

IPhO 2019

Theorieaufgaben und Lösungen · Tel Aviv, Israel · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2019/

Aufgabe 1: Federn mit effektiver Länge null und Slinky-Spiralfedern

Eine Feder mit effektiver Länge null (ZLS) ist eine Feder, bei der die Kraft proportional zur Federlänge ist, $F = kL$ für $L > L_0$, wobei L_0 sowohl die minimale Länge der Feder als auch ihre ungedehnte Länge ist. Abbildung 1 zeigt den Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Federlänge L für eine ZLS; die Steigung der Geraden ist die Federkonstante k .

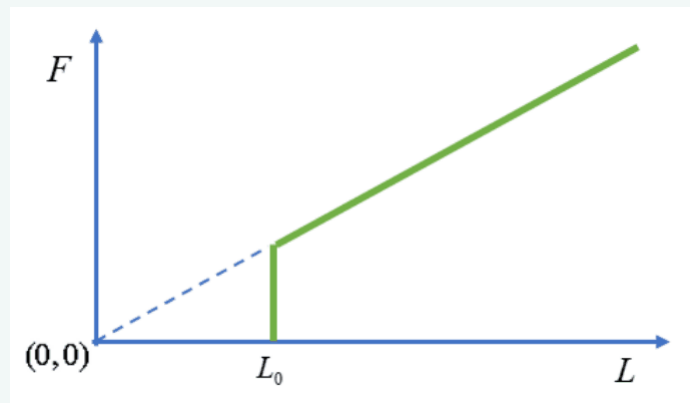


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Federlänge L

Eine ZLS ist in der Seismografie nützlich und ermöglicht eine sehr genaue Messung von Änderungen der Fallbeschleunigung g . Hier betrachten wir eine homogene ZLS, deren Gewichtskraft Mg größer als kL_0 ist. Wir definieren das entsprechende dimensionslose Verhältnis $\alpha = kL_0/Mg < 1$, um die relative Weichheit der Feder zu charakterisieren. Das als „Slinky“ bekannte Spielzeug kann eine solche ZLS sein, muss es aber nicht.

Teil A: Statik (3.0 Punkte)

A.1	Betrachten Sie einen Abschnitt der ungedehnten ZLS-Feder mit der Länge $\Delta\ell$, der anschließend unter schwerelosen Bedingungen durch eine Kraft F gedehnt wird. Wie groß ist die Länge Δy dieses Abschnitts als Funktion von F , $\Delta\ell$ und den Parametern der Feder?	0.5 Pkt.
A.2	Berechnen Sie für einen Abschnitt der Länge $\Delta\ell$ die Arbeit ΔW , die erforderlich ist, um ihn von seiner ursprünglichen Länge $\Delta\ell$ auf eine Länge Δy zu dehnen.	0.5 Pkt.

In dieser gesamten Aufgabe kennzeichnen wir einen Punkt auf der Feder durch seinen Abstand $0 \leq \ell \leq L_0$ vom unteren Ende der Feder im ungedehnten Zustand. Insbesondere bleibt ℓ für jeden Punkt auf der Feder unverändert, wenn sich die Feder dehnt.

A.3	Angenommen, wir hängen die Feder an ihrem oberen Ende auf, sodass sie sich unter ihrem Eigengewicht dehnt. Wie groß ist die Gesamtlänge H der aufgehängten Feder im	2.0 Pkt.
-----	---	----------

Teil B: Dynamik (5.5 Punkte)

Experimente zeigen, dass sich die Feder, wenn sie zunächst ruhend aufgehängt und dann losgelassen wird, allmählich vom oberen Ende her zusammenzieht, während der untere Teil in Ruhe bleibt (siehe Abbildung 2). Im weiteren zeitlichen Verlauf bewegt sich der sich zusammenziehende Teil als kompakter Block und nimmt weitere Windungen der Feder auf, während der ruhende Teil kürzer wird. Jeder Punkt auf der Feder beginnt sich erst dann zu bewegen, wenn der bewegte Teil ihn erreicht. Das untere Ende der Feder beginnt sich erst dann zu bewegen, wenn sich die Feder vollständig zusammengezogen und ihre ungedehnte Länge L_0 erreicht hat. Danach fällt die zusammengezogene Feder unter dem Einfluss der Schwerkraft als starrer Körper geradlinig nach unten weiter, ohne zu taumeln.

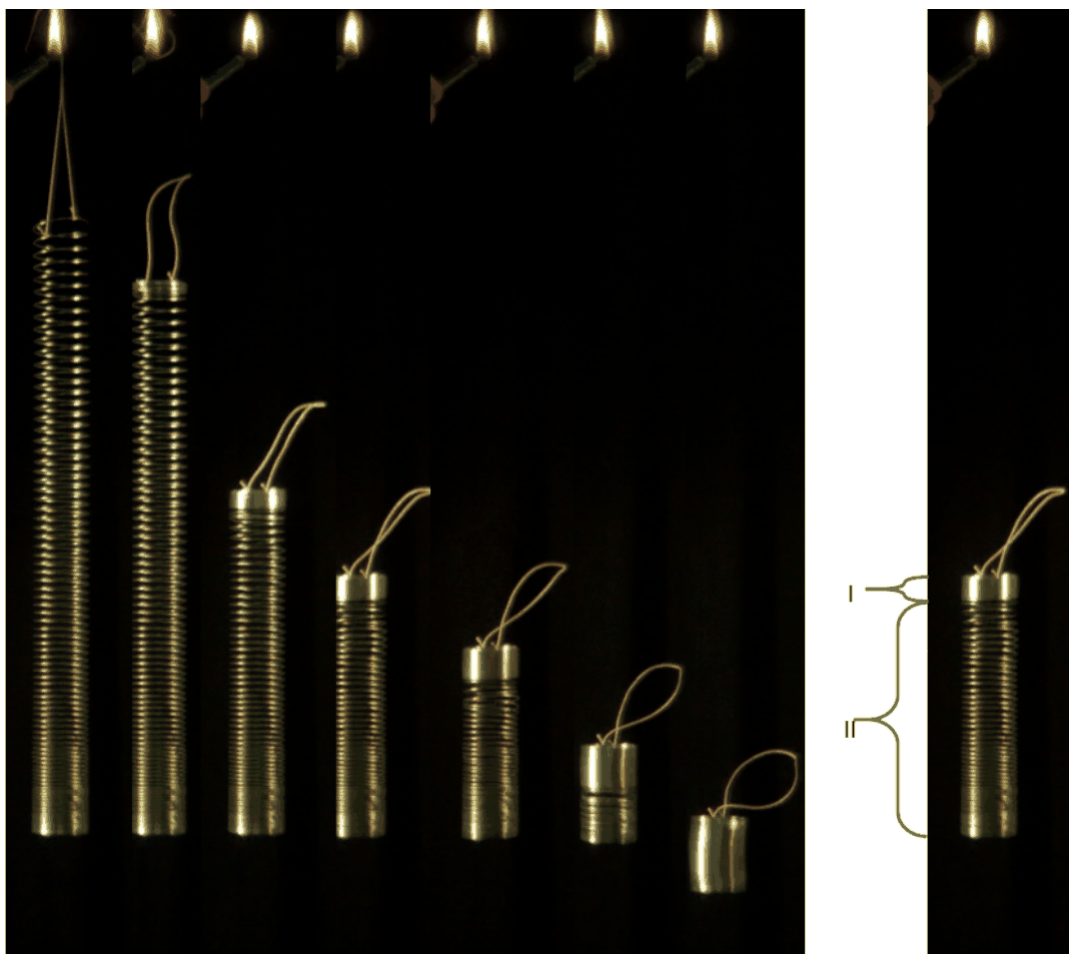


Abbildung 2: Links: eine Folge von Aufnahmen während des freien Falls eines Slinkys. Rechts: der bewegte Teil I und der ruhende Teil II während des freien Falls der Feder.

In den verbleibenden Teilen der Aufgabe sollen Sie Ihre Lösung auf dieses beschriebene Modell stützen. Sie dürfen den Luftwiderstand vernachlässigen, L_0 jedoch nicht.

B.1

Berechnen Sie die Zeit t_c vom Loslassen der Feder bis zu dem Zeitpunkt, an dem sie sich wieder vollständig auf ihre minimale Länge L_0 zusammengezogen hat. Drücken Sie Ihre Antwort durch L_0 , g und α aus. Berechnen Sie den Zahlenwert von t_c für eine Feder mit $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ und $M = 0.201 \text{ kg}$, wobei Sie für g den Wert 9.80 m/s^2 verwenden.

2.5
Pkt.

B.2	In dieser Teilaufgabe bezeichnet ℓ die Koordinate der Grenze zwischen den Teilen I (in Abbildung 2 der bewegte Teil) und II (der ruhende Teil). Zu einem bestimmten Zeitpunkt, zu dem noch ein ruhender Teil vorhanden ist, beträgt dessen Masse $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$, und der bewegte Teil bewegt sich mit der räumlich einheitlichen momentanen Geschwindigkeit $v_I(\ell)$. Zeigen Sie, dass zu diesem Zeitpunkt (solange ein ruhender Teil vorhanden ist) die Geschwindigkeit des bewegten Teils $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ beträgt. Drücken Sie die Konstanten A und B durch L_0 , g und α aus.	2.5 Pkt.
B.3	Bestimmen Sie auf Grundlage von B.2 den kleinsten Geschwindigkeitsbetrag $v_{\min}$ des bewegten Teils der Feder im Verlauf seiner Bewegung nach dem Loslassen und vor dem Auftreffen auf den Boden. Drücken Sie Ihre Antwort durch L_0 , α , A und B aus.	0.5 Pkt.

Teil C: Energetik (1.5 Punkte)

C.1	Berechnen Sie den Betrag der mechanischen Energie Q , der vom Loslassen der Feder bis unmittelbar vor ihrem Auftreffen auf den Boden durch Wärmeentwicklung verloren geht. Drücken Sie Ihre Antwort durch L_0 , M , g und α aus.	1.5 Pkt.
------------	---	----------

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A.1

$$\Delta y = \Delta \ell \max\left(1, \frac{F}{kL_0}\right)$$

- A.2, für $\Delta y \geq \Delta \ell$:

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2]$$

- A.3

$$H = \frac{L_0}{2\alpha} (1 + \alpha^2)$$

- B.1

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}} \quad t_c \approx 0.245 \text{ s}$$

- B.2, wobei nach unten gerichtete Geschwindigkeiten als positiv gelten:

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}$$

Das Zusammenziehen erfolgt im Bereich $\alpha L_0 \leq \ell < L_0$.

- B.3

$$v_{\min} = (1 - \alpha) \sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

Dieser Wert wird unmittelbar nach dem Stoß des bewegten Teils mit dem anfangs kompakten unteren Abschnitt erreicht.

- C.1

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^2 (1 + 2\alpha)$$

Lösung

A.1

Unter schwerelosen Bedingungen ist die Zugkraft überall gleich. Da die Feder homogen ist, ist das Verhältnis von gedehnter zu ungedehnter Länge für jeden Abschnitt gleich.

Für $F > kL_0$ hat die gesamte Feder die Länge $L = F/k$, also gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{L}{L_0} = \frac{F}{kL_0}.$$

Gleichbedeutend damit hat der Abschnitt die Federkonstante

$$k_{\text{seg}} = \frac{kL_0}{\Delta \ell}.$$

Für $0 \leq F \leq kL_0$ behält der Abschnitt seine minimale Länge. Somit gilt

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta \ell, & 0 \leq F \leq kL_0, \\ \frac{F\Delta \ell}{kL_0}, & F > kL_0. \end{cases}$$

A.2

Eine Erhöhung der Zugkraft bis auf kL_0 bewirkt keine Verschiebung und erfordert daher keine mechanische Arbeit. Während der anschließenden Dehnung gilt bei der momentanen Abschnittslänge s

$$F(s) = \frac{kL_0}{\Delta \ell} s.$$

Die für eine quasistatische Dehnung erforderliche Arbeit ist

$$\Delta W = \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} F(s) ds = \frac{kL_0}{\Delta \ell} \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} s ds.$$

Daraus folgt

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2].$$

Dies ist zugleich die Zunahme der elastischen potenziellen Energie.

A.3

Die Masse pro Einheit der ungedehnten Länge beträgt

$$\mu = \frac{M}{L_0}.$$

An der Materialkoordinate ℓ trägt die Zugkraft die gesamte Feder unterhalb dieses Punktes:

$$T(\ell) = \mu g \ell = \frac{Mg}{L_0} \ell.$$

Eine Dehnung tritt nur dort auf, wo $T(\ell) > kL_0$ gilt. Für die Grenze zwischen dem kompakten und dem gedehnten Abschnitt gilt daher

$$\frac{Mg}{L_0} \ell_* = kL_0, \quad \boxed{\ell_* = \alpha L_0}.$$

Somit bleibt der unterste Anteil α der Feder ungedehnt.

Sei $y_0(\ell)$ die Gleichgewichtshöhe über dem unteren Ende. Die lokale Anwendung von A.1 ergibt

$$\frac{dy_0}{d\ell} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell}{\alpha L_0}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

Integration mit $y_0(0) = 0$ liefert

$$y_0(\ell) = \begin{cases} \ell, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\boxed{H = y_0(L_0) = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2)}.$$

B.1

Nach dem Loslassen ist die Schwerkraft die einzige äußere Kraft. Folglich fällt der Schwerpunkt mit der Beschleunigung g , obwohl innere Stöße Energie dissipieren.

Die anfängliche Schwerpunkthöhe beträgt

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} y_0(\ell) d\ell \\ &= \frac{1}{L_0} \left[\int_0^{\alpha L_0} \ell d\ell + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left(\frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2} \right) d\ell \right] \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 + 3\alpha^2 - \alpha^3). \end{aligned}$$

In dem Augenblick, in dem sich die Feder vollständig zusammengezogen hat, hat sich ihr unteres Ende noch nicht bewegt. Die Feder erstreckt sich über das Intervall von $y = 0$ bis $y = L_0$, also gilt

$$y_{\text{cm},c} = \frac{L_0}{2}.$$

Der Schwerpunkt ist daher um die Strecke

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c} &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3 \end{aligned}$$

gefallen. Da er aus der Ruhe startet, gilt

$$\frac{1}{2}gt_c^2 = \frac{L_0}{6\alpha}(1-\alpha)^3,$$

und somit

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1-\alpha)^3}{3\alpha g}}.$$

Für die angegebenen Daten gilt

$$\alpha = \frac{1.02(0.055)}{0.201(9.80)} = 0.0284800.$$

Es ist zweckmäßig, den äquivalenten Ausdruck

$$t_c = \sqrt{\frac{M}{3k}}(1-\alpha)^{3/2}$$

zu verwenden. Numerisch ergibt sich

$$t_c = 0.2454228 \dots \text{ s} \approx 0.245 \text{ s}.$$

B.2

Wir wählen nach unten gerichtete Geschwindigkeiten als positiv. Wir führen

$$x = L_0 - \ell, \quad D = (1-\alpha)L_0$$

ein. Dabei ist x die ungedehnte Länge, die bereits in den bewegten kompakten Block aufgenommen wurde. Seine Masse und seine tatsächliche Länge betragen

$$m_I = \frac{M}{L_0}x, \quad L_I = x.$$

Da die übrige Feder ruht, beträgt der gesamte nach unten gerichtete Impuls $m_I v_I$. Die Integration der äußeren Kraft Mg ab dem Loslassen ergibt

$$\frac{M}{L_0}xv_I = Mgt,$$

also

$$xv_I = L_0gt.$$

Diese Impulsgleichung berücksichtigt die Massenzunahme des bewegten Blocks.

Die untere Grenze des bewegten Blocks befindet sich auf der Höhe $y_0(\ell)$. Sein oberes Ende befindet sich folglich bei

$$Y_{\text{top}} = y_0(\ell) + L_0 - \ell.$$

Solange die Grenze im anfangs gedehnten Abschnitt liegt, gilt

$$\begin{aligned}
v_I &= -\frac{dY_{\text{top}}}{dt} \\
&= -\left(\frac{\ell}{\alpha L_0} - 1\right)\dot{\ell} \\
&= \frac{D-x}{\alpha L_0}\dot{x}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit $xv_I = L_0gt$ ergibt dies

$$x(D-x)\dot{x} = \alpha L_0^2gt.$$

Integration ausgehend von $x = 0$, $t = 0$ liefert

$$\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\alpha L_0^2gt^2}{2}.$$

Damit gilt

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha L_0^2g} \left(D - \frac{2x}{3} \right).$$

Einsetzen in die Impulsbeziehung ergibt

$$\begin{aligned}
v_I^2 &= \frac{L_0^2g^2t^2}{x^2} \\
&= \frac{g}{\alpha} \left(D - \frac{2x}{3} \right) \\
&= \frac{g}{\alpha} \left[(1-\alpha)L_0 - \frac{2}{3}(L_0 - \ell) \right] \\
&= \frac{2g}{3\alpha}\ell + \frac{gL_0(1-3\alpha)}{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\boxed{v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}}, \quad \boxed{A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1-3\alpha)}{3\alpha}}.$$

Die bewegte Grenze erreicht den anfangs kompakten unteren Abschnitt bei $\ell = \alpha L_0$. Diese Phase des kontinuierlichen Zusammenziehens umfasst daher den Bereich

$$\alpha L_0 \leq \ell < L_0.$$

B.3

Da $A > 0$ gilt, wird der bewegte Block mit abnehmendem ℓ langsamer. Unmittelbar bevor er den anfangs kompakten unteren Abschnitt erreicht, beträgt sein Geschwindigkeitsbetrag

$$v_- = \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

In diesem Augenblick beträgt die bewegte Masse $(1-\alpha)M$, während die kompakte untere Masse αM noch ruht. Die Feder hat ihre minimale Gesamtlänge erreicht, sodass sich diese Abschnitte in einem vollkommen unelastischen Stoß vereinigen, wie es die vorgegebene anschließende Bewegung als starrer Körper erfordert.

Der Kraftstoß der Schwerkraft während dieses momentanen Stoßes ist vernachlässigbar. Die Impulserhaltung ergibt

$$(1-\alpha)Mv_- = Mv_c,$$

und daher

$$v_c = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Dieser Wert ist kleiner als v_- . Anschließend wird die gesamte Feder mit g nach unten beschleunigt, sodass ihr Geschwindigkeitsbetrag zunimmt. Folglich gilt

$$v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

Zur Kontrolle gilt

$$A\alpha L_0 + B = \frac{gL_0(1 - \alpha)}{3\alpha},$$

also

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha}} = gt_c,$$

wie es der Gesamtimpuls beim vollständigen Zusammenziehen erfordert.

Der exakt ruhende Zustand beim Loslassen ist durch „nach dem Loslassen“ ausgeschlossen. Im vorgegebenen Kontinuumsmodell geht die Masse des bewegten Blocks für $t \rightarrow 0^+$ gegen null, wodurch ein endlicher Grenzwert des Geschwindigkeitsbetrags möglich ist, während der Gesamtimpuls gegen null geht.

C.1

Wir wählen die elastische potenzielle Energie der Feder bei ihrer minimalen Länge gleich null. Die Anwendung von A.2 auf einen infinitesimalen Abschnitt ergibt

$$dU_{\text{el}} = \frac{kL_0}{2} \left[\left(\frac{dy_0}{d\ell} \right)^2 - 1 \right] d\ell.$$

Der anfangs kompakte untere Abschnitt liefert keinen Beitrag. Somit gilt

$$\begin{aligned} U_{\text{el},0} &= \frac{kL_0}{2} \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left[\frac{\ell^2}{\alpha^2 L_0^2} - 1 \right] d\ell \\ &= \frac{kL_0^2}{6\alpha^2} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned}$$

Mit $kL_0 = \alpha Mg$ folgt

$$U_{\text{el},0} = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3).$$

Unmittelbar nach dem vollständigen Zusammenziehen ist die elastische Energie null, und die gesamte Feder führt eine Translation mit der Geschwindigkeit $v_c = gt_c$ aus. Die bis zu diesem Zeitpunkt dissipierte Energie beträgt

$$Q = U_{\text{el},0} + Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) - \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

Aus dem freien Fall des Schwerpunkts folgt jedoch

$$Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) = \frac{1}{2}Mg^2t_c^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

Diese beiden Terme heben sich auf, sodass

$$Q = U_{\text{el},0}$$

übrig bleibt.

Nach dem Zusammenziehen fällt die starre Feder ohne Luftwiderstand und ohne zu taumeln, sodass vor dem Aufprall keine weitere mechanische Energie verloren geht. Durch Faktorisieren des Ergebnisses erhält man

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha).$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Die Physik eines Mikrowellenherds

Diese Aufgabe behandelt die Erzeugung von Mikrowellenstrahlung in einem Mikrowellenherd und ihre Verwendung zum Erwärmen von Speisen. Die Mikrowellenstrahlung wird in einer Vorrichtung erzeugt, die als „Magnetron“ bezeichnet wird. Teil A befasst sich mit der Funktionsweise des Magnetrons, während Teil B die Absorption von Mikrowellenstrahlung in Speisen behandelt.

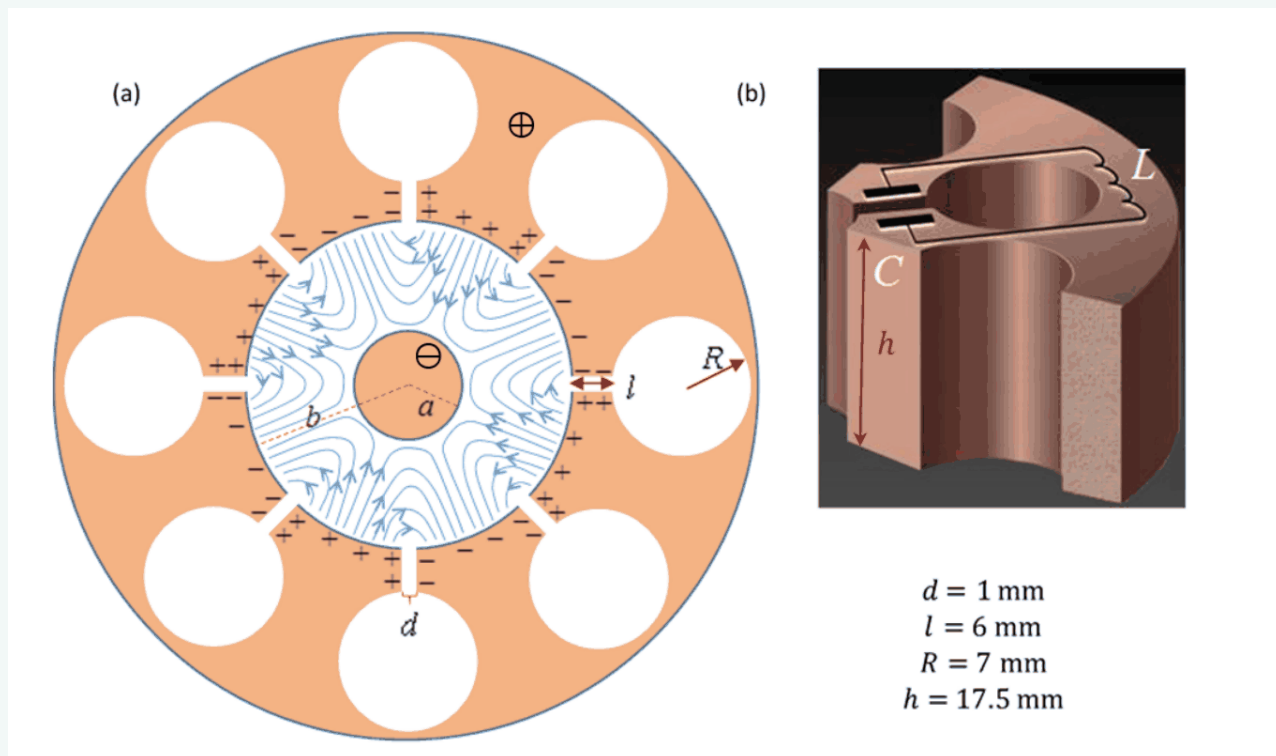


Abbildung 1

Teil A: Aufbau und Funktionsweise eines Magnetrons (6.6 Punkte)

Ein Magnetron ist eine Vorrichtung zur Erzeugung von Mikrowellenstrahlung, entweder in Pulsen (für Radaranwendungen) oder kontinuierlich (z. B. in einem Mikrowellenherd). Das Magnetron besitzt eine sich selbst verstärkende Schwingungsmode. Wird an das Magnetron eine statische Spannung (keine Wechselspannung) angelegt, so wird diese Mode rasch angeregt. Die so erzeugte Mikrowellenstrahlung wird aus dem Magnetron ausgekoppelt.

Das Magnetron eines typischen Mikrowellenherds besteht aus einer massiven zylindrischen Kupferkathode (mit dem Radius a) und einer sie umgebenden Anode (mit dem Radius b). Letztere hat die Form eines dickwandigen Hohlzylinders, in den zylindrische Hohlräume gebohrt sind. Diese Hohlräume werden als „Resonatoren“ bezeichnet. Einer der Resonatoren ist an eine Antenne gekoppelt, die die Mikrowellenenergie nach außen überträgt; im Folgenden vernachlässigen wir die Antenne. Alle Innenräume sind evakuiert. Wir betrachten ein typisches Magnetron mit acht Resonatoren, wie es in Abbildung 1(a) dargestellt ist. Die dreidimensionale Struktur eines einzelnen Resonators ist in Abbildung 1(b) gezeigt. Wie dort angedeutet, verhält sich jeder der acht Hohlräume wie ein LC-Schwingkreis aus einer Induktivität und einer Kapazität, mit der Betriebsfrequenz $f = 2.45 \text{ GHz}$.

Entlang der Längsachse des Magnetrons wird ein statisches homogenes Magnetfeld angelegt, das in Abbildung 1(a) aus der Zeichenebene herauszeigt. Zusätzlich wird zwischen der Anode (positives Potenzial) und der Kathode (negatives Potenzial) eine konstante Spannung angelegt. Von der Kathode emittierte Elektronen erreichen die Anode und laden sie auf, sodass sie eine Schwingungsmode anregen, bei der die Ladungen benachbarter Resonatoren jeweils entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Schwingungen der Hohlräume verstärken diese Schwingungen.

Der oben beschriebene Vorgang erzeugt im Raum zwischen Kathode und Anode zusätzlich zu dem durch die angelegte konstante Spannung verursachten statischen Feld ein elektrisches Wechselfeld mit der bereits genannten Frequenz $f = 2.45 \text{ GHz}$ (blaue Linien in Abbildung 1(a); das statische Feld ist nicht eingezeichnet). Im stationären Zustand beträgt die typische Amplitude des elektrischen Wechselfelds zwischen Anode und Kathode ungefähr $\frac{1}{3}$ des dortigen statischen elektrischen Felds. Die Bewegung der Elektronen im Raum zwischen Kathode und Anode wird sowohl durch den statischen als auch durch den zeitlich wechselnden Anteil des Felds beeinflusst. Dies bewirkt, dass Elektronen, die die Anode erreichen, etwa 80% der Energie, die sie aus dem statischen Feld aufnehmen, auf das Wechselfeld übertragen. Ein kleinerer Teil der emittierten Elektronen kehrt zur Kathode zurück und löst weitere Elektronen heraus, wodurch das Wechselfeld weiter verstärkt wird.

Jeder Resonator kann als Kondensator und Spule aufgefasst werden, siehe Abbildung 1(b). Die Kapazität ergibt sich hauptsächlich aus den ebenen Teilen der Resonatoroberfläche, während die Induktivität vom zylindrischen Teil herrührt. Nehmen Sie an, dass der Strom im Resonator gleichmäßig verteilt unmittelbar an der Oberfläche seines zylindrischen Hohlraums fließt und dass der Betrag des von diesem Strom erzeugten Magnetfelds das 0.6-Fache desjenigen einer idealen unendlich langen Spule beträgt. Die verschiedenen Längen, die die Geometrie des Resonators festlegen, sind in Abbildung 1(b) angegeben. Die Permittivität und die Permeabilität des Vakuums betragen $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ bzw. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

A.1 — 0.4 Punkte

Schätzen Sie anhand der obigen Angaben die Frequenz f_{est} eines einzelnen Resonators ab. (Ihr Ergebnis kann vom tatsächlichen Wert $f = 2.45 \text{ GHz}$ abweichen. Verwenden Sie im weiteren Verlauf der Aufgabe den **tatsächlichen** Wert.)

Die folgende Teilaufgabe A.2 behandelt nicht das Magnetron selbst, dient jedoch dazu, einige der relevanten physikalischen Zusammenhänge einzuführen. Betrachten Sie ein Elektron, das sich im freien Raum unter dem Einfluss eines homogenen elektrischen Felds in Richtung der negativen y -

Achse, $\vec{E} = -E_0\hat{y}$, und eines homogenen Magnetfelds in Richtung der positiven z -Achse, $\vec{B} = B_0\hat{z}$, bewegt (E_0 und B_0 sind positiv; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sind in der üblichen Weise orientierte Einheitsvektoren). Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Elektrons zum Zeitpunkt t mit $\vec{u}(t)$. Die Driftgeschwindigkeit $\vec{u}_D$ des Elektrons ist als seine mittlere Geschwindigkeit definiert. Mit m und $-e$ bezeichnen wir die Masse bzw. die Ladung des Elektrons.

A.2 — 1.5 Punkte

Bestimmen Sie in jedem der folgenden beiden Fälle $\vec{u}_D$. Zeichnen Sie außerdem auf dem Antwortblatt die Bahn des Elektrons (im Laborsystem) während des Zeitintervalls $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$, wenn:

1. zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit des Elektrons $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ beträgt,
2. zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit des Elektrons $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ beträgt.

Wir kehren nun zur Betrachtung des Magnetrons zurück. Der Abstand zwischen Kathode und Anode beträgt 15 mm. Nehmen Sie an, dass aufgrund der oben erwähnten Energieabgabe an die Wechselfelder die maximale kinetische Energie jedes Elektrons den Wert $K_{\max} = 800 \text{ eV}$ nicht überschreitet. Der Betrag des statischen Magnetfelds beträgt $B_0 = 0.3 \text{ T}$. Masse und Ladung des Elektrons sind $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ bzw. $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

A.3 — 0.4 Punkte

Schätzen Sie den maximalen Radius r der Elektronenbahn in dem Bezugssystem, in dem diese Bewegung näherungsweise kreisförmig ist, numerisch ab. Betrachten Sie dieses Bezugssystem dabei näherungsweise als Inertialsystem.

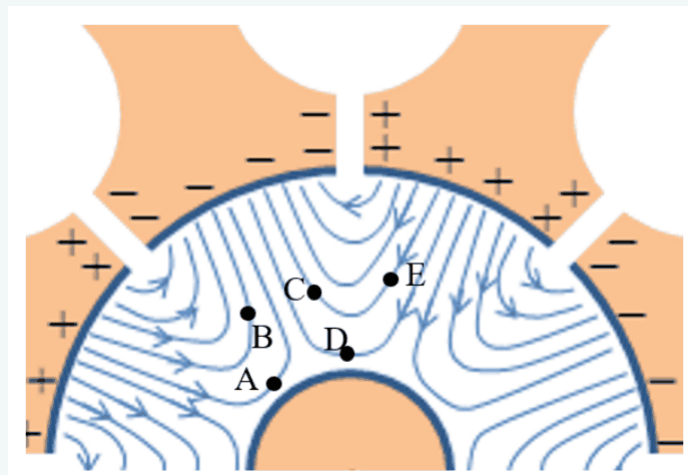


Abbildung 2

A.4 — 1.2 Punkte

Abbildung 2 zeigt die Feldlinien des elektrischen Wechselfelds zwischen Anode und Kathode zu einem bestimmten Zeitpunkt (das statische Feld ist nicht eingezeichnet). Geben Sie auf dem Antwortblatt an, welche der Elektronen an den Positionen A, B, C, D und E zu diesem Zeitpunkt zur Anode, welche zur Kathode und welche in einer Richtung senkrecht zum Radius driften.

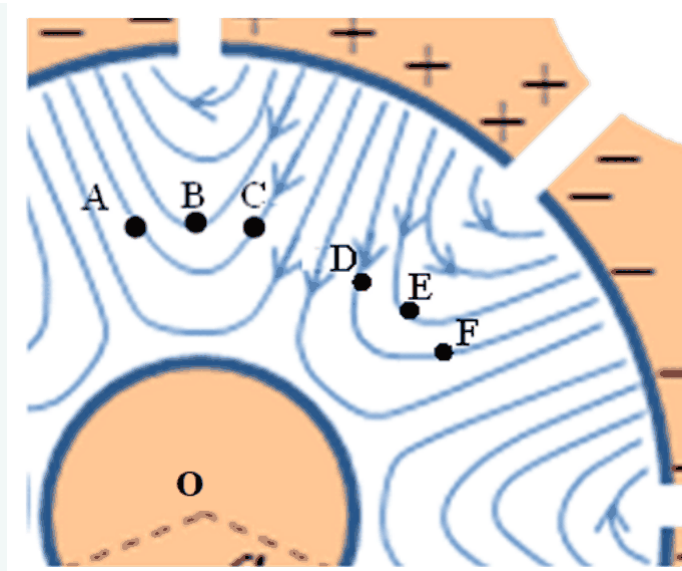


Abbildung 3

Abbildung 3 zeigt die Feldlinien des elektrischen Wechselfelds zwischen Anode und Kathode (das statische Feld ist nicht eingezeichnet) zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Positionen von sechs Elektronen zu diesem Zeitpunkt sind mit A, B, C, D, E und F bezeichnet. Alle Elektronen haben denselben Abstand von der Kathode.

A.5 — 1.2 Punkte

Betrachten Sie die in Abbildung 3 gezeigte Situation. Geben Sie für jedes der sechs Elektronenpaare AB, AC, BC, DE, DF, EF auf dem Antwortblatt an, ob sich der Winkel zwischen ihren Ortsvektoren (gemessen vom Mittelpunkt O der Kathode aus) durch ihre Drift zu diesem Zeitpunkt vergrößert oder verkleinert.

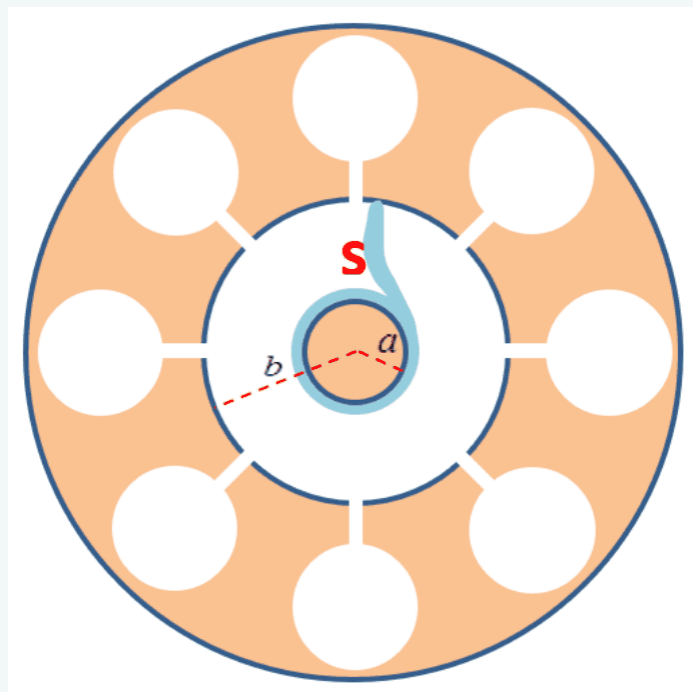


Abbildung 4

Das in Teilaufgabe A.5 entdeckte Muster wirkt als Fokussierungsmechanismus, der die Elektronen im Raum zwischen Kathode und Anode in Speichen konzentriert. Abbildung 4 zeigt eine solche Speiche, die mit S bezeichnet ist.

A.6 — 0.8 Punkte

Zeichnen Sie auf dem Antwortblatt die übrigen Speichen zu diesem Zeitpunkt ein. Geben Sie ihre Drehrichtung durch Pfeile an und berechnen Sie ihre mittlere Winkelgeschwindigkeit ω_s .

Nehmen Sie näherungsweise an, dass das gesamte elektrische Feld auf halbem Weg zwischen Kathode und Anode gleich seinem mittleren statischen Wert entlang einer radialen Linie von der Kathode zur Anode ist und dass die Speichen in diesem Bereich näherungsweise radial verlaufen. Die Radien der Kathode und der Anode (a bzw. b) sind in Abbildung 4 definiert.

A.7 — 1.1 Punkte

Bestimmen Sie einen Näherungsausdruck für die statische Spannung V_0 , die erforderlich ist, um das Magnetron in der beschriebenen Weise zu betreiben. (Der von Ihnen gefundene Ausdruck liefert eine Näherung für den zum Betrieb des Magnetrons erforderlichen Mindestwert; die optimale Spannung liegt etwas höher.)

Teil B: Die Wechselwirkung von Mikrowellenstrahlung mit Wassermolekülen (3.4 Punkte)

Dieser Teil behandelt die Verwendung von Mikrowellenstrahlung (die von der Antenne des Magnetrons in den Garraum abgestrahlt wird) zum Garen, also zum Erwärmen eines verlustbehafteten dielektrischen Materials wie Wasser, entweder rein oder salzhaltig (was beispielsweise als Modell für Suppe dient).

Ein elektrischer Dipol ist eine Anordnung zweier betragsgleicher, entgegengesetzter elektrischer Ladungen q und $-q$, die einen kleinen Abstand d voneinander haben. Der elektrische Dipolvektor zeigt von der negativen zur positiven Ladung, und sein Betrag ist $p = qd$.

Auf einen einzelnen Dipol mit dem Moment $\vec{p}(t)$ und dem konstanten Betrag $p_0 = |\vec{p}(t)|$ wirkt ein zeitabhängiges elektrisches Feld $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$. Der Winkel zwischen dem Dipol und dem elektrischen Feld ist $\theta(t)$.

B.1 — 0.5 Punkte

Geben Sie Ausdrücke sowohl für den Betrag des Drehmoments $\tau(t)$, das das elektrische Feld auf den Dipol ausübt, als auch für die Leistung $H_i(t)$, die das Feld auf den Dipol überträgt, in Abhängigkeit von p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ und ihren Ableitungen an.

Wassermoleküle sind polar und können daher als elektrische Dipole behandelt werden. Aufgrund der starken Wasserstoffbrückenbindungen zwischen Wassermolekülen in flüssigem Wasser kann man sie nicht als unabhängige Dipole behandeln. Stattdessen sollte man den Polarisationsvektor $\vec{P}(t)$ betrachten, der die Dipolmomentdichte darstellt (das mittlere Dipolmoment pro Volumeneinheit eines Ensembles von Wassermolekülen). Die Polarisation $\vec{P}(t)$ ist parallel zum lokal angelegten elektrischen Wechselfeld (der Mikrowellenstrahlung), $\vec{E}(t)$, und schwingt zeitlich mit einer Amplitude, die proportional zur Amplitude des lokalen elektrischen Wechselfelds ist, jedoch mit einer Phasenverzögerung δ .

Das lokale elektrische Wechselfeld an einem bestimmten Ort im Wasser lautet

$\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$, wobei $\omega = 2\pi f$. Es erzeugt die Polarisation $\vec{P}(t) = \beta \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$, wobei die dimensionslose Konstante β eine Eigenschaft des Wassers ist.

B.2 — 0.5 Punkte

Bestimmen Sie einen Ausdruck für die vom Wasser absorbierte zeitlich gemittelte Leistung $\langle H(t) \rangle$ pro Volumeneinheit.

Der zeitliche Mittelwert einer zeitabhängigen periodischen Größe $f(t)$ über ihre Periode T ist definiert als:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

Betrachten wir nun die Ausbreitung der Strahlung durch das Wasser. Die relative Dielektrizitätskonstante des Wassers (bei der Frequenz des elektromagnetischen Felds) beträgt ε_r , und der zugehörige Brechungsindex des Wassers ist $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. Die momentane Energiedichte des elektrischen Felds ist durch $\frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$ gegeben. Die zeitlich gemittelten Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Felds sind gleich.

B.3 — 1.1 Punkte

Wir bezeichnen die zeitlich gemittelte Energieflussdichte der Strahlung mit $I(z)$ (mittlere Strahlungsleistung pro Flächeneinheit). Dabei ist z die Eindringtiefe in das Wasser, und die Strahlung breitet sich in z -Richtung aus. Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Abhängigkeit der Flussdichte $I(z)$ von z . Die Flussdichte an der Wasseroberfläche, $I(0)$, darf in Ihrem Ergebnis vorkommen.

Die Phasenverzögerung δ entsteht durch die Wechselwirkung zwischen den Wassermolekülen. Sie hängt über die Beziehung $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$ vom dimensionslosen dielektrischen Verlustkoeffizienten ε_ℓ und von der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r ab (die beide von der Kreisfrequenz ω der Strahlung und von der Temperatur abhängen). Wenn δ hinreichend klein ist, ist das elektrische Feld in der Eindringtiefe z im Wasser gegeben durch:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

wobei $k_0 = \omega/c$ gilt und $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

B.4 — 0.6 Punkte

Verwenden Sie die Näherung $\tan \delta \approx \sin \delta$ und bestimmen Sie einen Ausdruck für den in Teilaufgabe B.2 definierten Koeffizienten β in Abhängigkeit von den übrigen Parametern.

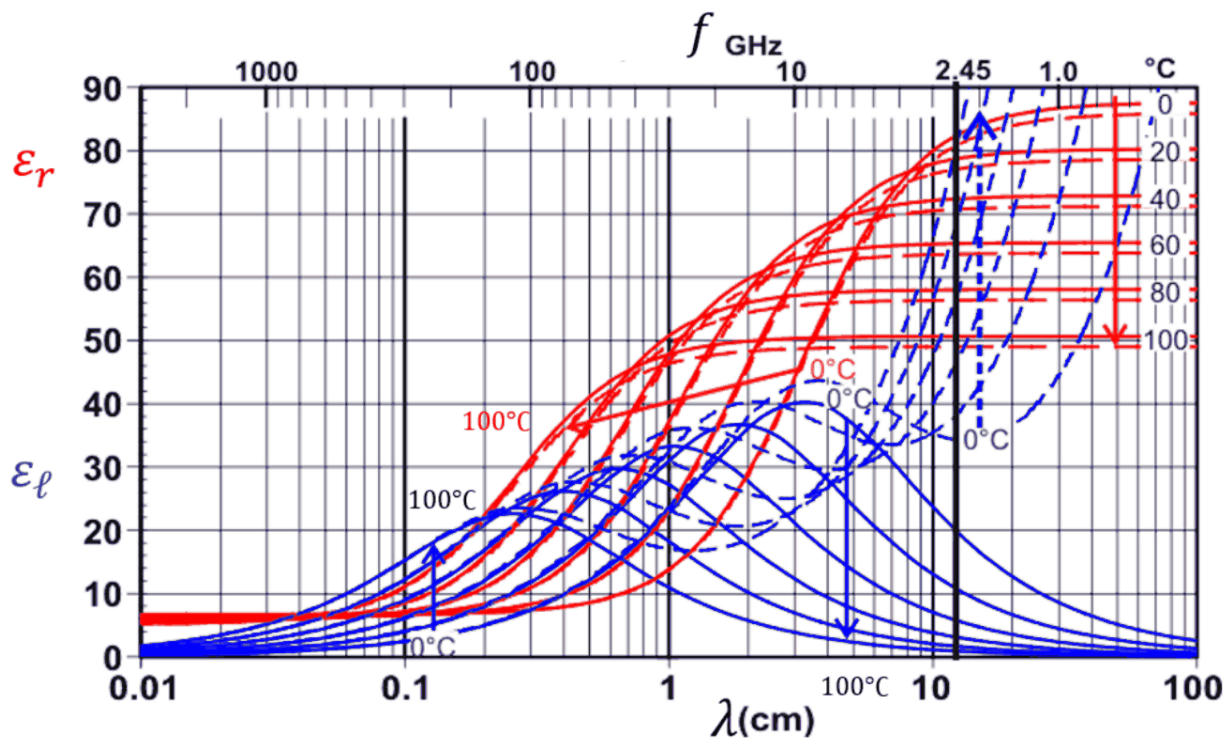


Abbildung 5. Die Pfeile geben die Änderung entlang der Kurvenscharen mit der Temperatur von 0°C bis 100°C an.

Abbildung 5 zeigt ϵ_l (blau) und ϵ_r (rot) sowohl für reines Wasser (durchgezogene Linien) als auch für eine verdünnte Salzlösung in Wasser (gestrichelte Linien) als Funktionen der Wellenlänge oder der Frequenz bei mehreren verschiedenen Temperaturen. Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ ist durch eine dicke senkrechte Linie markiert. Im Folgenden betrachten wir ausschließlich Mikrowellenstrahlung dieser Frequenz.

B.5 — 0.7 Punkte

Beantworten Sie anhand von Abbildung 5 die folgenden Fragen:

1. Bestimmen Sie für Wasser bei 20°C die Eindringtiefe $z_{1/2}$, bei der die Leistung pro Volumeneinheit auf die Hälfte ihres Werts bei $z = 0$ gesunken ist.
2. Geben Sie auf dem Antwortblatt an, ob die Eindringtiefe der Mikrowellenstrahlung in Wasser mit der Temperatur zunimmt, abnimmt oder gleich bleibt.
3. Geben Sie auf dem Antwortblatt an, ob die Eindringtiefe der Mikrowellenstrahlung in Suppe (verdünnte Salzlösung) mit der Temperatur zunimmt, abnimmt oder gleich bleibt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A.1: $C \simeq 0.93 \text{ pF}$, $L \simeq 6.6 \text{ nH}$, woraus folgt:

$$f_{\text{est}} \simeq 2.03 \text{ GHz.}$$

- **A.2:** In beiden Fällen gilt

$$\vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0} \hat{x}.$$

Setzen wir $\omega_c = eB_0/m$, $\ell = mE_0/(eB_0^2)$ und $s = \omega_c t$. Liegt die Anfangsposition im Ursprung, so lauten die gesuchten Bahnen

$$\frac{(x, y)_1}{\ell} = (-s + 4 \sin s, 4[1 - \cos s]),$$

$$\frac{(x, y)_2}{\ell} = (-s - 2 \sin s, -2[1 - \cos s]), \quad 0 < s < 4\pi.$$

Es handelt sich um schleifenförmige Trochoiden, die nach links driften und deren Gyration gegen den Uhrzeigersinn erfolgt.

- **A.3:**

$$r_{\max} \simeq 3.2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.32 \text{ mm}.$$

- **A.4:** Nach meiner Ablesung der Feldlinientangenten gilt: **A und B zur Kathode; C, D und E zur Anode; keines genau senkrecht zum Radius.** Auf die Unsicherheit beim Ablesen der Abbildung wird weiter unten hingewiesen.
- **A.5:** AB, AC und BC nehmen ab; DE, DF und EF nehmen zu.
- **A.6:** Es gibt **vier Speichen** mit einem Winkelabstand von 90° . Ergänzen Sie um 90° , 180° und 270° gedrehte Kopien von S. Sie rotieren **gegen den Uhrzeigersinn**, mit

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{4} = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

- **A.7:**

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

- **B.1:** Für den Feldbetrag $|E|$ und den Winkel zwischen dem Dipol und dem momentanen Feld gilt

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta, \quad H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

Die von der Konvention unabhängige Leistungsformel lautet $H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}$.

- **B.2:**

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

- **B.3:**

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

• B.4:

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

• B.5:

1.

$$z_{1/2} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell} \simeq 1.2 \text{ cm}$$

aus den näherungsweise abgelesenen Werten $\varepsilon_r \simeq 78$, $\varepsilon_\ell \simeq 10$.

2. Die Eindringtiefe in reinem Wasser **nimmt mit der Temperatur zu**.

3. Die Eindringtiefe in Suppe **nimmt mit der Temperatur ab**.

Lösung

A.1

Die näherungsweise parallelen leitenden Flächen, die den Spalt bilden, haben die Fläche hl und den Abstand d . Unter Vernachlässigung der Randfelder beträgt ihre Kapazität

$$C \simeq \frac{\varepsilon_0 hl}{d}.$$

Mit den Abmessungen aus Abbildung 1 ergibt sich

$$C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(17.5 \times 10^{-3})(6 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}} = 9.29 \times 10^{-13} \text{ F}.$$

Sei I der gesamte Strom, der um den zylindrischen Hohlraum fließt. Seine gleichmäßige Verteilung über die Höhe h ergibt eine effektive Flächenstromdichte I/h . Eine ideale unendlich lange Spule mit diesem Oberflächenstrom würde $\mu_0 I/h$ erzeugen. Unter Anwendung der angegebenen Korrektur gilt

$$B \simeq 0.6 \frac{\mu_0 I}{h}.$$

Nähert man den Fluss durch den Hohlraum durch $B\pi R^2$ an, so erhält man

$$L = \frac{\Phi}{I} \simeq 0.6 \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = 6.63 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

Damit folgt

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{0.6\mu_0\varepsilon_0\pi R^2 l}} \simeq 2.03 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

Die Höhe kürzt sich heraus, da $C \propto h$ und $L \propto h^{-1}$ gelten. Die Abschätzung ist nur näherungsweise gültig, da der Resonator durch idealisierte konzentrierte Kapazität und Induktivität beschrieben wird.

A.2

Für das Elektron gilt die Bewegungsgleichung mit der Lorentzkraft,

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Für die angegebenen Felder lauten ihre Komponenten

$$\dot{u}_x = -\omega_c u_y, \quad \dot{u}_y = \omega_c \left(u_x + \frac{E_0}{B_0} \right), \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

Definieren wir $v_D = E_0/B_0$. Bei einer konstanten Geschwindigkeit $-v_D \hat{x}$ heben sich die elektrische und die magnetische Kraft auf. Allgemeiner gilt

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = -v_D \hat{x}.$$

Im Bezugssystem, das sich mit dieser Geschwindigkeit translatorisch bewegt, rotiert der verbleibende Geschwindigkeitsvektor gleichförmig. Für $u_y(0) = 0$ gilt

$$u_x = -v_D + A \cos(\omega_c t), \quad u_y = A \sin(\omega_c t),$$

wobei $A = u_x(0) + v_D$. Die schwingenden Terme haben den Mittelwert null, sodass beide Anfangsbedingungen dieselbe Drift ergeben.

Mit $x(0) = y(0) = 0$ liefert die Integration

$$x = -v_D t + \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad y = \frac{A}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)].$$

Für Fall 1 gilt $A = 4v_D$; für Fall 2 gilt $A = -2v_D$. Daraus ergeben sich die in den Antworten angegebenen parametrischen Bahnen.

Verwenden Sie für eine genaue Skizze $\ell = v_D/\omega_c$. Die folgenden Punkte beschreiben die erste Zyklotronperiode:

$s = \omega_c t$	Fall 1: $(x/\ell, y/\ell)$	Fall 2: $(x/\ell, y/\ell)$
0	(0, 0)	(0, 0)
$\pi/2$	$(4 - \pi/2, 4)$	$(-2 - \pi/2, -2)$
π	$(-\pi, 8)$	$(-\pi, -4)$
$3\pi/2$	$(-4 - 3\pi/2, 4)$	$(2 - 3\pi/2, -2)$
2π	$(-2\pi, 0)$	$(-2\pi, 0)$

Wiederholen Sie diese Kurve um $-2\pi\ell$ in x -Richtung verschoben, um die zweite Periode zu erhalten.

In Fall 1 bewegt sich das Elektron zunächst nach rechts und wird nach oben abgelenkt; die gesamte Kurve liegt in $0 \leq y \leq 8\ell$. In Fall 2 bewegt es sich zunächst nach links und wird nach unten abgelenkt; die Kurve liegt in $-4\ell \leq y \leq 0$. Beide enden nach dem angegebenen Intervall bei $(-4\pi\ell, 0)$. Ihre Gyration erfolgt gegen den Uhrzeigersinn, und keine der beiden Bahnen besitzt Spitzen, da ihre Geschwindigkeit niemals verschwindet.

A.3

Im lokalen Driftbezugssystem, das näherungsweise ein Inertialsystem ist, wird die elektrische Kraft durch die mit der Geschwindigkeit des Bezugssystems verbundene magnetische Kraft näherungsweise aufgehoben. Die verbleibende Bewegung ist näherungsweise kreisförmig:

$$\frac{mv_\perp^2}{r} = ev_\perp B_0, \quad r = \frac{mv_\perp}{eB_0}.$$

Verwendet man die gesamte obere Schranke der kinetischen Energie als obere Abschätzung für die Gyrationenergie, so gilt

$$v_{\perp} \lesssim \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}.$$

Hier ist

$$K_{\max} = 800(1.6 \times 10^{-19}) = 1.28 \times 10^{-16} \text{ J},$$

also

$$v_{\max} \simeq 1.68 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

und

$$r_{\max} \simeq \frac{\sqrt{2mK_{\max}}}{eB_0} = \frac{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31})(1.28 \times 10^{-16})}}{(1.6 \times 10^{-19})(0.3)} = 3.18 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Somit ist $r_{\max} \simeq 0.32 \text{ mm}$, also viel kleiner als die Spaltbreite von 15 mm . Dies rechtfertigt es, die Gyration als kleine Bewegung zu behandeln, die der Drift ihres Mittelpunkts überlagert ist.

A.4

Sei $\hat{r}$ radial nach außen und $\hat{\phi}$ gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Für ein aus der Zeichenebene herausgerichtetes Magnetfeld ergibt

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_{\phi} \hat{\phi}$$

die Driftgeschwindigkeit

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = \frac{E_{\phi}}{B_0} \hat{r} - \frac{E_r}{B_0} \hat{\phi}.$$

Daraus folgt:

- $E_{\phi} > 0$ bewirkt eine Drift zur Anode.
- $E_{\phi} < 0$ bewirkt eine Drift zur Kathode.
- $E_{\phi} = 0$ bewirkt eine Drift senkrecht zum Radius.

Das statische elektrische Feld ist radial und trägt daher nur zur azimuthalen Drift bei. Die Einordnung der radialen Drift wird vollständig durch die tangentielle Komponente des eingezeichneten Wechselfelds bestimmt.

Meine Ablesung der lokalen Tangenten ergibt:

Elektron	Tangentiale Komponente des Wechselfelds	Radiale Drift
A	Im Uhrzeigersinn	Zur Kathode
B	Im Uhrzeigersinn	Zur Kathode
C	Gegen den Uhrzeigersinn	Zur Anode
D	Gegen den Uhrzeigersinn	Zur Anode
E	Gegen den Uhrzeigersinn	Zur Anode

Diese Einordnungen beziehen sich auf die radiale Komponente; die Elektronen weisen außerdem eine azimuthale Drift auf. Die Tangenten werden aus einer schematischen Abbildung abgelesen; diese Einordnungen sind daher mit einer gewissen Ableseunsicherheit behaftet.

A.5

Bei einem gemeinsamen Abstand ρ vom Kathodenmittelpunkt gilt

$$\dot{\phi} = \frac{u_{\phi}}{\rho} = -\frac{E_r}{B_0 \rho}.$$

Das statische Feld ist radial nach innen gerichtet und verleiht allen sechs Elektronen bei diesem Radius dieselbe Winkelgeschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Daher beeinflussen nur Unterschiede in der radialen Komponente des Wechselfelds ihre momentanen Winkelabstände.

Für A, B und C zeigt Abbildung 3, dass sich die radiale Komponente des Wechselfelds von einer nach außen gerichteten Komponente bei A über einen Wert von ungefähr null bei B zu einer nach innen gerichteten Komponente bei C ändert. Folglich gilt

$$\dot{\phi}_A < \dot{\phi}_B < \dot{\phi}_C.$$

Ihre Positionen sind gemäß $\phi_A > \phi_B > \phi_C$ angeordnet. Das jeweils hintere Elektron bewegt sich daher schneller als das vordere, sodass alle drei Abstände abnehmen:

$$\frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_B) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_C) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_B - \phi_C) < 0.$$

Für D, E und F ändert sich die radiale Komponente des Wechselfelds in umgekehrter Weise: bei D nach innen gerichtet, bei E ungefähr null und bei F nach außen gerichtet. Daher gilt

$$\dot{\phi}_D > \dot{\phi}_E > \dot{\phi}_F.$$

Da $\phi_D > \phi_E > \phi_F$ gilt, nehmen alle drei Abstände zu.

Paar	Änderung des Winkelabstands
AB	Nimmt ab
AC	Nimmt ab
BC	Nimmt ab
DE	Nimmt zu
DF	Nimmt zu
EF	Nimmt zu

A.6

Benachbarte Resonatoren schwingen gegenphasig. Daher fokussieren zu einem bestimmten Zeitpunkt abwechselnde Winkelbereiche die Elektronen, während die dazwischenliegenden Bereiche sie auseinanderreiben. Acht Resonatoren erzeugen somit vier Speichen.

Die Zeichnung sollte drei zusätzliche Kopien von S enthalten, die durch Drehungen um 90° , 180° und 270° um den Kathodenmittelpunkt entstehen. Ihre Formen sollten denselben Krümmungssinn aufweisen.

Das statische Feld zeigt nach innen. Die zugehörige Drift ist

$$(-\hat{r}) \times \hat{z} = +\hat{\phi},$$

also rotieren die Speichen gegen den Uhrzeigersinn.

Nach einer halben Schwingungsperiode kehren sich die Polaritäten der Resonatoren um. Eine Speiche muss sich bis zur Position des nächsten Resonators weiterbewegen, also um den Winkel $2\pi/8 = \pi/4$. Daher gilt

$$\omega_s = \frac{\pi/4}{T/2} = \frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{4}.$$

Mit $f = 2.45 \times 10^9$ Hz folgt

$$\omega_s = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

Gleichbedeutend damit führen die Speichen 6.125×10^8 Umdrehungen pro Sekunde aus.

A.7

Unter der vorgegebenen Näherung beträgt der Feldebtrag in der Mitte des Spalts

$$E_{\text{mid}} \simeq \frac{V_0}{b-a}.$$

Der Radius in der Mitte des Spalts ist

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}.$$

Die Drift der Elektronen muss dort dieselbe Tangentialgeschwindigkeit wie die Speiche haben:

$$\frac{E_{\text{mid}}}{B_0} \simeq \omega_s \rho_{\text{mid}}.$$

Folglich gilt

$$\frac{V_0}{B_0(b-a)} \simeq \omega_s \frac{a+b}{2},$$

woraus sich ergibt:

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

Mit den gegebenen Werten von B_0 und f lässt sich dies auch schreiben als

$$V_0 \simeq (5.77 \times 10^8 \text{ V m}^{-2})(b^2 - a^2),$$

wobei a und b in Metern gemessen werden.

B.1

Die Kräfte auf die beiden Ladungen bilden ein Kräftepaar. Das Drehmoment lautet

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Wenn θ als Winkel zwischen dem Dipol und dem momentanen Feld definiert ist, gilt somit

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta.$$

Das Drehmoment wirkt darauf hin, diesen Winkel zu verkleinern. Seine vorzeichenbehaftete, zu θ konjugierte Komponente ist daher $-p_0 |E| \sin \theta$, woraus sich die mechanische Leistung ergibt:

$$H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

Insbesondere gilt für einen Dipol, der sich am Feld ausrichtet, $\dot{\theta} < 0$, sodass das Feld eine positive Leistung überträgt.

Das Ergebnis lässt sich ohne eine Winkelkonvention herleiten. Sind $\vec{r}_+$ und $\vec{r}_-$ die Positionen der Ladungen, so gilt

$$H_i = q\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_+ - q\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_- = \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)].$$

Daher gilt

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

Wird θ stattdessen von der festen positiven x -Achse aus gemessen und ist $E(t)$ eine vorzeichenbehaftete Komponente, so wird daraus

$$H_i = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta) = -p_0 E(t) \sin \theta \dot{\theta}.$$

In der auf den Dipol übertragenen mechanischen Leistung tritt kein Term mit $\dot{E}$ auf.

B.2

Die Summation der Leistung der einzelnen Dipole über eine Volumeneinheit ergibt

$$H(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Die Ableitung der gegebenen Polarisierung lautet

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \beta \varepsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \hat{x}.$$

Daher gilt

$$H(t) = \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t - \delta).$$

Mit

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta,$$

und den Mittelwerten über eine Periode

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

erhalten wir

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

Bei einer positiven Phasenverzögerung ist die mittlere absorbierte Leistung positiv.

B.3

Sei $\mathcal{E}(z)$ die lokale Amplitude des elektrischen Felds. Die mittlere elektrische Energiedichte beträgt

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Die mittlere magnetische Energiedichte ist ebenso groß, also gilt

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c/n im Modell der Aufgabe für Wellen in einem Dielektrikum folgt

$$I(z) = \frac{c}{n} \langle u \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2(z),$$

wobei $n^2 = \varepsilon_r$ gilt.

Die Energieerhaltung für eine dünne Schicht der Dicke dz ergibt

$$-\frac{dI}{dz} = \langle H \rangle.$$

Setzt man das Ergebnis aus B.2 ein und eliminiert $\mathcal{E}^2$, so erhält man

$$-\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega \mathcal{E}^2 \sin \delta = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} I.$$

Für ein homogenes Medium bei fester Temperatur ist der Koeffizient konstant. Die Integration ergibt

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

Der Abschwächungskoeffizient für die Leistung beträgt daher

$$\alpha = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc}.$$

B.4

Gleichung (2) liefert eine Amplitude des elektrischen Felds, die proportional ist zu

$$e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta}.$$

Da die Intensität proportional zum Quadrat dieser Amplitude ist, gilt

$$I(z) = I(0) e^{-n k_0 z \tan \delta}.$$

Der Vergleich mit B.3 unter Verwendung von $k_0 = \omega/c$ ergibt

$$\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} = \frac{n \omega}{c} \tan \delta.$$

Somit gilt

$$\beta \sin \delta = n^2 \tan \delta.$$

Im Rahmen der geforderten Näherung $\tan \delta \simeq \sin \delta$ folgt

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

Dieses Ergebnis gilt im Rahmen der in der Aufgabe vorgegebenen Näherungen für das Dielektrikum und für kleine Verluste.

B.5

Mit der angegebenen Beziehung $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$ lautet der Abschwächungskoeffizient für die Leistung

$$\alpha = n k_0 \tan \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\ell}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Bei einheitlicher Temperatur ist die lokal absorbierte Leistung pro Volumeneinheit proportional zur lokalen Intensität:

$$\langle H(z) \rangle = \alpha I(z).$$

Sie weist daher dieselbe exponentielle Abhängigkeit auf,

$$\frac{\langle H(z) \rangle}{\langle H(0) \rangle} = e^{-\alpha z}.$$

1. Halbwertstiefe der Leistung bei 20°C.

Die Bedingung $e^{-\alpha z_{1/2}} = 1/2$ ergibt

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell}.$$

Bei der markierten Frequenz liefern die durchgezogenen Kurven für 20°C näherungsweise

$$\varepsilon_r \simeq 78, \quad \varepsilon_\ell \simeq 10.$$

Folglich gilt

$$z_{1/2} \simeq \frac{(3.0 \times 10^8) \sqrt{78} \ln 2}{(2\pi)(2.45 \times 10^9)(10)} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Damit ergibt sich aus dem Diagramm eine Halbwertstiefe der Leistung von ungefähr

$$z_{1/2} \simeq 1.2 \text{ cm}.$$

Dies ist die Halbwertstiefe der Leistung; der Exponent für die Abnahme der Feldamplitude ist um einen Faktor zwei kleiner.

2. Reines Wasser bei steigender Temperatur.

Bei fester Frequenz gilt

$$z_{1/2} \propto \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\varepsilon_\ell}.$$

Die durchgezogenen blauen Kurven zeigen eine deutliche Abnahme von ε_ℓ mit der Temperatur. Die relative Abnahme von $\sqrt{\varepsilon_r}$ ist wesentlich geringer. Daher nimmt das Verhältnis zu:

Die Eindringtiefe in reinem Wasser nimmt mit der Temperatur zu.

3. Suppe bei steigender Temperatur.

Bei derselben Frequenz zeigen die gestrichelten blauen Kurven zunehmende dielektrische Verluste bei steigender Temperatur, während die gestrichelten roten Kurven eine Abnahme von ε_r zeigen. Beide Änderungen verringern $\sqrt{\varepsilon_r}/\varepsilon_\ell$. Daher gilt

Die Eindringtiefe in Suppe nimmt mit der Temperatur ab.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Thermoakustische Wärmekraftmaschine

Eine thermoakustische Wärmekraftmaschine ist eine Vorrichtung, die Wärme in akustische Leistung, also Schallwellen, umwandelt – eine Form mechanischer Arbeit. Wie viele andere Wärmekraftmaschinen kann sie umgekehrt als Kältemaschine betrieben werden, wobei Schall

genutzt wird, um Wärme von einem kalten zu einem heißen Reservoir zu transportieren. Die hohen Betriebsfrequenzen verringern die Wärmeleitung und machen eine Begrenzung des Arbeitsraums überflüssig. Im Gegensatz zu vielen anderen Maschinentypen besitzt die thermoakustische Wärmekraftmaschine außer dem Arbeitsfluid selbst keine beweglichen Teile.

Die Wirkungsgrade thermoakustischer Maschinen sind typischerweise niedriger als die anderer Maschinentypen, doch bieten sie Vorteile bei den Errichtungs- und Wartungskosten. Dies eröffnet Möglichkeiten für Anwendungen im Bereich erneuerbarer Energien, etwa in solarthermischen Kraftwerken und bei der Nutzung von Abwärme. Unsere Untersuchung konzentriert sich auf die Erzeugung akustischer Energie innerhalb des Systems; die Entnahme oder Umwandlung dieser Energie zum Betrieb externer Geräte bleibt unberücksichtigt.

Teil A: Schallwelle in einem geschlossenen Rohr (3.7 Punkte)

Betrachten Sie ein wärmeisolierendes Rohr der Länge L mit der Querschnittsfläche S , dessen Achse entlang der x -Richtung liegt. Die beiden Rohrenden befinden sich bei $x = 0$ und $x = L$. Das Rohr ist mit einem idealen Gas gefüllt und an beiden Enden verschlossen. Im Gleichgewicht hat das Gas die Temperatur T_0 , den Druck p_0 und die Massendichte ρ_0 . Nehmen Sie an, dass die Viskosität vernachlässigt werden kann und dass sich das Gas nur in x -Richtung bewegt. In den dazu senkrechten Richtungen y und z sind die Eigenschaften des Gases räumlich einheitlich.

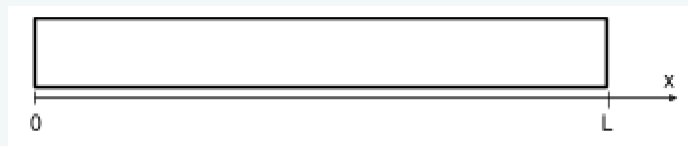


Abbildung 1

A.1 (0.3 Pkt.)

Wenn sich eine stehende Schallwelle ausbildet, schwingen die Gaselemente in x -Richtung mit der Kreisfrequenz ω . Die Schwingungsamplitude hängt von der Gleichgewichtslage x des jeweiligen Elements entlang des Rohres ab. Die longitudinale Auslenkung jedes Gaselements aus seiner Gleichgewichtslage x ist gegeben durch

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(beachten Sie, dass u hier die Auslenkung eines Gaselements beschreibt)

wobei $a \ll L$ eine positive Konstante, $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl und λ die Wellenlänge ist. Wie groß ist die maximal mögliche Wellenlänge $\lambda_{\max}$ in diesem System?

Wir nehmen in der gesamten Aufgabe einen Schwingungsmodus mit $\lambda = \lambda_{\max}$ an.

Betrachten Sie nun ein schmales Gaspaket, das sich im Ruhezustand zwischen x und $x + \Delta x$ befindet ($\Delta x \ll L$). Infolge der Auslenkungswelle aus Aufgabe A.1 schwingt das Paket entlang der x -Achse, wobei sich sein Volumen und seine anderen thermodynamischen Zustandsgrößen ändern.

Nehmen Sie in allen folgenden Teilaufgaben an, dass sämtliche Änderungen dieser thermodynamischen Zustandsgrößen klein gegenüber den ungestörten Werten sind.

A.2 (0.5 Pkt.)

Das Volumen $V(x, t)$ des Gaspakets schwingt um den Gleichgewichtswert $V_0 = S\Delta x$ und hat die Form

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Bestimmen Sie einen Ausdruck für $V_1(x)$ in Abhängigkeit von V_0 , a , k und x .

A.3 (0.7 Pkt.)

Nehmen Sie an, dass der Gesamtdruck des Gases infolge der Schallwelle näherungsweise die Form

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

annimmt. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der auf das Gaspaket wirkenden Kräfte die Amplitude $p_1(x)$ der Druckschwingung in führender Ordnung in Abhängigkeit vom Ort x , der Gleichgewichtsdichte ρ_0 , der Auslenkungsamplitude a und den Wellenparametern k und ω .

Bei akustischen Frequenzen kann die Wärmeleitfähigkeit des Gases vernachlässigt werden. Wir behandeln die Expansion und Kompression der Gaspakete als rein adiabatisch, sodass die Beziehung $pV^\gamma = \text{const}$ gilt, wobei γ der Adiabatenexponent ist.

A.4 (0.3 Pkt.)

Verwenden Sie die obige Beziehung und die Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben, um in erster Ordnung einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit $c = \omega/k$ im Rohr herzuleiten. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von p_0 , ρ_0 und dem Adiabatenexponenten γ an.

A.5 (0.7 Pkt.)

Die Änderung der Gastemperatur aufgrund der adiabatischen Expansion und Kompression infolge der Schallwelle hat die Form:

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Berechnen Sie die Amplitude $T_1(x)$ der Temperaturschwingungen in Abhängigkeit von T_0 , γ , a , k und x .

A.6 (1.2 Pkt.)

Nur für diese Teilaufgabe nehmen wir eine schwache thermische Wechselwirkung zwischen dem Rohr und dem Gas an. Dadurch bleibt die stehende Schallwelle nahezu unverändert, aber das Gas kann eine kleine Wärmemenge mit dem Rohr austauschen. Die Erwärmung durch Viskosität kann vernachlässigt werden.

Geben Sie für jeden der Punkte in Abbildung 2 (A und C an den Rohrenden, B in der Mitte) an, ob die Temperatur des Rohres an diesem Punkt über einen langen Zeitraum steigt, sinkt oder gleich bleibt.

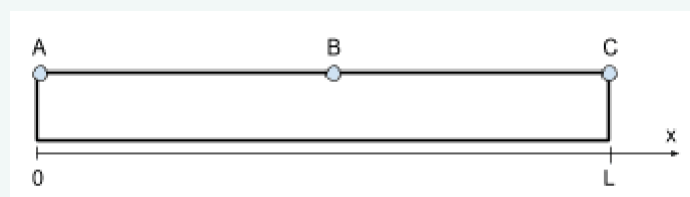


Abbildung 2

Teil B: Verstärkung der Schallwelle durch äußeren thermischen Kontakt (6.3 Punkte)

Ein Stapel dünner Festkörperplatten mit ausreichend großen Zwischenräumen wird in das Rohr eingebracht. Die Platten des Stapels sind parallel zur Rohrachse ausgerichtet, damit sie die Gasströmung entlang des Rohres nicht behindern. Die Mitte des Stapels befindet sich bei $x_0 = L/4$; er erstreckt sich über eine Breite $\ell \ll L$ entlang der Rohrachse und füllt den gesamten Rohrquerschnitt aus. Zwischen dem rechten und dem linken Rand des Stapels wird eine Temperaturdifferenz τ aufrechterhalten. Der linke Rand des Stapels bei $x_H = x_0 - \ell/2$ wird durch ein äußeres Wärmereservoir auf der Temperatur $T_H = T_0 + \tau/2$ gehalten, während gleichzeitig sein rechter Rand bei $x_C = x_0 + \ell/2$ auf einer Temperatur $T_C = T_0 - \tau/2$ gehalten wird.

Der Plattenstapel ermöglicht einen geringen longitudinalen Wärmestrom, der einen konstanten Temperaturgradienten zwischen seinen Rändern aufrechterhält, sodass $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$ gilt.

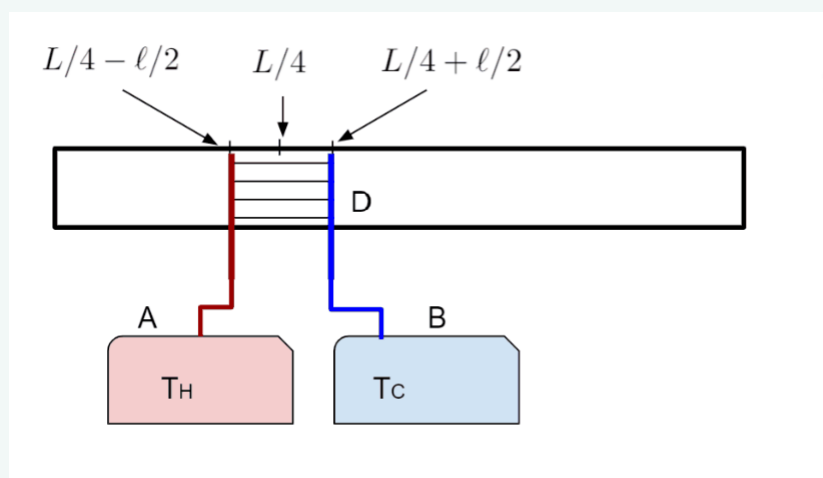


Abbildung 3. Skizze des Systems. (A) und (B) bezeichnen das heiße beziehungsweise das kalte Wärmereservoir. (D) bezeichnet den Stapel.

Treffen Sie zur Untersuchung des Einflusses des thermischen Kontakts zwischen dem Plattenstapel und dem Gas auf die Schallwellen im Rohr die folgenden Annahmen:

- Wie im vorherigen Teil sind alle Änderungen der thermodynamischen Zustandsgrößen klein gegenüber den ungestörten Werten.
- Das System arbeitet im Grundmodus der stehenden Welle mit der größtmöglichen Wellenlänge. Dieser wird durch den Plattenstapel nur geringfügig verändert.
- Der Stapel ist viel kürzer als die Wellenlänge, $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, und kann weit genug sowohl von Auslenkungs- als auch von Druckknoten entfernt angeordnet werden, sodass die Auslenkung $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ und der Druck $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ über die gesamte Länge des Stapels als räumlich einheitlich angesehen werden können.
- Sämtliche Randeffekte, die durch das Ein- und Austreten der Gaspakete in den beziehungsweise aus dem Stapel entstehen, können vernachlässigt werden.
- Die Temperaturdifferenz zwischen den Enden des Plattenstapels, also zwischen dem heißen und dem kalten Reservoir, ist klein gegenüber der absoluten Temperatur: $\tau \ll T_0$.
- Die Wärmeleitung durch den Stapel, durch das Gas und entlang des Rohres ist jeweils vernachlässigbar. Die einzigen wesentlichen Mechanismen der Wärmeübertragung sind

Konvektion infolge der Gasbewegung und Wärmeleitung zwischen dem Gas und dem Stapel.

B.1 (0.4 Pkt.)

Betrachten Sie ein bestimmtes Gaspaket im Bereich des Stapels, das sich ursprünglich bei $x_0 = L/4$ befindet. Während sich das Paket innerhalb des Stapels bewegt, ändert sich die lokale Temperatur des benachbarten Stapelabschnitts wie folgt:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Drücken Sie T_{st} durch a , τ und ℓ aus.

B.2 (1.0 Pkt.)

Oberhalb welcher kritischen Temperaturdifferenz τ_{cr} transportiert das Gas Wärme vom heißen zum kalten Reservoir? Drücken Sie τ_{cr} durch T_0 , γ , k und ℓ aus.

B.3 (0.8 Pkt.)

Bestimmen Sie den allgemeinen Näherungsausdruck für den Wärmestrom $\frac{dQ}{dt}$ in ein kleines Gaspaket als lineare Funktion der Änderungsraten seines Volumens und seines Drucks. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von der Volumenänderungsrate $\frac{dV}{dt}$, der Druckänderungsrate $\frac{dp}{dt}$, den ungestörten Gleichgewichtswerten von Druck und Volumen des Pakets p_0 , V_0 sowie dem Adiabatenexponenten γ an. (Sie dürfen den Ausdruck für die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ verwenden, wobei R die Gaskonstante ist.)

Der begrenzte Wärmestrom zwischen dem Paket und dem Stapel verursacht eine Phasenverschiebung zwischen den Druck- und Volumenschwingungen des Pakets. Wir werden sehen, wie dadurch Arbeit erzeugt wird.

Der Wärmestrom vom Stapel in das Paket sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen dem Paket und dem benachbarten Element des Stapels und näherungsweise gegeben durch $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Hier sind T_1 und T_{st} die Temperaturschwingungsamplituden des Gaspakets beziehungsweise des benachbarten Stapelabschnitts aus den Aufgaben A.5 und B.1, und $\beta > 0$ ist eine Konstante. Nehmen Sie an, dass bei den Betriebsfrequenzen der Maschine die Änderung der Gastemperatur infolge dieses Wärmestroms sowohl gegenüber T_1 als auch gegenüber T_{st} vernachlässigbar ist.

B.4 (1.9 Pkt.)

Zur Berechnung der Arbeit betrachten wir die Änderung des Volumens des bewegten Pakets infolge des thermischen Kontakts mit dem Stapel. Wir schreiben Druck und Volumen des Pakets unter dem Einfluss des Stapels in der Form:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

Bestimmen Sie bei gegebenen p_a und p_b die Koeffizienten V_a und V_b . Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a und ℓ an.

B.5 (0.8 Pkt.)

Bestimmen Sie einen Näherungsausdruck für die akustische Arbeit pro Volumeneinheit w , die das Gaspaket während eines Zyklus erzeugt. Integrieren Sie über das Volumen des Stapels, um die gesamte vom Gas während eines Zyklus erzeugte Arbeit W_{tot} zu erhalten. Drücken Sie W_{tot} durch $\gamma, \tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, k$ und S aus.

B.6 (0.8 Pkt.)

Bestimmen Sie einen Näherungsausdruck für die Wärme Q_{tot} , die während eines Zyklus von der linken Seite der Ebene $x = x_0$ nach rechts transportiert wird. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, \ell$ an.

(Hinweis: Sie dürfen die Formel $j = Q \frac{du}{dt}$ für den konvektiven Wärmestrom verwenden.)

B.7 (0.6 Pkt.)

Bestimmen Sie den Wirkungsgrad η der thermoakustischen Wärmekraftmaschine. Der Wirkungsgrad ist als Verhältnis der erzeugten akustischen Arbeit zur dem heißen Reservoir entnommenen Wärme definiert. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz τ zwischen dem heißen und dem kalten Reservoir, der kritischen Temperaturdifferenz τ_{cr} und dem Carnot-Wirkungsgrad $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ an.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die Koeffizienten V_1, p_1, T_1 sind vorzeichenbehaftete Koeffizienten in den angegebenen Schwingungsansätzen. Durchgehend gilt $k = \pi/L$.

- A.1

$$\lambda_{\text{max}} = 2L.$$

- A.2

$$V_1(x) = V_0 a k \cos(kx).$$

- A.3

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

- A.4

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

- A.5

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

- A.6 A: steigt; B: sinkt; C: steigt.

- B.1

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

- B.2

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k\ell.$$

Wärme wird von heiß nach kalt transportiert, wenn $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

- B.3

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{\gamma p_0 dV/dt + V_0 dp/dt}{\gamma - 1}.$$

- B.4

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right], \quad V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

- B.5

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}),$$

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

- B.6

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

- B.7

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c, \quad \tau > \tau_{\text{cr}}.$$

Lösung

Bei der Bestimmung der schwingenden thermodynamischen Größen berücksichtigen wir Störungen erster Ordnung. Die ersten von null verschiedenen Zyklusmittelwerte der Arbeit und der transportierten Wärme treten in zweiter Ordnung in der Wellenamplitude auf. Die thermische Kopplung ist schwach, sodass in Ausdrücken, die bereits proportional zu dieser Kopplung sind, die ungestörten Wellenamplituden verwendet werden können.

A.1

An den verschlossenen, starren Enden muss die longitudinale Auslenkung null sein:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Die erste Bedingung ist bereits erfüllt. Die zweite ergibt

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Wahl $n = 0$ liefert keine Welle. Somit gilt

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}.$$

Die größte Wellenlänge entspricht $n = 1$:

$$\lambda_{\max} = 2L, \quad k = \frac{\pi}{L}.$$

A.2

Die beiden Grenzen des Pakets bewegen sich nach

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t).$$

Folglich gilt

$$V(x, t) = S [\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)].$$

Für $k\Delta x \ll 1$ gilt

$$V(x, t) \simeq S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = V_0 [1 + ak \cos(kx) \cos(\omega t)].$$

Daher ist

$$V_1(x) = V_0 ak \cos(kx).$$

A.3

Die Druckkräfte auf das Paket ergeben in erster Ordnung

$$F_x = S[p(x, t) - p(x + \Delta x, t)] \simeq -S\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Die Masse des Pakets beträgt $\rho_0 S\Delta x$. Das zweite Newtonsche Gesetz lautet daher

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Einsetzen der gegebenen Schwingungen liefert

$$-\rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = p'_1(x) \cos(\omega t),$$

also

$$p'_1(x) = -\rho_0 a \omega^2 \sin(kx).$$

Integration ergibt

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx) + C.$$

Es gibt keine räumlich gleichförmige akustische Kompression: Die gesamte Volumenänderung ist proportional zu

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L, t) - u(0, t) = 0.$$

Die lineare adiabatische Beziehung zwischen Druck und Kompression, die in A.4 explizit angegeben wird, verlangt dann, dass die räumlich gemittelte Druckstörung verschwindet. Da $\int_0^L \cos(kx) dx = 0$, folgt daraus $C = 0$. Somit ist

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4

Die Linearisierung von $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ ergibt

$$\frac{\delta p}{p_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0.$$

Mit $\delta p = -p_1 \cos(\omega t)$ und $\delta V = V_1 \cos(\omega t)$ folgt

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{V_1}{V_0} = \gamma p_0 a k \cos(kx).$$

Der Vergleich mit A.3 liefert

$$\frac{\rho_0 a \omega^2}{k} = \gamma p_0 a k,$$

und somit

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

A.5

Für eine feste Stoffmenge eines idealen Gases gilt

$$pV = nRT.$$

Die linearisierte Form lautet

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} + \frac{\delta V}{V_0}.$$

Mit der adiabatischen Beziehung aus A.4 folgt

$$\frac{\delta T}{T_0} = -(\gamma - 1) \frac{\delta V}{V_0} = -(\gamma - 1) a k \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Der Vergleich mit der angegebenen Temperaturschwingung ergibt

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

A.6

Betrachten Sie ein Paket in der linken Rohrhälfte, wo $\cos(kx) > 0$ gilt.

Wird es nach rechts ausgelenkt, expandiert es und kühlt ab. Es nimmt daher an einer relativ weit rechts liegenden Position Wärme vom Rohr auf. Wird es nach links ausgelenkt, wird es komprimiert und erwärmt, sodass es an einer relativ weit links liegenden Position Wärme an das Rohr abgibt. Durch Wiederholung wird Wärme zum linken Ende transportiert.

In der rechten Hälfte gilt $\cos(kx) < 0$, sodass sich die Zuordnung umkehrt: Ein Paket nimmt Wärme auf, wenn es zur Mitte hin ausgelenkt ist, und gibt Wärme ab, wenn es zum rechten Ende hin ausgelenkt ist.

Somit pumpt die akustische Bewegung Wärme aus dem mittleren Bereich zu beiden Enden:

$$A : \text{Temperatur steigt}, \quad B : \text{Temperatur sinkt}, \quad C : \text{Temperatur steigt}.$$

Obwohl das Paket, dessen Gleichgewichtslage genau in der Mitte liegt, in erster Ordnung keine Temperaturschwingung aufweist, bewegen sich benachbarte Pakete durch den mittleren Bereich und entziehen ihm Wärme. Der mittlere thermische Effekt ist von zweiter Ordnung in der Amplitude; er wird nicht durch die Temperatur erster Ordnung an einer einzelnen Gleichgewichtslage bestimmt.

B.1

In der Mitte des Stapels gilt

$$kx_0 = \frac{\pi}{L} \frac{L}{4} = \frac{\pi}{4},$$

sodass die Auslenkung des Pakets

$$u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t).$$

beträgt. Seine momentane Position ist $x_0 + u(x_0, t)$. Einsetzen in das Temperaturprofil der Platten ergibt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} u(x_0, t) = T_0 - \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} \cos(\omega t).$$

Daher gilt

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

B.2

Die Amplitude der adiabatischen Gastemperaturschwingung in der Mitte des Stapels beträgt

$$T_1(x_0) = \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Am linken Umkehrpunkt der Paketbewegung beträgt die Gastemperatur $T_0 + T_1$, während die Temperatur des benachbarten Stapelabschnitts $T_0 + T_{\text{st}}$ beträgt. Damit das Paket dort Wärme aufnimmt, muss gelten

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

Am rechten Umkehrpunkt bewirkt dieselbe Bedingung, dass der Stapel kälter als das Gas ist, sodass das Paket dort Wärme abgibt. Es transportiert daher genau dann Wärme von heiß nach kalt, wenn

$$\frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} > \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Die kritische Temperaturdifferenz ist somit

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

Bei Gleichheit stimmen die Temperaturschwingungen des Gases und des benachbarten Stapelabschnitts überein, sodass der Wärmeaustausch in führender Ordnung verschwindet. Unterhalb dieser Schwelle kehrt sich die Richtung des Wärmetransports um.

B.3

Wir wählen $dQ > 0$ für Wärme, die dem Paket zugeführt wird, und $p dV > 0$ für vom Gas verrichtete Arbeit. Der erste Hauptsatz lautet

$$dQ = dU + p dV.$$

Für das ideale Gas gilt

$$U = nc_v T = \frac{nRT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Daraus folgt

$$dQ = \frac{V dp + p dV}{\gamma - 1} + p dV = \frac{V dp + \gamma p dV}{\gamma - 1}.$$

In erster Ordnung können die Koeffizienten vor den kleinen Änderungsraten durch die Gleichgewichtswerte ersetzt werden:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{V_0 dp/dt + \gamma p_0 dV/dt}{\gamma - 1}}.$$

B.4

Aus B.1 und B.2 folgt

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\sqrt{2} \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

Zur Abkürzung definieren wir

$$\Delta T \equiv \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2} \ell}.$$

Die vorgegebene Wärmezufuhr pro Zeit lautet dann

$$\dot{Q} = -\beta V_0 \Delta T \cos(\omega t).$$

Ableiten der Ausdrücke für Druck und Volumen ergibt

$$\dot{p} = \omega p_a \cos(\omega t) + \omega p_b \sin(\omega t),$$

$$\dot{V} = \omega V_a \cos(\omega t) - \omega V_b \sin(\omega t).$$

Einsetzen in B.3 liefert

$$\dot{Q} = \frac{\omega}{\gamma - 1} [(V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) \cos(\omega t) + (V_0 p_b - \gamma p_0 V_b) \sin(\omega t)].$$

Der Vergleich der Sinuskoeffizienten ergibt

$$V_0 p_b - \gamma p_0 V_b = 0,$$

also

$$\boxed{V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}}.$$

Der Vergleich der Kosinuskoeffizienten ergibt

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} (V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) = -\beta V_0 \Delta T.$$

Somit gilt

$$\boxed{V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2} \omega \ell} \right]}.$$

Der zu β proportionale Term liefert den Volumenanteil, der für eine von null verschiedene Arbeit pro Zyklus erforderlich ist.

B.5

Die von einem Paket während eines Zyklus verrichtete Arbeit beträgt

$$W_{\text{parcel}} = \oint p dV.$$

Mit $\theta = \omega t$ integriert sich der Beitrag des konstanten Drucks zu null, und es bleibt

$$W_{\text{parcel}} = \int_0^{2\pi} (p_a \sin \theta - p_b \cos \theta)(V_a \cos \theta - V_b \sin \theta) d\theta.$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi,$$

erhalten wir

$$W_{\text{parcel}} = -\pi(p_a V_b + p_b V_a).$$

Beim Einsetzen von B.4 heben sich die Terme mit $p_a p_b$ auf:

$$W_{\text{parcel}} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta V_0 p_b}{\gamma p_0 \omega} \Delta T.$$

Die Arbeit pro Einheit des Gleichgewichtsvolumens beträgt daher

$$w = \frac{W_{\text{parcel}}}{V_0} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta p_b}{\gamma p_0 \omega} \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2} \ell}.$$

Da dieser Ausdruck bereits von erster Ordnung in der thermischen Kopplung ist, verwenden wir den ungestörten Druckkoeffizienten:

$$p_b \simeq p_1(x_0) = \gamma p_0 a k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\gamma p_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

Daraus folgt

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

Der Stapel ist kurz, sodass diese Arbeitsdichte über sein Gasvolumen $S\ell$ näherungsweise räumlich einheitlich ist. Somit gilt

$$W_{\text{tot}} \simeq w S \ell,$$

woraus sich

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

ergibt. Die Arbeit ist im Wärmekraftmaschinenbetrieb $\tau > \tau_{\text{cr}}$ positiv.

B.6

Sei $q(t)$ die vom Stapel aufgenommene Wärme pro Einheit des Gleichgewichtsvolumens des Gases, bezogen auf eine beliebige Konstante. In der berücksichtigten Ordnung gilt

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V_0} = -\beta \Delta T \cos(\omega t).$$

Integration ergibt

$$q(t) = -\frac{\beta \Delta T}{\omega} \sin(\omega t) + q_*.$$

Die Geschwindigkeit des Pakets in der Mitte des Stapels beträgt

$$v(t) = \dot{u}(x_0, t) = -\frac{a\omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

Da q auf eine Volumeneinheit bezogen ist, lautet die konvektive Wärmestromdichte pro Flächeneinheit

$$j(t) = q(t)v(t).$$

Die beliebige Konstante trägt nicht zum Nettotransport bei, da der Mittelwert der Geschwindigkeit null ist. Auch der rein adiabatische Beitrag hat einen verschwindenden Zyklusmittelwert: Er ist proportional zu $\cos(\omega t)$, während die Geschwindigkeit proportional zu $\sin(\omega t)$ ist. Die netto durch den Querschnitt transportierte Wärme beträgt daher

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= S \int_0^{2\pi/\omega} q(t)v(t) dt \\ &= \frac{S\beta a \Delta T}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{\pi S \beta a \Delta T}{\sqrt{2} \omega}. \end{aligned}$$

Einsetzen von ΔT ergibt

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi \beta a^2 S}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

Für $\tau > \tau_{\text{cr}}$ ist das Vorzeichen positiv, entsprechend einem Transport von links nach rechts.

B.7

Innerhalb der berücksichtigten Genauigkeit für den kurzen Stapel und die kleine Temperaturdifferenz ist die dem heißen Reservoir entnommene Wärme näherungsweise gleich der durch die Mitte des Stapels transportierten Wärme:

$$Q_H \simeq Q_{\text{tot}}.$$

Ihre Differenz ist von der Größenordnung der akustischen Arbeit. Da der Wirkungsgrad selbst klein ist, würde die Berücksichtigung dieser Differenz den Wirkungsgrad nur in höherer Ordnung verändern.

Mit B.5 und B.6 folgt

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_H} \simeq \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma - 1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0}.$$

Zugleich gilt

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0 - \tau/2}{T_0 + \tau/2} = \frac{\tau}{T_0 + \tau/2} \simeq \frac{\tau}{T_0},$$

weil $\tau \ll T_0$. Daher ist

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c.$$

Für den Wärmekraftmaschinenbetrieb gilt $\tau > \tau_{\text{cr}}$, sodass der Wirkungsgrad unter dem Carnot-Wirkungsgrad liegt. Nähert man sich der Schwelle von oben, nähert sich der Wirkungsgrad in dieser Ordnung dem Carnot-Wert, während sowohl die abgegebene Arbeit als auch der Wärmetransport verschwinden. An der Schwelle selbst definiert ihr Verhältnis keinen Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine mit endlicher Leistungsabgabe.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.