

IPhO 2019

Problemas teóricos y soluciones · Tel Aviv, Israel · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2019/

Problema 1: Muelles de longitud nula y espiras de un slinky

Un muelle de longitud efectiva nula (ZLS) es un muelle en el que la fuerza es proporcional a su longitud, $F = kL$ para $L > L_0$, donde L_0 es tanto la longitud mínima del muelle como su longitud sin estirar. La figura 1 muestra la relación entre la fuerza F y la longitud del muelle L para un ZLS, donde la pendiente de la recta es la constante elástica k .

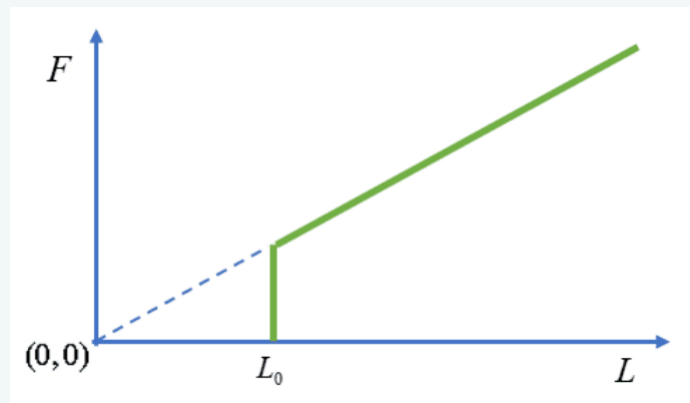


Figura 1: relación entre la fuerza F y la longitud del muelle L

Un ZLS resulta útil en sismografía y permite medir con gran precisión las variaciones de la aceleración de la gravedad g . Aquí consideraremos un ZLS homogéneo cuyo peso Mg es mayor que kL_0 . Definimos el correspondiente cociente adimensional, $\alpha = kL_0/Mg < 1$, para caracterizar la flexibilidad relativa del muelle. El juguete conocido como «slinky» puede ser (aunque no necesariamente) un ZLS de este tipo.

Parte A: Estática (3.0 puntos)

A.1	Considere un segmento de longitud $\Delta\ell$ del muelle ZLS sin estirar, que posteriormente se estira mediante una fuerza F , en condiciones de ingravidez. ¿Cuál es la longitud Δy de este segmento en función de F , $\Delta\ell$ y los parámetros del muelle?	0.5pt
A.2	Para un segmento de longitud $\Delta\ell$, calcule el trabajo ΔW necesario para estirarlo desde su longitud original $\Delta\ell$ hasta una longitud Δy .	0.5pt

A lo largo de este problema, identificaremos cada punto del muelle mediante su distancia $0 \leq \ell \leq L_0$ al extremo inferior del muelle cuando este se encuentra sin estirar. En particular, para cada punto del muelle, ℓ permanece invariable mientras el muelle se estira.

A.3	Suponga que colgamos el muelle por su extremo superior, de modo que se estira bajo su propio peso. ¿Cuál es la longitud total H del muelle suspendido en equilibrio? Expresé sus respuestas en función de L_0 y α .	2.0pt
------------	--	-------

Parte B: Dinámica (5.5 puntos)

Los experimentos muestran que, cuando el muelle está colgado en reposo y luego se suelta, se contrae gradualmente desde arriba, mientras que la parte inferior permanece inmóvil (véase la figura 2). A medida que transcurre el tiempo, la parte que se contrae se mueve como un bloque sólido e incorpora más espiras del muelle, mientras que la parte inmóvil se hace más corta. Cada punto del muelle comienza a moverse únicamente cuando la parte móvil lo alcanza. El extremo inferior del muelle empieza a moverse solo cuando el muelle se ha contraído por completo y ha alcanzado su longitud sin estirar L_0 . A partir de entonces, el muelle contraído sigue cayendo verticalmente hacia abajo, sin dar tumbos, como un cuerpo rígido bajo la acción de la gravedad.

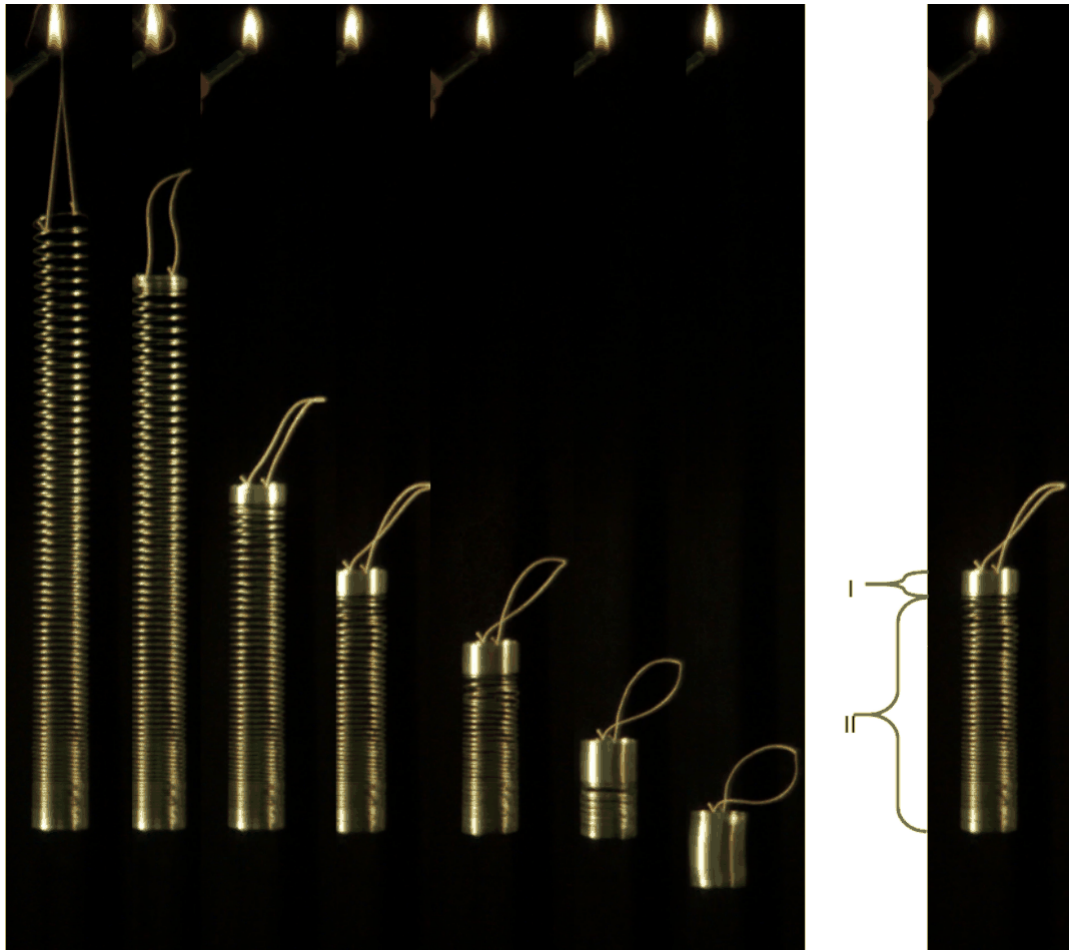


Figura 2: Izquierda: secuencia de fotografías tomadas durante la caída libre de un slinky. Derecha: la parte móvil I y la parte inmóvil II durante la caída libre del muelle.

En los apartados restantes del problema, debe basar su solución en el modelo descrito. Puede despreciar la resistencia del aire, pero no puede despreciar L_0 .

B.1	Calcule el tiempo t_c que transcurre desde el instante en que se suelta el muelle hasta que se contrae por completo y vuelve a su longitud mínima L_0 . Exprese su respuesta en función de L_0 , g y α . Calcule el valor numérico de t_c para un muelle con $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ y $M = 0.201 \text{ kg}$, tomando g igual a 9.80 m/s^2 .	2.5pt
B.2	En este apartado, ℓ se utiliza para denotar la coordenada de la frontera entre las partes I (la parte móvil de la figura 2) y II (la parte inmóvil). En cierto instante, mientras aún existe una parte inmóvil, su masa es $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$, y la parte móvil se mueve con una velocidad instantánea uniforme $v_I(\ell)$. Demuestre que en ese instante (mientras existe una parte	2.5pt

	inmóvil) la velocidad de la parte móvil es $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Exprese las constantes A y B en función de L_0 , g y α .	
B.3	A partir de B.2, halle la rapidez mínima $v_{\min}$ de la parte móvil del muelle durante su movimiento, después de soltarlo y antes de que choque con el suelo. Exprese su respuesta en función de L_0 , α , A y B .	0.5pt

Parte C: Energética (1.5 puntos)

C.1	Calcule la cantidad de energía mecánica Q que se pierde al transformarse en calor, desde el instante en que se suelta el muelle hasta justo antes de que choque con el suelo. Exprese su respuesta en función de L_0 , M , g y α .	1.5pt
------------	---	-------

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1**

$$\Delta y = \Delta \ell \max\left(1, \frac{F}{kL_0}\right)$$

- **A.2**, para $\Delta y \geq \Delta \ell$:

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2]$$

- **A.3**

$$H = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2)$$

- **B.1**

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}} \quad t_c \approx 0.245 \text{ s}$$

- **B.2**, tomando como positiva la velocidad hacia abajo:

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}$$

La contracción se desarrolla en el intervalo $\alpha L_0 \leq \ell < L_0$.

- **B.3**

$$v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

Esto ocurre inmediatamente después de que la parte móvil choque con la porción inferior inicialmente compacta.

• C.1

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$$

Solución

A.1

En condiciones de ingravidez, la tensión es uniforme. Como el muelle es homogéneo, todos los segmentos tienen el mismo cociente entre su longitud estirada y su longitud sin estirar.

Cuando $F > kL_0$, el muelle completo tiene una longitud $L = F/k$, por lo que

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{L}{L_0} = \frac{F}{kL_0}.$$

De forma equivalente, la constante elástica del segmento es

$$k_{\text{seg}} = \frac{kL_0}{\Delta \ell}.$$

Para $0 \leq F \leq kL_0$, el segmento permanece en su longitud mínima. Por tanto,

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta \ell, & 0 \leq F \leq kL_0, \\ \frac{F\Delta \ell}{kL_0}, & F > kL_0. \end{cases}$$

A.2

Aumentar la tensión hasta kL_0 no produce ningún desplazamiento y, por tanto, no requiere trabajo mecánico. Durante el estiramiento posterior, cuando la longitud instantánea del segmento es s ,

$$F(s) = \frac{kL_0}{\Delta \ell}s.$$

El trabajo necesario para un estiramiento cuasiestático es

$$\Delta W = \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} F(s) ds = \frac{kL_0}{\Delta \ell} \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} s ds.$$

Por consiguiente,

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2].$$

Este es también el aumento de la energía potencial elástica.

A.3

La masa por unidad de longitud sin estirar es

$$\mu = \frac{M}{L_0}.$$

En la coordenada material ℓ , la tensión sostiene todo el muelle situado por debajo de ese punto:

$$T(\ell) = \mu g \ell = \frac{Mg}{L_0} \ell.$$

El estiramiento solo se produce donde $T(\ell) > kL_0$. Por tanto, la frontera entre las porciones compacta y estirada viene dada por

$$\frac{Mg}{L_0}\ell_* = kL_0, \quad \boxed{\ell_* = \alpha L_0}.$$

Así pues, la fracción inferior α del muelle permanece sin estirar.

Sea $y_0(\ell)$ la altura de equilibrio respecto al extremo inferior. Aplicando A.1 localmente,

$$\frac{dy_0}{d\ell} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell}{\alpha L_0}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

Al integrar con $y_0(0) = 0$, se obtiene

$$y_0(\ell) = \begin{cases} \ell, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

En particular,

$$\boxed{H = y_0(L_0) = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2)}.$$

B.1

Después de soltar el muelle, la gravedad es la única fuerza externa. En consecuencia, el centro de masas cae con aceleración g , aunque las colisiones internas disipen energía.

La altura inicial del centro de masas es

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} y_0(\ell) d\ell \\ &= \frac{1}{L_0} \left[\int_0^{\alpha L_0} \ell d\ell + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left(\frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2} \right) d\ell \right] \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 + 3\alpha^2 - \alpha^3). \end{aligned}$$

En el instante en que se completa la contracción, el extremo inferior todavía no se ha movido. El muelle ocupa el intervalo de $y = 0$ a $y = L_0$, por lo que

$$y_{\text{cm},c} = \frac{L_0}{2}.$$

Por tanto, el centro de masas ha descendido una distancia

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c} &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3. \end{aligned}$$

Como parte del reposo,

$$\frac{1}{2}gt_c^2 = \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3,$$

y, por consiguiente,

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1-\alpha)^3}{3\alpha g}}.$$

Para los datos proporcionados,

$$\alpha = \frac{1.02(0.055)}{0.201(9.80)} = 0.0284800.$$

Resulta conveniente utilizar la expresión equivalente

$$t_c = \sqrt{\frac{M}{3k}}(1-\alpha)^{3/2}.$$

Numéricamente,

$$t_c = 0.2454228 \dots \text{ s} \approx 0.245 \text{ s}.$$

B.2

Tomemos como positivas las velocidades hacia abajo. Introduzcamos

$$x = L_0 - \ell, \quad D = (1 - \alpha)L_0.$$

Aquí, x es la longitud sin estirar que ya se ha incorporado al bloque compacto móvil. Su masa y su longitud real son

$$m_I = \frac{M}{L_0}x, \quad L_I = x.$$

Como el resto del muelle permanece inmóvil, la cantidad de movimiento total hacia abajo es $m_I v_I$. Al integrar la fuerza externa Mg desde el instante en que se suelta el muelle, se obtiene

$$\frac{M}{L_0}xv_I = Mgt,$$

o bien

$$xv_I = L_0gt.$$

Esta ecuación de la cantidad de movimiento incluye el efecto del aumento de masa del bloque móvil.

La frontera inferior del bloque móvil se encuentra a la altura $y_0(\ell)$. Por consiguiente, su extremo superior está en

$$Y_{\text{top}} = y_0(\ell) + L_0 - \ell.$$

Mientras la frontera se encuentra en la porción inicialmente estirada,

$$\begin{aligned} v_I &= -\frac{dY_{\text{top}}}{dt} \\ &= -\left(\frac{\ell}{\alpha L_0} - 1\right)\dot{\ell} \\ &= \frac{D-x}{\alpha L_0}\dot{x}. \end{aligned}$$

Combinando esto con $xv_I = L_0gt$,

$$x(D-x)\dot{x} = \alpha L_0^2gt.$$

Integrando desde $x = 0$, $t = 0$,

$$\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\alpha L_0^2 g t^2}{2}.$$

Por tanto,

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha L_0^2 g} \left(D - \frac{2x}{3} \right).$$

Al sustituir en la relación de la cantidad de movimiento, se obtiene

$$\begin{aligned} v_I^2 &= \frac{L_0^2 g^2 t^2}{x^2} \\ &= \frac{g}{\alpha} \left(D - \frac{2x}{3} \right) \\ &= \frac{g}{\alpha} \left[(1 - \alpha)L_0 - \frac{2}{3}(L_0 - \ell) \right] \\ &= \frac{2g}{3\alpha} \ell + \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\boxed{v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}}, \quad \boxed{A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}}.$$

La frontera móvil alcanza la porción inferior inicialmente compacta en $\ell = \alpha L_0$. Por tanto, esta etapa de contracción continua abarca

$$\alpha L_0 \leq \ell < L_0.$$

B.3

Como $A > 0$, el bloque móvil se frena a medida que ℓ disminuye. Justo antes de alcanzar la porción inferior inicialmente compacta, su rapidez es

$$v_- = \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

En ese instante, la masa móvil es $(1 - \alpha)M$, mientras que la masa compacta inferior αM sigue inmóvil. El muelle ha alcanzado su longitud total mínima, de modo que estas porciones se unen en una colisión perfectamente inelástica, tal como exige el movimiento posterior como cuerpo rígido estipulado en el enunciado.

El impulso gravitatorio durante esta colisión instantánea es despreciable. La conservación de la cantidad de movimiento da

$$(1 - \alpha)Mv_- = Mv_c,$$

y, por tanto,

$$v_c = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Esta rapidez es menor que v_- . Posteriormente, todo el muelle acelera hacia abajo con aceleración g , por lo que su rapidez aumenta. En consecuencia,

$$\boxed{v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}}.$$

Como comprobación,

$$A\alpha L_0 + B = \frac{gL_0(1-\alpha)}{3\alpha},$$

por lo que

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL_0(1-\alpha)^3}{3\alpha}} = gt_c,$$

tal como exige la cantidad de movimiento total al completarse la contracción.

El estado de reposo exacto en el instante en que se suelta el muelle queda excluido por la expresión «después de soltarlo». En el modelo continuo prescrito, la masa del bloque móvil tiende a cero cuando $t \rightarrow 0^+$, lo que permite una rapidez límite finita mientras la cantidad de movimiento total tiende a cero.

C.1

Elijamos como cero de la energía potencial elástica la del muelle en su longitud mínima. Aplicando A.2 a un segmento infinitesimal, se obtiene

$$dU_{\text{el}} = \frac{kL_0}{2} \left[\left(\frac{dy_0}{d\ell} \right)^2 - 1 \right] d\ell.$$

La contribución de la porción inferior inicialmente compacta es nula. Por tanto,

$$\begin{aligned} U_{\text{el},0} &= \frac{kL_0}{2} \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left[\frac{\ell^2}{\alpha^2 L_0^2} - 1 \right] d\ell \\ &= \frac{kL_0^2}{6\alpha^2} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned}$$

Utilizando $kL_0 = \alpha Mg$,

$$U_{\text{el},0} = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3).$$

Inmediatamente después de completarse la contracción, la energía elástica es nula y todo el muelle se traslada con rapidez $v_c = gt_c$. La energía disipada hasta ese momento es

$$Q = U_{\text{el},0} + Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) - \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

Sin embargo, la caída libre del centro de masas da

$$Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) = \frac{1}{2}Mg^2t_c^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

Estos dos términos se cancelan, y queda

$$Q = U_{\text{el},0}.$$

Después de la contracción, el muelle rígido cae sin resistencia del aire ni tumbos, de modo que no se pierde más energía mecánica antes del impacto. Factorizando el resultado,

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^2 (1 + 2\alpha).$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: La física de un horno microondas

Este problema trata sobre la generación de radiación de microondas en un horno microondas y su uso para calentar alimentos. La radiación de microondas se genera en un dispositivo llamado «magnetron». La Parte A trata sobre el funcionamiento del magnetron, mientras que la Parte B aborda la absorción de la radiación de microondas en los alimentos.

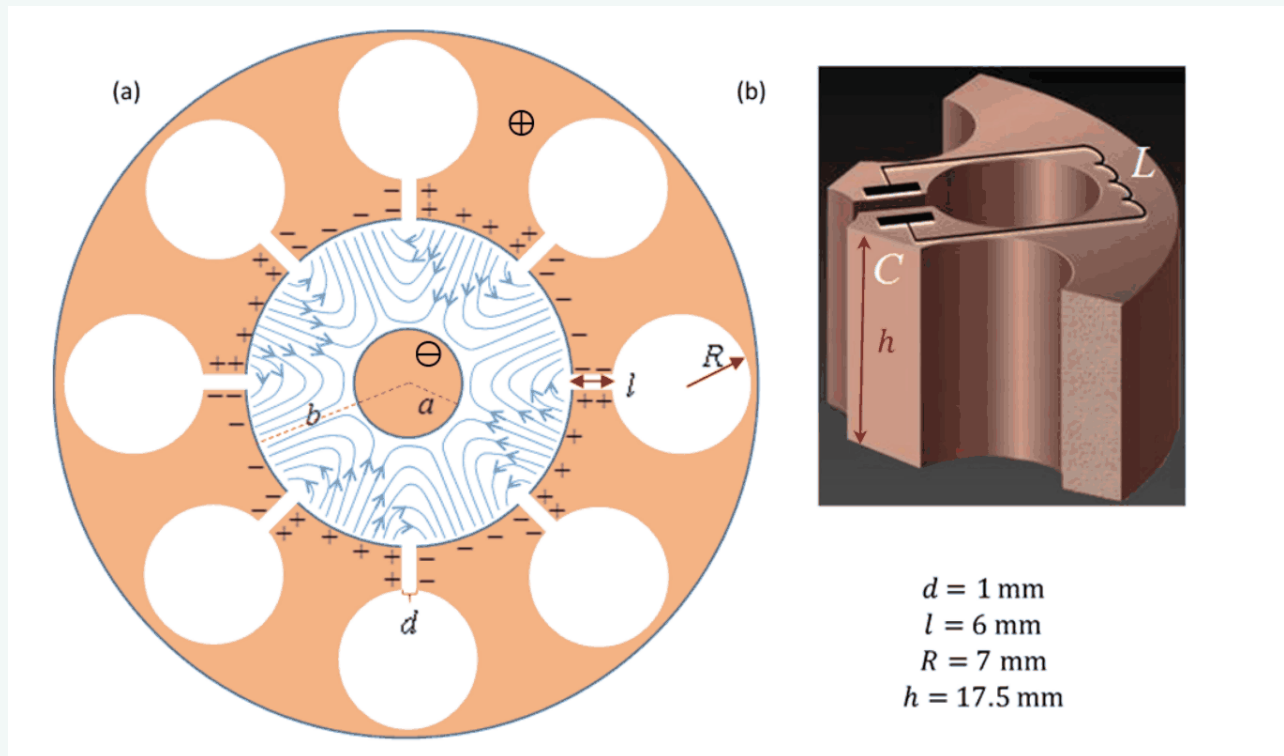


Figura 1

Parte A: Estructura y funcionamiento de un magnetron (6.6 puntos)

Un magnetron es un dispositivo que genera radiación de microondas, ya sea en pulsos (para aplicaciones de radar) o de forma continua (por ejemplo, en un horno microondas). El magnetron posee un modo de oscilaciones que se autoamplifican. Al alimentar el magnetron con una tensión estática (no alterna), este modo se excita rápidamente. La radiación de microondas así creada se transmite al exterior del magnetron.

Un magnetron típico de un horno microondas consta de un cátodo cilíndrico macizo de cobre (de radio a) y un ánodo que lo rodea (de radio b). Este último tiene la forma de una envoltura cilíndrica gruesa en la que se perforan cavidades cilíndricas. Estas cavidades se denominan «resonadores». Uno de los resonadores está acoplado a una antena que transmitirá la energía de microondas al exterior; en lo que sigue ignoraremos la antena. Todos los espacios internos se encuentran en el vacío. Consideraremos un magnetron típico con ocho resonadores, como se muestra en la Figura 1(a). La estructura tridimensional de un solo resonador se muestra en la Figura 1(b). Como se indica en ella, cada una de las ocho cavidades se comporta como un resonador de bobina y condensador (LC), con una frecuencia de funcionamiento $f = 2.45 \text{ GHz}$.

Se aplica un campo magnético estático y uniforme a lo largo del eje longitudinal del magnetrón, dirigido hacia fuera de la página en la Figura 1(a). Además, se aplica una tensión constante entre el ánodo (potencial positivo) y el cátodo (potencial negativo). Los electrones emitidos por el cátodo llegan al ánodo y lo cargan, de modo que excitan un modo de oscilación en el que el signo de la carga es opuesto en cada par de resonadores adyacentes. La oscilación de las cavidades amplifica estas oscilaciones.

El proceso descrito anteriormente crea un campo eléctrico alterno con la frecuencia antes mencionada $f = 2.45 \text{ GHz}$ (líneas azules en la Figura 1(a); no se representa el campo estático) en el espacio entre el cátodo y el ánodo, además del campo estático causado por la tensión constante aplicada. En régimen estacionario, la amplitud típica del campo eléctrico alterno entre el ánodo y el cátodo es aproximadamente $\frac{1}{3}$ del campo eléctrico estático en esa región. El movimiento de los electrones en el espacio entre el cátodo y el ánodo se ve afectado tanto por la parte estática como por la parte alterna del campo. Esto hace que los electrones que llegan al ánodo transfieran al campo alterno aproximadamente el 80% de la energía que adquieren del campo estático. Una minoría de los electrones emitidos regresa al cátodo y libera electrones adicionales, lo que amplifica aún más el campo alterno.

Cada resonador puede considerarse como un condensador y una bobina; véase la Figura 1(b). La capacitancia procede principalmente de las partes planas de la superficie del resonador, mientras que la inductancia se debe a la parte cilíndrica. Suponga que la corriente en el resonador fluye uniformemente muy cerca de la superficie de su cavidad cilíndrica, y que la magnitud del campo magnético generado por esta corriente es 0.6 veces la de un solenoide ideal infinito. Las distintas longitudes que definen la geometría del resonador se indican en la Figura 1(b). La permitividad y la permeabilidad del vacío son $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, respectivamente.

A.1 — 0.4pt

Utilice los datos anteriores para estimar la frecuencia f_{est} de un solo resonador. (Su resultado puede diferir del valor real, $f = 2.45 \text{ GHz}$. Utilice el valor **real** en el resto del problema.)

El apartado A.2 que sigue no trata sobre el magnetrón en sí, sino que ayuda a introducir algunos de los conceptos físicos pertinentes. Considere un electrón que se mueve en el espacio libre bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje y negativo, $\vec{E} = -E_0\hat{y}$, y de un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje z positivo, $\vec{B} = B_0\hat{z}$ (E_0 y B_0 son positivos; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son vectores unitarios orientados de la manera convencional). Denotemos la velocidad del electrón en el instante t por $\vec{u}(t)$. La velocidad de deriva $\vec{u}_D$ del electrón se define como su velocidad media. Denotamos por m y $-e$ la masa y la carga del electrón, respectivamente.

A.2 — 1.5pt

En cada uno de los dos casos siguientes, halle $\vec{u}_D$. Además, dibuje en la Hoja de Respuestas la trayectoria del electrón (en el sistema de referencia del laboratorio) durante el intervalo de tiempo $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ si:

1. en $t = 0$ la velocidad del electrón es $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$,
2. en $t = 0$ la velocidad del electrón es $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$.

Retomemos ahora el análisis del magnetrón. La distancia entre el cátodo y el ánodo es 15 mm. Suponga que, debido a la pérdida de energía hacia los campos alternos antes mencionada, la energía cinética máxima de cada electrón no supera $K_{\max} = 800 \text{ eV}$. La magnitud del campo magnético estático es $B_0 = 0.3 \text{ T}$. La masa y la carga del electrón son $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ y $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, respectivamente.

A.3 — 0.4pt

Estime numéricamente el radio máximo r de la trayectoria del electrón en el sistema de referencia en el que este movimiento es aproximadamente circular, considerando dicho sistema de referencia como aproximadamente inercial.

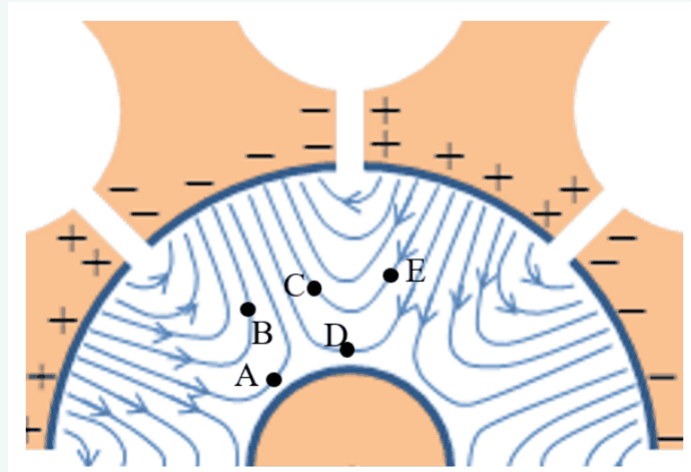


Figura 2

A.4 — 1.2pt

La Figura 2 representa las líneas del campo eléctrico alterno entre el ánodo y el cátodo en un instante dado (no se representa el campo estático). Indique en la Hoja de Respuestas cuáles de los electrones situados en A,B,C,D y E tendrán una deriva hacia el ánodo, cuáles hacia el cátodo y cuáles en una dirección perpendicular al radio en ese instante.

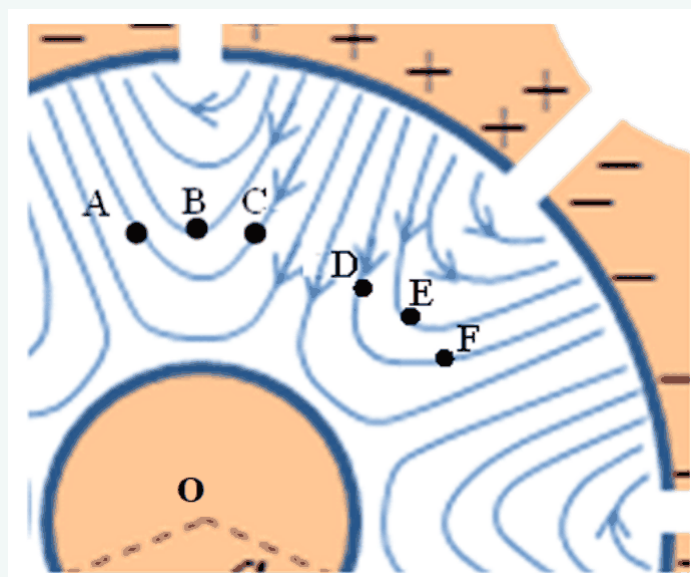


Figura 3

La Figura 3 representa las líneas del campo eléctrico alterno entre el ánodo y el cátodo (no se representa el campo estático) en un instante dado. Las posiciones de seis electrones en ese instante se denotan por A, B, C, D, E y F. Todos los electrones se encuentran a la misma distancia del cátodo.

A.5 — 1.2pt

Considere la situación que se muestra en la Figura 3. Para cada uno de los seis pares de electrones AB, AC, BC, DE, DF, EF, indique en la Hoja de Respuestas si su deriva hará que el ángulo entre sus vectores de posición (medidos desde el centro O del cátodo) aumente o disminuya en ese instante.

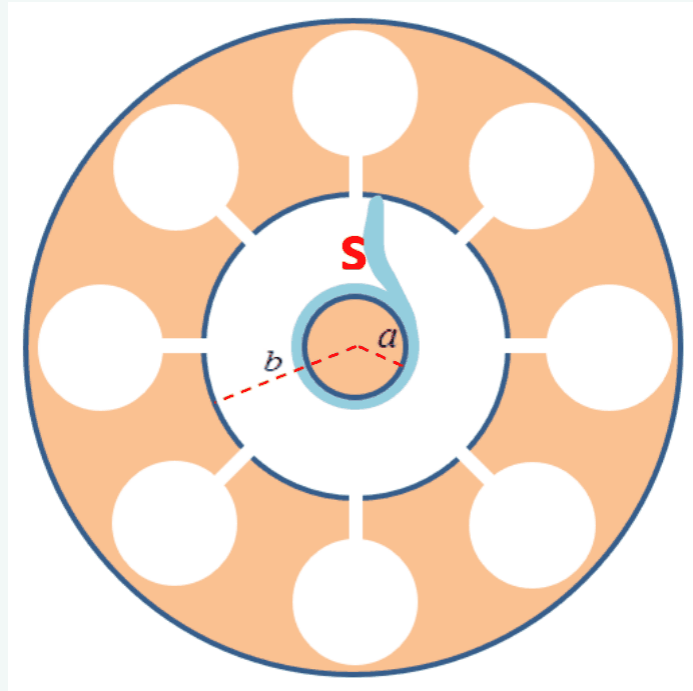


Figura 4

El patrón que ha descubierto en el apartado A.5 actúa como un mecanismo de enfoque, concentrando los electrones del espacio entre el cátodo y el ánodo en haces radiales. La Figura 4 representa uno de estos haces, denotado por S.

A.6 — 0.8pt

Represente en la Hoja de Respuestas los demás haces radiales en ese instante. Indique mediante flechas su sentido de rotación y calcule su velocidad angular media ω_s .

Adopte la aproximación de que el campo eléctrico total a mitad de camino entre el cátodo y el ánodo es igual a su valor estático medio a lo largo de una línea radial desde el cátodo hasta el ánodo, y de que los haces son aproximadamente radiales en esa región. Los radios del cátodo y del ánodo (a y b , respectivamente) se definen en la Figura 4.

A.7 — 1.1pt

Halle una expresión aproximada para la tensión estática V_0 necesaria para que el magnetrón funcione de la manera descrita. (La expresión que obtendrá proporciona una aproximación al valor mínimo necesario para el funcionamiento del magnetrón; la tensión óptima es algo mayor.)

Parte B: Interacción de la radiación de microondas con las moléculas de agua (3.4 puntos)

Esta parte trata sobre el uso de la radiación de microondas (emitida por la antena del magnetron hacia la cámara de cocción) para cocinar, es decir, para calentar un material dieléctrico con pérdidas como el agua, ya sea pura o salada (que es nuestro modelo para, por ejemplo, una sopa).

Un dipolo eléctrico es una configuración de dos cargas eléctricas iguales y opuestas q y $-q$, separadas por una pequeña distancia d . El vector dipolar eléctrico apunta desde la carga negativa hacia la positiva, y su magnitud es $p = qd$.

Se aplica un campo eléctrico dependiente del tiempo $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ a un único dipolo de momento $\vec{p}(t)$ con magnitud constante $p_0 = |\vec{p}(t)|$. El ángulo entre el dipolo y el campo eléctrico es $\theta(t)$.

B.1 — 0.5pt

Escriba expresiones tanto para la magnitud del momento de fuerzas $\tau(t)$ que el campo eléctrico ejerce sobre el dipolo como para la potencia $H_i(t)$ que el campo entrega al dipolo, en función de p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ y sus derivadas.

Las moléculas de agua son polares, por lo que pueden tratarse como dipolos eléctricos. Debido a los fuertes enlaces de hidrógeno entre las moléculas de agua en el agua líquida, no es posible tratarlas como dipolos independientes. En su lugar, debe utilizarse el vector de polarización $\vec{P}(t)$, que es la densidad de momento dipolar (momento dipolar medio por unidad de volumen de un conjunto de moléculas de agua). La polarización $\vec{P}(t)$ es paralela al campo eléctrico alterno local aplicado (de la radiación de microondas), $\vec{E}(t)$, y oscila en el tiempo con una amplitud proporcional a la amplitud del campo eléctrico alterno local, pero con un retraso de fase δ .

El campo eléctrico alterno local en un punto dado del interior del agua es $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$, donde $\omega = 2\pi f$, y da lugar a una polarización $\vec{P}(t) = \beta\epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$, donde la constante adimensional β es una propiedad del agua.

B.2 — 0.5pt

Halle una expresión para la potencia media temporal $\langle H(t) \rangle$ absorbida por el agua por unidad de volumen.

El promedio temporal de una variable periódica dependiente del tiempo $f(t)$ a lo largo de su período T se define como:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Consideremos ahora la propagación de la radiación a través del agua. La constante dieléctrica relativa del agua (a la frecuencia del campo electromagnético) es ϵ_r , y el índice de refracción correspondiente del agua es $n = \sqrt{\epsilon_r}$. La densidad de energía instantánea del campo eléctrico viene dada por $\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2$. Las densidades de energía medias temporales de los campos eléctrico y magnético son iguales.

B.3 — 1.1pt

Denotemos la densidad de flujo de energía de la radiación promediada en el tiempo por $I(z)$ (flujo medio de potencia de radiación por unidad de área). Aquí z es la profundidad de penetración en el agua, y la radiación se propaga en la dirección z . Halle una expresión para la dependencia de la densidad de flujo $I(z)$ con z . La densidad de flujo en la superficie del agua, $I(0)$, puede aparecer en su resultado.

El retraso de fase δ es consecuencia de la interacción entre las moléculas de agua. Depende del coeficiente adimensional de pérdidas dieléctricas ε_ℓ y de la constante dieléctrica relativa ε_r (ambos dependientes de la frecuencia angular de la radiación ω y de la temperatura) mediante la relación $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$. Cuando δ es suficientemente pequeño, el campo eléctrico a una profundidad de penetración z en el agua viene dado por:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

donde $k_0 = \omega/c$ y $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío.

B.4 — 0.6pt

Emplee la aproximación $\tan \delta \approx \sin \delta$ y halle una expresión para el coeficiente β definido en el apartado B.2 en función de los demás parámetros.

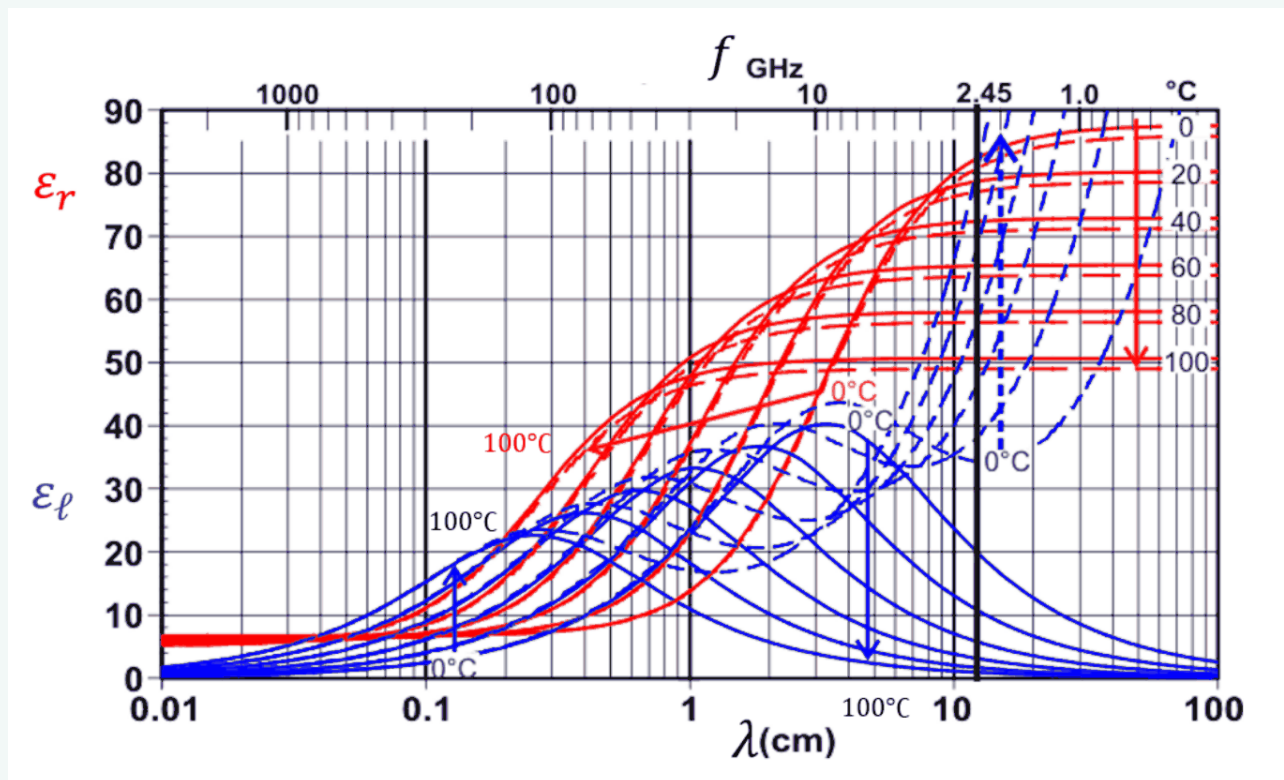


Figura 5. Las flechas indican la variación con la temperatura a través de las curvas desde 0°C hasta 100°C.

La Figura 5 representa ε_ℓ (azul) y ε_r (rojo), tanto para agua pura (líneas continuas) como para una disolución diluida de sal en agua (líneas discontinuas), en función de la longitud de onda o de la frecuencia, a varias temperaturas diferentes. La frecuencia angular $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ está indicada mediante una línea vertical gruesa. A continuación consideraremos únicamente radiación de microondas a esta frecuencia.

B.5 — 0.7pt

Utilice la Figura 5 para responder a las siguientes preguntas:

1. Para agua a 20°C , halle la profundidad de penetración $z_{1/2}$ a la que la potencia por unidad de volumen se reduce a la mitad de su valor en $z = 0$.
2. Indique en la Hoja de Respuestas si la profundidad de penetración de la radiación de microondas en el agua aumenta, disminuye o permanece igual con la temperatura.
3. Indique en la Hoja de Respuestas si la profundidad de penetración de la radiación de microondas en la sopa (disolución diluida de sal) aumenta, disminuye o permanece igual con la temperatura.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** $C \simeq 0.93 \text{ pF}$, $L \simeq 6.6 \text{ nH}$, lo que da

$$f_{\text{est}} \simeq 2.03 \text{ GHz.}$$

- **A.2:** En ambos casos,

$$\vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{x}.$$

Definamos $\omega_c = eB_0/m$, $\ell = mE_0/(eB_0^2)$ y $s = \omega_c t$. Con la posición inicial en el origen, las trayectorias solicitadas son

$$\frac{(x, y)_1}{\ell} = (-s + 4 \sin s, 4[1 - \cos s]),$$

$$\frac{(x, y)_2}{\ell} = (-s - 2 \sin s, -2[1 - \cos s]), \quad 0 < s < 4\pi.$$

Son trocoides con bucles que derivan hacia la izquierda, con un movimiento de giro en sentido antihorario.

- **A.3:**

$$r_{\text{max}} \simeq 3.2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.32 \text{ mm.}$$

- **A.4:** Mi interpretación de las tangentes a las líneas de campo es **A y B hacia el cátodo; C, D y E hacia el ánodo; ninguno exactamente perpendicular al radio**. La incertidumbre de la interpretación del diagrama se señala más adelante.
- **A.5:** **AB, AC y BC disminuyen; DE, DF y EF aumentan.**
- **A.6:** Hay **cuatro haces radiales**, separados por 90° . Añada copias de S giradas 90° , 180° y 270° . Giran **en sentido antihorario**, con

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{4} = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

• A.7:

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

• B.1: Para una magnitud del campo $|E|$ y el ángulo entre el dipolo y el campo instantáneo,

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta, \quad H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

La fórmula de la potencia independiente de la convención es $H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}$.

• B.2:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

• B.3:

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

• B.4:

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

• B.5:

1.

$$z_{1/2} = \frac{c \sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell} \simeq 1.2 \text{ cm}$$

a partir de las lecturas aproximadas de la gráfica $\varepsilon_r \simeq 78$, $\varepsilon_\ell \simeq 10$.

2. La profundidad de penetración en el agua pura **aumenta** con la temperatura.

3. La profundidad de penetración en la sopa **disminuye** con la temperatura.

Solución

A.1

Las caras conductoras aproximadamente paralelas que forman la ranura tienen un área hl y una separación d . Despreciando los efectos de borde, su capacitancia es

$$C \simeq \frac{\varepsilon_0 hl}{d}.$$

Utilizando las dimensiones de la Figura 1,

$$C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(17.5 \times 10^{-3})(6 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}} = 9.29 \times 10^{-13} \text{ F}.$$

Sea I la corriente total que circula alrededor de la cavidad cilíndrica. Su distribución uniforme a lo largo de la altura h da una densidad superficial de corriente efectiva I/h . Un solenoide ideal infinito con esta corriente superficial produciría $\mu_0 I/h$. Aplicando la corrección especificada,

$$B \simeq 0.6 \frac{\mu_0 I}{h}.$$

Aproximando el flujo a través de la cavidad por $B\pi R^2$,

$$L = \frac{\Phi}{I} \simeq 0.6 \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = 6.63 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

Por tanto,

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{0.6\mu_0\epsilon_0\pi R^2 l}} \simeq 2.03 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

La altura se cancela porque $C \propto h$ y $L \propto h^{-1}$. La estimación es aproximada porque el resonador se representa mediante una capacitancia y una inductancia concentradas e idealizadas.

A.2

El electrón obedece la ecuación de la fuerza de Lorentz,

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Para los campos indicados, sus componentes son

$$\dot{u}_x = -\omega_c u_y, \quad \dot{u}_y = \omega_c \left(u_x + \frac{E_0}{B_0} \right), \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

Definamos $v_D = E_0/B_0$. Una velocidad constante $-v_D \hat{x}$ hace que las fuerzas eléctrica y magnética se cancelen. De forma más general,

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = -v_D \hat{x}.$$

En el sistema de referencia que se traslada con esta velocidad, la velocidad restante gira uniformemente. Para $u_y(0) = 0$,

$$u_x = -v_D + A \cos(\omega_c t), \quad u_y = A \sin(\omega_c t),$$

donde $A = u_x(0) + v_D$. Los términos oscilatorios tienen promedio nulo, por lo que ambas condiciones iniciales dan la misma deriva.

Tomando $x(0) = y(0) = 0$, la integración da

$$x = -v_D t + \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad y = \frac{A}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)].$$

Para el caso 1, $A = 4v_D$; para el caso 2, $A = -2v_D$. Esto da las trayectorias paramétricas indicadas en las respuestas.

Para un dibujo preciso, utilice $\ell = v_D/\omega_c$. Los siguientes puntos describen el primer período ciclotrónico:

$s = \omega_c t$	Caso 1: $(x/\ell, y/\ell)$	Caso 2: $(x/\ell, y/\ell)$
0	(0, 0)	(0, 0)
$\pi/2$	$(4 - \pi/2, 4)$	$(-2 - \pi/2, -2)$
π	$(-\pi, 8)$	$(-\pi, -4)$
$3\pi/2$	$(-4 - 3\pi/2, 4)$	$(2 - 3\pi/2, -2)$
2π	$(-2\pi, 0)$	$(-2\pi, 0)$

Repita esta curva trasladada $-2\pi\ell$ en x para obtener el segundo período.

En el caso 1, el electrón se mueve inicialmente hacia la derecha y se curva hacia arriba; toda la curva se encuentra en $0 \leq y \leq 8\ell$. En el caso 2, se mueve inicialmente hacia la izquierda y se curva hacia abajo; la curva se encuentra en $-4\ell \leq y \leq 0$. Ambos terminan en $(-4\pi\ell, 0)$ tras el intervalo especificado.

Su movimiento de giro es antihorario, y ninguna de las trayectorias tiene cúspides porque su velocidad nunca se anula.

A.3

En el sistema de referencia local de deriva, aproximadamente inercial, la fuerza eléctrica queda aproximadamente cancelada por la fuerza magnética asociada a la velocidad del sistema de referencia. El movimiento restante es aproximadamente circular:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = ev_{\perp}B_0, \quad r = \frac{mv_{\perp}}{eB_0}.$$

Utilizando la cota total de energía cinética como estimación superior de la energía de giro,

$$v_{\perp} \lesssim \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}.$$

Aquí,

$$K_{\max} = 800(1.6 \times 10^{-19}) = 1.28 \times 10^{-16} \text{ J},$$

por lo que

$$v_{\max} \simeq 1.68 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

y

$$r_{\max} \simeq \frac{\sqrt{2mK_{\max}}}{eB_0} = \frac{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31})(1.28 \times 10^{-16})}}{(1.6 \times 10^{-19})(0.3)} = 3.18 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Por tanto, $r_{\max} \simeq 0.32 \text{ mm}$, mucho menor que la separación de 15 mm . Esto justifica tratar el giro como un pequeño movimiento superpuesto a la deriva de su centro.

A.4

Sea $\hat{r}$ el vector unitario radial hacia fuera y $\hat{\phi}$ el vector unitario azimutal en sentido antihorario. Con el campo magnético dirigido hacia fuera de la página,

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_{\phi} \hat{\phi}$$

da

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = \frac{E_{\phi}}{B_0} \hat{r} - \frac{E_r}{B_0} \hat{\phi}.$$

Por tanto:

- $E_{\phi} > 0$ produce una deriva hacia el ánodo.
- $E_{\phi} < 0$ produce una deriva hacia el cátodo.
- $E_{\phi} = 0$ produce una deriva perpendicular al radio.

El campo eléctrico estático es radial, por lo que solo contribuye a la deriva azimuthal. La clasificación radial queda determinada por completo por la componente tangencial del campo alterno representado.

La interpretación de las tangentes locales da:

Electrón	Componente tangencial del campo alterno	Deriva radial
A	Sentido horario	Hacia el cátodo
B	Sentido horario	Hacia el cátodo
C	Sentido antihorario	Hacia el ánodo
D	Sentido antihorario	Hacia el ánodo
E	Sentido antihorario	Hacia el ánodo

Estas clasificaciones se refieren a la componente radial; los electrones también tienen deriva azimuthal. Las tangentes se leen en un esquema, por lo que estas clasificaciones conllevan cierta incertidumbre de lectura.

A.5

A una distancia común ρ del centro del cátodo,

$$\dot{\phi} = \frac{u_{\phi}}{\rho} = -\frac{E_r}{B_0 \rho}.$$

El campo estático es radial hacia dentro y proporciona a los seis electrones la misma velocidad angular antihoraria a ese radio. Por tanto, solo las diferencias en la componente radial del campo alterno afectan a sus separaciones angulares instantáneas.

Para A, B y C, la Figura 3 muestra que la componente radial del campo alterno cambia de dirigida hacia fuera en A, pasando por aproximadamente cero en B, a dirigida hacia dentro en C. En consecuencia,

$$\dot{\phi}_A < \dot{\phi}_B < \dot{\phi}_C.$$

Sus posiciones están ordenadas como $\phi_A > \phi_B > \phi_C$. Por tanto, el electrón que va detrás se mueve más deprisa que el que va delante, de modo que las tres separaciones disminuyen:

$$\frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_B) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_C) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_B - \phi_C) < 0.$$

Para D, E y F, la componente radial del campo alterno cambia de manera opuesta: hacia dentro en D, aproximadamente cero en E y hacia fuera en F. Así,

$$\dot{\phi}_D > \dot{\phi}_E > \dot{\phi}_F.$$

Como $\phi_D > \phi_E > \phi_F$, las tres separaciones aumentan.

Par	Cambio de la separación angular
AB	Disminuye
AC	Disminuye
BC	Disminuye
DE	Aumenta
DF	Aumenta
EF	Aumenta

A.6

Los resonadores adyacentes tienen fases de oscilación opuestas. Por tanto, en un instante dado, regiones angulares alternas concentran los electrones, mientras que las regiones intermedias los dispersan. Así, ocho resonadores producen cuatro haces radiales.

El dibujo debe contener tres copias adicionales de S, obtenidas mediante rotaciones de 90° , 180° y 270° alrededor del centro del cátodo. Sus formas deben tener el mismo sentido de curvatura.

El campo estático apunta hacia dentro. Su deriva es

$$(-\hat{r}) \times \hat{z} = +\hat{\phi},$$

por lo que los haces giran en sentido antihorario.

Tras medio período de oscilación, las polaridades de los resonadores se invierten. Un haz debe avanzar hasta la posición del siguiente resonador, un ángulo $2\pi/8 = \pi/4$. Por tanto,

$$\omega_s = \frac{\pi/4}{T/2} = \frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{4}.$$

Utilizando $f = 2.45 \times 10^9$ Hz,

$$\boxed{\omega_s = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.}$$

Equivalentemente, los haces realizan 6.125×10^8 revoluciones por segundo.

A.7

Bajo la aproximación indicada, la magnitud del campo en el punto medio del espacio entre los electrodos es

$$E_{\text{mid}} \simeq \frac{V_0}{b-a}.$$

El radio del punto medio es

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}.$$

La deriva de los electrones allí debe tener la rapidez tangencial del haz:

$$\frac{E_{\text{mid}}}{B_0} \simeq \omega_s \rho_{\text{mid}}.$$

En consecuencia,

$$\frac{V_0}{B_0(b-a)} \simeq \omega_s \frac{a+b}{2},$$

lo que da

$$\boxed{V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).}$$

Con los valores dados de B_0 y f , esto también puede escribirse como

$$V_0 \simeq (5.77 \times 10^8 \text{ V m}^{-2})(b^2 - a^2),$$

con a y b medidos en metros.

B.1

Las fuerzas sobre las dos cargas forman un par. El momento de fuerzas es

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Así, si θ se define como el ángulo entre el dipolo y el campo instantáneo,

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta.$$

El momento de fuerzas tiende a reducir este ángulo. Su componente con signo conjugada a θ es, por tanto, $-p_0 |E| \sin \theta$, lo que da la potencia mecánica

$$H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

En particular, un dipolo que se está alineando tiene $\dot{\theta} < 0$, por lo que el campo entrega una potencia positiva.

El resultado puede deducirse sin adoptar una convención angular. Si $\vec{r}_+$ y $\vec{r}_-$ son las posiciones de las cargas,

$$H_i = q\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_+ - q\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_- = \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)].$$

Por tanto,

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

Si, en cambio, θ se mide desde el semieje positivo fijo x y $E(t)$ es una componente con signo, esto se convierte en

$$H_i = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta) = -p_0 E(t) \sin \theta \dot{\theta}.$$

No hay ningún término $\dot{E}$ en la potencia mecánica entregada al dipolo.

B.2

Sumando la potencia de cada dipolo en una unidad de volumen se obtiene

$$H(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

La polarización dada tiene como derivada

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \beta \epsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \hat{x}.$$

Por tanto,

$$H(t) = \beta \epsilon_0 \omega E_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t - \delta).$$

Utilizando

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta,$$

y los promedios a lo largo de un período

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

obtenemos

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

Para un retraso de fase positivo, la potencia media absorbida es positiva.

B.3

Sea $\mathcal{E}(z)$ la amplitud local del campo eléctrico. La densidad media de energía eléctrica es

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

La densidad media de energía magnética es igual a esta, por lo que

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Utilizando la velocidad de propagación c/n en el modelo de ondas en un dieléctrico del problema,

$$I(z) = \frac{c}{n} \langle u \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2(z),$$

donde $n^2 = \varepsilon_r$.

La conservación de la energía para una capa delgada de espesor dz da

$$-\frac{dI}{dz} = \langle H \rangle.$$

Sustituyendo el resultado de B.2 y eliminando $\mathcal{E}^2$,

$$-\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega \mathcal{E}^2 \sin \delta = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} I.$$

Para un medio homogéneo a temperatura fija, el coeficiente es constante. La integración da

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

El coeficiente de atenuación de la potencia es, por tanto,

$$\alpha = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc}.$$

B.4

La ecuación (2) da una amplitud del campo eléctrico proporcional a

$$e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta}.$$

Como la intensidad es proporcional al cuadrado de esta amplitud,

$$I(z) = I(0) e^{-n k_0 z \tan \delta}.$$

La comparación con B.3, utilizando $k_0 = \omega/c$, da

$$\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} = \frac{n \omega}{c} \tan \delta.$$

Así,

$$\beta \sin \delta = n^2 \tan \delta.$$

Dentro de la aproximación solicitada $\tan \delta \simeq \sin \delta$,

$$\boxed{\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.}$$

Este resultado se obtiene dentro de las aproximaciones de dieléctrico y de pérdidas pequeñas especificadas en el problema.

B.5

Utilizando la relación proporcionada $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$, el coeficiente de atenuación de la potencia es

$$\alpha = nk_0 \tan \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\ell}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

A temperatura uniforme, la potencia local absorbida por unidad de volumen es proporcional a la intensidad local:

$$\langle H(z) \rangle = \alpha I(z).$$

Por tanto, tiene la misma dependencia exponencial,

$$\frac{\langle H(z) \rangle}{\langle H(0) \rangle} = e^{-\alpha z}.$$

1. Profundidad de reducción de la potencia a la mitad a 20°C.

La condición $e^{-\alpha z_{1/2}} = 1/2$ da

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell}.$$

A la frecuencia señalada, las curvas continuas para 20°C dan aproximadamente

$$\varepsilon_r \simeq 78, \quad \varepsilon_\ell \simeq 10.$$

En consecuencia,

$$z_{1/2} \simeq \frac{(3.0 \times 10^8) \sqrt{78} \ln 2}{(2\pi)(2.45 \times 10^9)(10)} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Por tanto, la gráfica indica una profundidad de reducción de la potencia a la mitad de aproximadamente

$$\boxed{z_{1/2} \simeq 1.2 \text{ cm.}}$$

Esta es la profundidad de reducción de la potencia a la mitad; el decaimiento de la amplitud del campo tiene un exponente menor en un factor de dos.

2. Agua pura al aumentar la temperatura.

A frecuencia fija,

$$z_{1/2} \propto \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\varepsilon_\ell}.$$

Las curvas azules continuas muestran una disminución considerable de ε_ℓ con la temperatura. La disminución de $\sqrt{\varepsilon_r}$ es mucho menor en términos relativos. Por tanto, el cociente aumenta:

La profundidad de penetración en el agua pura aumenta con la temperatura.

3. Sopa al aumentar la temperatura.

A la misma frecuencia, las curvas azules discontinuas muestran que las pérdidas dieléctricas aumentan al aumentar la temperatura, mientras que las curvas rojas discontinuas muestran una disminución de ϵ_r . Ambos cambios reducen $\sqrt{\epsilon_r}/\epsilon_\ell$. Por tanto,

La profundidad de penetración en la sopa disminuye con la temperatura.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Motor termoacústico

Un motor termoacústico es un dispositivo que convierte calor en potencia acústica, u ondas sonoras, una forma de trabajo mecánico. Como muchas otras máquinas térmicas, puede funcionar en sentido inverso para convertirse en un refrigerador, utilizando el sonido para bombear calor desde un foco frío hasta uno caliente. Las altas frecuencias de funcionamiento reducen la conducción de calor y eliminan la necesidad de confinar una cámara de trabajo. A diferencia de muchos otros tipos de motores, el motor termoacústico no tiene piezas móviles, salvo el propio fluido de trabajo.

Los rendimientos de las máquinas termoacústicas suelen ser inferiores a los de otros tipos de motores, pero presentan ventajas en cuanto a costes de instalación y mantenimiento. Esto abre posibilidades para aplicaciones de energías renovables, como las centrales termosolares y el aprovechamiento del calor residual. Nuestro análisis se centrará en la generación de energía acústica dentro del sistema, sin considerar su extracción o conversión para accionar dispositivos externos.

Parte A: Onda sonora en un tubo cerrado (3.7 puntos)

Consideremos un tubo térmicamente aislante de longitud L y área de sección transversal S , cuyo eje se encuentra en la dirección x . Los dos extremos del tubo están situados en $x = 0$ y $x = L$. El tubo está lleno de un gas ideal y cerrado herméticamente por ambos extremos. En equilibrio, el gas tiene temperatura T_0 , presión p_0 y densidad de masa ρ_0 . Supongamos que la viscosidad puede despreciarse y que el gas solo se mueve en la dirección x . Las propiedades del gas son uniformes en las direcciones perpendiculares y y z .

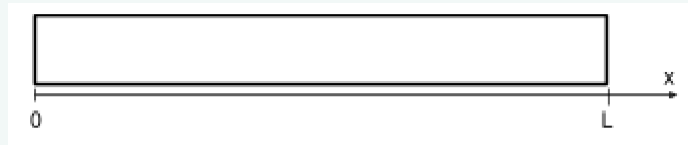


Figura 1

A.1 (0.3pt)

Cuando se forma una onda sonora estacionaria, los elementos de gas oscilan en la dirección x con frecuencia angular ω . La amplitud de las oscilaciones depende de la posición de equilibrio x de cada elemento a lo largo del tubo. El desplazamiento longitudinal de cada elemento de gas respecto de su posición de equilibrio x viene dado por

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(obsérvese que aquí u describe el desplazamiento de un elemento de gas)

donde $a \ll L$ es una constante positiva, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y λ es la longitud de onda. ¿Cuál es la máxima longitud de onda posible $\lambda_{\max}$ en este sistema?

A lo largo de todo el problema supondremos un modo de oscilación con $\lambda = \lambda_{\max}$.

Consideremos ahora una pequeña porción de gas, situada en reposo entre x y $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Como consecuencia de la onda de desplazamiento del apartado A.1, la porción oscila a lo largo del eje x y experimenta un cambio de volumen y de otras propiedades termodinámicas.

En todos los apartados siguientes, supongamos que estos cambios de las propiedades termodinámicas son pequeños en comparación con los valores sin perturbar.

A.2 (0.5pt)

El volumen de la porción $V(x, t)$ oscila alrededor del valor de equilibrio $V_0 = S\Delta x$ y tiene la forma

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Obtenga una expresión para $V_1(x)$ en función de V_0 , a , k y x .

A.3 (0.7pt)

Suponga que la presión total del gas, como consecuencia de la onda sonora, toma la forma aproximada

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Considerando las fuerzas que actúan sobre la porción de gas, calcule la amplitud $p_1(x)$ de la oscilación de presión al orden dominante, en función de la posición x , la densidad de equilibrio ρ_0 , la amplitud de desplazamiento a y los parámetros de la onda k y ω .

A frecuencias acústicas, la conductividad térmica del gas puede despreciarse. Trataremos la expansión y la contracción de las porciones de gas como procesos puramente adiabáticos, que satisfacen la relación $pV^\gamma = \text{const}$, donde γ es el coeficiente adiabático.

A.4 (0.3pt)

Utilice la relación anterior y los resultados de los apartados anteriores para obtener una expresión para la velocidad de las ondas sonoras $c = \omega/k$ en el tubo, a primer orden. Expresé su respuesta en función de p_0 , ρ_0 y el coeficiente adiabático γ .

A.5 (0.7pt)

El cambio de temperatura del gas debido a la expansión y la contracción adiabáticas, como consecuencia de la onda sonora, tiene la forma:

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Calcule la amplitud $T_1(x)$ de las oscilaciones de temperatura en función de T_0 , γ , a , k y x .

A.6 (1.2pt)

Únicamente para este apartado, suponemos una interacción térmica débil entre el tubo y el gas. Como consecuencia, la onda sonora estacionaria permanece casi inalterada, pero el gas puede intercambiar una pequeña cantidad de calor con el tubo. El calentamiento debido a la viscosidad puede despreciarse.

Para cada uno de los puntos de la Figura 2 (A y C en los extremos del tubo, B en el centro), indique si la temperatura del tubo en ese punto aumentará, disminuirá o permanecerá igual a largo plazo.

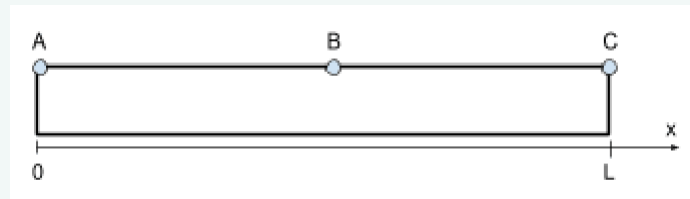


Figura 2

Parte B: Amplificación de la onda sonora inducida por contacto térmico externo (6.3 puntos)

Se coloca dentro del tubo un apilamiento de placas sólidas delgadas y bien separadas. Las placas del apilamiento están alineadas en paralelo al eje del tubo, para no obstaculizar el flujo de gas a lo largo de este. El centro del apilamiento se sitúa en $x_0 = L/4$, y este abarca una anchura $\ell \ll L$ a lo largo del eje del tubo, ocupando toda su sección transversal. Entre los extremos derecho e izquierdo del apilamiento se mantiene una diferencia de temperatura τ . Un foco térmico externo mantiene el extremo izquierdo del apilamiento, situado en $x_H = x_0 - \ell/2$, a una temperatura $T_H = T_0 + \tau/2$, mientras que su extremo derecho, situado en $x_C = x_0 + \ell/2$, se mantiene a una temperatura $T_C = T_0 - \tau/2$.

El apilamiento de placas permite un pequeño flujo longitudinal de calor para mantener un gradiente de temperatura constante entre sus extremos, de modo que $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.

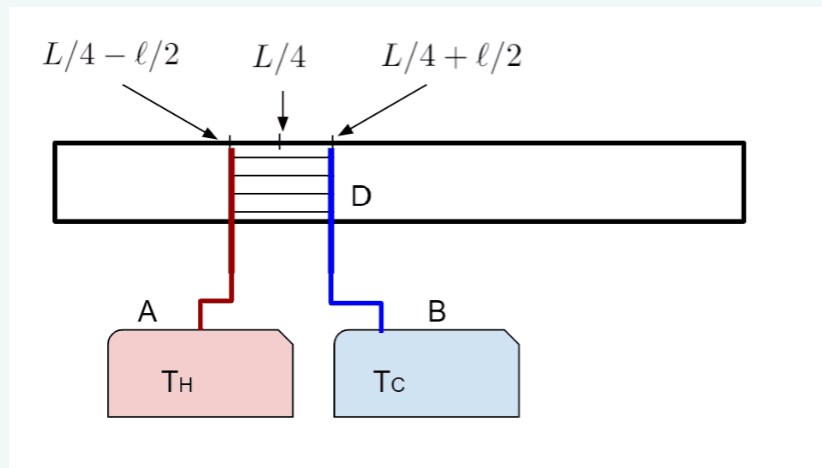


Figura 3. Esquema del sistema. (A) y (B) indican los focos térmicos caliente y frío, respectivamente. (D) indica el apilamiento.

Para analizar el efecto del contacto térmico entre el apilamiento de placas y el gas sobre las ondas sonoras en el tubo, adopte las siguientes hipótesis:

- Como en la parte anterior, todos los cambios de las propiedades termodinámicas son pequeños en comparación con los valores sin perturbar.
- El sistema funciona en el modo fundamental de onda estacionaria, con la mayor longitud de onda posible. Este modo solo se ve ligeramente modificado por la presencia del apilamiento de placas.

- El apilamiento es mucho más corto que la longitud de onda $\ell \ll \lambda_{\max}$, y puede situarse lo bastante lejos tanto de los nodos de desplazamiento como de los de presión, de modo que el desplazamiento $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ y la presión $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ pueden considerarse uniformes en toda la longitud del apilamiento.
- Podemos despreciar los efectos de borde causados por las porciones que entran y salen del apilamiento.
- La diferencia de temperatura entre los extremos del apilamiento de placas, es decir, entre los focos caliente y frío, es pequeña en comparación con la temperatura absoluta: $\tau \ll T_0$.
- La conducción de calor a través del apilamiento, a través del gas y a lo largo del tubo es despreciable en todos los casos. Los únicos mecanismos significativos de transferencia de calor son la convección debida al movimiento del gas y la conducción entre el gas y el apilamiento.

B.1 (0.4pt)

Considere una porción concreta de gas en la región del apilamiento, situada originalmente en $x_0 = L/4$. A medida que la porción se mueve dentro del apilamiento, la temperatura local de la parte cercana del apilamiento cambia de la siguiente manera:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Expresé T_{st} en función de a , τ y ℓ .

B.2 (1.0pt)

¿Por encima de qué diferencia de temperatura crítica τ_{cr} transportará el gas calor desde el foco caliente hasta el frío? Expresé τ_{cr} en función de T_0 , γ , k y ℓ .

B.3 (0.8pt)

Obtenga la expresión general aproximada del flujo de calor $\frac{dQ}{dt}$ que entra en una pequeña porción de gas como función lineal de las tasas de variación de su volumen y su presión. Expresé su respuesta en función de la tasa de variación del volumen $\frac{dV}{dt}$, la tasa de variación de la presión $\frac{dp}{dt}$, los valores de equilibrio sin perturbar de la presión y el volumen de la porción p_0 , V_0 y el índice adiabático γ . (Puede utilizar la expresión de la capacidad calorífica molar a volumen constante $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, donde R es la constante de los gases.)

La tasa limitada de transferencia de calor entre la porción y el apilamiento provoca una diferencia de fase entre las oscilaciones de presión y de volumen de la porción. Veremos cómo esto genera trabajo.

Supongamos que el flujo de calor que entra en la porción desde el apilamiento es proporcional a la diferencia de temperatura entre la porción y el elemento vecino del apilamiento, y viene dado aproximadamente por $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Aquí, T_1 y T_{st} son las amplitudes de las oscilaciones de temperatura de la porción de gas y de la parte vecina del apilamiento de los apartados A.5 y B.1, respectivamente, y $\beta > 0$ es una constante. Suponga que, a las frecuencias de funcionamiento de la máquina, el cambio de temperatura del gas debido a este flujo de calor es insignificante en comparación tanto con T_1 como con T_{st} .

B.4 (1.9pt)

Para calcular el trabajo, consideraremos un cambio del volumen de la porción en movimiento debido al contacto térmico con el apilamiento. Escribamos la presión y el volumen de la porción bajo la influencia del apilamiento en la forma:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

Dados p_a y p_b , halle los coeficientes V_a y V_b . Exprese su respuesta en función de $p_a, p_b, p_0, V_0, \gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a$ y ℓ .

B.5 (0.8pt)

Obtenga una expresión aproximada del trabajo acústico por unidad de volumen w producido por la porción de gas durante un ciclo. Integre sobre el volumen del apilamiento para obtener el trabajo total W_{tot} generado por el gas durante un ciclo. Exprese W_{tot} en función de $\gamma, \tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, k$ y S .

B.6 (0.8pt)

Obtenga una expresión aproximada del calor Q_{tot} transportado desde el lado izquierdo del plano $x = x_0$ hacia el derecho durante un ciclo. Exprese su respuesta en función de $\tau, \tau_{cr}, \beta, \omega, a, S, \ell$.

(Pista: puede utilizar la fórmula $j = Q \frac{du}{dt}$ para la corriente de calor debida a la convección.)

B.7 (0.6pt)

Halle el rendimiento η del motor termoacústico. El rendimiento se define como el cociente entre el trabajo acústico generado y el calor extraído del foco caliente. Exprese su respuesta en función de la diferencia de temperatura τ entre los focos caliente y frío, la diferencia de temperatura crítica τ_{cr} y el rendimiento de Carnot $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los coeficientes V_1, p_1, T_1 son coeficientes con signo en las formas oscilatorias especificadas. En todo el problema, $k = \pi/L$.

- A.1

$$\lambda_{\max} = 2L.$$

- A.2

$$V_1(x) = V_0 a k \cos(kx).$$

- A.3

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

- A.4

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

- A.5

$$T_1(x) = (\gamma - 1)T_0 a k \cos(kx).$$

- A.6 A: **umenta**; B: **disminuye**; C: **umenta**.

- B.1

$$T_{st} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

- B.2

$$\tau_{cr} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

El calor se transporta del foco caliente al frío cuando $\tau > \tau_{cr}$.

- B.3

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{\gamma p_0 dV/dt + V_0 dp/dt}{\gamma - 1}.$$

- B.4

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right], \quad V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

- B.5

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell}(\tau - \tau_{cr}),$$

$$W_{tot} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega}(\tau - \tau_{cr}).$$

- B.6

$$Q_{tot} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell}(\tau - \tau_{cr}).$$

- B.7

$$\eta \simeq \frac{\tau_{cr}}{\tau} \eta_c, \quad \tau > \tau_{cr}.$$

Solución

Conservamos las perturbaciones de primer orden al determinar las magnitudes termodinámicas oscilantes. Los primeros promedios no nulos por ciclo del trabajo y del calor transportado aparecen a segundo orden en la amplitud de la onda. El acoplamiento térmico es débil, por lo que pueden utilizarse

las amplitudes de la onda sin perturbar en las expresiones que ya son proporcionales a dicho acoplamiento.

A.1

Los extremos rígidos y cerrados herméticamente exigen que el desplazamiento longitudinal sea nulo:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

La primera condición ya se cumple. La segunda da

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

La elección $n = 0$ no produce ninguna onda. Por tanto,

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}.$$

La mayor longitud de onda corresponde a $n = 1$:

$$\boxed{\lambda_{\max} = 2L, \quad k = \frac{\pi}{L}.$$

A.2

Los dos límites de la porción se desplazan hasta

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t).$$

En consecuencia,

$$V(x, t) = S [\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)].$$

Para $k\Delta x \ll 1$,

$$V(x, t) \simeq S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = V_0 [1 + ak \cos(kx) \cos(\omega t)].$$

Por tanto,

$$\boxed{V_1(x) = V_0 ak \cos(kx).}$$

A.3

Las fuerzas de presión sobre la porción dan, a primer orden,

$$F_x = S[p(x, t) - p(x + \Delta x, t)] \simeq -S\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

La masa de la porción es $\rho_0 S\Delta x$. Por tanto, la segunda ley de Newton se convierte en

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Sustituyendo las oscilaciones dadas,

$$-\rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = p'_1(x) \cos(\omega t),$$

de modo que

$$p'_1(x) = -\rho_0 a \omega^2 \sin(kx).$$

La integración da

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx) + C.$$

No hay compresión acústica espacialmente uniforme: el cambio total de volumen es proporcional a

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L, t) - u(0, t) = 0.$$

La relación adiabática lineal entre presión y compresión, que se explicita en A.4, exige entonces que el promedio espacial de la perturbación de presión sea nulo. Como $\int_0^L \cos(kx) dx = 0$, esto fija $C = 0$. Por consiguiente,

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4

Linealizando $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$,

$$\frac{\delta p}{p_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0.$$

Utilizando $\delta p = -p_1 \cos(\omega t)$ y $\delta V = V_1 \cos(\omega t)$,

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{V_1}{V_0} = \gamma p_0 a k \cos(kx).$$

La comparación con A.3 da

$$\frac{\rho_0 a \omega^2}{k} = \gamma p_0 a k,$$

y, por tanto,

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

A.5

Para una cantidad fija de gas ideal,

$$pV = nRT.$$

Su forma linealizada es

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} + \frac{\delta V}{V_0}.$$

Utilizando la relación adiabática de A.4,

$$\frac{\delta T}{T_0} = -(\gamma - 1) \frac{\delta V}{V_0} = -(\gamma - 1) a k \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Comparando con la oscilación de temperatura especificada,

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

A.6

Consideremos una porción en la mitad izquierda del tubo, donde $\cos(kx) > 0$.

Cuando se desplaza hacia la derecha, se expande y se enfría. En consecuencia, absorbe calor del tubo en una posición relativamente más a la derecha. Cuando se desplaza hacia la izquierda, se comprime y se calienta, por lo que cede calor al tubo en una posición relativamente más a la izquierda. La

repetición de este proceso transfiere calor hacia el extremo izquierdo.

En la mitad derecha, $\cos(kx) < 0$, por lo que la correspondencia se invierte: una porción absorbe calor cuando se desplaza hacia el centro y cede calor cuando se desplaza hacia el extremo derecho.

Así, el movimiento acústico bombea calor desde la región central hacia ambos extremos:

A : la temperatura aumenta, B : la temperatura disminuye, C : la temperatura aumenta.

Aunque la porción cuya posición de equilibrio está exactamente en el centro tiene una oscilación de temperatura de primer orden nula, las porciones vecinas atraviesan la región central y extraen calor. El efecto térmico medio es de segundo orden en la amplitud; no está determinado por la temperatura de primer orden en una única posición de equilibrio.

B.1

En el centro del apilamiento,

$$kx_0 = \frac{\pi}{L} \frac{L}{4} = \frac{\pi}{4},$$

por lo que el desplazamiento de la porción es

$$u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t).$$

Su posición instantánea es $x_0 + u(x_0, t)$. Sustituyendo en el perfil de temperatura de las placas se obtiene

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} u(x_0, t) = T_0 - \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} \cos(\omega t).$$

Por tanto,

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

B.2

La amplitud adiabática de la temperatura del gas en el centro del apilamiento es

$$T_1(x_0) = \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

En el extremo izquierdo del movimiento de la porción, la temperatura del gas es $T_0 + T_1$, mientras que la temperatura de la parte vecina del apilamiento es $T_0 + T_{\text{st}}$. Para absorber calor allí, la porción debe satisfacer

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

En el extremo derecho, esta misma condición hace que el apilamiento esté más frío que el gas, de modo que la porción cede calor allí. Así, transporta calor del foco caliente al frío precisamente cuando

$$\frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} > \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

La diferencia de temperatura crítica es, por tanto,

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

Cuando se cumple la igualdad, las oscilaciones de temperatura del gas y de la parte vecina del apilamiento coinciden, por lo que el intercambio térmico al orden dominante se anula. Por debajo de este umbral, el transporte de calor se invierte.

B.3

Tomemos $dQ > 0$ para el calor que entra en la porción y $p dV > 0$ para el trabajo realizado por el gas. El primer principio es

$$dQ = dU + p dV.$$

Para el gas ideal,

$$U = nc_v T = \frac{nRT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Por consiguiente,

$$dQ = \frac{V dp + p dV}{\gamma - 1} + p dV = \frac{V dp + \gamma p dV}{\gamma - 1}.$$

A primer orden, los coeficientes que multiplican las pequeñas tasas de variación pueden sustituirse por los valores de equilibrio:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{V_0 dp/dt + \gamma p_0 dV/dt}{\gamma - 1}}.$$

B.4

De B.1 y B.2,

$$T_{st} - T_1 = \frac{a}{\sqrt{2} \ell} (\tau - \tau_{cr}).$$

Para abreviar, definimos

$$\Delta T \equiv \frac{a(\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2} \ell}.$$

El aporte de calor prescrito es entonces

$$\dot{Q} = -\beta V_0 \Delta T \cos(\omega t).$$

Derivando las expresiones de la presión y del volumen,

$$\dot{p} = \omega p_a \cos(\omega t) + \omega p_b \sin(\omega t),$$

$$\dot{V} = \omega V_a \cos(\omega t) - \omega V_b \sin(\omega t).$$

La sustitución en B.3 da

$$\dot{Q} = \frac{\omega}{\gamma - 1} [(V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) \cos(\omega t) + (V_0 p_b - \gamma p_0 V_b) \sin(\omega t)].$$

Igualando los coeficientes del seno,

$$V_0 p_b - \gamma p_0 V_b = 0,$$

de modo que

$$\boxed{V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}}.$$

Igualando los coeficientes del coseno,

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} (V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) = -\beta V_0 \Delta T.$$

Así,

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right].$$

El término proporcional a β aporta la componente del volumen necesaria para que el trabajo por ciclo sea no nulo.

B.5

El trabajo realizado por una porción durante un ciclo es

$$W_{\text{parcel}} = \oint p dV.$$

Escribiendo $\theta = \omega t$, la contribución de la presión constante se anula al integrar, y queda

$$W_{\text{parcel}} = \int_0^{2\pi} (p_a \sin \theta - p_b \cos \theta)(V_a \cos \theta - V_b \sin \theta) d\theta.$$

Utilizando

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi,$$

obtenemos

$$W_{\text{parcel}} = -\pi(p_a V_b + p_b V_a).$$

Los términos que contienen $p_a p_b$ se cancelan al sustituir B.4:

$$W_{\text{parcel}} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta V_0 p_b}{\gamma p_0 \omega} \Delta T.$$

Por tanto, el trabajo por unidad de volumen de equilibrio es

$$w = \frac{W_{\text{parcel}}}{V_0} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta p_b}{\gamma p_0 \omega} \frac{a(\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2}\ell}.$$

Como esta expresión ya es de primer orden en el acoplamiento térmico, utilizamos el coeficiente de presión sin perturbar:

$$p_b \simeq p_1(x_0) = \gamma p_0 a k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\gamma p_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente,

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{cr}).$$

El apilamiento es corto, por lo que esta densidad de trabajo es aproximadamente uniforme en su volumen de gas $S\ell$. Así,

$$W_{\text{tot}} \simeq w S \ell,$$

lo que da

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

El trabajo es positivo en el régimen de funcionamiento como motor $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

B.6

Sea $q(t)$ el calor adquirido del apilamiento por unidad de volumen de equilibrio del gas, medido respecto de una constante arbitraria. Al orden conservado,

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V_0} = -\beta \Delta T \cos(\omega t).$$

Integrando,

$$q(t) = -\frac{\beta \Delta T}{\omega} \sin(\omega t) + q_*.$$

La velocidad de la porción en el centro del apilamiento es

$$v(t) = \dot{u}(x_0, t) = -\frac{a\omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

Con q expresado por unidad de volumen, el flujo de calor por convección por unidad de área es

$$j(t) = q(t)v(t).$$

La constante arbitraria no contribuye al transporte neto porque el promedio de la velocidad es nulo. La contribución puramente adiabática también tiene un promedio por ciclo nulo: es proporcional a $\cos(\omega t)$, mientras que la velocidad es proporcional a $\sin(\omega t)$. El calor neto transportado a través de la sección transversal es, por tanto,

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= S \int_0^{2\pi/\omega} q(t)v(t) dt \\ &= \frac{S\beta a \Delta T}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{\pi S \beta a \Delta T}{\sqrt{2} \omega}. \end{aligned}$$

Sustituyendo ΔT ,

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi \beta a^2 S}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

El signo es positivo para el transporte de izquierda a derecha cuando $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

B.7

Con la precisión adoptada para el apilamiento corto y la pequeña diferencia de temperatura, el calor extraído del foco caliente es aproximadamente el calor transportado a través del centro del apilamiento:

$$Q_H \simeq Q_{\text{tot}}.$$

La diferencia entre ambos es del orden del trabajo acústico. Como el propio rendimiento es pequeño, tener en cuenta esa diferencia solo modificaría el rendimiento a un orden superior.

Utilizando B.5 y B.6,

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_H} \simeq \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma - 1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0}.$$

Por otra parte,

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0 - \tau/2}{T_0 + \tau/2} = \frac{\tau}{T_0 + \tau/2} \simeq \frac{\tau}{T_0},$$

porque $\tau \ll T_0$. Por tanto,

$$\boxed{\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c.}$$

Para el funcionamiento como motor, $\tau > \tau_{\text{cr}}$, de modo que el rendimiento es inferior al rendimiento de Carnot. Al acercarse al umbral desde valores superiores, el rendimiento se aproxima al valor de Carnot a este orden, mientras que tanto el trabajo producido como el calor transportado se anulan. En el propio umbral, su cociente no define un rendimiento de motor con producción de trabajo finita.

La solución se comprobó con la solución oficial.