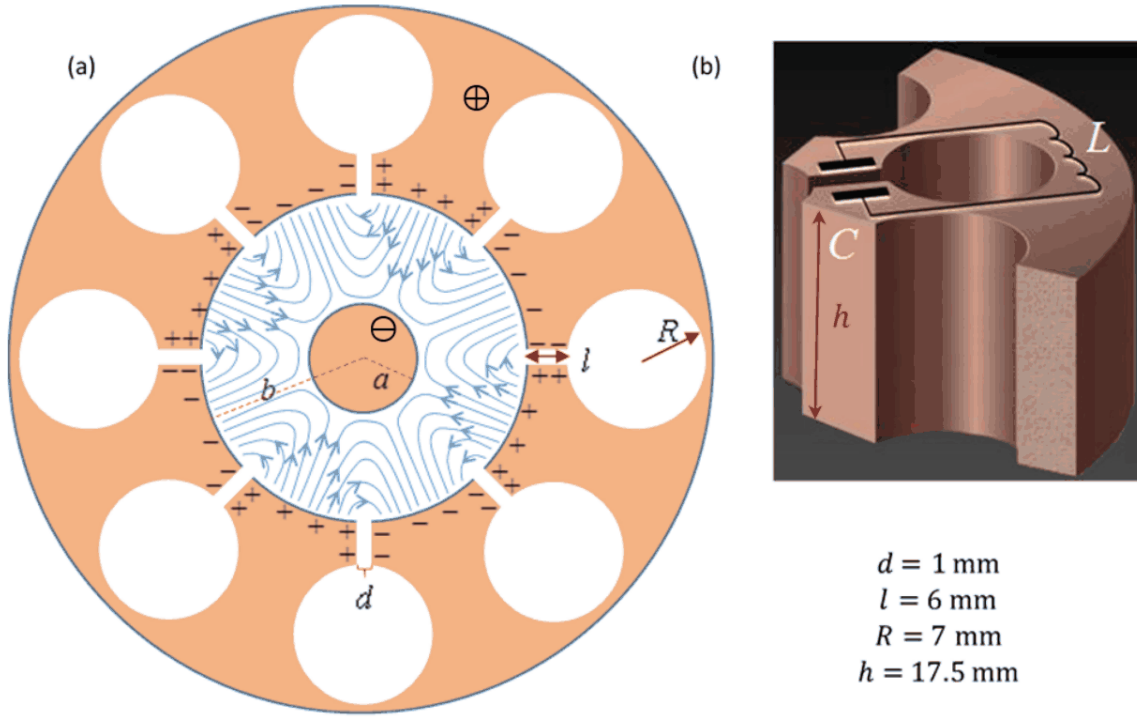
Büzülmeden sonra rijit yay, hava direnci olmadan ve takla atmadan düşer; dolayısıyla çarpmadan önce başka mekanik enerji kaybı olmaz. Sonuç çarpanlarına ayrılırsa,

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^2 (1 + 2\alpha).$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Mikrodalga Fırının Fiziği

Bu soru, bir mikrodalga fırında mikrodalga ışıınının üretilmesini ve yiyecekleri ısıtmak için kullanılmasını ele almaktadır. Mikrodalga ışıını, "magnetron" adı verilen bir aygıtta üretilir. Bölüm A magnetronun çalışmasıyla, bölüm B ise mikrodalga ışıınının yiyeceklerde soğurulmasıyla ilgilidir.



Şekil 1

Bölüm A: Magnetronun yapısı ve çalışması (6.6 puan)

Magnetron, mikrodalga ışımasını darbeler hâlinde (radar uygulamaları için) veya sürekli olarak (örneğin bir mikrodalga fırında) üreten bir aygıttır. Magnetronun kendi kendini güçlendiren bir salınım modu vardır. Magnetrona statik (alternatif olmayan) gerilim uygulanması, bu modu hızla uyarır. Böylece oluşan mikrodalga ışımasını magnetronun dışına aktarılır.

Tipik bir mikrodalga fırın magnetronu, içi dolu bakır bir silindirik katottan (yarıçapı a) ve onu çevreleyen bir anottan (yarıçapı b) oluşur. Anot, içine silindirik oyuklar açılmış kalın bir silindirik kabuk biçimindedir. Bu oyuklara "rezonatör" denir. Rezonatörlerden biri, mikrodalga enerjisini dışarıya aktaracak bir antene bağlanmıştır; aşağıda anteni göz ardı edeceğiz. İçteki tüm boşluklar vakumdur. Şekil 1(a)'da gösterildiği gibi, sekiz rezonatörlü tipik bir magnetronu ele alacağız. Tek bir rezonatörün üç boyutlu yapısı Şekil 1(b)'de gösterilmiştir. Burada belirtildiği üzere, sekiz oyuğun her biri, çalışma frekansı $f = 2.45 \text{ GHz}$ olan bir bobin-kondansatör (LC) rezonatörü gibi davranır.

Magnetronun boyuna eksenini boyunca, Şekil 1(a)'da sayfa düzleminden dışarıya doğru yönelen statik ve düzgün bir manyetik alan uygulanır. Ayrıca, anot (pozitif potansiyel) ile katot (negatif potansiyel) arasına sabit bir gerilim uygulanır. Katottan yayılan elektronlar anoda ulaşarak onu yükler ve komşu her iki rezonatörde yükün işaretinin zıt olduğu bir salınım modunu uyarır. Oyukların salınımı bu salınımları güçlendirir.

Yukarıda açıklanan süreç, katot ile anot arasındaki bölgede, uygulanan sabit gerilimin oluşturduğu statik alana ek olarak, yukarıda belirtilen $f = 2.45 \text{ GHz}$ frekansında alternatif bir elektrik alan oluşturur (Şekil 1(a)'daki mavi çizgiler; statik alan çizilmemiştir). Kararlı durumda, anot ile katot arasındaki alternatif elektrik alanının tipik genliği, buradaki statik elektrik alanının yaklaşık $\frac{1}{3}$ 'üdür. Katot ile anot arasındaki elektron hareketi, alanın hem statik hem de alternatif bileşenlerinden

etkilenir. Bunun sonucunda anoda ulaşan elektronlar, statik alandan kazandıkları enerjinin yaklaşık 80%'ini alternatif alana aktarır. Yayılan elektronların küçük bir bölümü katoda geri dönerek ek elektronlar koparır ve alternatif alanı daha da güçlendirir.

Her rezonatör bir kondansatör ve bir bobin olarak düşünülebilir; bkz. Şekil 1(b). Sığa esas olarak rezonatör yüzeyinin düzlemsel kısımlarından, indüktans ise silindirik kısmından kaynaklanır. Rezonatördeki akımın, silindirik oyuğun yüzeyine çok yakın bir bölgede düzgün dağılımla aktığını ve bu akımın oluşturduğu manyetik alanın büyüklüğünün ideal bir sonsuz solenoidinkinin 0.6 katı olduğunu varsayın. Rezonatör geometrisini tanımlayan çeşitli uzunluklar Şekil 1(b)'de verilmiştir. Boşluğun elektriksel ve manyetik geçirgenlikleri sırasıyla $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ve $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ 'dir.

A.1 — 0.4 puan

Yukarıdaki verileri kullanarak tek bir rezonatörün f_{est} frekansını tahmin edin. (Sonucunuz gerçek değer olan $f = 2.45 \text{ GHz}$ 'den farklı olabilir. Sorunun geri kalanında **gerçek** değeri kullanın.)

Aşağıdaki A.2 sorusu doğrudan magnetronla ilgili değildir; ancak ilgili bazı fiziksel kavramları tanıtmaya yardımcı olur. Serbest uzayda, negatif y eksen yönündeki düzgün bir elektrik alanın, $\vec{E} = -E_0\hat{y}$, ve pozitif z eksen yönündeki düzgün bir manyetik alanın, $\vec{B} = B_0\hat{z}$, etkisi altında hareket eden bir elektron düşünün (E_0 ve B_0 pozitiftir; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ alışılmış biçimde yönlendirilmiş birim vektörlerdir). Elektronun t anındaki hızını $\vec{u}(t)$ ile gösterelim. Elektronun sürüklenme hızı $\vec{u}_D$, ortalama hızı olarak tanımlanır. Elektronun kütlesini ve yükünü sırasıyla m ve $-e$ ile gösteriyoruz.

A.2 — 1.5 puan

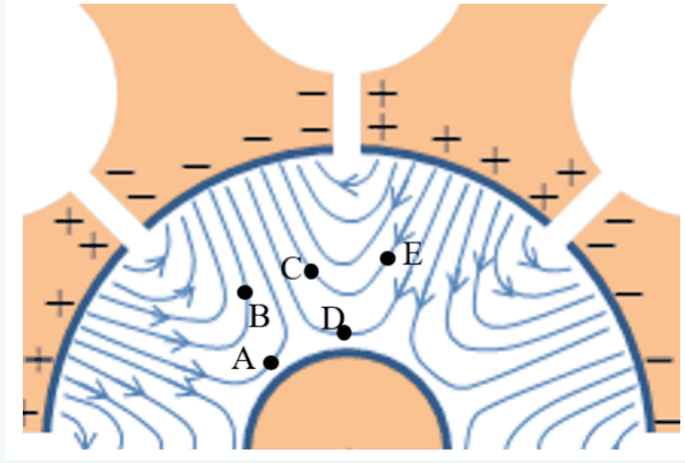
Aşağıdaki iki durumun her birinde $\vec{u}_D$ 'yi bulun. Ayrıca, aşağıdaki başlangıç koşulları için $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ zaman aralığında elektronun yörüngesini (laboratuvar referans sisteminde) Cevap Kâğıdı'na çizin:

1. $t = 0$ anında elektronun hızı $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
2. $t = 0$ anında elektronun hızı $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

Şimdi magnetronu incelemeye geri dönelim. Katot ile anot arasındaki uzaklık 15 mm 'dir. Yukarıda belirtilen, alternatif alanlara enerji kaybı nedeniyle her bir elektronun en büyük kinetik enerjisinin $K_{\text{max}} = 800 \text{ eV}$ 'u aşmadığını varsayın. Statik manyetik alanın büyüklüğü $B_0 = 0.3 \text{ T}$ 'dir. Elektronun kütlesi ve yükü sırasıyla $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ve $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 'dur.

A.3 — 0.4 puan

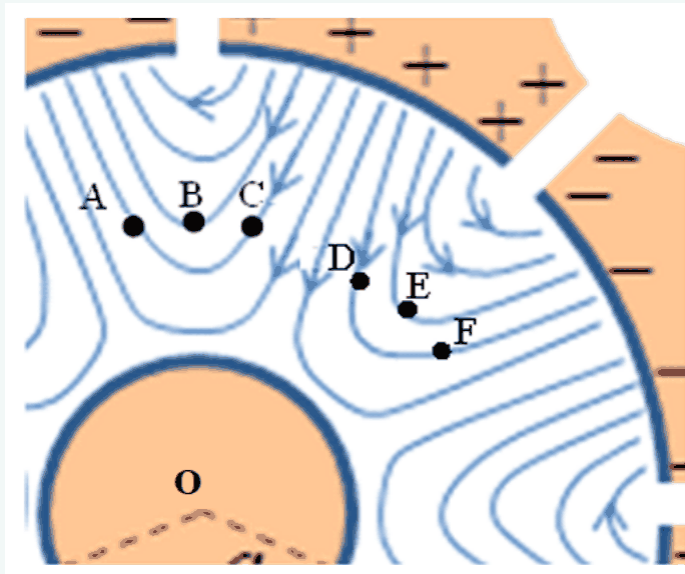
Elektron hareketinin yaklaşık olarak dairesel olduğu referans sisteminde, bu referans sistemini yaklaşık olarak eylemsiz kabul ederek, elektron yörüngesinin en büyük r yarıçapını sayısal olarak tahmin edin.



Şekil 2

A.4 — 1.2 puan

Şekil 2, belirli bir anda anot ile katot arasındaki alternatif elektrik alan çizgilerini göstermektedir (statik alan çizilmemiştir). A, B, C, D ve E konumlarındaki elektronlardan hangilerinin o anda anoda doğru, hangilerinin katoda doğru, hangilerinin ise yarıçapa dik yönde sürükleneceğini Cevap Kâğıdı'nda belirtin.

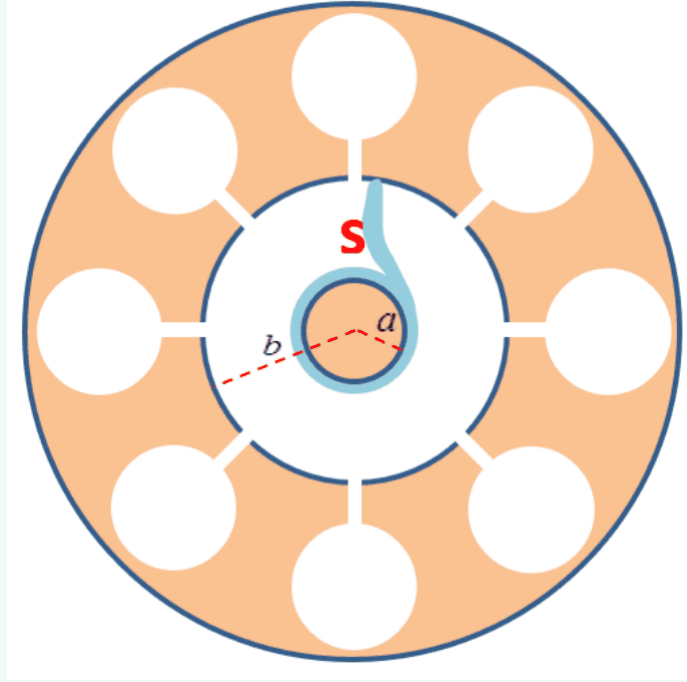


Şekil 3

Şekil 3, belirli bir anda anot ile katot arasındaki alternatif elektrik alan çizgilerini göstermektedir (statik alan çizilmemiştir). Altı elektronun o andaki konumları A, B, C, D, E ve F ile gösterilmiştir. Elektronların tümü katottan aynı uzaklıktadır.

A.5 — 1.2 puan

Şekil 3'te gösterilen durumu ele alın. AB, AC, BC, DE, DF, EF elektron çiftlerinin her biri için, sürüklenmelerinin o anda konum vektörleri (katodun O merkezinden ölçülen) arasındaki açıyı artıracak mı yoksa azaltacak mı Cevap Kâğıdı'nda belirtin.



Şekil 4

A.5 sorusunda bulduğunuz davranış, katot ile anot arasındaki elektronları tekerlek kolları biçiminde yoğunlaştıran bir odaklama mekanizması olarak işlev görür. Şekil 4, S ile gösterilen böyle bir kolu betimlemektedir.

A.6 — 0.8 puan

O andaki diğer kolları Cevap Kâğıdı'na çiziniz. Dönme yönlerini oklarla belirtin ve ortalama açısal hızlarını, ω_s , hesaplayın.

Katot ile anot arasındaki orta noktada toplam elektrik alanın, katottan anoda uzanan radyal bir çizgi boyunca statik alanın ortalama değerine eşit olduğu ve kolların bu bölgede yaklaşık olarak radyal olduğu yaklaşımını yapın. Katot ve anot yarıçapları (sırasıyla a ve b) Şekil 4'te tanımlanmıştır.

A.7 — 1.1 puan

Magnetronun açıklanan biçimde çalışması için gereken statik gerilim V_0 için yaklaşık bir ifade bulun. (Bulacağınız ifade, magnetronun çalışması için gereken en küçük değer bir yaklaşımını verir; en uygun gerilim biraz daha yüksektir.)

Bölüm B: Mikrodalga ışınlımının su molekülleriyle etkileşimi (3.4 puan)

Bu bölüm, mikrodalga ışınlımının (magnetron anteninden yiyecek haznesine yayılan) pişirme amacıyla kullanılmasını, yani saf veya tuzlu su gibi kayıplı bir dielektrik malzemenin ısıtılmasını ele almaktadır (tuzlu suyu, örneğin çorba için model olarak kullanıyoruz).

Elektrik dipolü, aralarında küçük bir d uzaklığı bulunan eşit büyüklükte ve zıt işaretli q ve $-q$ elektrik yüklerinden oluşan bir düzendir. Elektrik dipol vektörü negatif yükten pozitif yüke doğru yönelir ve büyüklüğü $p = qd$ 'dir.

Momenti $\vec{p}(t)$, sabit büyüklüğü $p_0 = |\vec{p}(t)|$ olan tek bir dipole, zamana bağlı bir $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ elektrik alanı uygulanır. Dipol ile elektrik alan arasındaki açı $\theta(t)$ 'dir.

B.1 — 0.5 puan

Elektrik alanın dipole uyguladığı torkun büyüklüğü $\tau(t)$ ve alanın dipole aktardığı güç $H_i(t)$ için p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ ve bunların türevleri cinsinden ifadeler yazın.

Su molekülleri polardır; dolayısıyla elektrik dipolleri olarak ele alınabilirler. Sıvı sudaki su molekülleri arasındaki güçlü hidrojen bağları nedeniyle bunlar bağımsız dipoller olarak ele alınamaz. Bunun yerine, dipol momenti yoğunluğu (bir su molekülleri topluluğunun birim hacim başına ortalama dipol momenti) olan $\vec{P}(t)$ kutuplanma vektörü kullanılmalıdır. $\vec{P}(t)$ kutuplanması, yerel olarak uygulanan alternatif elektrik alana (mikrodalga ışınımının alanı) $\vec{E}(t)$ paraleldir ve yerel alternatif elektrik alanın genliğiyle orantılı bir genlikle, ancak δ kadar faz gecikmesiyle zaman içinde salınır.

Suyun içindeki belirli bir konumda yerel alternatif elektrik alan $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$ olup, burada $\omega = 2\pi f$ 'dir; bu alan $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$ kutuplanmasına yol açar; boyutsuz β sabiti suyun bir özelliğidir.

B.2 — 0.5 puan

Suyun birim hacim başına soğurduğu gücün zaman ortalaması $\langle H(t) \rangle$ için bir ifade bulun.

Zamana bağlı periyodik bir $f(t)$ değişkeninin T periyodu boyunca zaman ortalaması şöyle tanımlanır:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Şimdi ışınımın su içinde yayılmasını ele alalım. Suyun bağıl dielektrik sabiti (elektromanyetik alanın frekansında) ϵ_r , buna karşılık gelen kırılma indisi ise $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 'dir. Elektrik alanın anlık enerji yoğunluğu $\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$ ile verilir. Elektrik ve manyetik alanların zaman ortalamalı enerji yoğunlukları eşittir.

B.3 — 1.1 puan

Zaman ortalamalı ışınım enerjisi akı yoğunluğunu $I(z)$ ile gösterelim (birim alan başına ortalama ışınım gücü akışı). Burada z , suya nüfuz etme derinliğidir ve ışınım z yönünde yayılır. $I(z)$ akı yoğunluğunun z 'ye bağımlılığı için bir ifade bulun. Sonucunuzda su yüzeyindeki akı yoğunluğu $I(0)$ yer alabilir.

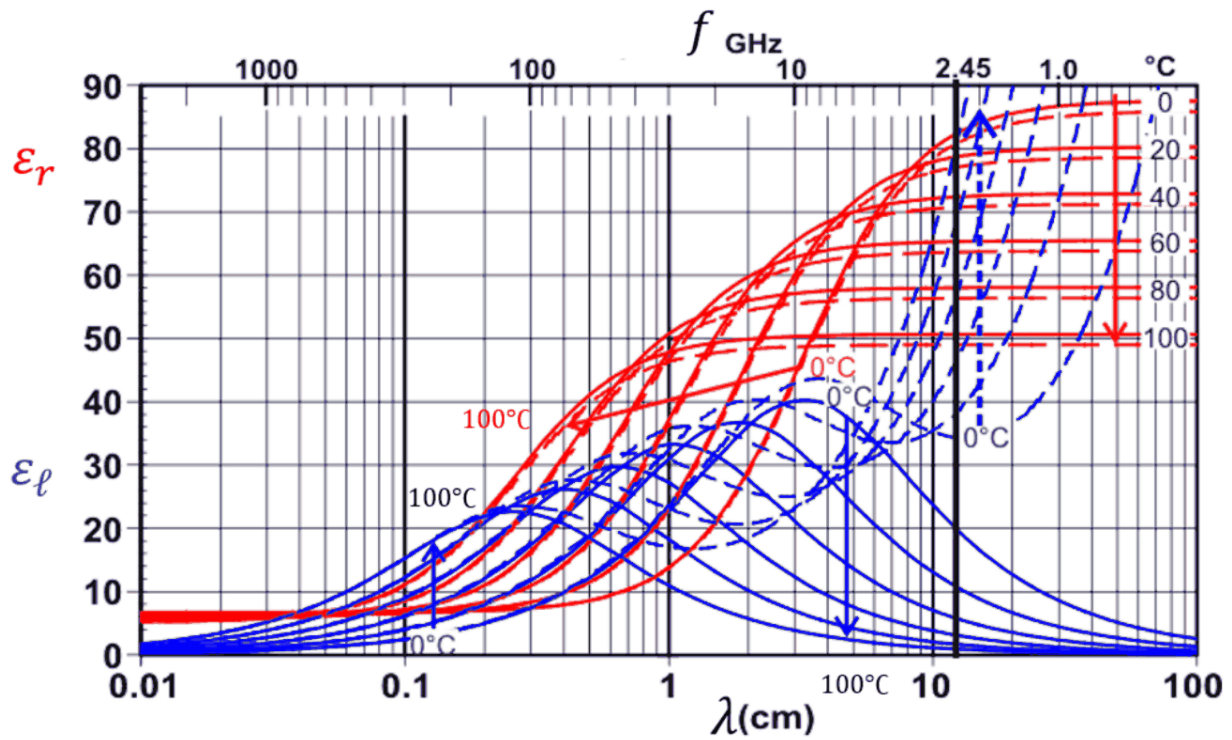
Faz gecikmesi δ , su molekülleri arasındaki etkileşimin sonucudur. Boyutsuz dielektrik kayıp katsayısı ϵ_ℓ ve bağıl dielektrik sabiti ϵ_r 'ye (her ikisi de ışınımın açılma frekansına ω ve sıcaklığa bağlıdır), $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$ bağıntısıyla bağlıdır. δ yeterince küçük olduğunda, suya nüfuz etme derinliği z 'de elektrik alan şöyle verilir:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

Burada $k_0 = \omega/c$ ve $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s ışığın boşluktaki hızıdır.

B.4 — 0.6 puan

$\tan \delta \approx \sin \delta$ yaklaşımını kullanın ve B.2 sorusunda tanımlanan β katsayısı için diğer parametreler cinsinden bir ifade bulun.



Şekil 5. Oklar, eğriler boyunca sıcaklığın 0°C 'den 100°C 'ye değişimini göstermektedir.

Şekil 5, farklı sıcaklıklarda hem saf su (sürekli çizgiler) hem de suda seyreltik tuz çözeltisi (kesikli çizgiler) için ε_r (mavi) ve ε_l 'yi (kırmızı), dalga boyunun veya frekansın fonksiyonları olarak göstermektedir. $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ açısal frekansı kalın bir düşey çizgiyle belirtilmiştir. Aşağıda yalnızca bu frekanstaki mikrodalga ışıınımını ele alacağız.

B.5 — 0.7 puan

Aşağıdaki soruları yanıtlamak için Şekil 5'i kullanın:

1. 20°C 'deki su için, birim hacim başına gücün $z = 0$ 'daki değerinin yarısına düştüğü nüfuz etme derinliği $z_{1/2}$ 'yi bulun.
2. Mikrodalga ışıınımının suya nüfuz etme derinliğinin sıcaklıkla arttığını mı, azaldığını mı yoksa aynı kaldığını mı Cevap Kâğıdı'nda belirtin.
3. Mikrodalga ışıınımının çorbaya (seyreltik tuz çözeltisi) nüfuz etme derinliğinin sıcaklıkla arttığını mı, azaldığını mı yoksa aynı kaldığını mı Cevap Kâğıdı'nda belirtin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- A.1: $C \simeq 0.93 \text{ pF}$, $L \simeq 6.6 \text{ nH}$, buradan

$$f_{\text{est}} \simeq 2.03 \text{ GHz.}$$

- **A.2:** Her iki durumda da,

$$\vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{x}.$$

$\omega_c = eB_0/m$, $\ell = mE_0/(eB_0^2)$ ve $s = \omega_c t$ olarak alın. Başlangıç konumu orijinde olduğunda, istenen yörüngeler

$$\frac{(x, y)_1}{\ell} = (-s + 4 \sin s, 4[1 - \cos s]),$$

$$\frac{(x, y)_2}{\ell} = (-s - 2 \sin s, -2[1 - \cos s]), \quad 0 < s < 4\pi.$$

şeklindedir. Bunlar, sola sürüklenen ve saat yönünün tersine dolanan ilmekli trokoitlerdir.

- **A.3:**

$$r_{\max} \simeq 3.2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.32 \text{ mm}.$$

- **A.4:** Alan çizgilerinin teğetlerini okuyuşuma göre **A ve B katoda doğru; C, D ve E anoda doğru sürüklenir; hiçbirisi tam olarak yarıçapa dik yönde sürüklenmez.** Şekli okumaya ilişkin belirsizlik aşağıda belirtilmiştir.
- **A.5:** **AB, AC ve BC azalır; DE, DF ve EF artar.**
- **A.6:** Aralarında 90° bulunan **dört kol** vardır. S'nin 90° , 180° ve 270° döndürülmüş kopyalarını ekleyin. Kollar **saat yönünün tersine** döner ve

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{4} = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

- **A.7:**

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

- **B.1:** Alan büyüklüğü $|E|$ ve dipol ile anlık alan arasındaki açı için,

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta, \quad H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

Seçilen uzlaşımdan bağımsız güç formülü $H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}$ dir.

- **B.2:**

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

- **B.3:**

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

- **B.4:**

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

• B.5:

1.

$$z_{1/2} = \frac{c\sqrt{\epsilon_r} \ln 2}{\omega \epsilon_\ell} \simeq 1.2 \text{ cm}$$

sonucu, grafikten yaklaşık olarak okunan $\epsilon_r \simeq 78$, $\epsilon_\ell \simeq 10$ değerlerinden elde edilir.

2. Saf suda nüfuz etme derinliği sıcaklıkla **artar**.

3. Çorbada nüfuz etme derinliği sıcaklıkla **azalır**.

Çözüm

A.1

Yarığı oluşturan, yaklaşık olarak paralel iletken yüzeylerin alanı hl , aralarındaki uzaklık ise d 'dir. Kenar etkileri ihmal edildiğinde sığaları

$$C \simeq \frac{\epsilon_0 hl}{d}.$$

Şekil 1'deki boyutlar kullanılırsa,

$$C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(17.5 \times 10^{-3})(6 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}} = 9.29 \times 10^{-13} \text{ F}.$$

Silindirik oyuğun çevresinde dolaşan toplam akım I olsun. Bu akımın h yüksekliği boyunca düzgün dağılımı, I/h etkin yüzey akım yoğunluğunu verir. Bu yüzey akımına sahip ideal bir sonsuz solenoid, $\mu_0 I/h$ büyüklüğünde alan üretir. Belirtilen düzeltme uygulandığında,

$$B \simeq 0.6 \frac{\mu_0 I}{h}.$$

Oyuktan geçen akı $B\pi R^2$ ile yaklaşık olarak ifade edilirse,

$$L = \frac{\Phi}{I} \simeq 0.6 \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = 6.63 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

Böylece

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{0.6\mu_0\epsilon_0\pi R^2 l}} \simeq 2.03 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

$C \propto h$ ve $L \propto h^{-1}$ olduğundan yükseklik sadeleşir. Rezonatör, idealleştirilmiş toplu sığa ve indüktans elemanlarıyla temsil edildiği için bu tahmin yaklaşık bir değerdir.

A.2

Elektron, Lorentz kuvveti denkleminde uyar:

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Verilen alanlar için bu denklemin bileşenleri

$$\dot{u}_x = -\omega_c u_y, \quad \dot{u}_y = \omega_c \left(u_x + \frac{E_0}{B_0} \right), \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

$v_D = E_0/B_0$ tanımını yapalım. Sabit $-v_D\hat{x}$ hızı, elektriksel ve manyetik kuvvetlerin birbirini dengelemesini sağlar. Daha genel olarak,

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = -v_D\hat{x}.$$

Bu hızla ötelenen referans sisteminde, geriye kalan hız vektörü düzgün olarak döner. $u_y(0) = 0$ için,

$$u_x = -v_D + A \cos(\omega_c t), \quad u_y = A \sin(\omega_c t),$$

burada $A = u_x(0) + v_D$ 'dir. Salınımlı terimlerin ortalaması sıfırdır; dolayısıyla her iki başlangıç koşulu da aynı sürüklenmeyi verir.

$x(0) = y(0) = 0$ alınarak integral alındığında

$$x = -v_D t + \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad y = \frac{A}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)].$$

1. durum için $A = 4v_D$; 2. durum için $A = -2v_D$ 'dir. Buradan cevaplarda belirtilen parametrik yörüngeler elde edilir.

Hassas bir çizim için $\ell = v_D/\omega_c$ kullanın. Aşağıdaki noktalar ilk siklotron periyodunu betimler:

$s = \omega_c t$	1. durum: $(x/\ell, y/\ell)$	2. durum: $(x/\ell, y/\ell)$
0	(0, 0)	(0, 0)
$\pi/2$	$(4 - \pi/2, 4)$	$(-2 - \pi/2, -2)$
π	$(-\pi, 8)$	$(-\pi, -4)$
$3\pi/2$	$(-4 - 3\pi/2, 4)$	$(2 - 3\pi/2, -2)$
2π	$(-2\pi, 0)$	$(-2\pi, 0)$

İkinci periyodu elde etmek için bu eğriyi x yönünde $-2\pi\ell$ kadar öteleyerek tekrarlayın.

1. durumda elektron başlangıçta sağa hareket eder ve yukarı doğru kıvrılır; eğrinin tamamı $0 \leq y \leq 8\ell$ aralığında kalır. 2. durumda başlangıçta sola hareket eder ve aşağı doğru kıvrılır; eğri $-4\ell \leq y \leq 0$ aralığında kalır. Belirtilen zaman aralığının sonunda her ikisi de $(-4\pi\ell, 0)$ noktasına ulaşır. Dolanmaları saat yönünün tersinedir ve hızları hiçbir zaman sıfır olmadığı için yörüngelerin hiçbirinde sivri dönüş noktası yoktur.

A.3

Yaklaşık olarak eylemsiz olan yerel sürüklenme referans sisteminde, elektriksel kuvvet, referans sisteminin hızına karşılık gelen manyetik kuvvet tarafından yaklaşık olarak dengelenir. Geriye kalan hareket yaklaşık olarak daireseldir:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = ev_{\perp}B_0, \quad r = \frac{mv_{\perp}}{eB_0}.$$

Kinetik enerji sınırının tamamını dolanma enerjisi için bir üst tahmin olarak kullanırsak,

$$v_{\perp} \lesssim \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}.$$

Burada

$$K_{\max} = 800(1.6 \times 10^{-19}) = 1.28 \times 10^{-16} \text{ J},$$

dolayısıyla

$$v_{\max} \simeq 1.68 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

ve

$$r_{\max} \simeq \frac{\sqrt{2mK_{\max}}}{eB_0} = \frac{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31})(1.28 \times 10^{-16})}}{(1.6 \times 10^{-19})(0.3)} = 3.18 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Böylece $r_{\max} \simeq 0.32 \text{ mm}$ bulunur; bu, 15 mm 'lik aralıktan çok daha küçüktür. Bu sonuç, dolanmanın, merkezinin sürüklenmesine eklenen küçük bir hareket olarak ele alınmasını destekler.

A.4

$\hat{r}$ radyal olarak dışarıya, $\hat{\phi}$ ise saat yönünün tersine yönelsin. Manyetik alan sayfa düzleminden dışarıya yönelmişken,

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi}$$

alanı

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = \frac{E_\phi}{B_0} \hat{r} - \frac{E_r}{B_0} \hat{\phi}.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla:

- $E_\phi > 0$, anoda doğru sürüklenme oluşturur.
- $E_\phi < 0$, katoda doğru sürüklenme oluşturur.
- $E_\phi = 0$, yarıçapa dik sürüklenme oluşturur.

Statik elektrik alan radyaldır; bu nedenle yalnızca azimutal sürüklenmeye katkıda bulunur. Radyal sınıflandırma bütünüyle, çizilmiş olan alternatif alanın teğetsel bileşeni tarafından belirlenir.

Yerel teğetleri okuyuşuma göre:

Elektron	Alternatif alanın teğetsel bileşeni	Radyal sürüklenme
A	Saat yönünde	Katoda doğru
B	Saat yönünde	Katoda doğru
C	Saat yönünün tersine	Anoda doğru
D	Saat yönünün tersine	Anoda doğru
E	Saat yönünün tersine	Anoda doğru

Bu sınıflandırmalar radyal bileşenle ilgilidir; elektronların azimutal sürüklenmesi de vardır. Teğetler şematik bir şekilden okunduğu için bu sınıflandırmalar bir miktar okuma belirsizliği taşır.

A.5

Katot merkezinden aynı ρ uzaklığında,

$$\dot{\phi} = \frac{u_\phi}{\rho} = -\frac{E_r}{B_0 \rho}.$$

Statik alan radyal olarak içeriye yönelir ve bu yarıçapta altı elektronun tümüne saat yönünün tersine aynı açısal hızı kazandırır. Dolayısıyla anlık açısal ayrımlarını yalnızca alternatif alanın radyal bileşenindeki farklılıklar etkiler.

A, B ve C için Şekil 3, alternatif alanın radyal bileşeninin A'da dışarıya doğru olmaktan, B'de yaklaşık sıfır üzerinden geçerek C'de içeriye doğru olacak biçimde değiştiğini gösterir. Sonuç olarak,

$$\dot{\phi}_A < \dot{\phi}_B < \dot{\phi}_C.$$

Konumları $\phi_A > \phi_B > \phi_C$ biçiminde sıralanmıştır. Dolayısıyla arkadaki elektron öndekinden daha hızlı hareket eder ve üç açısal ayrımın tümü azalır:

$$\frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_B) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_C) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_B - \phi_C) < 0.$$

D, E ve F için alternatif alanın radyal bileşeni ters biçimde değişir: D'de içeriye doğru, E'de yaklaşık sıfır ve F'de dışarıya doğrudur. Bu nedenle

$$\dot{\phi}_D > \dot{\phi}_E > \dot{\phi}_F.$$

$\phi_D > \phi_E > \phi_F$ olduğundan üç açısal ayrımın tümü artar.

Çift	Açısal ayrımın değişimi
AB	Azalır
AC	Azalır
BC	Azalır
DE	Artar
DF	Artar
EF	Artar

A.6

Komşu rezonatörlerin salınım fazları zıttır. Dolayısıyla belirli bir anda, birer atlayarak sıralanan açısal bölgeler elektronları odaklarken aradaki bölgeler onları birbirinden uzaklaştırır. Bu nedenle sekiz rezonatör dört kol oluşturur.

Çizimde, S'nin katot merkezi etrafında 90° , 180° ve 270° döndürülmesiyle elde edilen üç ek kopyası bulunmalıdır. Bunların biçimleri aynı kıvrılma yönüne sahip olmalıdır.

Statik alan içeriye yönelir. Oluşturduğu sürüklenme

$$(-\hat{r}) \times \hat{z} = +\hat{\phi},$$

olduğundan kollar saat yönünün tersine döner.

Yarım salınım periyodu sonra rezonatörlerin kutupları tersine döner. Bir kol, bir sonraki rezonatörün konumuna, yani $2\pi/8 = \pi/4$ açısı kadar ilerlemelidir. Dolayısıyla

$$\omega_s = \frac{\pi/4}{T/2} = \frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{4}.$$

$f = 2.45 \times 10^9$ Hz kullanılarak,

$$\omega_s = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

Eşdeğer olarak, kollar saniyede 6.125×10^8 tur atar.

A.7

Belirtilen yaklaşım altında, aralığın orta noktasındaki alan büyüklüğü

$$E_{\text{mid}} \simeq \frac{V_0}{b-a}.$$

Orta noktanın yarıçapı

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}.$$

Buradaki elektron sürüklenmesi, kolun teğetsel hızına sahip olmalıdır:

$$\frac{E_{\text{mid}}}{B_0} \simeq \omega_s \rho_{\text{mid}}.$$

Sonuç olarak,

$$\frac{V_0}{B_0(b-a)} \simeq \omega_s \frac{a+b}{2},$$

buradan

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

elde edilir. Verilen B_0 ve f değerleriyle bu ifade ayrıca

$$V_0 \simeq (5.77 \times 10^8 \text{ V m}^{-2})(b^2 - a^2),$$

şeklinde yazılabilir; burada a ve b metre cinsinden ölçülür.

B.1

İki yüke etki eden kuvvetler bir kuvvet çifti oluşturur. Tork

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Böylece, θ dipol ile anlık alan arasındaki açı olarak tanımlandığında,

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta.$$

Tork bu açıyı azaltma eğilimindedir. Bu nedenle θ 'ya eşlenik işaretli bileşeni $-p_0 |E| \sin \theta$ 'dır ve mekanik güç

$$H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

olarak elde edilir. Özellikle, alanla hizalanmakta olan bir dipol için $\dot{\theta} < 0$ 'dır; dolayısıyla alan pozitif güç aktarır.

Bu sonuç, açığa ilişkin bir uzlaşım seçilmeden de türetilabilir. Yüklerin konumları $\vec{r}_+$ ve $\vec{r}_-$ ise,

$$H_i = q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_+ - q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_- = \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)].$$

Dolayısıyla

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

Bunun yerine θ sabit pozitif x ekseninden ölçülür ve $E(t)$ işaretli bir bileşen olarak alınırsa, bu ifade

$$H_i = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta) = -p_0 E(t) \sin \theta \dot{\theta}.$$

hâline gelir. Dipole aktarılan mekanik güçte $\dot{E}$ terimi yoktur.

B.2

Tek dipole aktarılan gücü birim hacim üzerinden toplamak

$$H(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

sonucunu verir. Verilen kutuplanmanın türevi

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \beta\epsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \hat{x}.$$

Dolayısıyla

$$H(t) = \beta\epsilon_0 \omega E_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t - \delta).$$

Şu özdeşliği

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta,$$

ve periyot ortalamalarını

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

kullanarak

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \epsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

elde ederiz. Pozitif bir faz gecikmesi için soğurulan ortalama güç pozitiftir.

B.3

Yerel elektrik alan genliğini $\mathcal{E}(z)$ ile gösterelim. Ortalama elektriksel enerji yoğunluğu

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Ortalama manyetik enerji yoğunluğu buna eşittir; dolayısıyla

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Sorudaki dielektrik dalga modelinde yayılma hızı c/n kullanılarak,

$$I(z) = \frac{c}{n} \langle u \rangle = \frac{1}{2} n c \epsilon_0 \mathcal{E}^2(z),$$

burada $n^2 = \epsilon_r$ 'dir.

Kalınlığı dz olan ince bir tabaka için enerjinin korunumu

$$-\frac{dI}{dz} = \langle H \rangle.$$

sonucunu verir. B.2'nin sonucu yerine konulup $\mathcal{E}^2$ elenirse,

$$-\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \beta \epsilon_0 \omega \mathcal{E}^2 \sin \delta = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} I.$$

Sabit sıcaklıktaki homojen bir ortam için katsayı sabittir. İntegral alınarak

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

elde edilir. Dolayısıyla güç için zayıflama katsayısı

$$\alpha = \frac{\beta\omega \sin \delta}{nc}.$$

B.4

Denklem (2), elektrik alan genliğinin

$$e^{-\frac{1}{2}nk_0z \tan \delta}.$$

ile orantılı olduğunu verir. Şiddet bu genliğin karesiyle orantılı olduğundan,

$$I(z) = I(0)e^{-nk_0z \tan \delta}.$$

$k_0 = \omega/c$ kullanılarak B.3 ile karşılaştırıldığında,

$$\frac{\beta\omega \sin \delta}{nc} = \frac{n\omega}{c} \tan \delta.$$

Böylece

$$\beta \sin \delta = n^2 \tan \delta.$$

İstenen $\tan \delta \simeq \sin \delta$ yaklaşımı altında,

$$\boxed{\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.}$$

Bu sonuç, soruda belirtilen dielektrik ve küçük kayıp yaklaşımları çerçevesinde elde edilir.

B.5

Verilen $\tan \delta = \varepsilon_\ell/\varepsilon_r$ bağıntısı kullanıldığında, güç zayıflama katsayısı

$$\alpha = nk_0 \tan \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\ell}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Sıcaklık her yerde aynı olduğunda, birim hacim başına yerel soğurulan güç, yerel şiddetle orantılıdır:

$$\langle H(z) \rangle = \alpha I(z).$$

Dolayısıyla aynı üstel bağımlılığa sahiptir:

$$\frac{\langle H(z) \rangle}{\langle H(0) \rangle} = e^{-\alpha z}.$$

1. 20°C'de yarı güç derinliği.

$e^{-\alpha z_{1/2}} = 1/2$ koşulu

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell}.$$

sonucunu verir. İşaretlenen frekansta, 20°C için sürekli eğriler yaklaşık olarak

$$\varepsilon_r \simeq 78, \quad \varepsilon_\ell \simeq 10.$$

değerlerini verir. Sonuç olarak,

$$z_{1/2} \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)\sqrt{78} \ln 2}{(2\pi)(2.45 \times 10^9)(10)} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Böylece grafik, yaklaşık olarak şu yarı güç derinliğini destekler:

$$\boxed{z_{1/2} \simeq 1.2 \text{ cm.}}$$

Bu, yarı güç derinliğidir; alan genliğinin azalmasındaki üs bunun yarısı kadardır.

2. Sıcaklık artarken saf su.

Sabit frekansta,

$$z_{1/2} \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{\epsilon_\ell}.$$

Sürekli mavi eğriler, ϵ_ℓ 'nin sıcaklıkla önemli ölçüde azaldığını gösterir. $\sqrt{\epsilon_r}$ 'deki azalma oransal olarak çok daha küçüktür. Dolayısıyla oran artar:

Saf suda nüfuz etme derinliği sıcaklıkla artar.

3. Sıcaklık artarken çorba.

Aynı frekansta, kesikli mavi eğriler sıcaklık arttıkça dielektrik kaybının arttığını, kesikli kırmızı eğriler ise ϵ_r 'nin azaldığını gösterir. Her iki değişim de $\sqrt{\epsilon_r}/\epsilon_\ell$ oranını azaltır. Dolayısıyla

Çorbada nüfuz etme derinliği sıcaklıkla azalır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Termoakustik Motor

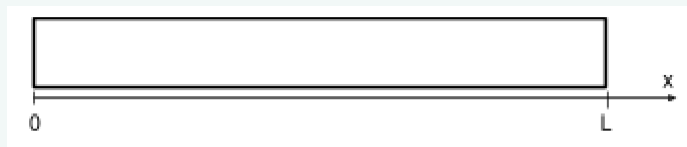
Termoakustik motor, ısıyı akustik güce, yani mekanik işin bir biçimi olan ses dalgalarına dönüştüren bir aygıttır. Diğer birçok ısı makinesi gibi, ters yönde çalıştırılarak bir soğutucu olarak da kullanılabilir; bu durumda sesi kullanarak soğuk bir depodan sıcak bir depoya ısı pompalar. Yüksek çalışma frekansları ısı iletimini azaltır ve çalışma odasının sınırlandırılması gereğini ortadan kaldırır. Diğer birçok motor türünün aksine, termoakustik motorun çalışma akışkanının kendisi dışında hareketli parçası yoktur.

Termoakustik makinelerin verimleri genellikle diğer motor türlerinininkinden düşüktür, ancak kurulum ve bakım maliyetleri açısından avantajları vardır. Bu durum, güneş ısı enerjisi santralleri ve atık ısıdan yararlanma gibi yenilenebilir enerji uygulamaları için olanaklar yaratır. İncelememizde, dış aygıtlara güç sağlamak amacıyla enerjinin sistemden alınmasını veya dönüştürülmesini göz ardı ederek, sistem içinde akustik enerji üretilmesine odaklanacağız.

Bölüm A: Kapalı bir boruda ses dalgası (3.7 puan)

Eksen x doğrultusunda uzanan, uzunluğu L ve kesit alanı S olan, ısı olarak yalıtılmış bir boru düşünün. Borunun iki ucu $x = 0$ ve $x = L$ konumlarındadır. Boru ideal bir gazla doldurulmuştur ve her iki ucu da kapalıdır. Dengede gazın sıcaklığı T_0 , basıncı p_0 ve kütle yoğunluğu ρ_0 'dır.

Viskozitenin ihmal edilebildiğini ve gazın yalnızca x doğrultusunda hareket ettiğini varsayın. Gazın özellikleri, bu doğrultuya dik olan y ve z doğrultularında düzgündür.



Şekil 1

A.1 (0.3 puan)

Bir duran ses dalgası oluştuğunda, gaz elemanları x doğrultusunda ω açısal frekansıyla salınır. Salınımların genliği, her elemanın boru boyunca denge konumu olan x 'e bağlıdır. Her gaz elemanının x denge konumundan boyuna yer değiştirmesi

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

ile verilir (buradaki u 'nun bir gaz elemanının yer değiştirmesini ifade ettiğine dikkat edin).

Burada $a \ll L$ pozitif bir sabit, $k = 2\pi/\lambda$ dalga sayısı ve λ dalga boyudur. Bu sistemde mümkün olan en büyük dalga boyu $\lambda_{\max}$ nedir?

Soru boyunca $\lambda = \lambda_{\max}$ olan bir salınım modu varsayacağız.

Şimdi, durgun hâlde x ile $x + \Delta x$ arasında bulunan dar bir gaz paketini ele alın ($\Delta x \ll L$). A.1 sorusundaki yer değiştirme dalgasının etkisiyle bu paket x eksenini boyunca salınır; hacmi ve diğer termodinamik özellikleri değişir.

Aşağıdaki sorular boyunca, termodinamik özelliklerdeki tüm bu değişimlerin pertürbe edilmemiş değerlere kıyasla küçük olduğunu varsayın.

A.2 (0.5 puan)

Paketin $V(x, t)$ hacmi, $V_0 = S\Delta x$ denge değeri etrafında salınır ve

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

biçimindedir. $V_1(x)$ için V_0 , a , k ve x cinsinden bir ifade elde edin.

A.3 (0.7 puan)

Ses dalgasının etkisiyle gazın toplam basıncının yaklaşık olarak

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

biçimini aldığını varsayın. Gaz paketine etki eden kuvvetleri göz önüne alarak, basınç salınımının $p_1(x)$ genliğini en düşük mertebede; x konumu, ρ_0 denge yoğunluğu, a yer değiştirme genliği ve k ile ω dalga parametreleri cinsinden hesaplayın.

Akustik frekanslarda gazın ısı iletkenliği ihmal edilebilir. Gaz paketlerinin genişlemesini ve sıkışmasını, $pV^\gamma = \text{const}$ bağıntısını sağlayan, tamamen adyabatik süreçler olarak ele alacağız; burada γ adyabatik sabittir.

A.4 (0.3 puan)

Yukarıdaki bağıntıyı ve önceki soruların sonuçlarını kullanarak, borudaki ses dalgalarının $c = \omega/k$ hızı için birinci mertebede bir ifade elde edin. Cevabınızı p_0 , ρ_0 ve adyabatik sabit γ cinsinden ifade edin.

A.5 (0.7 puan)

Ses dalgasının yol açtığı adyabatik genişleme ve sıkışma nedeniyle gazın sıcaklığındaki değişim şu biçimdedir:

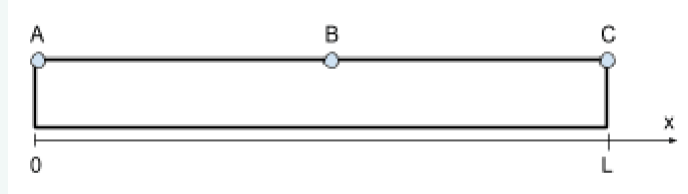
$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Sıcaklık salınımlarının $T_1(x)$ genliğini T_0 , γ , a , k ve x cinsinden hesaplayın.

A.6 (1.2 puan)

Yalnızca bu soru için, boru ile gaz arasında zayıf bir ısıl etkileşim olduğunu varsayıyoruz. Bunun sonucunda duran ses dalgası hemen hemen değişmeden kalır, ancak gaz boruyla küçük miktarda ısı alışverişi yapabilir. Viskoziteden kaynaklanan ısınma ihmal edilebilir.

Şekil 2'deki noktaların her biri için (A ve C borunun uçlarında, B merkezindedir), borunun o noktadaki sıcaklığının uzun bir süre içinde artacağını, azalacağını veya aynı kalacağını belirtin.

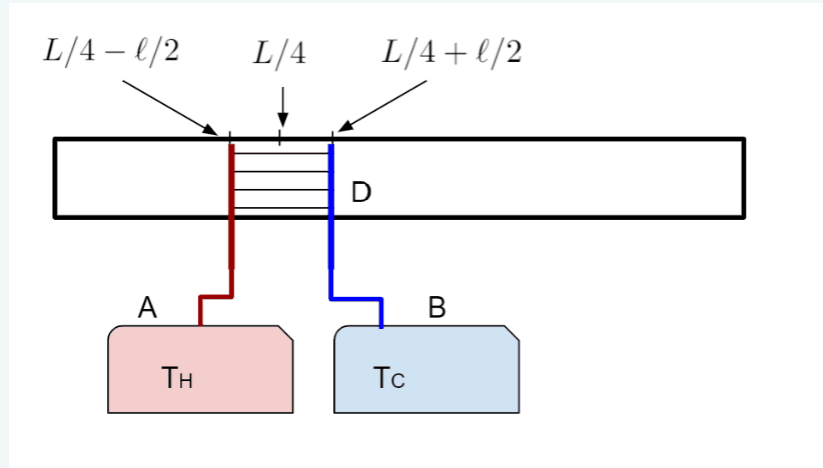


Şekil 2

Bölüm B: Dış ısıl temasın yol açtığı ses dalgası güçlenmesi (6.3 puan)

Borunun içine, aralarında yeterli boşluk bulunan ince katı levhalardan oluşan bir istif yerleştirilir. İstifteki levhalar, boru boyunca gaz akışını engellemeyecek şekilde boru eksenine paralel olarak hizalanmıştır. İstifin merkezi $x_0 = L/4$ konumundadır; istif, boru eksenı boyunca $\ell \ll L$ genişliğinde bir bölgeyi kaplar ve borunun tüm kesitini doldurur. İstifin sağ ve sol uçları arasında τ sıcaklık farkı korunur. İstifin $x_H = x_0 - \ell/2$ konumundaki sol ucu, dış bir ısı deposu tarafından $T_H = T_0 + \tau/2$ sıcaklığında tutulurken, $x_C = x_0 + \ell/2$ konumundaki sağ ucu da $T_C = T_0 - \tau/2$ sıcaklığında tutulur.

Levha istifi, uçları arasında sabit bir sıcaklık gradyanını korumak için boyuna doğrultuda küçük bir ısı akışına izin verir; böylece $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$ olur.



Şekil 3. Sistemin şematik gösterimi. (A) ve (B) sırasıyla sıcak ve soğuk ısı depolarını gösterir. (D) istifi gösterir.

Levha istifi ile gaz arasındaki ısıl temasın borudaki ses dalgaları üzerindeki etkisini incelemek için aşağıdaki varsayımları yapın:

- Önceki bölümde olduğu gibi, termodinamik özelliklerdeki tüm değişimler pertürbe edilmemiş değerlere kıyasla küçüktür.

- Sistem, mümkün olan en uzun dalga boyuna sahip temel duran dalga modunda çalışır. Levha istifinin varlığı bu modu yalnızca çok az değiştirir.
- İstif, dalga boyundan çok daha kısadır: $\ell \ll \lambda_{\max}$. Hem yer değiştirme hem de basınç düğümlerinden yeterince uzağa yerleştirilebilir; böylece $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ yer değiştirmesi ve $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ basıncı, istifin tüm uzunluğu boyunca düzgün kabul edilebilir.
- Paketlerin istife girip çıkmasından kaynaklanan tüm kenar etkilerini ihmal edebiliriz.
- Levha istifinin uçları, yani sıcak ve soğuk depolar arasındaki sıcaklık farkı, mutlak sıcaklığa kıyasla küçüktür: $\tau \ll T_0$.
- İstif içinden, gaz içinden ve boru boyunca gerçekleşen ısı iletiminin tümü ihmal edilebilir. Kayda değer tek ısı aktarım mekanizmaları, gazın hareketinden kaynaklanan taşınım ve gaz ile istif arasındaki iletimdir.

B.1 (0.4 puan)

İstif bölgesinde başlangıçta $x_0 = L/4$ konumunda bulunan belirli bir gaz paketini ele alın. Paket istif içinde hareket ederken, istifin paketin yakınındaki bölümünün yerel sıcaklığı aşağıdaki gibi değişir:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

T_{st} 'yi a , τ ve ℓ cinsinden ifade edin.

B.2 (1.0 puan)

Hangi kritik sıcaklık farkı τ_{cr} 'nin üzerinde gaz, sıcak depodan soğuk depoya ısı taşıyacaktır? τ_{cr} 'yi T_0 , γ , k ve ℓ cinsinden ifade edin.

B.3 (0.8 puan)

Küçük bir gaz paketine giren $\frac{dQ}{dt}$ ısı akışı için, paketin hacim ve basınç değişim hızlarının doğrusal bir fonksiyonu olarak genel bir yaklaşık ifade elde edin. Cevabınızı hacim değişim hızı $\frac{dV}{dt}$, basınç değişim hızı $\frac{dp}{dt}$, paketin basınç ve hacminin pertürbe edilmemiş denge değerleri p_0 , V_0 ve adyabatik üs γ cinsinden ifade edin. (Sabit hacimdeki molar ısı kapasitesi için $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ ifadesini kullanabilirsiniz; burada R gaz sabitidir.)

Paket ile istif arasındaki ısı akış hızının sınırlı olması, paketin basınç ve hacim salınımları arasında bir faz farkına yol açar. Bunun nasıl iş ürettiğini göreceğiz.

İstiften pakete giren ısı akışı, paket ile istifin komşu elemanı arasındaki sıcaklık farkıyla orantılı olsun ve yaklaşık olarak $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$ ile verilsin. Burada T_1 ve T_{st} , sırasıyla A.5 ve B.1 sorularındaki gaz paketi ile komşu istif bölümünün sıcaklık salınım genlikleridir ve $\beta > 0$ bir sabittir. Makinenin çalışma frekanslarında, bu ısı akışının yol açtığı gaz sıcaklığı değişiminin hem T_1 'e hem de T_{st} 'ye kıyasla önemsiz olduğunu varsayın.

B.4 (1.9 puan)

İş hesaplamak için, hareket eden paketin hacminde istifle ısı temas sonucunda oluşan değişimi ele alacağız. İstifin etkisi altındaki paketin basıncını ve hacmini şu biçimde yazalım:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

p_a ve p_b verildiğinde, V_a ve V_b katsayılarını bulun. Cevabınızı $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a$ ve ℓ cinsinden ifade edin.

B.5 (0.8 puan)

Gaz paketinin bir çevrim boyunca birim hacim başına ürettiği akustik iş w için yaklaşık bir ifade elde edin. İstif hacmi üzerinden integral alarak, gazın bir çevrim boyunca ürettiği toplam iş W_{tot} 'u bulun. W_{tot} 'u $\gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, k$ ve S cinsinden ifade edin.

B.6 (0.8 puan)

Bir çevrim boyunca $x = x_0$ düzleminin sol tarafından sağ tarafına taşınan ısı Q_{tot} için yaklaşık bir ifade elde edin. Cevabınızı $\tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, S, \ell$ cinsinden ifade edin.

(İpucu: Taşınımından kaynaklanan ısı akımı için $j = Q \frac{du}{dt}$ formülünü kullanabilirsiniz.)

B.7 (0.6 puan)

Termoakustik motorun η verimini bulun. Verim, üretilen akustik işin sıcak depodan alınan ısıya oranı olarak tanımlanır. Cevabınızı sıcak ve soğuk depolar arasındaki τ sıcaklık farkı, kritik sıcaklık farkı τ_{cr} ve Carnot verimi $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ cinsinden ifade edin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

V_1, p_1, T_1 katsayıları, belirtilen salınımlı biçimlerdeki işaretli katsayılardır. Metin boyunca $k = \pi/L$ 'dir.

- A.1

$$\lambda_{\max} = 2L.$$

- A.2

$$V_1(x) = V_0 a k \cos(kx).$$

- A.3

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

- A.4

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

- A.5

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

- A.6 A: artar; B: azalır; C: artar.

- B.1

$$T_{st} = \frac{a \tau}{\sqrt{2} \ell}.$$

• B.2

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

$\tau > \tau_{\text{cr}}$ olduğunda ısı sıcaktan soğuğa taşınır.

• B.3

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{\gamma p_0 dV/dt + V_0 dp/dt}{\gamma - 1}.$$

• B.4

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right], \quad V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

• B.5

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

• B.6

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

• B.7

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c, \quad \tau > \tau_{\text{cr}}.$$

Çözüm

Salınan termodinamik nicelikleri bulurken birinci mertebeden pertürbasyonları koruyoruz. Işın ve taşınan ısıнын çevrim ortalamaları, dalga genliğine göre ilk kez ikinci mertebede sıfırdan farklı olur. Isıl bağlaşım zayıf olduğundan, zaten bu bağlaşım ile orantılı olan ifadelerde pertürbe edilmemiş dalga genlikleri kullanılabilir.

A.1

Kapalı, rijit uçlar boyuna yer değiştirmenin sıfır olmasını gerektirir:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

İlk koşul zaten sağlanmaktadır. İkinci koşul

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

sonucunu verir. $n = 0$ seçimi bir dalga vermez. Dolayısıyla

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}.$$

En uzun dalga boyu $n = 1$ 'e karşılık gelir:

$$\lambda_{\max} = 2L, \quad k = \frac{\pi}{L}.$$

A.2

Paketin iki sınırı

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t).$$

konumlarına hareket eder. Bunun sonucunda

$$V(x, t) = S [\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)].$$

$k\Delta x \ll 1$ için,

$$V(x, t) \simeq S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = V_0 [1 + ak \cos(kx) \cos(\omega t)].$$

Böylece,

$$V_1(x) = V_0 ak \cos(kx).$$

A.3

Pakete etki eden basınç kuvvetleri, birinci mertebede,

$$F_x = S[p(x, t) - p(x + \Delta x, t)] \simeq -S\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

sonucunu verir. Paketin kütlesi $\rho_0 S\Delta x$ 'tir. Dolayısıyla Newton'ın ikinci yasası

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

biçimini alır. Verilen salınım ifadelerini yerine koyarsak,

$$-\rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = p'_1(x) \cos(\omega t),$$

dolayısıyla

$$p'_1(x) = -\rho_0 a \omega^2 \sin(kx).$$

İntegral alındığında

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx) + C.$$

elde edilir. Uzayda düzgün bir akustik sıkışma yoktur: toplam hacim değişimi

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L, t) - u(0, t) = 0.$$

ile orantılıdır. A.4'te açıkça yazılan doğrusal adyabatik basınç-sıkışma bağıntısı, bu durumda basınç pertürbasyonunun uzaysal ortalamasının sıfır olmasını gerektirir. $\int_0^L \cos(kx) dx = 0$ olduğundan, bu koşul $C = 0$ değerini belirler. Böylece

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4

$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ bağıntısını doğrusallaştırırsak,

$$\frac{\delta p}{p_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0.$$

$\delta p = -p_1 \cos(\omega t)$ ve $\delta V = V_1 \cos(\omega t)$ kullanılarak,

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{V_1}{V_0} = \gamma p_0 a k \cos(kx).$$

A.3 ile karşılaştırıldığında

$$\frac{\rho_0 a \omega^2}{k} = \gamma p_0 a k,$$

ve dolayısıyla

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

elde edilir.

A.5

Sabit miktarda ideal gaz için,

$$pV = nRT.$$

Bunun doğrusallaştırılmış biçimi

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} + \frac{\delta V}{V_0}.$$

şeklinde. A.4'teki adyabatik bağıntıyı kullanarak,

$$\frac{\delta T}{T_0} = -(\gamma - 1) \frac{\delta V}{V_0} = -(\gamma - 1) a k \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Belirtilen sıcaklık salınımıyla karşılaştırırsak,

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

A.6

Borunun $\cos(kx) > 0$ olan sol yarısındaki bir paketi ele alın.

Sağa yer değiştirdiğinde genleşir ve soğur. Bu nedenle görece daha sağdaki bir konumda borudan ısı alır. Sola yer değiştirdiğinde ise sıkışır ve ısınır; dolayısıyla görece daha soldaki bir konumda boruya ısı verir. Bu sürecin tekrarlanması, ısıyı sol uca doğru aktarır.

Sağ yarıda $\cos(kx) < 0$ olduğundan ilişki tersine döner: bir paket merkeze doğru yer değiştirdiğinde ısı alır, sağ uca doğru yer değiştirdiğinde ise ısı verir.

Böylece akustik hareket, merkez bölgeden her iki uca doğru ısı pompalar:

$$A : \text{sıcaklık artar,} \quad B : \text{sıcaklık azalır,} \quad C : \text{sıcaklık artar.}$$

Denge konumu tam merkezde olan paketin birinci mertebeden sıcaklık salınımı sıfır olsa da, komşu paketler merkez bölgeden geçerek ısıyı uzaklaştırır. Ortalama ısı etki, genliğe göre ikinci mertebededir; tek bir denge konumundaki birinci mertebeden sıcaklıkla belirlenmez.

B.1

İstifin merkezinde,

$$kx_0 = \frac{\pi}{L} \frac{L}{4} = \frac{\pi}{4},$$

dolayısıyla paketin yer değiştirmesi

$$u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t).$$

olur. Anlık konumu $x_0 + u(x_0, t)$ 'dir. Bunu levhanın sıcaklık profiline yerleştirirsek

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} u(x_0, t) = T_0 - \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} \cos(\omega t).$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

B.2

İstifin merkezindeki adyabatik gaz sıcaklığı genliği

$$T_1(x_0) = \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

şeklindedir. Paketin hareketinin en sol noktasında gazın sıcaklığı $T_0 + T_1$, komşu istif bۆlۆmۆnۆn sıcaklığı ise $T_0 + T_{\text{st}}$ 'dir. Paketin burada ısı alabilmesi için

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

koşulu sağlanmalıdır. En sağ noktada aynı koşul, istifin gazdan daha soğuk olmasını sağlar; dolayısıyla paket burada ısı verir. Bۆylece paket, tam olarak

$$\frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} > \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

olduğunda sıcaktan soğuğa ısı taşır. Dolayısıyla kritik sıcaklık farkı

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

olur. Eşitlik durumunda gazın ve komşu istif bۆlۆmۆnۆn sıcaklık salınımları ۆrtۆřřř; bu nedenle en dۆřřk mertebedeki ısı alışverişi sıfır olur. Bu eşiğin altında ısı taşınımının yۆnۆ tersine dۆner.

B.3

Pakete giren ısı için $dQ > 0$, gazın yaptığı iş için $p dV > 0$ alalım. Birinci yasa

$$dQ = dU + p dV.$$

şeklindedir. İdeal gaz için,

$$U = nc_v T = \frac{nRT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Bۆylece

$$dQ = \frac{V dp + p dV}{\gamma - 1} + p dV = \frac{V dp + \gamma p dV}{\gamma - 1}.$$

Birinci mertebede, kۆřk değişim hızlarını çarpan katsayıların yerine denge değerleri konabilir:

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{V_0 dp/dt + \gamma p_0 dV/dt}{\gamma - 1}.$$

B.4

B.1 ve B.2'den,

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\sqrt{2}\ell}(\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

Kısalık için,

$$\Delta T \equiv \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\ell}.$$

tanımını yapalım. Bu durumda verilen ısı girişi

$$\dot{Q} = -\beta V_0 \Delta T \cos(\omega t).$$

olur. Basınç ve hacim ifadelerinin türevlerini alırsak,

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \omega p_a \cos(\omega t) + \omega p_b \sin(\omega t), \\ \dot{V} &= \omega V_a \cos(\omega t) - \omega V_b \sin(\omega t).\end{aligned}$$

B.3'te yerine koyarak

$$\dot{Q} = \frac{\omega}{\gamma - 1} [(V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) \cos(\omega t) + (V_0 p_b - \gamma p_0 V_b) \sin(\omega t)].$$

elde ederiz. Sinüs katsayılarını eşitleyince,

$$V_0 p_b - \gamma p_0 V_b = 0,$$

dolayısıyla

$$V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

Kosinüs katsayılarını eşitleyince,

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} (V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) = -\beta V_0 \Delta T.$$

Böylece

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right].$$

β ile orantılı terim, sıfırdan farklı çevrim işi için gereken hacim bileşenini sağlar.

B.5

Bir paketin bir çevrim boyunca yaptığı iş

$$W_{\text{parcel}} = \oint p dV.$$

şeklindedir. $\theta = \omega t$ yazıldığında, sabit basıncın katkısının integrali sıfır olur ve geriye

$$W_{\text{parcel}} = \int_0^{2\pi} (p_a \sin \theta - p_b \cos \theta)(V_a \cos \theta - V_b \sin \theta) d\theta.$$

kalır.

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi,$$

bağıntılarını kullanarak

$$W_{\text{parcel}} = -\pi(p_a V_b + p_b V_a).$$

elde ederiz. B.4'teki ifadeler yerine konduğunda, $p_a p_b$ içeren terimler birbirini götürür:

$$W_{\text{parcel}} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta V_0 p_b}{\gamma p_0 \omega} \Delta T.$$

Dolayısıyla birim denge hacmi başına iş

$$w = \frac{W_{\text{parcel}}}{V_0} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta p_b}{\gamma p_0 \omega} \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2} \ell}.$$

olur. Bu ifade ısııl bağlaşıma göre zaten birinci mertebeden olduğundan, pertürbe edilmemiş basınç katsayısını kullanırız:

$$p_b \simeq p_1(x_0) = \gamma p_0 a k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\gamma p_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Böylece

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

İstif kısa olduğundan, bu iş yoğunluğu istifin $S\ell$ gaz hacmi boyunca yaklaşık olarak düzgündür.

Dolayısıyla

$$W_{\text{tot}} \simeq w S \ell,$$

ve buradan

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

elde edilir. $\tau > \tau_{\text{cr}}$ olan motor çalışma rejiminde iş pozitifdir.

B.6

$q(t)$, birim denge gaz hacmi başına istiften alınan ve keyfî bir sabite göre ölçülen ısıyı gösterebilir. Koruduğumuz mertebede,

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V_0} = -\beta \Delta T \cos(\omega t).$$

İntegral alırsak,

$$q(t) = -\frac{\beta \Delta T}{\omega} \sin(\omega t) + q_*.$$

İstifin merkezindeki paket hızı

$$v(t) = \dot{u}(x_0, t) = -\frac{a\omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

şeklinde. q birim hacim başına ifade edildiğinde, birim alan başına taşınım ile ısı akısı

$$j(t) = q(t)v(t).$$

olur. Hızın ortalaması sıfır olduğundan, keyfî sabit net taşınım katkı yapmaz. Tamamen adyabatik katkının çevrim ortalaması da sıfırdır: bu katkı $\cos(\omega t)$ ile orantılıyken hız $\sin(\omega t)$ ile orantılıdır.

Dolayısıyla kesitten taşınan net ısı

$$\begin{aligned}
Q_{\text{tot}} &= S \int_0^{2\pi/\omega} q(t)v(t) dt \\
&= \frac{S\beta a\Delta T}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \\
&= \frac{\pi S\beta a\Delta T}{\sqrt{2}\omega}.
\end{aligned}$$

olur. ΔT 'yi yerine koyarsak,

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

$\tau > \tau_{\text{cr}}$ olduğunda, soldan sağa taşınım için işaret pozitifdir.

B.7

Kısa istif ve küçük sıcaklık farkı için koruduğumuz doğruluk düzeyinde, sıcak depodan alınan ısı yaklaşık olarak istifin merkezinden taşınan ısıya eşittir:

$$Q_H \simeq Q_{\text{tot}}.$$

Aralarındaki fark, akustik iş mertebesinde. Verimin kendisi küçük olduğundan, bu farkı hesaba katmak verimi yalnızca daha yüksek mertebede değiştirir.

B.5 ve B.6'yı kullanarak,

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_H} \simeq \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma - 1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0}.$$

Öte yandan,

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0 - \tau/2}{T_0 + \tau/2} = \frac{\tau}{T_0 + \tau/2} \simeq \frac{\tau}{T_0},$$

çünkü $\tau \ll T_0$. Dolayısıyla,

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c.$$

Motor olarak çalışma için $\tau > \tau_{\text{cr}}$ olduğundan verim, Carnot veriminin altındadır. Eşiğe yukarıdan yaklaştıkça verim, bu mertebede Carnot değerine yaklaşırken hem üretilen iş hem de taşınan ısı sıfıra gider. Tam eşikte bu iki niceliğin oranı, sonlu iş çıktısı olan bir motor verimi tanımlamaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.