

IPhO 2019

Теоретические задачи и решения · Тель-Авив, Израиль · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2019/

Задача 1: Пружины нулевой длины и витки слинки

Пружина с нулевой эффективной длиной (ZLS) — это пружина, для которой сила пропорциональна длине пружины, $F = kL$ при $L > L_0$, где L_0 — минимальная длина пружины, совпадающая с её длиной в нерастянутом состоянии. На рисунке 1 показана зависимость силы F от длины пружины L для ZLS; наклон прямой равен жёсткости пружины k .

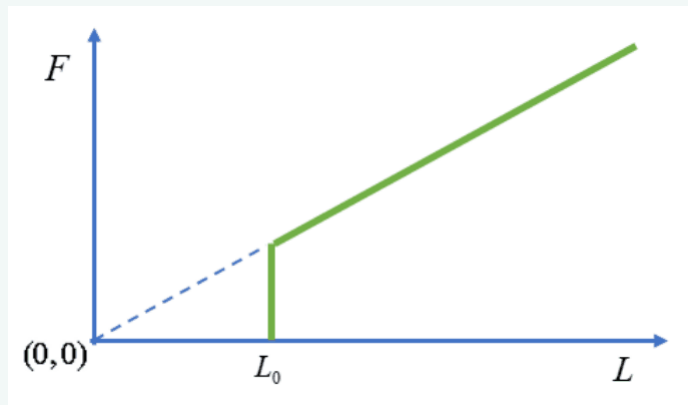


Рисунок 1: зависимость силы F от длины пружины L

ZLS применяются в сейсмографии и позволяют очень точно измерять изменения ускорения свободного падения g . Здесь мы рассмотрим однородную ZLS, вес Mg которой превышает kL_0 . Введём соответствующее безразмерное отношение $\alpha = kL_0/Mg < 1$, характеризующее относительную мягкость пружины. Игрушка, известная как «сlinky», может быть (но не обязательно является) такой ZLS.

Часть А: Статика (3.0 балла)

A.1	Рассмотрим участок нерастянутой пружины ZLS длиной $\Delta\ell$, который затем растягивают силой F в условиях невесомости. Какова длина Δy этого участка в зависимости от F , $\Delta\ell$ и параметров пружины?	0.5 балла
A.2	Для участка длиной $\Delta\ell$ вычислите работу ΔW , необходимую для его растяжения от исходной длины $\Delta\ell$ до длины Δy .	0.5 балла

Во всей задаче мы будем обозначать точку пружины расстоянием $0 \leq \ell \leq L_0$ от нижнего конца пружины в её нерастянутом состоянии. В частности, для каждой точки пружины величина ℓ остаётся неизменной при растяжении пружины.

A.3	Предположим, что пружину подвесили за верхний конец, так что она растянулась под собственным весом. Какова полная длина H подвешенной пружины в	2.0 балла
------------	---	-----------

равновесии? Выразите ответы через L_0 и α .

Часть В: Динамика (5.5 балла)

Эксперименты показывают, что если неподвижно висящую пружину отпустить, она постепенно сжимается начиная сверху, а её нижняя часть остаётся неподвижной (см. рисунок 2). С течением времени сжимающаяся часть движется как единый плотный блок и собирает в себя новые витки пружины, тогда как неподвижная часть становится короче. Каждая точка пружины начинает двигаться лишь тогда, когда до неё доходит движущаяся часть. Нижний конец пружины начинает двигаться лишь тогда, когда пружина полностью сожмётся и достигнет своей длины в нерастяннутом состоянии L_0 . После этого сжатая пружина продолжает падать вертикально вниз, не переворачиваясь, как твёрдое тело под действием силы тяжести.

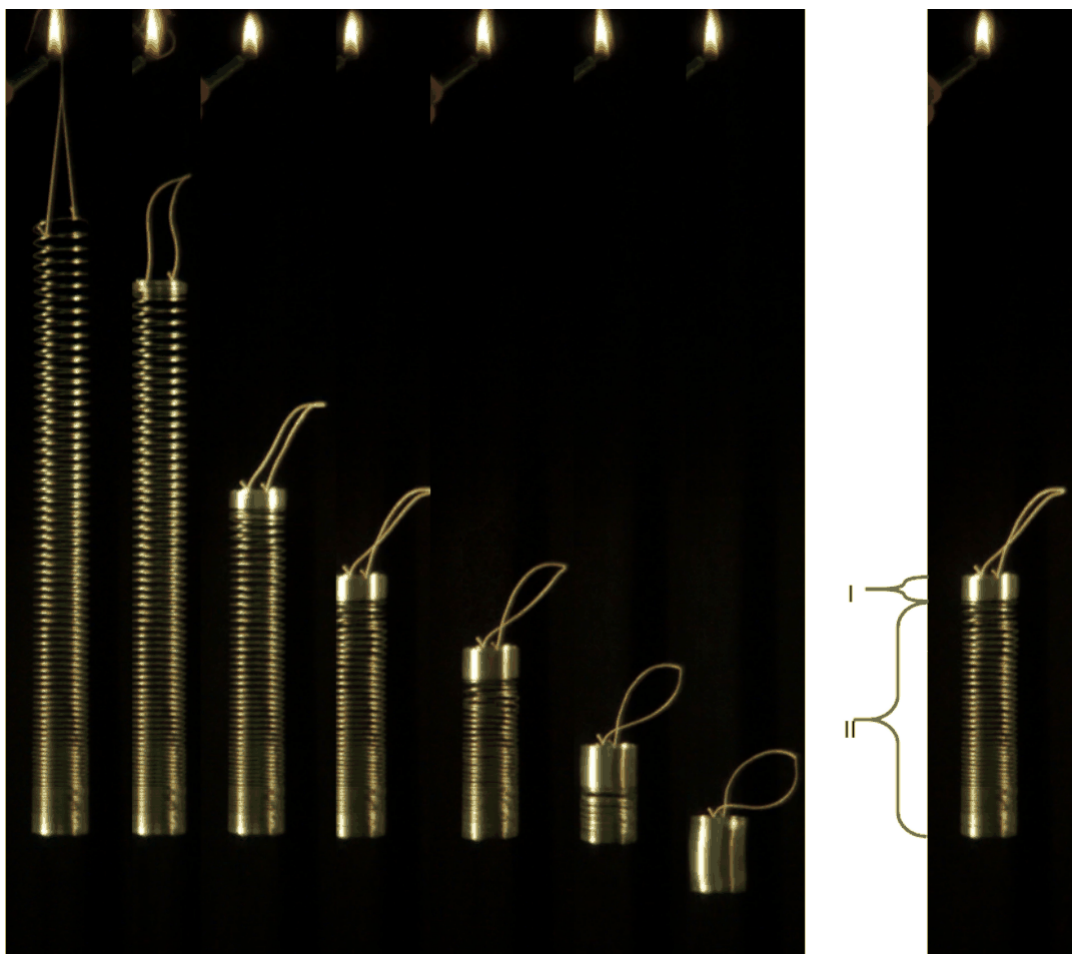


Рисунок 2: Слева: последовательность фотографий, сделанных во время свободного падения слinky. Справа: движущаяся часть I и неподвижная часть II во время свободного падения пружины.

В оставшихся частях задачи следует основывать решение на описанной модели. Соппротивлением воздуха можно пренебречь, но пренебрегать L_0 нельзя.

В.1

Вычислите время t_c от момента отпускания пружины до её полного сжатия обратно до минимальной длины L_0 . Выразите ответ через L_0 , g и α . Вычислите численное значение t_c для пружины с $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ и $M = 0.201 \text{ kg}$, приняв g равным 9.80 m/s^2 .

2.5
балла

B.2	В этом пункте ℓ обозначает координату границы между частями I (движущаяся часть на рисунке 2) и II (неподвижная часть). В некоторый момент, пока неподвижная часть ещё существует, её масса равна $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$, а все точки движущейся части имеют одинаковую мгновенную скорость $v_I(\ell)$. Покажите, что в этот момент (пока существует неподвижная часть) скорость движущейся части равна $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Выразите постоянные A и B через L_0 , g и α .	2.5 балла
B.3	На основании B.2 найдите минимальную скорость $v_{\min}$ движущейся части пружины в ходе её движения после отпускания и до удара о землю. Выразите ответ через L_0 , α , A и B .	0.5 балла

Часть C: Энергетика (1.5 балла)

C.1	Вычислите количество механической энергии Q , перешедшей в тепло с момента отпускания пружины до момента непосредственно перед её ударом о землю. Выразите ответ через L_0 , M , g и α .	1.5 балла
------------	---	--------------

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A.1

$$\Delta y = \Delta \ell \max\left(1, \frac{F}{kL_0}\right)$$

- A.2, при $\Delta y \geq \Delta \ell$:

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2]$$

- A.3

$$H = \frac{L_0}{2\alpha} (1 + \alpha^2)$$

- B.1

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}} \quad t_c \approx 0.245 \text{ s}$$

- B.2, если считать скорость, направленную вниз, положительной:

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}$$

Сжатие происходит в диапазоне $\alpha L_0 \leq \ell < L_0$.

- B.3

$$v_{\min} = (1 - \alpha) \sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

Этот минимум достигается сразу после столкновения движущейся части с изначально нерастянутым нижним участком.

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$$

Решение

A.1

В условиях невесомости сила натяжения одинакова по всей длине. Поскольку пружина однородна, отношение длины в растянутом состоянии к длине в нерастянутом состоянии одинаково для всех её участков.

При $F > kL_0$ длина всей пружины равна $L = F/k$, поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{L}{L_0} = \frac{F}{kL_0}.$$

Иными словами, жёсткость участка равна

$$k_{\text{seg}} = \frac{kL_0}{\Delta \ell}.$$

При $0 \leq F \leq kL_0$ участок сохраняет минимальную длину. Таким образом,

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta \ell, & 0 \leq F \leq kL_0, \\ \frac{F\Delta \ell}{kL_0}, & F > kL_0. \end{cases}$$

A.2

Увеличение силы натяжения до kL_0 не вызывает перемещения и потому не требует совершения механической работы. При последующем растяжении, когда текущая длина участка равна s ,

$$F(s) = \frac{kL_0}{\Delta \ell}s.$$

Работа, необходимая для квазистатического растяжения, равна

$$\Delta W = \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} F(s) ds = \frac{kL_0}{\Delta \ell} \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} s ds.$$

Следовательно,

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2].$$

Это также равно увеличению потенциальной энергии упругой деформации.

A.3

Масса единицы длины нерастянутой пружины равна

$$\mu = \frac{M}{L_0}.$$

В точке с материальной координатой ℓ сила натяжения удерживает всю часть пружины, находящуюся ниже этой точки:

$$T(\ell) = \mu g \ell = \frac{Mg}{L_0} \ell.$$

Растяжение происходит только там, где $T(\ell) > kL_0$. Поэтому граница между нерастянутым и растянутым участками определяется условием

$$\frac{Mg}{L_0} \ell_* = kL_0, \quad \boxed{\ell_* = \alpha L_0}.$$

Таким образом, нижняя доля α пружины остаётся нерастянутой.

Пусть $y_0(\ell)$ — высота над нижним концом в состоянии равновесия. Применяя А.1 к малому участку, получаем

$$\frac{dy_0}{d\ell} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell}{\alpha L_0}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

Интегрирование с условием $y_0(0) = 0$ даёт

$$y_0(\ell) = \begin{cases} \ell, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

В частности,

$$\boxed{H = y_0(L_0) = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2)}.$$

В.1

После отпускания единственной внешней силой является сила тяжести. Следовательно, центр масс падает с ускорением g , хотя при внутренних столкновениях энергия рассеивается.

Начальная высота центра масс равна

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} y_0(\ell) d\ell \\ &= \frac{1}{L_0} \left[\int_0^{\alpha L_0} \ell d\ell + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left(\frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2} \right) d\ell \right] \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 + 3\alpha^2 - \alpha^3). \end{aligned}$$

В момент полного сжатия нижний конец ещё не сместился. Пружина занимает интервал от $y = 0$ до $y = L_0$, поэтому

$$y_{\text{cm},c} = \frac{L_0}{2}.$$

Следовательно, центр масс опустился на расстояние

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c} &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3. \end{aligned}$$

Поскольку он начинает движение из состояния покоя,

$$\frac{1}{2}gt_c^2 = \frac{L_0}{6\alpha}(1-\alpha)^3,$$

и, следовательно,

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1-\alpha)^3}{3\alpha g}}.$$

Для приведённых данных

$$\alpha = \frac{1.02(0.055)}{0.201(9.80)} = 0.0284800.$$

Удобно использовать эквивалентное выражение

$$t_c = \sqrt{\frac{M}{3k}}(1-\alpha)^{3/2}.$$

Численно получаем

$$t_c = 0.2454228 \dots \text{ s} \approx 0.245 \text{ s}.$$

B.2

Будем считать скорости, направленные вниз, положительными. Введём

$$x = L_0 - \ell, \quad D = (1-\alpha)L_0.$$

Здесь x — длина в нерастянутом состоянии той части пружины, которая уже вошла в движущийся плотный блок. Его масса и фактическая длина равны

$$m_I = \frac{M}{L_0}x, \quad L_I = x.$$

Поскольку оставшаяся часть пружины неподвижна, полный импульс, направленный вниз, равен $m_I v_I$. Интегрируя внешнюю силу Mg по времени с момента отпущения, получаем

$$\frac{M}{L_0}xv_I = Mgt,$$

или

$$xv_I = L_0gt.$$

Это уравнение для импульса учитывает увеличение массы движущегося блока.

Нижняя граница движущегося блока находится на высоте $y_0(\ell)$. Следовательно, его верхняя граница находится на высоте

$$Y_{\text{top}} = y_0(\ell) + L_0 - \ell.$$

Пока граница находится в изначально растянутом участке,

$$\begin{aligned} v_I &= -\frac{dY_{\text{top}}}{dt} \\ &= -\left(\frac{\ell}{\alpha L_0} - 1\right)\dot{\ell} \\ &= \frac{D-x}{\alpha L_0}\dot{x}. \end{aligned}$$

Объединяя это с $xv_I = L_0gt$, получаем

$$x(D - x)\dot{x} = \alpha L_0^2gt.$$

Интегрируя с начальными условиями $x = 0, t = 0$,

$$\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\alpha L_0^2gt^2}{2}.$$

Следовательно,

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha L_0^2g} \left(D - \frac{2x}{3} \right).$$

Подстановка в соотношение для импульса даёт

$$\begin{aligned} v_I^2 &= \frac{L_0^2g^2t^2}{x^2} \\ &= \frac{g}{\alpha} \left(D - \frac{2x}{3} \right) \\ &= \frac{g}{\alpha} \left[(1 - \alpha)L_0 - \frac{2}{3}(L_0 - \ell) \right] \\ &= \frac{2g}{3\alpha}\ell + \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}}, \quad \boxed{A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}}.$$

Движущаяся граница достигает изначально нерастянутого нижнего участка при $\ell = \alpha L_0$.

Следовательно, эта стадия непрерывного сжатия охватывает диапазон

$$\alpha L_0 \leq \ell < L_0.$$

В.3

Поскольку $A > 0$, движущийся блок замедляется по мере уменьшения ℓ . Непосредственно перед достижением изначально нерастянутого нижнего участка его скорость равна

$$v_- = \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

В этот момент движущаяся масса равна $(1 - \alpha)M$, а нерастянутый нижний участок массой αM ещё неподвижен. Пружина достигла своей минимальной полной длины, поэтому эти участки объединяются при абсолютно неупругом столкновении, как того требует заданное последующее движение в качестве твёрдого тела.

Импульсом силы тяжести за время этого мгновенного столкновения можно пренебречь. Закон сохранения импульса даёт

$$(1 - \alpha)Mv_- = Mv_c,$$

и, следовательно,

$$v_c = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Эта скорость меньше v_- . В дальнейшем вся пружина движется вниз с ускорением g , поэтому её скорость возрастает. Следовательно,

$$v_{\min} = (1 - \alpha) \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Для проверки заметим, что

$$A\alpha L_0 + B = \frac{gL_0(1 - \alpha)}{3\alpha},$$

поэтому

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha}} = gt_c,$$

как и следует из полного импульса в момент полного сжатия.

Строго неподвижное состояние в момент отпускания исключено словами «после отпускания». В заданной непрерывной модели масса движущегося блока стремится к нулю при $t \rightarrow 0^+$, что допускает конечную предельную скорость при стремящемся к нулю полном импульсе.

С.1

Выберем нулевую потенциальную энергию упругой деформации для пружины при её минимальной длине. Применение А.2 к бесконечно малому участку даёт

$$dU_{\text{el}} = \frac{kL_0}{2} \left[\left(\frac{dy_0}{d\ell} \right)^2 - 1 \right] d\ell.$$

Вклад изначально нерастянутого нижнего участка равен нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} U_{\text{el},0} &= \frac{kL_0}{2} \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left[\frac{\ell^2}{\alpha^2 L_0^2} - 1 \right] d\ell \\ &= \frac{kL_0^2}{6\alpha^2} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned}$$

Используя $kL_0 = \alpha Mg$, получаем

$$U_{\text{el},0} = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3).$$

Сразу после полного сжатия энергия упругой деформации равна нулю, а вся пружина движется поступательно со скоростью $v_c = gt_c$. Энергия, рассеянная к этому моменту, равна

$$Q = U_{\text{el},0} + Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) - \frac{1}{2} Mv_c^2.$$

Однако из свободного падения центра масс следует

$$Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) = \frac{1}{2} Mg^2 t_c^2 = \frac{1}{2} Mv_c^2.$$

Эти два слагаемых взаимно сокращаются, и остаётся

$$Q = U_{\text{el},0}.$$

После сжатия пружина падает как твёрдое тело без сопротивления воздуха и без переворачивания, поэтому до удара дальнейших потерь механической энергии не происходит.

Разлагая результат на множители, получаем

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha).$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Физика микроволновой печи

В этой задаче рассматриваются генерация микроволнового излучения в микроволновой печи и его использование для нагрева пищи. Микроволновое излучение генерируется в устройстве, называемом «магнетрон». Часть А посвящена работе магнетрона, а часть В — поглощению микроволнового излучения пищей.

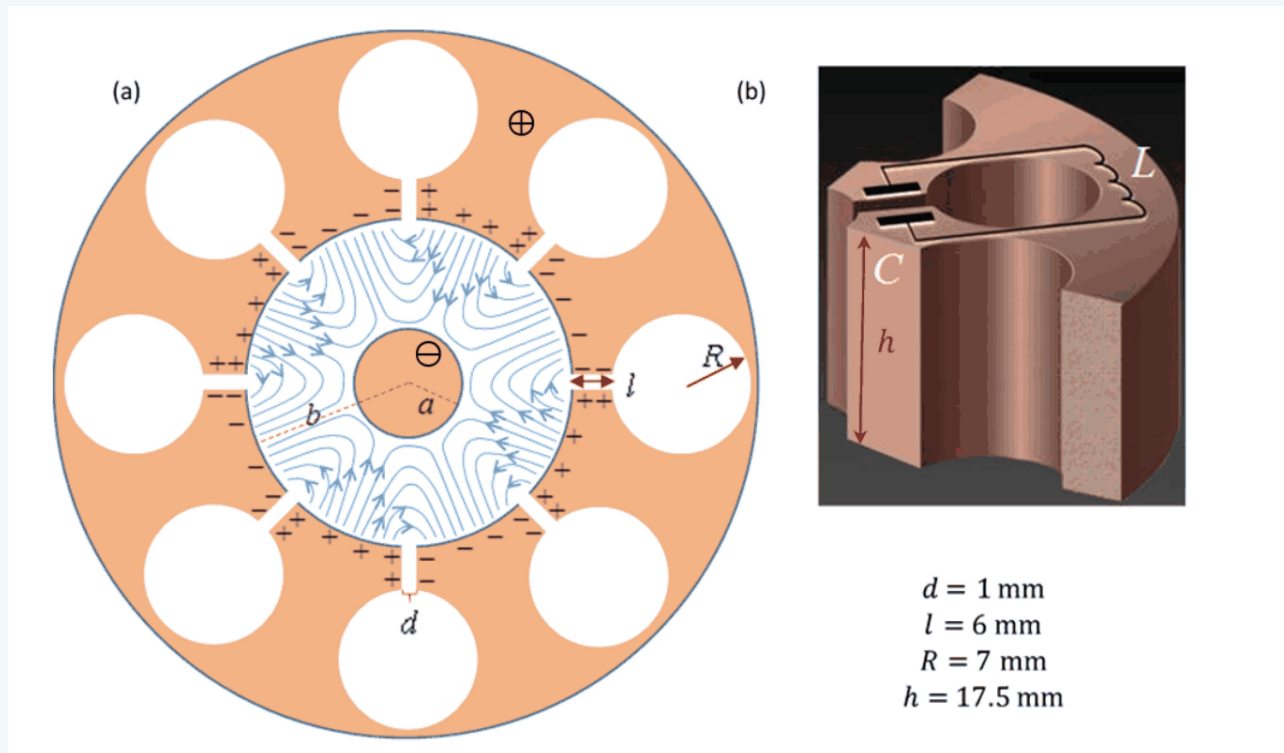


Рисунок 1

Часть А: Устройство и работа магнетрона (6.6 балла)

Магнетрон — это устройство для генерации микроволнового излучения в импульсном режиме (для радиолокации) или непрерывно (например, в микроволновой печи). В магнетроне существует режим самовозбуждающихся колебаний. Подача на магнетрон постоянного (не переменного) напряжения быстро возбуждает этот режим. Возникающее при этом микроволновое излучение выводится из магнетрона.

Типичный магнетрон микроволновой печи состоит из сплошного медного цилиндрического катода (радиуса a) и окружающего его анода (радиуса b). Анод имеет форму толстой цилиндрической оболочки, в которой высверлены цилиндрические полости. Эти полости называются «резонаторами». Один из резонаторов связан с антенной, которая выводит микроволновую энергию наружу; далее мы не будем учитывать антенну. Во всех внутренних полостях создан вакуум. Мы рассмотрим типичный магнетрон с восемью резонаторами, изображённый на рисунке 1(a). Объёмное строение одного резонатора

показано на рисунке 1(b). Как указано на рисунке, каждая из восьми полостей ведёт себя как колебательный LC-контур, состоящий из индуктивности и ёмкости, с рабочей частотой $f = 2.45 \text{ GHz}$.

Вдоль продольной оси магнетрона приложено постоянное однородное магнитное поле, направленное на рисунке 1(a) из плоскости страницы к читателю. Кроме того, между анодом (положительный потенциал) и катодом (отрицательный потенциал) приложено постоянное напряжение. Электроны, испускаемые катодом, достигают анода и заряжают его, возбуждая моду колебаний, в которой знаки зарядов любых двух соседних резонаторов противоположны. Колебания в полостях усиливают эти колебания.

Описанный выше процесс создаёт в пространстве между катодом и анодом переменное электрическое поле с указанной частотой $f = 2.45 \text{ GHz}$ (синие линии на рисунке 1(a); постоянное поле не показано), в дополнение к постоянному полю, обусловленному приложенным постоянным напряжением. В установившемся режиме характерная амплитуда переменного электрического поля между анодом и катодом составляет приблизительно $\frac{1}{3}$ постоянного электрического поля в этой области. На движение электронов в пространстве между катодом и анодом влияют как постоянная, так и переменная составляющие поля. В результате электроны, достигающие анода, передают переменному полю около 80% энергии, полученной ими от постоянного поля. Небольшая доля испущенных электронов возвращается на катод и выбивает дополнительные электроны, ещё больше усиливая переменное поле.

Каждый резонатор можно представить как конденсатор и катушку индуктивности, см. рисунок 1(b). Ёмкость в основном обусловлена плоскими участками поверхности резонатора, а индуктивность — цилиндрическим участком. Считайте, что ток в резонаторе распределён равномерно и течёт в непосредственной близости от поверхности его цилиндрической полости, а магнитная индукция создаваемого этим током поля составляет 0.6 от магнитной индукции поля идеального бесконечного соленоида. Размеры, определяющие геометрию резонатора, приведены на рисунке 1(b). Электрическая и магнитная постоянные равны соответственно $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

A.1 — 0.4 балла

Используя приведённые выше данные, оцените частоту f_{est} одного резонатора. (Ваш результат может отличаться от действительного значения $f = 2.45 \text{ GHz}$. В оставшейся части задачи используйте **действительное** значение.)

Следующий пункт A.2 не относится непосредственно к магнетрону, но помогает познакомиться с некоторыми необходимыми физическими представлениями. Рассмотрим электрон, движущийся в свободном пространстве под действием однородного электрического поля, направленного вдоль отрицательного направления оси y , $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, и однородного магнитного поля, направленного вдоль положительного направления оси z , $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (E_0 и B_0 положительны; $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ — единичные векторы, ориентированные обычным образом). Обозначим скорость электрона в момент времени t через $\vec{u}(t)$. Скорость дрейфа электрона $\vec{u}_D$ определяется как его средняя скорость. Обозначим массу и заряд электрона через m и $-e$ соответственно.

A.2 — 1.5 балла

В каждом из следующих двух случаев найдите $\vec{u}_D$. Кроме того, изобразите в бланке ответов траекторию электрона (в лабораторной системе отсчёта) за промежуток времени $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$, если:

1. при $t = 0$ скорость электрона равна $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
2. при $t = 0$ скорость электрона равна $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

Теперь вернёмся к обсуждению магнетрона. Расстояние между катодом и анодом равно 15 mm. Считайте, что вследствие упомянутой выше передачи энергии переменным полям максимальная кинетическая энергия каждого электрона не превышает $K_{\max} = 800$ eV. Индукция постоянного магнитного поля равна $B_0 = 0.3$ T. Масса и заряд электрона равны соответственно $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg и $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

A.3 — 0.4 балла

Численно оцените максимальный радиус r траектории движения электрона в системе отсчёта, в которой это движение приблизительно круговое, считая эту систему отсчёта приближённо инерциальной.

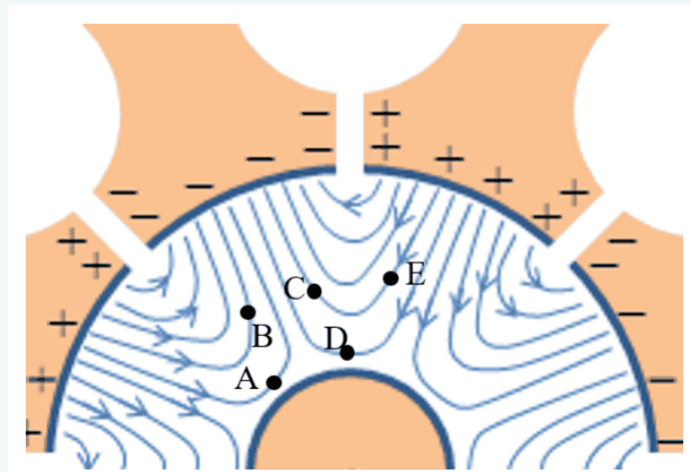


Рисунок 2

A.4 — 1.2 балла

На рисунке 2 изображены силовые линии переменного электрического поля между анодом и катодом в некоторый момент времени (постоянное поле не показано). Укажите в бланке ответов, какие из электронов, находящихся в точках A, B, C, D и E, будут в этот момент дрейфовать к аноду, какие — к катоду, а какие — в направлении, перпендикулярном радиусу.

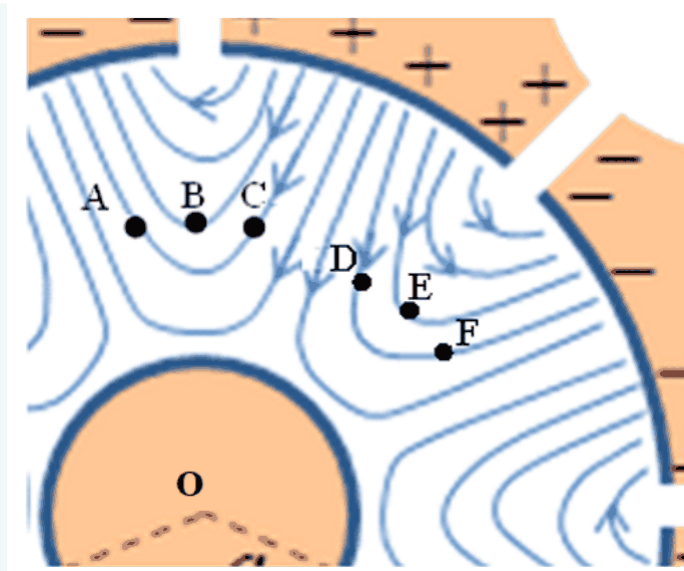


Рисунок 3

На рисунке 3 изображены силовые линии переменного электрического поля между анодом и катодом (постоянное поле не показано) в некоторый момент времени. Положения шести электронов в этот момент обозначены буквами А, В, С, D, Е и F. Все электроны находятся на одинаковом расстоянии от катода.

А.5 — 1.2 балла

Рассмотрите ситуацию, показанную на рисунке 3. Для каждой из шести пар электронов АВ, АС, ВС, DE, DF, EF укажите в бланке ответов, будет ли их дрейф в этот момент приводить к увеличению или уменьшению угла между их радиус-векторами (отсчитываемыми от центра катода O).

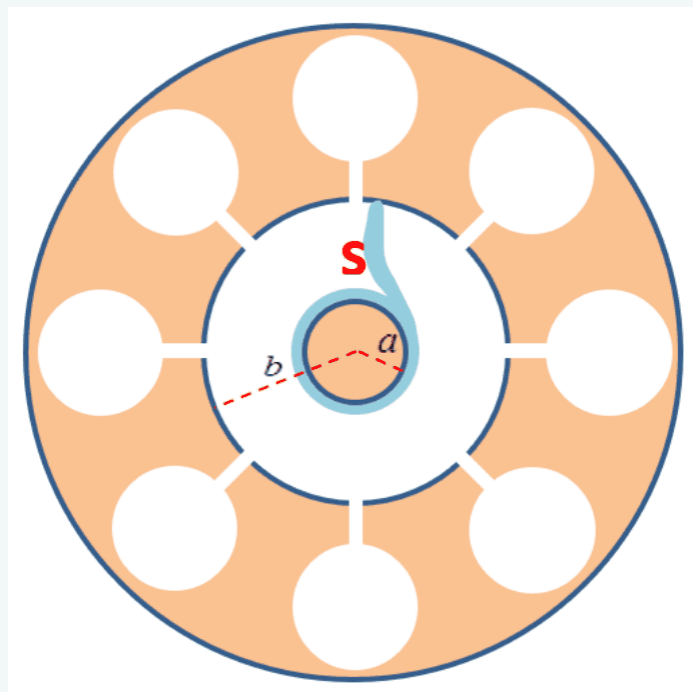


Рисунок 4

Закономерность, обнаруженная вами в пункте А.5, действует как механизм фокусировки, собирающий электроны в пространстве между катодом и анодом в спицы. На рисунке 4 показана одна такая спица, обозначенная S.

А.6 — 0.8 балла

Изобразите в бланке ответов остальные спицы в этот момент. Укажите стрелками направление их вращения и вычислите их среднюю угловую скорость ω_s .

Примите приближение, согласно которому полное электрическое поле посередине между катодом и анодом равно среднему значению постоянного поля вдоль радиальной линии от катода до анода, а спицы в этой области направлены приблизительно радиально. Радиусы катода и анода (a и b соответственно) определены на рисунке 4.

А.7 — 1.1 балла

Найдите приближённое выражение для постоянного напряжения V_0 , необходимого для работы магнетрона описанным образом. (Полученное вами выражение даёт приближение для минимального значения, необходимого для работы магнетрона; оптимальное напряжение несколько выше.)

Часть В: Взаимодействие микроволнового излучения с молекулами воды (3.4 балла)

Эта часть посвящена использованию микроволнового излучения (поступающего от антенны магнетрона в камеру с пищей) для приготовления пищи, то есть для нагревания диэлектрика с потерями, такого как чистая или солёная вода (которая служит нам моделью, например, супа).

Электрический диполь — это система из двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов q и $-q$, находящихся на небольшом расстоянии d друг от друга. Вектор электрического дипольного момента направлен от отрицательного заряда к положительному, а его модуль равен $p = qd$.

На отдельный диполь с моментом $\vec{p}(t)$ постоянного модуля $p_0 = |\vec{p}(t)|$ действует зависящее от времени электрическое поле $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$. Угол между диполем и электрическим полем равен $\theta(t)$.

В.1 — 0.5 балла

Запишите выражения для модуля момента сил $\tau(t)$, действующего со стороны электрического поля на диполь, и для мощности $H_i(t)$, передаваемой полем диполю, через p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ и их производные.

Молекулы воды полярны, поэтому их можно рассматривать как электрические диполи. Из-за сильных водородных связей между молекулами в жидкой воде их нельзя считать независимыми диполями. Вместо этого следует использовать вектор поляризации $\vec{P}(t)$, представляющий собой плотность дипольного момента (средний дипольный момент единицы объёма совокупности молекул воды). Поляризация $\vec{P}(t)$ параллельна локальному приложенному переменному электрическому полю (микроволнового излучения) $\vec{E}(t)$ и колеблется во времени с амплитудой, пропорциональной амплитуде локального переменного электрического поля, но с отставанием по фазе δ .

Локальное переменное электрическое поле в заданной точке внутри воды равно $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$, где $\omega = 2\pi f$, и создаёт поляризацию $\vec{P}(t) = \beta \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$, где безразмерная постоянная β характеризует свойства воды.

В.2 — 0.5 балла

Найдите выражение для усреднённой по времени мощности $\langle H(t) \rangle$, поглощаемой единицей объёма воды.

Среднее по времени значение зависящей от времени периодической величины $f(t)$ за её период T определяется как:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь распространение излучения в воде. Относительная диэлектрическая проницаемость воды (на частоте электромагнитного поля) равна ε_r , а соответствующий показатель преломления воды равен $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. Мгновенная плотность энергии электрического поля задаётся выражением $\frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$. Усреднённые по времени плотности энергии электрического и магнитного полей равны.

В.3 — 1.1 балла

Обозначим усреднённую по времени плотность потока энергии излучения через $I(z)$ (средняя мощность излучения, проходящего через единицу площади). Здесь z — глубина проникновения в воду, а излучение распространяется в направлении z . Найдите выражение для зависимости плотности потока $I(z)$ от z . В ваш результат может входить плотность потока на поверхности воды $I(0)$.

Отставание по фазе δ возникает вследствие взаимодействия молекул воды. Оно зависит от безразмерного коэффициента диэлектрических потерь ε_ℓ и относительной диэлектрической проницаемости ε_r (обе величины зависят от угловой частоты излучения ω и температуры) согласно соотношению $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$. При достаточно малом δ электрическое поле на глубине проникновения z в воду задаётся выражением:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

где $k_0 = \omega/c$, а $c = 3.0 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

В.4 — 0.6 балла

Используя приближение $\tan \delta \approx \sin \delta$, найдите выражение для коэффициента β , определённого в пункте В.2, через остальные параметры.

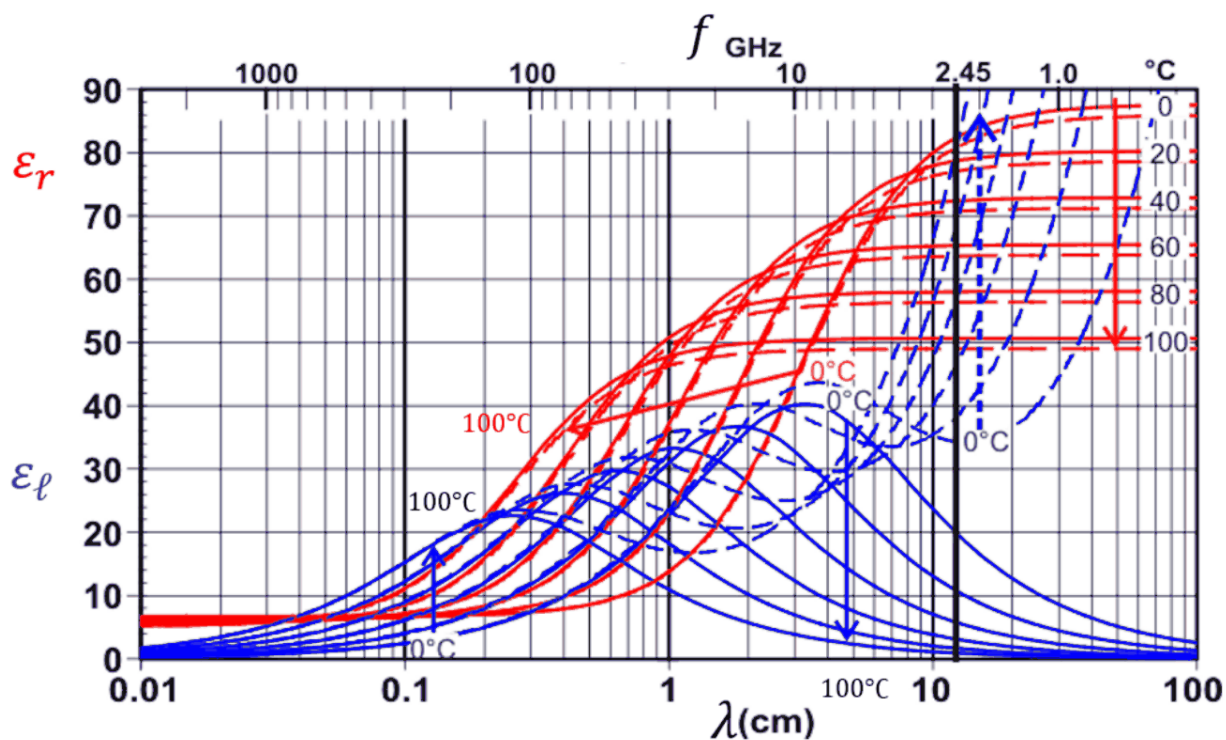


Рисунок 5. Стрелки указывают направление изменения температуры от 0°C до 100°C при переходе между кривыми.

На рисунке 5 показаны ε_r (синим) и ε_l (красным) для чистой воды (сплошные линии) и разбавленного раствора соли в воде (штриховые линии) в зависимости от длины волны или частоты при нескольких различных температурах. Угловая частота $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ отмечена жирной вертикальной линией. Далее будем рассматривать микроволновое излучение только этой частоты.

В.5 — 0.7 балла

Используя рисунок 5, ответьте на следующие вопросы:

1. Для воды при 20°C найдите глубину проникновения $z_{1/2}$, на которой мощность, поглощаемая единицей объёма, уменьшается вдвое по сравнению с её значением при $z = 0$.
2. Укажите в бланке ответов, увеличивается, уменьшается или остаётся неизменной глубина проникновения микроволнового излучения в воду с повышением температуры.
3. Укажите в бланке ответов, увеличивается, уменьшается или остаётся неизменной глубина проникновения микроволнового излучения в суп (разбавленный раствор соли) с повышением температуры.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A.1:** $C \simeq 0.93 \text{ pF}$, $L \simeq 6.6 \text{ nH}$, откуда

$$f_{\text{est}} \simeq 2.03 \text{ GHz.}$$

- **A.2:** В обоих случаях

$$\vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{x}.$$

Положим $\omega_c = eB_0/m$, $\ell = mE_0/(eB_0^2)$ и $s = \omega_c t$. Если начальное положение находится в начале координат, искомые траектории имеют вид

$$\frac{(x, y)_1}{\ell} = (-s + 4 \sin s, 4[1 - \cos s]),$$

$$\frac{(x, y)_2}{\ell} = (-s - 2 \sin s, -2[1 - \cos s]), \quad 0 < s < 4\pi.$$

Это петлеобразные трохойды, дрейфующие влево, с вращением против часовой стрелки.

- **A.3:**

$$r_{\text{max}} \simeq 3.2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.32 \text{ mm.}$$

- **A.4:** Согласно моему прочтению направлений касательных к силовым линиям, **А и В движутся к катоду; С, D и Е — к аноду; ни один не движется строго перпендикулярно радиусу.** Неопределённость прочтения рисунка отмечена ниже.
- **A.5:** АВ, АС и ВС уменьшаются; DE, DF и EF увеличиваются.
- **A.6:** Имеются **четыре спицы**, разделённые углами 90° . Добавьте копии S, повёрнутые на 90° , 180° и 270° . Они вращаются **против часовой стрелки** с угловой скоростью

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{4} = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

- **A.7:**

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

- **B.1:** Для модуля поля $|E|$ и угла между диполем и мгновенным направлением поля

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta, \quad H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

Формула мощности, не зависящая от выбора соглашения об угле, имеет вид

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

- **B.2:**

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

• B.3:

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

• B.4:

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

• B.5:

1.

$$z_{1/2} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell} \simeq 1.2 \text{ cm}$$

по приближённым значениям, считанным с графика: $\varepsilon_r \simeq 78$, $\varepsilon_\ell \simeq 10$.

2. Глубина проникновения в чистую воду **увеличивается** с повышением температуры.

3. Глубина проникновения в суп **уменьшается** с повышением температуры.

Решение

A.1

Приблизительно параллельные проводящие грани, образующие щель, имеют площадь hl и находятся на расстоянии d друг от друга. Пренебрегая краевыми эффектами, их ёмкость можно записать как

$$C \simeq \frac{\varepsilon_0 hl}{d}.$$

Используя размеры на рисунке 1, получаем

$$C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(17.5 \times 10^{-3})(6 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}} = 9.29 \times 10^{-13} \text{ F}.$$

Пусть I — полный ток, циркулирующий вокруг цилиндрической полости. Его равномерное распределение по высоте h даёт эффективную поверхностную плотность тока I/h . Идеальный бесконечный соленоид с таким поверхностным током создавал бы поле $\mu_0 I/h$. Вводя указанную поправку, получаем

$$B \simeq 0.6 \frac{\mu_0 I}{h}.$$

Приближённо выражая поток через полость как $B\pi R^2$, получаем

$$L = \frac{\Phi}{I} \simeq 0.6 \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = 6.63 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

Таким образом,

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{0.6\mu_0\varepsilon_0\pi R^2 l}} \simeq 2.03 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

Высота сокращается, поскольку $C \propto h$ и $L \propto h^{-1}$. Оценка приближённая, так как резонатор представлен идеализированными сосредоточенными ёмкостью и индуктивностью.

A.2

Движение электрона описывается уравнением с силой Лоренца:

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Для заданных полей его проекции имеют вид

$$\dot{u}_x = -\omega_c u_y, \quad \dot{u}_y = \omega_c \left(u_x + \frac{E_0}{B_0} \right), \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

Обозначим $v_D = E_0/B_0$. При постоянной скорости $-v_D \hat{x}$ электрическая и магнитная силы взаимно компенсируются. В более общем виде

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = -v_D \hat{x}.$$

В системе отсчёта, поступательно движущейся с этой скоростью, оставшаяся составляющая скорости равномерно вращается. При $u_y(0) = 0$

$$u_x = -v_D + A \cos(\omega_c t), \quad u_y = A \sin(\omega_c t),$$

где $A = u_x(0) + v_D$. Средние значения колебательных слагаемых равны нулю, поэтому оба начальных условия дают один и тот же дрейф.

Полагая $x(0) = y(0) = 0$, после интегрирования получаем

$$x = -v_D t + \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad y = \frac{A}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)].$$

В случае 1 $A = 4v_D$; в случае 2 $A = -2v_D$. Это даёт параметрические уравнения траекторий, приведённые в ответах.

Для точного построения используйте $\ell = v_D/\omega_c$. Следующие точки описывают первый циклотронный период:

$s = \omega_c t$	Случай 1: $(x/\ell, y/\ell)$	Случай 2: $(x/\ell, y/\ell)$
0	(0, 0)	(0, 0)
$\pi/2$	$(4 - \pi/2, 4)$	$(-2 - \pi/2, -2)$
π	$(-\pi, 8)$	$(-\pi, -4)$
$3\pi/2$	$(-4 - 3\pi/2, 4)$	$(2 - 3\pi/2, -2)$
2π	$(-2\pi, 0)$	$(-2\pi, 0)$

Чтобы получить второй период, повторите эту кривую, сдвинув её на $-2\pi\ell$ по оси x .

В случае 1 электрон первоначально движется вправо, а затем отклоняется вверх; вся кривая лежит в области $0 \leq y \leq 8\ell$. В случае 2 он первоначально движется влево, а затем отклоняется вниз; кривая лежит в области $-4\ell \leq y \leq 0$. По окончании указанного промежутка обе траектории заканчиваются в точке $(-4\pi\ell, 0)$. Вращение происходит против часовой стрелки, и ни одна из траекторий не имеет точек возврата, поскольку скорость нигде не обращается в нуль.

A.3

В приближённо инерциальной локальной системе дрейфа электрическая сила приблизительно компенсируется магнитной силой, связанной со скоростью этой системы отсчёта. Оставшееся движение приблизительно круговое:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = ev_{\perp}B_0, \quad r = \frac{mv_{\perp}}{eB_0}.$$

Используя ограничение на полную кинетическую энергию как верхнюю оценку энергии вращения, получаем

$$v_{\perp} \lesssim \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}.$$

Здесь

$$K_{\max} = 800(1.6 \times 10^{-19}) = 1.28 \times 10^{-16} \text{ J},$$

так что

$$v_{\max} \simeq 1.68 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

и

$$r_{\max} \simeq \frac{\sqrt{2mK_{\max}}}{eB_0} = \frac{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31})(1.28 \times 10^{-16})}}{(1.6 \times 10^{-19})(0.3)} = 3.18 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Таким образом, $r_{\max} \simeq 0.32 \text{ mm}$, что намного меньше зазора 15 mm . Это обосновывает представление вращения как малого движения, наложенного на дрейф его центра.

A.4

Пусть $\hat{r}$ направлен радиально наружу, а $\hat{\phi}$ — против часовой стрелки. При магнитном поле, направленном из плоскости страницы к читателю,

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_{\phi} \hat{\phi}$$

даёт

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = \frac{E_{\phi}}{B_0} \hat{r} - \frac{E_r}{B_0} \hat{\phi}.$$

Следовательно:

- $E_{\phi} > 0$ вызывает дрейф к аноду.
- $E_{\phi} < 0$ вызывает дрейф к катоду.
- $E_{\phi} = 0$ вызывает дрейф перпендикулярно радиусу.

Постоянное электрическое поле радиально, поэтому оно вносит вклад только в азимутальный дрейф. Радиальное направление дрейфа полностью определяется тангенциальной составляющей изображённого переменного поля.

Моё прочтение направлений локальных касательных даёт:

Электрон	Тангенциальная составляющая переменного поля	Радиальный дрейф
A	По часовой стрелке	К катоду

Электрон	Тангенциальная составляющая переменного поля	Радиальный дрейф
B	По часовой стрелке	К катоду
C	Против часовой стрелки	К аноду
D	Против часовой стрелки	К аноду
E	Против часовой стрелки	К аноду

Эта классификация относится к радиальной составляющей; электроны также испытывают азимутальный дрейф. Касательные определяются по схематическому рисунку, поэтому эта классификация содержит некоторую неопределённость прочтения.

A.5

На одинаковом расстоянии ρ от центра катода

$$\dot{\phi} = \frac{u_{\phi}}{\rho} = -\frac{E_r}{B_0\rho}.$$

Постоянное поле направлено радиально внутрь и сообщает всем шести электронам на этом радиусе одинаковую угловую скорость против часовой стрелки. Поэтому на мгновенное изменение угловых расстояний между ними влияют только различия радиальной составляющей переменного поля.

Для A, B и C на рисунке 3 радиальная составляющая переменного поля меняется от направленной наружу в A через приблизительно нулевую в B до направленной внутрь в C. Следовательно,

$$\dot{\phi}_A < \dot{\phi}_B < \dot{\phi}_C.$$

Их положения упорядочены как $\phi_A > \phi_B > \phi_C$. Поэтому электрон, находящийся позади, движется быстрее находящегося впереди, и все три угловых расстояния уменьшаются:

$$\frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_B) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_C) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_B - \phi_C) < 0.$$

Для D, E и F радиальная составляющая переменного поля меняется противоположным образом: она направлена внутрь в D, приблизительно равна нулю в E и направлена наружу в F. Поэтому

$$\dot{\phi}_D > \dot{\phi}_E > \dot{\phi}_F.$$

Поскольку $\phi_D > \phi_E > \phi_F$, все три угловых расстояния увеличиваются.

Пара	Изменение углового расстояния
AB	Уменьшается
AC	Уменьшается
BC	Уменьшается
DE	Увеличивается
DF	Увеличивается
EF	Увеличивается

A.6

Соседние резонаторы колеблются в противофазе. Поэтому в данный момент времени в чередующихся угловых областях электроны фокусируются, а в промежутках между ними — расходятся. Таким образом, восемь резонаторов создают четыре спицы.

На рисунок следует добавить три копии S, полученные поворотами на 90° , 180° и 270° вокруг центра катода. Их изгиб должен быть направлен в ту же сторону.

Постоянное поле направлено внутрь. Создаваемый им дрейф имеет направление

$$(-\hat{r}) \times \hat{z} = +\hat{\phi},$$

поэтому спицы вращаются против часовой стрелки.

Через половину периода колебаний полярности резонаторов меняются на противоположные.

Спица должна переместиться к положению следующего резонатора, то есть на угол $2\pi/8 = \pi/4$. Следовательно,

$$\omega_s = \frac{\pi/4}{T/2} = \frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{4}.$$

Используя $f = 2.45 \times 10^9$ Hz, получаем

$$\omega_s = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

Иными словами, спицы совершают 6.125×10^8 оборотов в секунду.

A.7

В рамках предписанного приближения модуль поля в середине зазора равен

$$E_{\text{mid}} \simeq \frac{V_0}{b - a}.$$

Радиус середины зазора равен

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{a + b}{2}.$$

Скорость дрейфа электронов там должна совпадать с тангенциальной скоростью спицы:

$$\frac{E_{\text{mid}}}{B_0} \simeq \omega_s \rho_{\text{mid}}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_0}{B_0(b - a)} \simeq \omega_s \frac{a + b}{2},$$

откуда

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

При заданных B_0 и f это также можно записать в виде

$$V_0 \simeq (5.77 \times 10^8 \text{ V m}^{-2})(b^2 - a^2),$$

где a и b выражены в метрах.

В.1

Силы, действующие на два заряда, образуют пару. Момент сил равен

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Таким образом, если θ определён как угол между диполем и мгновенным направлением поля,

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta.$$

Момент сил стремится уменьшить этот угол. Поэтому его знаковая компонента, сопряжённая с θ , равна $-p_0 |E| \sin \theta$, что даёт механическую мощность

$$H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

В частности, для диполя, поворачивающегося по направлению поля, $\dot{\theta} < 0$, поэтому передаваемая полем мощность положительна.

Результат можно вывести независимо от соглашения об отсчёте угла. Если $\vec{r}_+$ и $\vec{r}_-$ — положения зарядов, то

$$H_i = q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_+ - q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_- = \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)].$$

Следовательно,

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

Если же θ отсчитывается от фиксированного положительного направления оси x , а $E(t)$ — проекция поля с учётом знака, это выражение принимает вид

$$H_i = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta) = -p_0 E(t) \sin \theta \dot{\theta}.$$

В механической мощности, передаваемой диполю, нет слагаемого с $\dot{E}$.

В.2

Суммирование мощности для отдельных диполей в единице объёма даёт

$$H(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Производная заданной поляризации равна

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \beta \epsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \hat{x}.$$

Поэтому

$$H(t) = \beta \epsilon_0 \omega E_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t - \delta).$$

Используя

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta,$$

и средние за период значения

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

При положительном отставании по фазе средняя поглощаемая мощность положительна.

В.3

Обозначим локальную амплитуду электрического поля через $\mathcal{E}(z)$. Средняя плотность энергии электрического поля равна

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Средняя плотность энергии магнитного поля равна этой величине, поэтому

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Используя скорость распространения c/n в принятой в задаче модели волны в диэлектрике, получаем

$$I(z) = \frac{c}{n} \langle u \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2(z),$$

где $n^2 = \varepsilon_r$.

Закон сохранения энергии для тонкого слоя толщины dz даёт

$$-\frac{dI}{dz} = \langle H \rangle.$$

Подставляя результат В.2 и исключая $\mathcal{E}^2$, получаем

$$-\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega \mathcal{E}^2 \sin \delta = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} I.$$

Для однородной среды при фиксированной температуре коэффициент постоянен. Интегрирование даёт

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

Следовательно, коэффициент ослабления по мощности равен

$$\alpha = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc}.$$

В.4

Согласно уравнению (2), амплитуда электрического поля пропорциональна

$$e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta}.$$

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату этой амплитуды,

$$I(z) = I(0) e^{-n k_0 z \tan \delta}.$$

Сравнение с В.3 с учётом $k_0 = \omega/c$ даёт

$$\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} = \frac{n \omega}{c} \tan \delta.$$

Таким образом,

$$\beta \sin \delta = n^2 \tan \delta.$$

В рамках требуемого приближения $\tan \delta \simeq \sin \delta$

$$\boxed{\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.}$$

Этот результат следует в рамках указанных в задаче приближений для диэлектрика и малых потерь.

В.5

Используя данное соотношение $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$, получаем коэффициент ослабления по мощности:

$$\alpha = nk_0 \tan \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\ell}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

При однородной температуре локальная мощность, поглощаемая единицей объёма, пропорциональна локальной интенсивности:

$$\langle H(z) \rangle = \alpha I(z).$$

Поэтому она имеет ту же экспоненциальную зависимость:

$$\frac{\langle H(z) \rangle}{\langle H(0) \rangle} = e^{-\alpha z}.$$

1. Глубина половинного ослабления мощности при 20°C.

Условие $e^{-\alpha z_{1/2}} = 1/2$ даёт

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell}.$$

На отмеченной частоте сплошные кривые для 20°C дают приблизительно

$$\varepsilon_r \simeq 78, \quad \varepsilon_\ell \simeq 10.$$

Следовательно,

$$z_{1/2} \simeq \frac{(3.0 \times 10^8) \sqrt{78} \ln 2}{(2\pi)(2.45 \times 10^9)(10)} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ м.}$$

Таким образом, график даёт глубину половинного ослабления мощности приблизительно

$$\boxed{z_{1/2} \simeq 1.2 \text{ см.}}$$

Это глубина половинного ослабления мощности; показатель экспоненты при затухании амплитуды поля вдвое меньше.

2. Чистая вода при повышении температуры.

При фиксированной частоте

$$z_{1/2} \propto \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\varepsilon_\ell}.$$

Сплошные синие кривые показывают значительное уменьшение ε_ℓ с повышением температуры. Относительное уменьшение $\sqrt{\varepsilon_r}$ гораздо меньше. Поэтому отношение увеличивается:

Глубина проникновения в чистую воду увеличивается с повышением температуры.

3. Суп при повышении температуры.

На той же частоте штриховые синие кривые показывают рост диэлектрических потерь с повышением температуры, а штриховые красные кривые — уменьшение ε_r . Оба изменения уменьшают $\sqrt{\varepsilon_r}/\varepsilon_\ell$. Следовательно,

Глубина проникновения в суп уменьшается с повышением температуры.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Термоакустический двигатель

Термоакустический двигатель — это устройство, которое преобразует теплоту в акустическую энергию, или звуковые волны — одну из форм механической работы. Как и многие другие тепловые машины, он может работать в обратном режиме как холодильная машина, используя звук для переноса теплоты от холодного резервуара к горячему. Высокие рабочие частоты уменьшают теплопроводность и устраняют необходимость в ограничении рабочего объёма какой-либо камерой. В отличие от многих других типов двигателей, термоакустический двигатель не имеет движущихся частей, кроме самого рабочего тела — газа или жидкости.

КПД термоакустических машин обычно ниже, чем у двигателей других типов, однако они имеют преимущества с точки зрения затрат на установку и обслуживание. Это открывает возможности для их применения в возобновляемой энергетике, например на солнечных тепловых электростанциях и для утилизации сбросного тепла. В нашем анализе мы сосредоточимся на возникновении акустической энергии внутри системы, не рассматривая её отбор или преобразование для питания внешних устройств.

Часть А: Звуковая волна в закрытой трубе (3.7 балла)

Рассмотрим теплоизолированную трубу длиной L с площадью поперечного сечения S , ось которой направлена вдоль оси x . Концы трубы находятся в точках $x = 0$ и $x = L$. Труба заполнена идеальным газом и герметично закрыта с обоих концов. В равновесии газ имеет температуру T_0 , давление p_0 и плотность ρ_0 . Считайте, что вязкостью можно пренебречь и что газ движется только вдоль оси x . В перпендикулярных направлениях y и z свойства газа однородны.

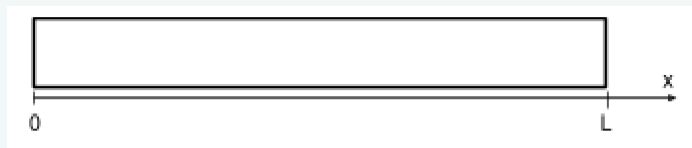


Рисунок 1

А.1 (0.3 балла)

При возникновении стоячей звуковой волны элементы газа колеблются вдоль оси x с угловой частотой ω . Амплитуда колебаний зависит от положения равновесия x каждого элемента вдоль трубы. Продольное смещение каждого элемента газа из его положения равновесия x задаётся выражением

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(обратите внимание: здесь u обозначает смещение элемента газа)

где $a \ll L$ — положительная постоянная, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а λ — длина волны. Какова максимально возможная длина волны $\lambda_{\max}$ в этой системе?

На протяжении всей задачи будем рассматривать моду колебаний с $\lambda = \lambda_{\max}$.

Теперь рассмотрим тонкий слой газа, который в состоянии покоя находится между x и $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Под действием волны смещений из пункта А.1 этот слой колеблется вдоль оси x , причём его объём и другие термодинамические параметры изменяются.

Во всех следующих пунктах считайте, что эти изменения термодинамических параметров малы по сравнению с их невозмущёнными значениями.

А.2 (0.5 балла)

Объём слоя $V(x, t)$ колеблется около равновесного значения $V_0 = S\Delta x$ и имеет вид

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Получите выражение для $V_1(x)$ через V_0 , a , k и x .

А.3 (0.7 балла)

Считайте, что полное давление газа при наличии звуковой волны приближённо имеет вид

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Рассматривая силы, действующие на слой газа, вычислите в главном порядке амплитуду колебаний давления $p_1(x)$, выразив её через координату x , равновесную плотность ρ_0 , амплитуду смещения a и параметры волны k и ω .

На звуковых частотах теплопроводностью газа можно пренебречь. Будем считать расширение и сжатие слоёв газа чисто адиабатическими, удовлетворяющими соотношению $pV^\gamma = \text{const}$, где γ — показатель адиабаты.

А.4 (0.3 балла)

Используя приведённое выше соотношение и результаты предыдущих пунктов, получите в первом порядке выражение для скорости звуковых волн $c = \omega/k$ в трубе. Выразите ответ через p_0 , ρ_0 и показатель адиабаты γ .

А.5 (0.7 балла)

Изменение температуры газа вследствие адиабатического расширения и сжатия под действием звуковой волны имеет вид:

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Вычислите амплитуду колебаний температуры $T_1(x)$, выразив её через T_0 , γ , a , k и x .

А.6 (1.2 балла)

Только в этом пункте будем считать, что между трубой и газом существует слабое тепловое взаимодействие. В результате стоячая звуковая волна остаётся почти неизменной, но газ может обмениваться с трубой небольшим количеством теплоты. Нагревом вследствие вязкости можно пренебречь.

Для каждой из точек на рисунке 2 (A и C — на концах трубы, B — в центре) укажите, будет ли температура трубы в этой точке с течением длительного времени повышаться, понижаться или оставаться неизменной.

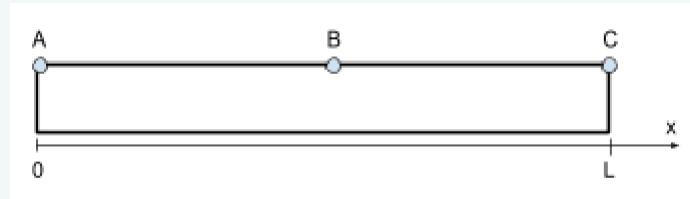


Рисунок 2

Часть В: Усиление звуковой волны за счёт внешнего теплового контакта (6.3 балла)

Внутри трубы помещён пакет тонких твёрдых пластин с достаточно большими промежутками между ними. Пластины пакета расположены параллельно оси трубы, чтобы не препятствовать течению газа вдоль неё. Центр пакета находится в точке $x_0 = L/4$; пакет имеет длину $\ell \ll L$ вдоль оси трубы и заполняет всё её поперечное сечение. Между правым и левым краями пакета поддерживается разность температур τ . Левый край пакета, находящийся в точке $x_H = x_0 - \ell/2$, поддерживается внешним тепловым резервуаром при температуре $T_H = T_0 + \tau/2$, а его правый край, находящийся в точке $x_C = x_0 + \ell/2$, одновременно поддерживается при температуре $T_C = T_0 - \tau/2$.

Пакет пластин допускает небольшой продольный поток теплоты, поддерживающий постоянный градиент температуры между его краями, так что $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.

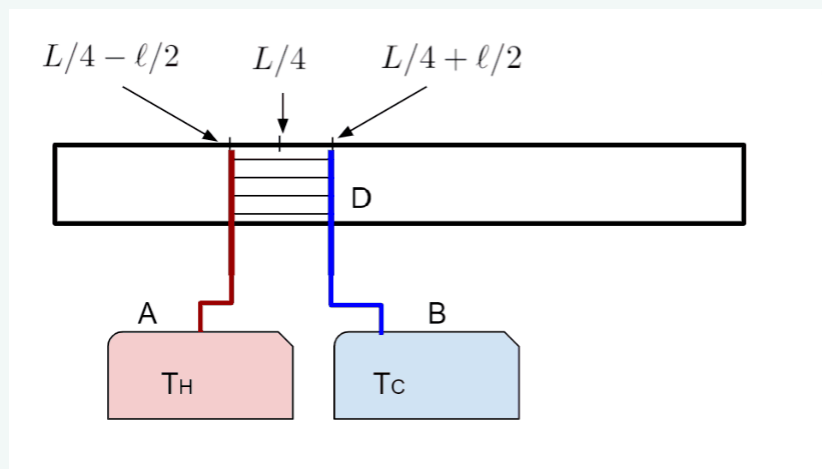


Рисунок 3. Схема системы. (A) и (B) обозначают соответственно горячий и холодный тепловые резервуары. (D) обозначает пакет пластин.

Для анализа влияния теплового контакта между пакетом пластин и газом на звуковые волны в трубе примите следующие допущения:

- Как и в предыдущей части, все изменения термодинамических параметров малы по сравнению с их невозмущёнными значениями.
- Система работает на основной моде стоячей волны с максимально возможной длиной волны. Наличие пакета пластин лишь немного изменяет эту моду.
- Пакет значительно короче длины волны, $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, и может быть расположен достаточно далеко как от узлов смещения, так и от узлов давления, поэтому

смещение $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ и давление $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ можно считать одинаковыми по всей длине пакета.

- Можно пренебречь всеми краевыми эффектами, вызванными движением слоёв газа в пакет и из него.
- Разность температур между концами пакета пластин, то есть между горячим и холодным резервуарами, мала по сравнению с абсолютной температурой: $\tau \ll T_0$.
- Теплопроводностью вдоль пакета, через газ и вдоль трубы можно пренебречь. Единственные существенные механизмы переноса теплоты — конвекция вследствие движения газа и теплопроводность между газом и пакетом.

В.1 (0.4 балла)

Рассмотрим определённый слой газа в области пакета, первоначально находящийся в точке $x_0 = L/4$. Когда слой движется внутри пакета, локальная температура соседнего участка пакета изменяется следующим образом:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Выразите T_{st} через a , τ и ℓ .

В.2 (1.0 балла)

При превышении какой критической разности температур τ_{cr} газ будет переносить теплоту от горячего резервуара к холодному? Выразите τ_{cr} через T_0 , γ , k и ℓ .

В.3 (0.8 балла)

Получите общее приближённое выражение для потока теплоты $\frac{dQ}{dt}$, поступающего в малый слой газа, как линейной функции скоростей изменения его объёма и давления. Выразите ответ через скорость изменения объёма $\frac{dV}{dt}$, скорость изменения давления $\frac{dp}{dt}$, невозмущённые равновесные значения давления и объёма слоя p_0 , V_0 и показатель адиабаты γ . (Можно использовать выражение для молярной теплоёмкости при постоянном объёме $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, где R — универсальная газовая постоянная.)

Ограниченная скорость теплообмена между слоем газа и пакетом вызывает разность фаз между колебаниями давления и объёма слоя. Мы увидим, как это приводит к совершению работы.

Пусть поток теплоты, поступающий в слой газа от пакета, пропорционален разности температур слоя газа и соседнего элемента пакета и приближённо задаётся выражением $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Здесь T_1 и T_{st} — амплитуды колебаний температуры слоя газа и соседнего участка пакета из пунктов А.5 и В.1 соответственно, а $\beta > 0$ — постоянная. Считайте, что на рабочих частотах машины изменение температуры газа вследствие этого потока теплоты пренебрежимо мало по сравнению как с T_1 , так и с T_{st} .

В.4 (1.9 балла)

Чтобы вычислить работу, рассмотрим изменение объёма движущегося слоя газа вследствие теплового контакта с пакетом. Запишем давление и объём слоя под влиянием пакета в виде:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

При заданных p_a и p_b найдите коэффициенты V_a и V_b . Выразите ответ через $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a$ и ℓ .

В.5 (0.8 балла)

Получите приближённое выражение для акустической работы на единицу объёма w , совершаемой слоем газа за один цикл. Проинтегрируйте по объёму пакета, чтобы получить полную работу W_{tot} , совершаемую газом за один цикл. Выразите W_{tot} через $\gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, k$ и S .

В.6 (0.8 балла)

Получите приближённое выражение для количества теплоты Q_{tot} , переносимого за один цикл с левой стороны плоскости $x = x_0$ на правую. Выразите ответ через $\tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, S, \ell$.

(Указание: можно использовать формулу $j = Q \frac{du}{dt}$ для конвективного потока теплоты.)

В.7 (0.6 балла)

Найдите КПД η термоакустического двигателя. КПД определяется как отношение произведённой акустической работы к количеству теплоты, полученному от горячего резервуара. Выразите ответ через разность температур τ между горячим и холодным резервуарами, критическую разность температур τ_{cr} и КПД Карно $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Коэффициенты V_1, p_1, T_1 в заданных выражениях для колебаний могут иметь любой знак. Всюду $k = \pi/L$.

- A.1

$$\lambda_{\max} = 2L.$$

- A.2

$$V_1(x) = V_0 a k \cos(kx).$$

- A.3

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

- A.4

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

- A.5

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

- A.6 A: повышается; B: понижается; C: повышается.

• B.1

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

• B.2

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k\ell.$$

Теплота переносится от горячего резервуара к холодному при $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

• B.3

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{\gamma p_0 dV/dt + V_0 dp/dt}{\gamma - 1}.$$

• B.4

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right], \quad V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

• B.5

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

• B.6

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

• B.7

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c, \quad \tau > \tau_{\text{cr}}.$$

Решение

При определении колеблющихся термодинамических величин сохраняем возмущения первого порядка. Первые ненулевые средние за цикл значения работы и переносимой теплоты имеют второй порядок по амплитуде волны. Тепловое взаимодействие слабое, поэтому в выражениях, уже пропорциональных его интенсивности, можно использовать невозмущённые амплитуды волны.

A.1

На герметично закрытых жёстких концах продольное смещение должно быть равно нулю:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Первое условие уже выполнено. Второе даёт

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

При выборе $n = 0$ волна отсутствует. Следовательно,

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}.$$

Наибольшая длина волны соответствует $n = 1$:

$$\lambda_{\max} = 2L, \quad k = \frac{\pi}{L}.$$

A.2

Две границы слоя перемещаются в положения

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t).$$

Следовательно,

$$V(x, t) = S [\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)].$$

При $k\Delta x \ll 1$

$$V(x, t) \simeq S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = V_0 [1 + ak \cos(kx) \cos(\omega t)].$$

Поэтому

$$V_1(x) = V_0 ak \cos(kx).$$

A.3

Силы давления, действующие на слой, в первом порядке дают

$$F_x = S[p(x, t) - p(x + \Delta x, t)] \simeq -S\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Масса слоя равна $\rho_0 S\Delta x$. Поэтому второй закон Ньютона принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Подставляя заданные выражения для колебаний, получаем

$$-\rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = p_1'(x) \cos(\omega t),$$

откуда

$$p_1'(x) = -\rho_0 a \omega^2 \sin(kx).$$

Интегрирование даёт

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx) + C.$$

Пространственно однородное акустическое сжатие отсутствует: полное изменение объёма пропорционально

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L, t) - u(0, t) = 0.$$

Тогда линейная адиабатическая связь между давлением и сжатием, явно записанная в А.4, требует, чтобы усреднённое по пространству возмущение давления было равно нулю. Поскольку $\int_0^L \cos(kx) dx = 0$, это определяет $C = 0$. Таким образом,

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4

Линеаризуя $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$, получаем

$$\frac{\delta p}{p_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0.$$

Используя $\delta p = -p_1 \cos(\omega t)$ и $\delta V = V_1 \cos(\omega t)$, получаем

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{V_1}{V_0} = \gamma p_0 a k \cos(kx).$$

Сравнение с A.3 даёт

$$\frac{\rho_0 a \omega^2}{k} = \gamma p_0 a k,$$

и, следовательно,

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

A.5

Для неизменного количества идеального газа

$$pV = nRT.$$

Линеаризованная форма этого уравнения имеет вид

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} + \frac{\delta V}{V_0}.$$

Используя адиабатическое соотношение из A.4, получаем

$$\frac{\delta T}{T_0} = -(\gamma - 1) \frac{\delta V}{V_0} = -(\gamma - 1) a k \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Сравнивая с заданным выражением для колебаний температуры, находим

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

A.6

Рассмотрим слой газа в левой половине трубы, где $\cos(kx) > 0$.

При смещении вправо он расширяется и охлаждается. Поэтому он поглощает теплоту от трубы в положении, смещённом вправо. При смещении влево он сжимается и нагревается, поэтому отдаёт теплоту трубе в положении, смещённом влево. Повторение этого процесса переносит теплоту к левому концу.

В правой половине $\cos(kx) < 0$, поэтому соответствие меняется на противоположное: слой поглощает теплоту при смещении к центру и отдаёт её при смещении к правому концу.

Таким образом, акустическое движение перекачивает теплоту из центральной области к обоим концам:

$$A : \text{температура повышается}, \quad B : \text{температура понижается}, \quad C : \text{температура повышается}.$$

Хотя у слоя, положение равновесия которого находится точно в центре, колебания температуры первого порядка отсутствуют, соседние слои проходят через центральную область и отводят из неё теплоту. Средний тепловой эффект имеет второй порядок по амплитуде; он не определяется температурой первого порядка в одной точке равновесия.

В.1

В центре пакета

$$kx_0 = \frac{\pi}{L} \frac{L}{4} = \frac{\pi}{4},$$

поэтому смещение слоя равно

$$u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t).$$

Его мгновенное положение равно $x_0 + u(x_0, t)$. Подстановка в профиль температуры пластин даёт

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} u(x_0, t) = T_0 - \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} \cos(\omega t).$$

Следовательно,

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

В.2

Амплитуда адиабатических колебаний температуры газа в центре пакета равна

$$T_1(x_0) = \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

В крайнем левом положении слоя температура газа равна $T_0 + T_1$, а температура соседнего участка пакета равна $T_0 + T_{\text{st}}$. Чтобы слой поглощал там теплоту, должно выполняться условие

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

В крайнем правом положении это же условие означает, что пакет холоднее газа, поэтому слой отдаёт там теплоту. Таким образом, он переносит теплоту от горячего резервуара к холодному именно при условии

$$\frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} > \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, критическая разность температур равна

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

При равенстве колебания температуры газа и соседнего участка пакета совпадают, поэтому теплообмен в главном порядке отсутствует. Ниже этого порога направление переноса теплоты меняется на противоположное.

В.3

Примем $dQ > 0$ для теплоты, поступающей в слой, и $p dV > 0$ для работы, совершаемой газом. Первое начало термодинамики имеет вид

$$dQ = dU + p dV.$$

Для идеального газа

$$U = nc_v T = \frac{nRT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Отсюда

$$dQ = \frac{V dp + p dV}{\gamma - 1} + p dV = \frac{V dp + \gamma p dV}{\gamma - 1}.$$

В первом порядке коэффициенты при малых скоростях изменения можно заменить равновесными значениями:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{V_0 dp/dt + \gamma p_0 dV/dt}{\gamma - 1}}.$$

В.4

Из В.1 и В.2

$$T_{st} - T_1 = \frac{a}{\sqrt{2} \ell} (\tau - \tau_{cr}).$$

Для краткости введём обозначение

$$\Delta T \equiv \frac{a(\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2} \ell}.$$

Тогда заданный поток поступающей теплоты равен

$$\dot{Q} = -\beta V_0 \Delta T \cos(\omega t).$$

Дифференцируя выражения для давления и объёма, получаем

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \omega p_a \cos(\omega t) + \omega p_b \sin(\omega t), \\ \dot{V} &= \omega V_a \cos(\omega t) - \omega V_b \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Подстановка в В.3 даёт

$$\dot{Q} = \frac{\omega}{\gamma - 1} [(V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) \cos(\omega t) + (V_0 p_b - \gamma p_0 V_b) \sin(\omega t)].$$

Приравнявая коэффициенты при синусе, получаем

$$V_0 p_b - \gamma p_0 V_b = 0,$$

откуда

$$\boxed{V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}}.$$

Приравнявая коэффициенты при косинусе, получаем

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} (V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) = -\beta V_0 \Delta T.$$

Таким образом,

$$\boxed{V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1) \beta a (\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2} \omega \ell} \right]}.$$

Член, пропорциональный β , создаёт составляющую колебаний объёма, необходимую для ненулевой работы за цикл.

B.5

Работа, совершаемая слоем за один цикл, равна

$$W_{\text{parcel}} = \oint p dV.$$

Введём $\theta = \omega t$. Вклад постоянного давления при интегрировании обращается в нуль, и остаётся

$$W_{\text{parcel}} = \int_0^{2\pi} (p_a \sin \theta - p_b \cos \theta)(V_a \cos \theta - V_b \sin \theta) d\theta.$$

Используя

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi,$$

получаем

$$W_{\text{parcel}} = -\pi(p_a V_b + p_b V_a).$$

После подстановки B.4 члены, содержащие $p_a p_b$, сокращаются:

$$W_{\text{parcel}} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta V_0 p_b}{\gamma p_0 \omega} \Delta T.$$

Поэтому работа на единицу равновесного объёма равна

$$w = \frac{W_{\text{parcel}}}{V_0} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta p_b}{\gamma p_0 \omega} \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2} \ell}.$$

Поскольку это выражение уже имеет первый порядок по интенсивности теплового взаимодействия, используем невозмущённый коэффициент давления:

$$p_b \simeq p_1(x_0) = \gamma p_0 a k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\gamma p_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

Пакет короткий, поэтому эта объёмная плотность работы приблизительно одинакова во всём занимаемом газом объёме пакета $S\ell$. Таким образом,

$$W_{\text{tot}} \simeq w S \ell,$$

откуда

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

Работа положительна в режиме двигателя $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

B.6

Пусть $q(t)$ обозначает теплоту, полученную от пакета на единицу равновесного объёма газа, отсчитываемую от произвольной постоянной. В сохраняемом порядке

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V_0} = -\beta\Delta T \cos(\omega t).$$

Интегрируя, получаем

$$q(t) = -\frac{\beta\Delta T}{\omega} \sin(\omega t) + q_*.$$

Скорость слоя в центре пакета равна

$$v(t) = \dot{u}(x_0, t) = -\frac{a\omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

Поскольку q выражено на единицу объёма, конвективный поток теплоты на единицу площади равен

$$j(t) = q(t)v(t).$$

Произвольная постоянная не даёт вклада в результирующий перенос, поскольку средняя скорость равна нулю. Чисто адиабатический вклад также имеет нулевое среднее за цикл: он пропорционален $\cos(\omega t)$, тогда как скорость пропорциональна $\sin(\omega t)$. Поэтому результирующее количество теплоты, перенесённое через поперечное сечение, равно

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= S \int_0^{2\pi/\omega} q(t)v(t) dt \\ &= \frac{S\beta a\Delta T}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{\pi S\beta a\Delta T}{\sqrt{2}\omega}. \end{aligned}$$

Подставляя ΔT , получаем

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

При $\tau > \tau_{\text{cr}}$ знак положителен, что соответствует переносу слева направо.

В.7

С точностью принятого приближения короткого пакета и малой разности температур теплота, полученная от горячего резервуара, приблизительно равна теплоте, перенесённой через центр пакета:

$$Q_H \simeq Q_{\text{tot}}.$$

Их разность имеет порядок акустической работы. Поскольку сам КПД мал, учёт этой разности изменил бы КПД лишь в более высоком порядке.

Используя В.5 и В.6, получаем

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_H} \simeq \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma - 1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0}.$$

В то же время

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0 - \tau/2}{T_0 + \tau/2} = \frac{\tau}{T_0 + \tau/2} \simeq \frac{\tau}{T_0},$$

поскольку $\tau \ll T_0$. Поэтому

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c.$$

Для работы в режиме двигателя требуется $\tau > \tau_{\text{cr}}$, поэтому КПД ниже КПД Карно. При приближении к порогу сверху КПД в данном порядке приближения стремится к значению Карно, тогда как и совершаемая работа, и перенос теплоты стремятся к нулю. На самом пороге их отношение не определяет КПД двигателя с ненулевой отдаваемой мощностью.

Решение проверено по официальному решению.