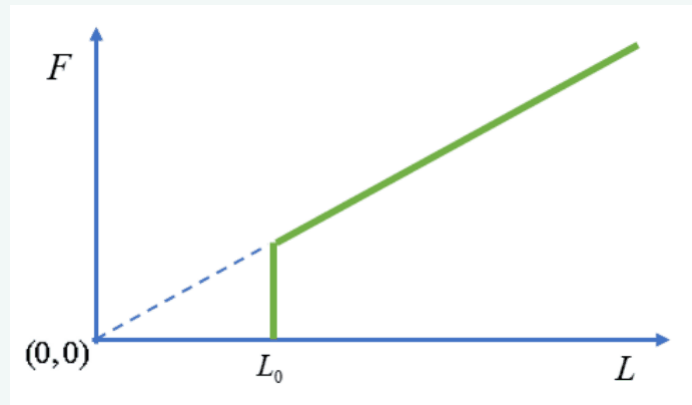


المسألة 1: النوابض ذات الطول الصفري ولفات سلنكي

النابض ذو الطول الفعّال الصفري (ZLS) هو نابض تتناسب فيه القوة طردياً مع طول النابض، بحيث $F = kL$ عندما $L > L_0$ ، حيث L_0 هو الطول الأدنى للنابض، وهو أيضاً طوله في حالة عدم الاستطالة. يبيّن الشكل 1 العلاقة بين القوة F وطول النابض L لنابض من نوع ZLS، حيث يمثل ميل المستقيم ثابت النابض k .

الشكل 1: العلاقة بين القوة F وطول النابض L

يفيد النابض من نوع ZLS في تسجيل الزلازل، ويتيح قياس التغيرات في تسارع الجاذبية g بدقة عالية جداً. سنتناول هنا نابضاً متجانساً من نوع ZLS، يزيد وزنه Mg على kL_0 . ونعرّف نسبة مقابلة عديمة الأبعاد، $\alpha = kL_0/Mg < 1$ ، لوصف الليونة النسبية للنابض. وقد تكون اللعبة المعروفة باسم «سلنكي» نابضاً من هذا النوع، ولكن ليس بالضرورة.

الجزء A: الاستاتيكا (3.0 نقاط)

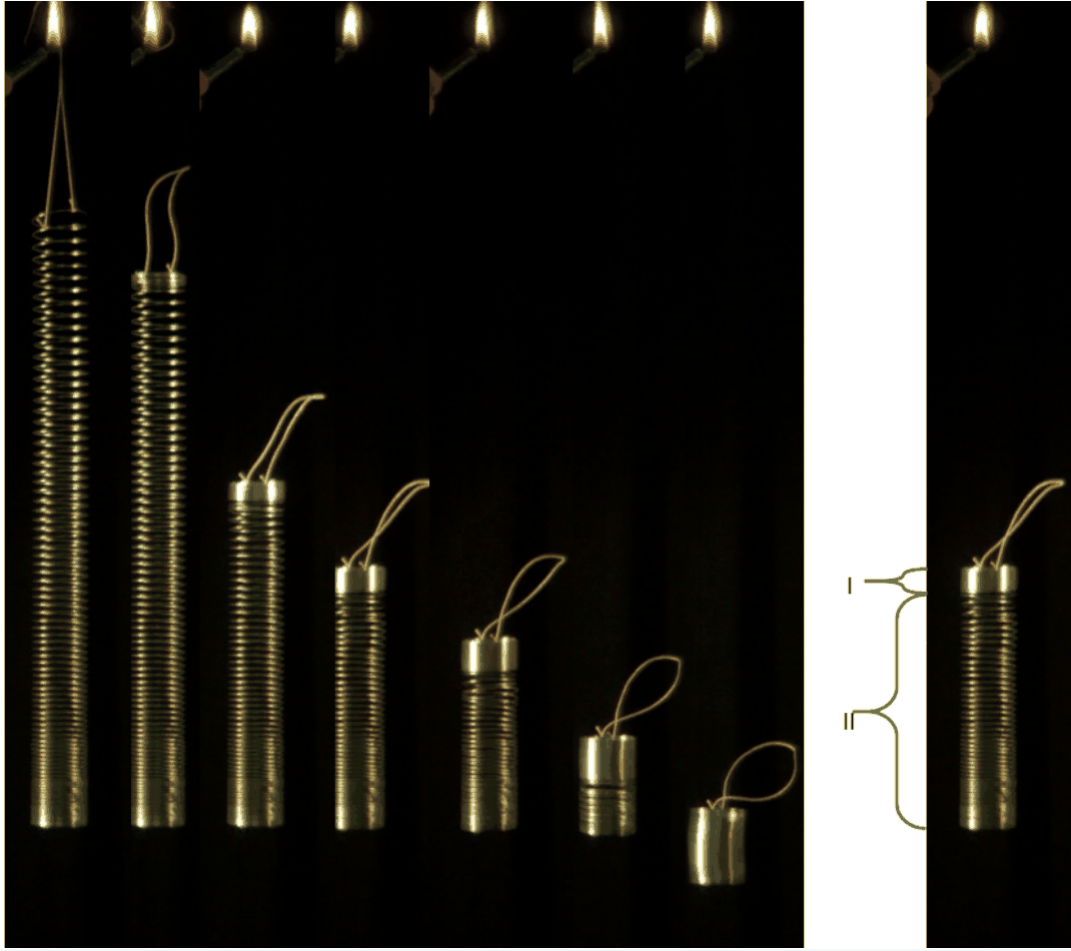
0.5 نقطة	A.1 اعتبر مقطعاً طوله $\Delta\ell$ من نابض ZLS غير مستطال، ثم مدّد هذا المقطع بقوة F في ظروف انعدام الوزن. ما طول هذا المقطع Δy بدلالة F و $\Delta\ell$ ومعلمات النابض؟
0.5 نقطة	A.2 لمقطع طوله $\Delta\ell$ ، احسب الشغل ΔW اللازم لتمديده من طوله الأصلي $\Delta\ell$ إلى طول Δy .

في جميع أجزاء هذه المسألة، سنحدّد موضع نقطة على النابض بمسافتها $0 \leq \ell \leq L_0$ عن الطرف السفلي للنابض عندما يكون غير مستطال. وعلى وجه الخصوص، تبقى ℓ ثابتة لكل نقطة على النابض أثناء استطالته.

2.0 نقطة	A.3 افترض أننا نعلّق النابض من طرفه العلوي، فيستطيل تحت تأثير وزنه. ما الطول الكلي H للنابض المعلق في حالة الاتزان؟ عبّر عن إجاباتك بدلالة L_0 و α .
-------------	---

الجزء B: الديناميكا (5.5 نقاط)

تُظهر التجارب أنه عندما يُعلّق النابض ساكناً ثم يُترك، فإنه ينكمش تدريجياً بدءاً من الأعلى، بينما يبقى الجزء السفلي ساكناً (انظر الشكل 2). ومع مرور الزمن، يتحرّك الجزء المنكمش ككتلة متماسكة ويضمّ إليه لفات إضافية من النابض، بينما يقصر الجزء الساكن. ولا تبدأ أي نقطة على النابض بالحركة إلا عندما يصل إليها الجزء المتحرّك. ولا يبدأ الطرف السفلي للنابض بالحركة إلا عندما ينكمش النابض بالكامل ويبلغ طوله غير المستطال L_0 . وبعد ذلك، يواصل النابض المنكمش السقوط رأسياً إلى الأسفل، من دون تقلّب، كجسم صلب تحت تأثير الجاذبية.



الشكل 2: يسارًا: سلسلة من الصور المتقطعة أثناء السقوط الحر للعبة سلنكي. يمينًا: الجزء المتحرك I والجزء الساكن II أثناء السقوط الحر للنابض.

في الأجزاء المتبقية من المسألة، يُطلب منك أن تبني حلك على النموذج الموصوف أعلاه. يمكنك إهمال مقاومة الهواء، ولكن لا يجوز لك إهمال L_0 .

2.5 نقطة	احسب الزمن t_c الذي يستغرقه النابض منذ لحظة تركه حتى ينكمش بالكامل عائدًا إلى طوله الأدنى L_0 . عبّر عن إجابتك بدلالة L_0 و g و α . احسب القيمة العددية لـ t_c لنابض ذي $k = 1.02 \text{ N/m}$ و $L_0 = 0.055 \text{ m}$ و $M = 0.201 \text{ kg}$ ، مع أخذ قيمة g مساوية لـ 9.80 m/s^2 .	B.1
2.5 نقطة	في هذه المهمة، تُستخدم ℓ للدلالة على إحداثي الحد الفاصل بين الجزأين I (الجزء المتحرك في الشكل 2) و II (الجزء الساكن). في لحظة معينة، ما دام جزء ساكن موجودًا، تكون كتلته $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ ، ويتحرك الجزء المتحرك بسرعة لحظية موحدة $v_I(\ell)$. بيّن أن سرعة الجزء المتحرك في هذه اللحظة (ما دام جزء ساكن موجودًا) هي $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. عبّر عن الثابتين A و B بدلالة L_0 و g و α .	B.2
0.5 نقطة	استنادًا إلى B.2، أوجد السرعة الدنيا $v_{\min}$ للجزء المتحرك من النابض أثناء حركته، بعد تركه وقبل اصطدامه بالأرض. عبّر عن إجابتك بدلالة L_0 و α و A و B .	B.3

الجزء C: الطاقة (1.5 نقطة)

1.5 نقطة	احسب مقدار الطاقة الميكانيكية Q المفقودة نتيجة توليد الحرارة، منذ لحظة ترك النابض حتى اللحظة التي تسبق اصطدامه بالأرض مباشرة. عبّر عن إجابتك بدلالة L_0 و M و g و α .	C.1
-------------	--	-----

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• A.1

$$\Delta y = \Delta \ell \max\left(1, \frac{F}{kL_0}\right)$$

• A.2، عندما $\Delta y \geq \Delta \ell$:

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2]$$

• A.3

$$H = \frac{L_0}{2\alpha}(1 + \alpha^2)$$

• B.1

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}} \quad t_c \approx 0.245 \text{ s}$$

• B.2، باعتماد السرعة المتجهة نحو الأسفل موجبة:

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1 - 3\alpha)}{3\alpha}$$

يجري الانكماش عبر المجال $\alpha L_0 \leq \ell < L_0$.

• B.3

$$v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}$$

تتحقق هذه السرعة مباشرة بعد اصطدام الجزء المتحرك بالجزء السفلي الذي كان متراصاً في البداية.

• C.1

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$$

الحل

A.1

في ظروف انعدام الوزن، يكون الشد منتظماً. وبما أن النابض متجانس، فإن نسبة الطول في حالة الاستطالة إلى الطول في حالة عدم الاستطالة واحدة لجميع المقاطع.

عندما $F > kL_0$ ، يكون طول النابض بأكمله $L = F/k$ ، ومن ثم

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{L}{L_0} = \frac{F}{kL_0}.$$

وبصيغة مكافئة، يكون ثابت النابض لهذا المقطع

$$k_{\text{seg}} = \frac{kL_0}{\Delta \ell}.$$

عندما $0 \leq F \leq kL_0$ ، يبقى المقطع عند طوله الأدنى. وعليه

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta \ell, & 0 \leq F \leq kL_0, \\ \frac{F \Delta \ell}{kL_0}, & F > kL_0. \end{cases}$$

A.2

لا تؤدي زيادة الشد حتى kL_0 إلى أي إزاحة، ولذلك لا تتطلب شغلًا ميكانيكيًا. وأثناء الاستطالة اللاحقة، عندما يكون الطول اللحظي للمقطع s ،

$$F(s) = \frac{kL_0}{\Delta \ell} s.$$

الشغل اللازم للتمديد شبه الساكن هو

$$\Delta W = \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} F(s) ds = \frac{kL_0}{\Delta \ell} \int_{\Delta \ell}^{\Delta y} s ds.$$

ومن ثم

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} [(\Delta y)^2 - (\Delta \ell)^2].$$

وهذا يساوي أيضًا الزيادة في طاقة الوضع المرونية.

A.3

الكتلة لكل وحدة طول غير مستطال هي

$$\mu = \frac{M}{L_0}.$$

عند الإحداثي المادي ℓ ، يحمل الشد وزن النابض كله أسفل تلك النقطة:

$$T(\ell) = \mu g \ell = \frac{Mg}{L_0} \ell.$$

لا تحدث الاستطالة إلا حيث $T(\ell) > kL_0$. ولذلك يُحدد الحد الفاصل بين الجزأين المتراص والمستطال بالعلاقة

$$\frac{Mg}{L_0} \ell_* = kL_0, \quad \boxed{\ell_* = \alpha L_0}.$$

وهكذا يبقى الكسر السفلي α من النابض غير مستطال.

تكن $y_0(\ell)$ ارتفاع النقطة فوق الطرف السفلي في حالة الاتزان. بتطبيق A.1 موضعياً،

$$\frac{dy_0}{d\ell} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell}{\alpha L_0}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

بالتكامل مع الشرط $y_0(0) = 0$ نحصل على

$$y_0(\ell) = \begin{cases} \ell, & 0 \leq \ell \leq \alpha L_0, \\ \frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2}, & \alpha L_0 \leq \ell \leq L_0. \end{cases}$$

وعلى وجه الخصوص،

$$\boxed{H = y_0(L_0) = \frac{L_0}{2\alpha} (1 + \alpha^2)}.$$

B.1

بعد ترك النابض، تكون الجاذبية القوة الخارجية الوحيدة. ولذلك يسقط مركز الكتلة بتسارع g ، على الرغم من أن التصادمات الداخلية تبدد الطاقة.

الارتفاع الابتدائي لمركز الكتلة هو

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} &= \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} y_0(\ell) d\ell \\ &= \frac{1}{L_0} \left[\int_0^{\alpha L_0} \ell d\ell + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left(\frac{\ell^2}{2\alpha L_0} + \frac{\alpha L_0}{2} \right) d\ell \right] \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 + 3\alpha^2 - \alpha^3). \end{aligned}$$

عند لحظة اكتمال الانكماش، لا يكون الطرف السفلي قد تحرك بعد. ويشغل النابض المجال من $y = 0$ إلى $y = L_0$ ، ولذلك

$$y_{\text{cm},c} = \frac{L_0}{2}.$$

إنّ يكون مركز الكتلة قد هبط مسافة

$$\begin{aligned} y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c} &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ &= \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3. \end{aligned}$$

وبما أنه يبدأ من السكون،

$$\frac{1}{2} g t_c^2 = \frac{L_0}{6\alpha} (1 - \alpha)^3,$$

ومن ثم

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha g}}.$$

للمعطيات الواردة،

$$\alpha = \frac{1.02(0.055)}{0.201(9.80)} = 0.0284800.$$

من الملائم استخدام الصيغة المكافئة

$$t_c = \sqrt{\frac{M}{3k}} (1 - \alpha)^{3/2}.$$

عددياً،

$$t_c = 0.2454228 \dots \text{ s} \approx 0.245 \text{ s}.$$

B.2

نعمد السرعات المتجهة نحو الأسفل موجبة. ونعرّف

$$x = L_0 - \ell, \quad D = (1 - \alpha)L_0.$$

هنا تمثل x الطول غير المستطال الذي انضم بالفعل إلى الكتلة المتراصة المتحركة. وتكون كتلتها وطولها الفعلي

$$m_I = \frac{M}{L_0} x, \quad L_I = x.$$

بما أن بقية النابض ساكنة، فإن الزخم الكلي نحو الأسفل هو $m_I v_I$. ويعطي تكامل القوة الخارجية Mg منذ لحظة الترك

$$\frac{M}{L_0} x v_I = M g t,$$

أي

$$\boxed{x v_I = L_0 g t}.$$

تتضمن معادلة الزخم هذه أثر اكتساب الكتلة المتحركة مزيداً من الكتلة.

يقع الحد السفلي للكتلة المتحركة عند الارتفاع $y_0(\ell)$. وبالتالي يقع طرفها العلوي عند

$$Y_{\text{top}} = y_0(\ell) + L_0 - \ell.$$

ما دام الحد الفاصل ضمن الجزء الذي كان مستطالاً في البداية،

$$\begin{aligned} v_I &= -\frac{dY_{\text{top}}}{dt} \\ &= -\left(\frac{\ell}{\alpha L_0} - 1\right)\dot{\ell} \\ &= \frac{D-x}{\alpha L_0}\dot{x}. \end{aligned}$$

بدمج ذلك مع $x v_I = L_0 g t$

$$x(D-x)\dot{x} = \alpha L_0^2 g t.$$

بالتكامل انطلاقاً من $x = 0, t = 0$

$$\frac{Dx^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\alpha L_0^2 g t^2}{2}.$$

إذن

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha L_0^2 g} \left(D - \frac{2x}{3}\right).$$

بالتعويض في علاقة الزخم نحصل على

$$\begin{aligned} v_I^2 &= \frac{L_0^2 g^2 t^2}{x^2} \\ &= \frac{g}{\alpha} \left(D - \frac{2x}{3}\right) \\ &= \frac{g}{\alpha} \left[(1-\alpha)L_0 - \frac{2}{3}(L_0 - \ell)\right] \\ &= \frac{2g}{3\alpha}\ell + \frac{gL_0(1-3\alpha)}{3\alpha}. \end{aligned}$$

وعليه

$$\boxed{v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}}, \quad \boxed{A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \frac{gL_0(1-3\alpha)}{3\alpha}}.$$

يصل الحد الفاصل المتحرك إلى الجزء السفلي الذي كان متراًصاً في البداية عند $\ell = \alpha L_0$. ومن ثم تشمل مرحلة الانكماش المستمر هذه المجال

$$\alpha L_0 \leq \ell < L_0.$$

B.3

بما أن $A > 0$ ، فإن الكتلة المتحركة تتباطأ مع تناقص ℓ . وقبيل وصولها إلى الجزء السفلي الذي كان متراًصاً في البداية، تكون سرعتها

$$v_- = \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

في هذه اللحظة، تكون الكتلة المتحركة $(1 - \alpha)M$ ، بينما تظل الكتلة السفلية المتراصة αM ساكنة. ويكون النابض قد بلغ طوله الكلي الأدنى، لذا يلتحم هذان الجزآن في تصادم غير مرّن تمامًا، كما تقتضي الحركة اللاحقة المفترضة كجسم صلب.

يمكن إهمال دفع قوة الجاذبية خلال هذا التصادم اللحظي. ويعطي حفظ الزخم

$$(1 - \alpha)Mv_- = Mv_c,$$

ومن ثم

$$v_c = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

وهذه أصغر من v_- . بعد ذلك، يتسارع النابض بأكمله نحو الأسفل بتسارع g ، فتزداد سرعته. وبالتالي،

$$v_{\min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

وللتحقق،

$$A\alpha L_0 + B = \frac{gL_0(1 - \alpha)}{3\alpha},$$

لذا

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL_0(1 - \alpha)^3}{3\alpha}} = gt_c,$$

كما يقتضي الزخم الكلي عند اكتمال الانكماش.

تستبعد عبارة «بعد تركه» حالة السكون التام عند لحظة الترك. في نموذج الوسط المتصل المفروض، تؤول كتلة الجزء المتحرك إلى الصفر عندما $t \rightarrow 0^+$ ، مما يسمح بسرعة حدية منتهية بينما يؤول الزخم الكلي إلى الصفر.

C.1

نختار طاقة الوضع المرونية للنابض مساوية للصفر عند طوله الأدنى. بتطبيق A.2 على مقطع منتهي الصفر نحصل على

$$dU_{\text{el}} = \frac{kL_0}{2} \left[\left(\frac{dy_0}{d\ell} \right)^2 - 1 \right] d\ell.$$

مساهمة الجزء السفلي الذي كان متراصًا في البداية تساوي صفرًا. وعليه

$$\begin{aligned} U_{\text{el},0} &= \frac{kL_0}{2} \int_{\alpha L_0}^{L_0} \left[\frac{\ell^2}{\alpha^2 L_0^2} - 1 \right] d\ell \\ &= \frac{kL_0^2}{6\alpha^2} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned}$$

باستخدام $kL_0 = \alpha Mg$

$$U_{\text{el},0} = \frac{MgL_0}{6\alpha} (1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3).$$

مباشرة بعد اكتمال الانكماش، تكون الطاقة المرونية صفرًا ويتحرك النابض بأكمله حركة انتقالية بسرعة $v_c = gt_c$. وتكون الطاقة المبددة حتى هذه اللحظة

$$Q = U_{\text{el},0} + Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) - \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

لكن السقوط الحر لمركز الكتلة يعطي

$$Mg(y_{\text{cm},0} - y_{\text{cm},c}) = \frac{1}{2}Mg^2t_c^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2.$$

يلغي هذان الحدان أحدهما الآخر، فيبقى

$$Q = U_{\text{el},0}.$$

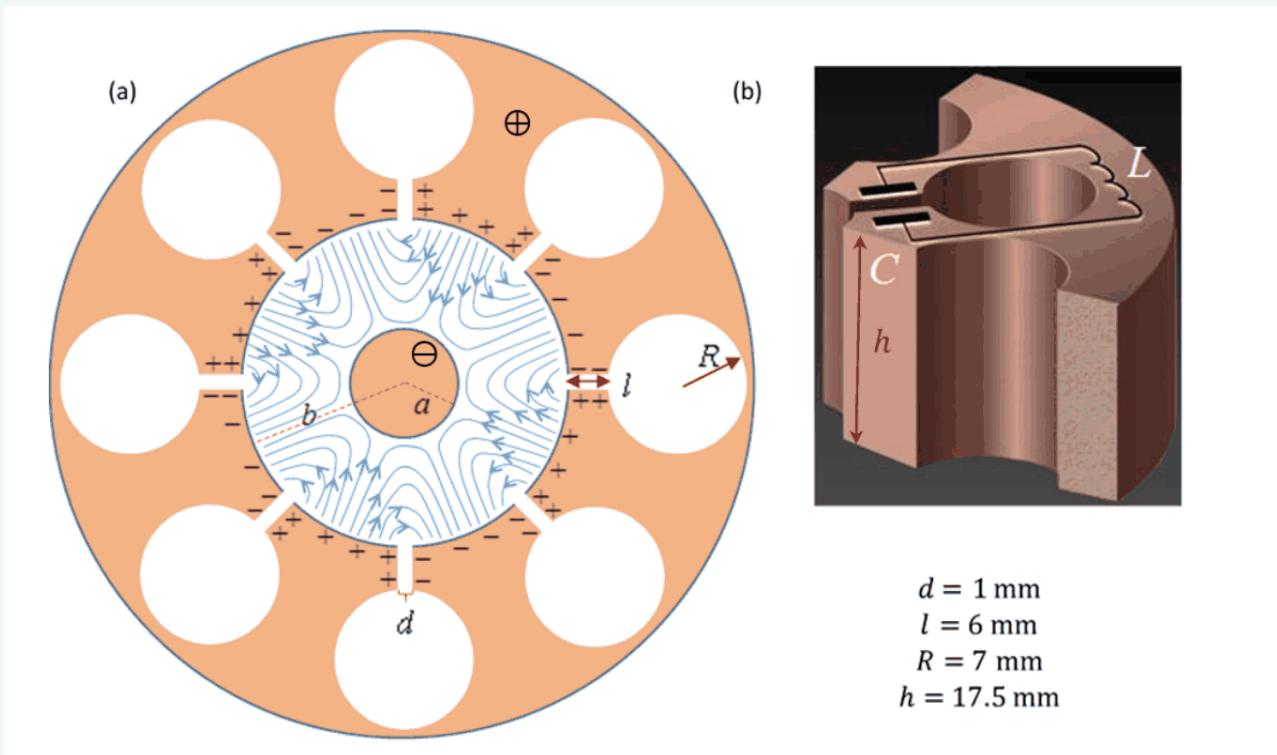
بعد الانكماش، يسقط النابض الصلب من دون مقاومة هواء أو تقلب، فلا تُفقد أي طاقة ميكانيكية إضافية قبل الاصطدام. وتحليل النتيجة إلى عوامل،

$$Q = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) = \frac{MgL_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha).$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: فيزياء فرن الميكروويف

تتناول هذه المسألة توليد إشعاع الموجات الميكروية في فرن الميكروويف، واستخدامه في تسخين الطعام. يُؤدّ إشعاع الموجات الميكروية في جهاز يُسمّى «المغنترون». يتناول الجزء A عمل المغنترون، بينما يتناول الجزء B امتصاص إشعاع الموجات الميكروية في الطعام.



الشكل 1

الجزء A: بنية المغنترون وعمله (6.6 نقاط)

المغنترون جهاز لتوليد إشعاع الموجات الميكروية، إما على هيئة نبضات (لتطبيقات الرادار)، وإما بصورة مستمرة (كما في فرن الميكروويف مثلاً). للمغنترون نمط من التذبذبات ذاتية التضخيم. ويؤدي تزويد المغنترون بفرق جهد ثابت (غير متناوب) إلى إثارة هذا النمط سريعاً. ثم يُنقل إشعاع الموجات الميكروية المتولد بهذه الطريقة إلى خارج المغنترون.

يتكوّن المغنترون النموذجي لفرن الميكروويف من مهبط أسطواني مصمت من النحاس (نصف قطره a) ومصعد يحيط به (نصف قطره b). ويتخذ المصعد شكل غلاف أسطواني سميك حُفرت فيه تجاويف أسطوانية. تُعرف هذه التجاويف باسم «الرنانات». ويقتزن أحد الرنانات بهوائي ينقل طاقة الموجات الميكروية إلى الخارج؛ وسنهمّل الهوائي فيما يأتي. جميع الحيزّات الداخلية مفرّغة من الهواء.

سننظر في مغنترون نموذجي ذي ثمانية رنانات، كما هو موضّح في الشكل 1(a). وتُعرض البنية ثلاثية الأبعاد لرنان واحد في الشكل

1(b). وكما هو مبين هناك، يسلك كلّ من التجاويف الثمانية سلوك رنان مكوّن من محث ومكثف (LC)، بتردد تشغيل

$$f = 2.45 \text{ GHz}.$$

يُطبَّق مجال مغناطيسي ثابت ومنتظم على امتداد المحور الطولي للمغنترون، ويتجه إلى خارج الصفحة في الشكل 1(a). ويُطبَّق أيضاً فرق جهد ثابت بين المصعد (ذي الجهد الموجب) والمهبط (ذي الجهد السالب). تصل الإلكترونات المنبعثة من المهبط إلى المصعد وتشحنه، بحيث تثير نمط تذبذب تكون فيه إشارة الشحنة متعاكسة بين كل رنانين متجاورين. وتُضخَّم تذبذبات التجايف هذه التذبذبات.

تولّد العملية الموصوفة أعلاه مجالاً كهربائياً متناوباً بالتردد المذكور آنفاً $f = 2.45 \text{ GHz}$ (الخطوط الزرقاء في الشكل 1(a)؛ لم يُرسم المجال الثابت) في الحيز بين المهبط والمصعد، إضافةً إلى المجال الثابت الناشئ عن فرق الجهد الثابت المطبَّق. وفي الحالة المستقرة، تبلغ السعة النموذجية للمجال الكهربائي المتناوب بين المصعد والمهبط نحو $\frac{1}{3}$ المجال الكهربائي الثابت هناك. تتأثر حركة الإلكترونات في الحيز بين المهبط والمصعد بكل من الجزأين الثابت والمتناوب للمجال. ويؤدي ذلك إلى أن تنتقل الإلكترونات التي تصل إلى المصعد نحو 80% من الطاقة التي تكتسبها من المجال الثابت إلى المجال المتناوب. وتعود أقلية من الإلكترونات المنبعثة إلى المهبط وتحرّر إلكترونات إضافية، مما يزيد من تضخيم المجال المتناوب.

يمكن اعتبار كل رنان مكثفاً ومحثاً، انظر الشكل 1(b). تنشأ السعة الكهربائية أساساً من الأجزاء المستوية لسطح الرنان، بينما ينشأ الحث الذاتي من الجزء الأسطواني. افترض أن التيار في الرنان يسري بانتظام على مقربة شديدة من سطح تجويفه الأسطواني، وأن شدة المجال المغناطيسي الذي يولّده هذا التيار تساوي 0.6 من شدة مجال ملف لولبي مثالي لانهائي الطول. تُعطى الأطوال المختلفة المحددة لهندسة الرنان في الشكل 1(b). سماحية الفراغ ونفاذيته هما $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ و $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ، على الترتيب.

0.4 — A.1 نقطة

استخدم المعطيات السابقة لتقدير تردد رنان واحد f_{est} . (قد تختلف نتيجتك عن القيمة الفعلية، $f = 2.45 \text{ GHz}$. استخدم القيمة الفعلية في بقية المسألة.)

لا يتناول المطلوب A.2 أدناه المغنترون نفسه، لكنه يساعد على تقديم بعض الفيزياء ذات الصلة. انظر في إلكترون يتحرك في الفضاء الحر تحت تأثير مجال كهربائي منتظم باتجاه المحور y السالب، $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$ ، ومجال مغناطيسي منتظم باتجاه المحور z الموجب، $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (كلٌّ من E_0 و B_0 موجب؛ و $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ متجهات وحدة موجّهة بالطريقة الاصطلاحية المعتادة). لنرمز إلى سرعة الإلكترون عند الزمن t بالمتجه $\vec{u}(t)$. تُعرّف سرعة انجراف الإلكترون $\vec{u}_D$ بأنها متوسط سرعته المتجهة. ونرمز بـ m و $-e$ إلى كتلة الإلكترون وشحنته، على الترتيب.

1.5 — A.2 نقطة

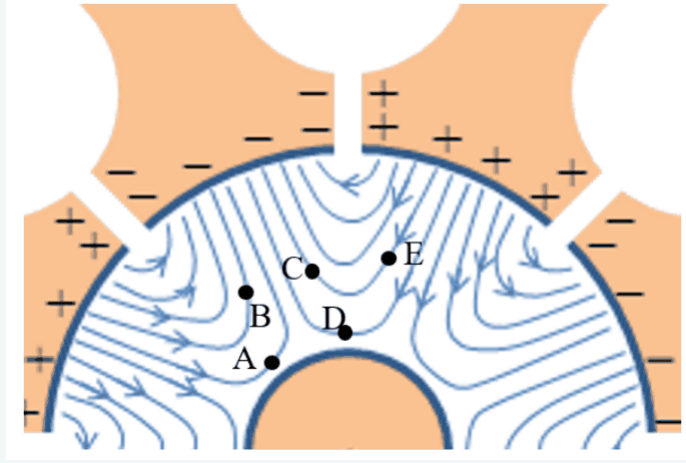
أوجد $\vec{u}_D$ في كلٍّ من الحالتين التاليتين. وارسم أيضاً في ورقة الإجابة مسار الإلكترون (في الإطار المرجعي للمختبر) خلال الفترة الزمنية $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ إذا كانت:

1. سرعة الإلكترون عند $t = 0$ هي $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$
2. سرعة الإلكترون عند $t = 0$ هي $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$

نعود الآن إلى مناقشة المغنترون. المسافة بين المهبط والمصعد هي 15 mm. افترض أن الطاقة الحركية العظمى لكل إلكترون، بسبب فقدان الطاقة إلى المجالات المتناوبة المذكور آنفاً، لا تتجاوز $K_{\text{max}} = 800 \text{ eV}$. شدة المجال المغناطيسي الثابت هي $B_0 = 0.3 \text{ T}$. وكتلة الإلكترون وشحنته هما $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ و $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ، على الترتيب.

0.4 — A.3 نقطة

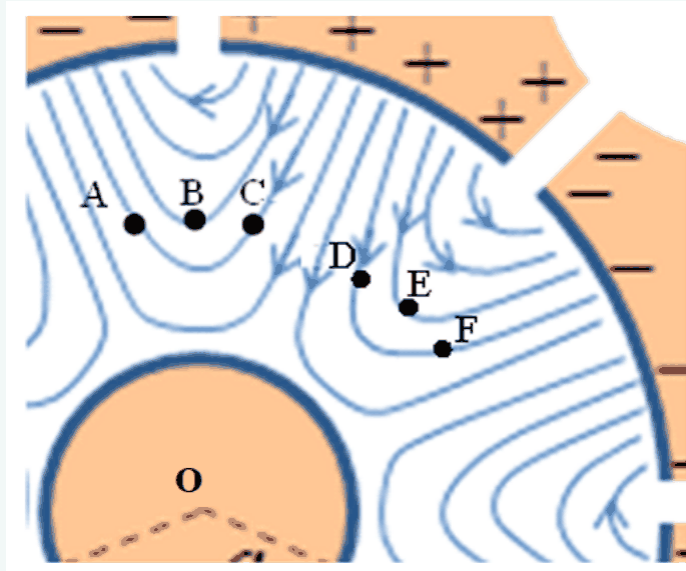
قدّر عددياً نصف القطر الأعظمي r لمسار حركة الإلكترون في الإطار المرجعي الذي تكون فيه هذه الحركة دائرية تقريباً، مع اعتبار هذا الإطار قصورياً تقريباً.



الشكل 2

1.2 — A.4 نقطة

يوضّح الشكل 2 خطوط المجال الكهربائي المتناوب بين المصعد والمهبط عند لحظة زمنية معينة (لم يُرسم المجال الثابت). حدّد في ورقة الإجابة أيّ الإلكترونات الموجودة في المواضع A, B, C, D و E سينجرف نحو المصعد، وأيّها سينجرف نحو المهبط، وأيّها سينجرف في اتجاه عمودي على نصف القطر عند تلك اللحظة.

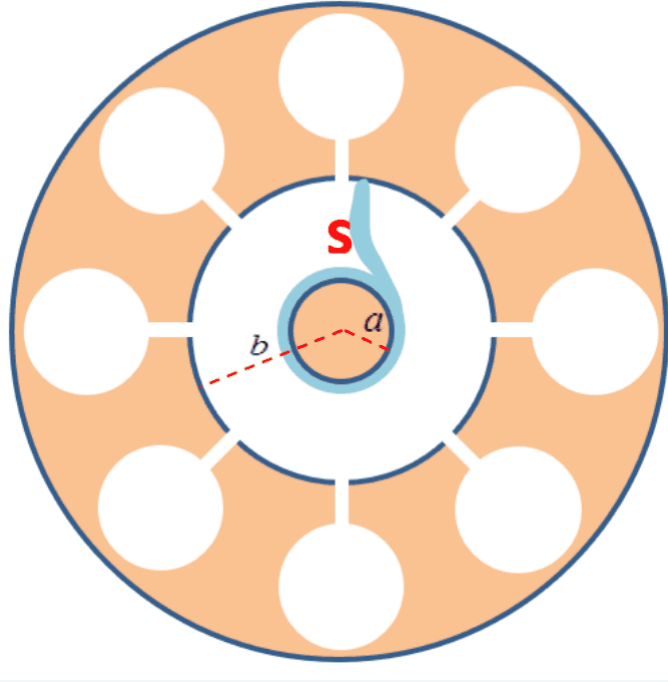


الشكل 3

يوضّح الشكل 3 خطوط المجال الكهربائي المتناوب بين المصعد والمهبط (لم يُرسم المجال الثابت) عند لحظة زمنية معينة. يُرمز إلى مواضع ستة إلكترونات عند تلك اللحظة بالحروف A و B و C و D و E و F. تقع جميع الإلكترونات على المسافة نفسها من المهبط.

1.2 — A.5 نقطة

انظر في الحالة الموضّحة في الشكل 3. لكل زوج من أزواج الإلكترونات الستة AB و AC و BC و DE و DF و EF، حدّد في ورقة الإجابة ما إذا كان انجرافهما سيؤدي إلى زيادة الزاوية بين متجهي موضعيهما (المقيسين من مركز المهبط O) أو نقصانها عند تلك اللحظة.



الشكل 4

يعمل النمط الذي اكتشفته في المطلوب A.5 بوصفه آلية تركيز، إذ يجمع الإلكترونات في الحيز بين المهبط والمصعد في أذرع شعاعية. يوضّح الشكل 4 أحد هذه الأذرع، ويُرمز إليه بالحرف S.

0.8 — A.6 نقطة

ارسم في ورقة الإجابة الأذرع الشعاعية الأخرى عند تلك اللحظة. وبين اتجاه دورانها بأسهم، واحسب متوسط سرعتها الزاوية ω_s . افترض، على سبيل التقريب، أن المجال الكهربائي الكلي في منتصف المسافة بين المهبط والمصعد يساوي متوسط قيمته الثابتة على طول خط شعاعي من المهبط إلى المصعد، وأن الأذرع تتجه شعاعياً تقريباً في تلك المنطقة. يُعرّف نصف قطر المهبط والمصعد a و b ، على الترتيب) في الشكل 4.

1.1 — A.7 نقطة

أوجد تعبيراً تقريبياً لفرق الجهد الثابت V_0 اللازم لتشغيل المغنطرون بالطريقة الموصوفة. (يعطي التعبير الذي ستجده تقريباً للقيمة الدنيا اللازمة لعمل المغنطرون؛ أما فرق الجهد الأمثل فأعلى قليلاً).

الجزء B: تفاعل إشعاع الموجات الميكروية مع جزيئات الماء (3.4 نقاط)

يتناول هذا الجزء استخدام إشعاع الموجات الميكروية (الذي يبتّه هوائي المغنطرون إلى حجرة الطعام) للطهو، أي لتسخين مادة عازلة كهربائياً ذات فقد، مثل الماء، سواء أكان نقيّاً أم مالحاً (وهو نموذجنا للحساء مثلاً).

ثنائي القطب الكهربائي ترتيب يتكوّن من شحنتين كهربائيتين متساويتين مقداراً ومتعاكستين إشارةً، q و $-q$ ، تفصل بينهما مسافة صغيرة d . يتجه متجه ثنائي القطب الكهربائي من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة، ومقداره $p = qd$.

يُطبّق مجال كهربائي تابع للزمن $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ على ثنائي قطب واحد عزمه $\vec{p}(t)$ ومقداره الثابت $p_0 = |\vec{p}(t)|$. الزاوية بين ثنائي القطب والمجال الكهربائي هي $\theta(t)$.

0.5 — B.1 نقطة

اكتب تعبيرين لكلّ من مقدار عزم القوة $\tau(t)$ الذي يؤثر به المجال الكهربائي في ثنائي القطب، والقدرة $H_i(t)$ التي ينقلها المجال إلى ثنائي القطب، بدلالة p_0 و $E(t)$ و $\theta(t)$ ومشتقاتها.

جزيئات الماء قطبية، ولذلك يمكن معاملتها بوصفها ثنائيات أقطاب كهربائية. وبسبب الروابط الهيدروجينية القوية بين جزيئات الماء في الماء السائل، لا يمكن معاملتها بوصفها ثنائيات أقطاب مستقلة. بل ينبغي الرجوع إلى متجه الاستقطاب $\vec{P}(t)$ ، الذي يمثل كثافة العزم ثنائي القطب (متوسط العزم ثنائي القطب لكل وحدة حجم من مجموعة من جزيئات الماء). يكون الاستقطاب $\vec{P}(t)$ موازياً للمجال الكهربائي المتناوب المحلي المطبق (الناشئ عن إشعاع الموجات الميكروية)، $\vec{E}(t)$ ، ويتذبذب مع الزمن بسعة تتناسب مع سعة المجال الكهربائي المتناوب المحلي، ولكن بتأخر في الطور مقداره δ .

المجال الكهربائي المتناوب المحلي عند موضع معين داخل الماء هو $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t) \hat{x}$ حيث $\omega = 2\pi f$ ، وينشأ عنه استقطاب $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \hat{x}$ ، حيث الثابت العديم الأبعاد β خاصية للماء.

0.5 — B.2 نقطة

أوجد تعبيراً للمتوسط الزمني للقدرة $\langle H(t) \rangle$ التي يمتصها الماء لكل وحدة حجم.

يُعرّف المتوسط الزمني لمتغير دوري تابع للزمن $f(t)$ على مدى دورته T كما يأتي:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

لننظر الآن في انتشار الإشعاع عبر الماء. ثابت العزل الكهربائي النسبي للماء (عند تردد المجال الكهرومغناطيسي) هو ϵ_r ، ومعامل انكسار الماء الموافق هو $n = \sqrt{\epsilon_r}$. تُعطى كثافة الطاقة اللحظية للمجال الكهربائي بالعلاقة $\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$. ويتساوى المتوسط الزمني لكثافة طاقة المجال الكهربائي مع نظيره للمجال المغناطيسي.

1.1 — B.3 نقطة

لنرمز إلى المتوسط الزمني لكثافة تدفق طاقة الإشعاع بالرمز $I(z)$ (متوسط القدرة الإشعاعية المارة لكل وحدة مساحة). هنا يمثل z عمق الاختراق في الماء، وينتشر الإشعاع في الاتجاه z . أوجد تعبيراً لاعتماد كثافة التدفق $I(z)$ على z . يمكن أن تتضمن نتيجتك كثافة التدفق عند سطح الماء، $I(0)$.

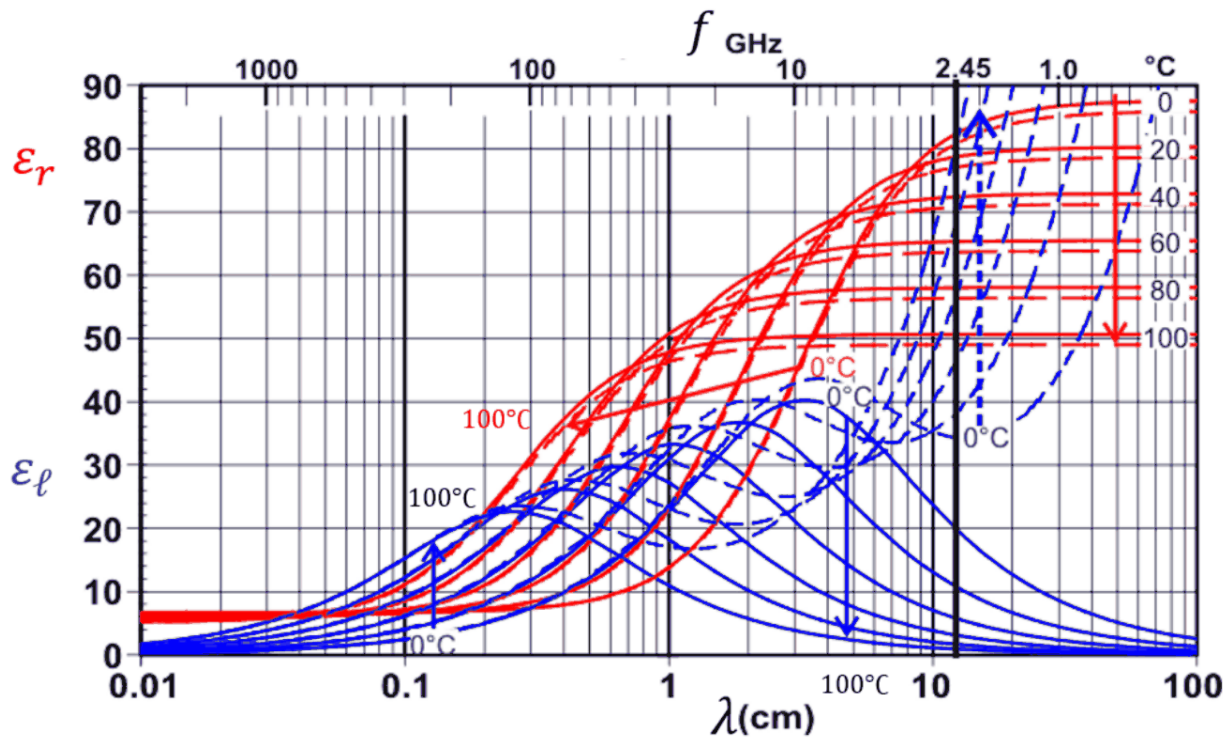
ينشأ التأخر في الطور δ عن التفاعل بين جزيئات الماء. وهو يعتمد على معامل الفقد العازل العديم الأبعاد ϵ_ℓ وثابت العزل الكهربائي النسبي ϵ_r (وكلاهما يعتمد على التردد الزاوي للإشعاع ω ودرجة الحرارة) وفق العلاقة $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$. عندما يكون δ صغيراً بما يكفي، يُعطى المجال الكهربائي عند عمق اختراق z في الماء بالعلاقة:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

حيث $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ، $k_0 = \omega/c$ هي سرعة الضوء في الفراغ.

0.6 — B.4 نقطة

استخدم التقريب $\tan \delta \approx \sin \delta$ ، وأوجد تعبيراً للمعامل β المعرف في المطلوب B.2 بدلالة المعلمات الأخرى.



الشكل 5. تشير الأسهم إلى التغير مع درجة الحرارة عبر المنحنيات من 0°C إلى 100°C .

يوضح الشكل 5 كلاً من ϵ_l (بالأزرق) و ϵ_r (بالأحمر) لكل من الماء النقي (خطوط متصلة) ومحلول مخفف من الملح في الماء (خطوط منقطعة)، بوصفهما دالتين في الطول الموجي أو التردد، عند عدة درجات حرارة مختلفة. يُشار إلى التردد الزاوي $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ بخط رأسي سميك. وفيما يأتي سننظر فقط في إشعاع الموجات الميكروية عند هذا التردد.

0.7 — B.5 نقطة

استخدم الشكل 5 للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1. للماء عند 20°C ، أوجد عمق الاختراق $z_{1/2}$ الذي تنخفض عنده القدرة لكل وحدة حجم إلى نصف قيمتها عند $z = 0$.
2. حدّد في ورقة الإجابة ما إذا كان عمق اختراق إشعاع الموجات الميكروية في الماء يزداد أو ينقص أو يبقى ثابتاً مع ارتفاع درجة الحرارة.
3. حدّد في ورقة الإجابة ما إذا كان عمق اختراق إشعاع الموجات الميكروية في الحساء (محلول ملحي مخفف) يزداد أو ينقص أو يبقى ثابتاً مع ارتفاع درجة الحرارة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **A.1:** $C \simeq 0.93 \text{ pF}$ ، $L \simeq 6.6 \text{ nH}$ ، مما يعطي

$$f_{\text{est}} \simeq 2.03 \text{ GHz.}$$

• **A.2:** في كلتا الحالتين،

$$\vec{u}_D = -\frac{E_0}{B_0}\hat{x}.$$

ضع $\omega_c = eB_0/m$ ، و $\ell = mE_0/(eB_0^2)$ ، و $s = \omega_c t$. إذا كان الموضع الابتدائي عند نقطة الأصل، فإن المسارين المطلوبين هما

$$\frac{(x, y)_1}{\ell} = (-s + 4 \sin s, 4[1 - \cos s]),$$

$$\frac{(x, y)_2}{\ell} = (-s - 2 \sin s, -2[1 - \cos s]), \quad 0 < s < 4\pi.$$

وهما منحنيان تروكويديان نوا حلقات ينجران إلى اليسار، مع دوران عكس اتجاه عقارب الساعة.

• **A.3:**

$$r_{\max} \simeq 3.2 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.32 \text{ mm}.$$

• **A.4:** بحسب قراءتي لماسات خطوط المجال، يتجه **A** و **B** نحو المهبط؛ ويتجه **C** و **D** و **E** نحو المصعد؛ ولا يتجه أيٌّ منها عمودياً تماماً على نصف القطر. يُشار أدناه إلى عدم اليقين في قراءة الرسم.

• **A.5:** تتناقص الزوايا بين **AB** و **AC** و **BC**؛ وتزيد الزوايا بين **DE** و **DF** و **EF**.

• **A.6:** توجد أربعة أذرع شعاعية، يفصل بينها 90° . أضف نسخاً من **S** مدوّرة بمقدار 90° و 180° و 270° . وهي تدور عكس اتجاه عقارب الساعة، بسرعة زاوية

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{4} = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

• **A.7:**

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

• **B.1:** لمقدار المجال $|E|$ والزاوية بين ثنائي القطب والمجال اللحظي،

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta, \quad H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

صيغة القدرة المستقلة عن الاصطلاح المختار هي $H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}$.

• **B.2:**

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

• **B.3:**

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

• **B.4:**

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

$$z_{1/2} = \frac{c\sqrt{\epsilon_r} \ln 2}{\omega \epsilon \ell} \simeq 1.2 \text{ cm}$$

من القراءتين التقريبيتين للرسم البياني $\epsilon_r \simeq 78$ ، و $\epsilon_\ell \simeq 10$.

2. عمق الاختراق في الماء النقي يزداد مع ارتفاع درجة الحرارة.

3. عمق الاختراق في الحساء ينقص مع ارتفاع درجة الحرارة.

الحل

A.1

للولهين الموصلين المتوازيين تقريباً اللذين يشكّلان الشق مساحة hl ، وتفصل بينهما مسافة d . بإهمال تأثير الحواف، تكون سعتهما الكهربائية

$$C \simeq \frac{\epsilon_0 hl}{d}.$$

باستخدام الأبعاد في الشكل 1،

$$C = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(17.5 \times 10^{-3})(6 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}} = 9.29 \times 10^{-13} \text{ F}.$$

ليكن I التيار الكلي الذي يسري حول التجويف الأسطواني. يعطي توزيعه المنتظم على الارتفاع h كثافة تيار سطحي فعالة I/h . ويولد ملف لولبي مثالي لانهائي الطول بهذا التيار السطحي مجاًلاً مقداره $\mu_0 I/h$. بتطبيق التصحيح المحدد،

$$B \simeq 0.6 \frac{\mu_0 I}{h}.$$

بتقريب التدفق عبر التجويف إلى $B\pi R^2$ ،

$$L = \frac{\Phi}{I} \simeq 0.6 \frac{\mu_0 \pi R^2}{h} = 6.63 \times 10^{-9} \text{ H}.$$

إذن

$$f_{\text{est}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{0.6\mu_0\epsilon_0\pi R^2 l}} \simeq 2.03 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

يُختزل الارتفاع لأن $C \propto h$ و $L \propto h^{-1}$. وهذا التقدير تقريبي لأن الرنان يُمثل بسعة كهربائية وحث ذاتي مركّزين ومثاليين.

A.2

يخضع الإلكترون لمعادلة قوة لورنتز،

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).$$

بالنسبة إلى المجالين المعطيين، تكون مركباتها

$$\dot{u}_x = -\omega_c u_y, \quad \dot{u}_y = \omega_c \left(u_x + \frac{E_0}{B_0} \right), \quad \omega_c = \frac{eB_0}{m}.$$

عرّف $v_D = E_0/B_0$. تجعل السرعة الثابتة $-v_D \hat{x}$ القوتين الكهربائية والمغناطيسية تتلاشيان. وبصورة أعم،

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = -v_D \hat{x}.$$

في الإطار المتحرك حركة انتقالية بهذه السرعة، يدور متجه السرعة المتبقية بانتظام. عندما يكون $u_y(0) = 0$

$$u_x = -v_D + A \cos(\omega_c t), \quad u_y = A \sin(\omega_c t),$$

حيث $A = u_x(0) + v_D$. متوسط الحدود المتذبذبة يساوي صفراً، ولذلك يعطي كلا الشرطين الابتدائيين الانجراف نفسه.

بأخذ $x(0) = y(0) = 0$ ، يعطي التكامل

$$x = -v_D t + \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad y = \frac{A}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)].$$

في الحالة 1، $A = 4v_D$ ؛ وفي الحالة 2، $A = -2v_D$. وهذا يعطي التمثيلين البارامترين للمسارين الواردين في الإجابات.

لرسم دقيق، استخدم $\ell = v_D/\omega_c$. تصف النقاط الآتية الدورة السيكلوترونية الأولى:

$s = \omega_c t$	الحالة 1: $(x/\ell, y/\ell)$	الحالة 2: $(x/\ell, y/\ell)$
0	(0, 0)	(0, 0)
$\pi/2$	(4 - $\pi/2$, 4)	(-2 - $\pi/2$, -2)
π	(- π , 8)	(- π , -4)
$3\pi/2$	(-4 - $3\pi/2$, 4)	(2 - $3\pi/2$, -2)
2π	(-2 π , 0)	(-2 π , 0)

كرّر هذا المنحنى بعد إزاحته بمقدار $-2\pi\ell$ في الاتجاه x للحصول على الدورة الثانية.

في الحالة 1، يتحرك الإلكترون في البداية إلى اليمين وينحني نحو الأعلى؛ ويقع المنحنى بأكمله في المجال $0 \leq y \leq 8\ell$. وفي الحالة 2، يتحرك في البداية إلى اليسار وينحني نحو الأسفل؛ ويقع المنحنى في المجال $-4\ell \leq y \leq 0$. ينتهي كلاهما عند $(-4\pi\ell, 0)$ بعد الفترة المحددة. ويكون دورانهما عكس اتجاه عقارب الساعة، ولا يحتوي أيٌّ من المسارين على نقاط مدببة لأن سرعته لا تنعدم أبداً.

A.3

في إطار الانجراف المحلي القصوري تقريباً، تتلاشى القوة الكهربائية تقريباً مع القوة المغناطيسية المرتبطة بسرعة الإطار. وتكون الحركة المتبقية دائرية تقريباً:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = ev_{\perp}B_0, \quad r = \frac{mv_{\perp}}{eB_0}.$$

باستخدام الحد الأعلى للطاقة الحركية بأكمله تقديراً أعلى لطاقة الدوران،

$$v_{\perp} \lesssim \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}.$$

هنا

$$K_{\max} = 800(1.6 \times 10^{-19}) = 1.28 \times 10^{-16} \text{ J},$$

ومن ثم

$$v_{\max} \simeq 1.68 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

و

$$r_{\max} \simeq \frac{\sqrt{2mK_{\max}}}{eB_0} = \frac{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31})(1.28 \times 10^{-16})}}{(1.6 \times 10^{-19})(0.3)} = 3.18 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

إن $r_{\max} \simeq 0.32 \text{ mm}$ ، وهو أصغر بكثير من عرض الفجوة البالغ 15 mm . وهذا يدعم معاملة الدوران بوصفه حركة صغيرة متراكبة مع انجراف مركزه.

A.4

ليكن $\hat{r}$ متجهًا شعاعيًا نحو الخارج، و $\hat{\phi}$ متجهًا عكس اتجاه عقارب الساعة. عندما يتجه المجال المغناطيسي إلى خارج الصفحة، فإن

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi}$$

يعطي

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} = \frac{E_\phi}{B_0} \hat{r} - \frac{E_r}{B_0} \hat{\phi}.$$

وعليه:

- تؤدي $E_\phi > 0$ إلى انجراف نحو المصعد.
- تؤدي $E_\phi < 0$ إلى انجراف نحو المهبط.
- تؤدي $E_\phi = 0$ إلى انجراف عمودي على نصف القطر.

المجال الكهربائي الثابت شعاعي، ولذلك لا يسهم إلا في انجراف سمتي. وتحدد فئة الانجراف الشعاعي بالكامل بالمركبة المماسية للمجال المتناوب المرسوم.

تعطي قراءتي للمماسات المحلية ما يأتي:

الإلكترون	المركبة المماسية للمجال المتناوب	الانجراف الشعاعي
A	في اتجاه عقارب الساعة	نحو المهبط
B	في اتجاه عقارب الساعة	نحو المهبط
C	عكس اتجاه عقارب الساعة	نحو المصعد
D	عكس اتجاه عقارب الساعة	نحو المصعد
E	عكس اتجاه عقارب الساعة	نحو المصعد

تتعلق هذه التصنيفات بالمركبة الشعاعية؛ وللإلكترونات انجراف سمتي أيضًا. ونقرأ المماسات من رسم تخطيطي، ولذلك تنطوي هذه التصنيفات على قدر من عدم اليقين في القراءة.

A.5

عند مسافة مشتركة ρ من مركز المهبط،

$$\dot{\phi} = \frac{u_\phi}{\rho} = -\frac{E_r}{B_0 \rho}.$$

يتجه المجال الثابت شعاعيًا نحو الداخل، ويمنح الإلكترونات السنته جميعها السرعة الزاوية نفسها عكس اتجاه عقارب الساعة عند نصف القطر ذاك. ولذلك لا تؤثر في فروق الزوايا اللحظية بينها إلا الاختلافات في المركبة الشعاعية للمجال المتناوب.

بالنسبة إلى A و B و C، يبين الشكل 3 أن المركبة الشعاعية للمجال المتناوب تتغير من الاتجاه نحو الخارج عند A، مرورًا بقيمة تساوي صفرًا تقريبًا عند B، إلى الاتجاه نحو الداخل عند C. وبناءً على ذلك،

$$\dot{\phi}_A < \dot{\phi}_B < \dot{\phi}_C.$$

مواضعها مرتبة وفق $\phi_A > \phi_B > \phi_C$. لذلك يتحرك الإلكترون المتأخر أسرع من الإلكترون المتقدم، فتتناقص فروق الزوايا الثلاثة جميعها:

$$\frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_B) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_A - \phi_C) < 0, \quad \frac{d}{dt}(\phi_B - \phi_C) < 0.$$

أما بالنسبة إلى D و E و F، فتتغير المركبة الشعاعية للمجال المتناوب على النحو المعاكس: نحو الداخل عند D، وصفر تقريبًا عند E، ونحو الخارج عند F. ومن ثم

$$\dot{\phi}_D > \dot{\phi}_E > \dot{\phi}_F.$$

وبما أن $\phi_D > \phi_E > \phi_F$ ، فإن فروق الزوايا الثلاثة جميعها تتزايد.

الزوج	تغيّر فرق الزاوية
AB	يتناقص
AC	يتناقص
BC	يتناقص
DE	يتزايد
DF	يتزايد
EF	يتزايد

A.6

للرنانات المتجاورة أطوار تذبذب متعاكسة. لذلك، عند لحظة معيّنة، تركّز المناطق الزاوية المتناوبة الإلكترونات، بينما تفرّقها المناطق الواقعة بينها. وهكذا تولّد الرنانات الثمانية أربعة أذرع شعاعية.

ينبغي أن يحتوي الرسم على ثلاث نسخ إضافية من S، نحصل عليها بتدويرات مقدارها 90° و 180° و 270° حول مركز المهبط. ويجب أن يكون لأشكالها اتجاه الانحناء نفسه.

يتجه المجال الثابت نحو الداخل. ويكون انجرافه وفق

$$(-\hat{r}) \times \hat{z} = +\hat{\phi},$$

فتدور الأذرع عكس اتجاه عقارب الساعة.

بعد نصف دورة تذبذب، تنعكس قطبيات الرنانات. يجب أن يتقدم الذراع إلى موضع الرنان التالي، بزاوية $\pi/4 = 2\pi/8$. لذلك

$$\omega_s = \frac{\pi/4}{T/2} = \frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{4}.$$

باستخدام $f = 2.45 \times 10^9$ Hz،

$$\omega_s = 3.85 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}.$$

وبصورة مكافئة، تتمّ الأذرع 6.125×10^8 دورة في الثانية.

A.7

وفق التقريب المفروض، يكون مقدار المجال عند منتصف الفجوة

$$E_{\text{mid}} \simeq \frac{V_0}{b-a}.$$

نصف قطر نقطة المنتصف هو

$$\rho_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}.$$

يجب أن تكون سرعة انجراف الإلكترون هناك مساوية للسرعة المماسية للذراع:

$$\frac{E_{\text{mid}}}{B_0} \simeq \omega_s \rho_{\text{mid}}.$$

وبناءً على ذلك،

$$\frac{V_0}{B_0(b-a)} \simeq \omega_s \frac{a+b}{2},$$

مما يعطي

$$V_0 \simeq \frac{B_0 \omega_s}{2} (b^2 - a^2) = \frac{\pi f B_0}{4} (b^2 - a^2).$$

باستخدام القيمتين المعطيتين لـ B_0 و f ، يمكن كتابة ذلك أيضًا على الصورة

$$V_0 \simeq (5.77 \times 10^8 \text{ V m}^{-2}) (b^2 - a^2),$$

حيث يُقاس a و b بالأمتار.

B.1

تشكّل القوتان المؤثرتان في الشحنتين ازدواجًا. وعزم القوة هو

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

إذن، عندما تُعرّف θ بأنها الزاوية بين ثنائي القطب والمجال اللحظي،

$$\tau = p_0 |E| \sin \theta.$$

يميل عزم القوة إلى تقليل هذه الزاوية. لذلك تكون مركبته ذات الإشارة والمقتربة بالزاوية θ هي $-p_0 |E| \sin \theta$ ، مما يعطي القدرة الميكانيكية

$$H_i = -p_0 |E| \sin \theta \dot{\theta}.$$

وعلى وجه الخصوص، فإن ثنائي القطب الذي يتجه إلى الاصطفاف مع المجال يحقق $\dot{\theta} < 0$ ، ولذلك ينقل المجال إليه قدرة موجبة.

يمكن اشتقاق النتيجة دون اعتماد اصطلاح للزاوية. إذا كان $\vec{r}_+$ و $\vec{r}_-$ موضعَي الشحنتين،

$$H_i = q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_+ - q \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_- = \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)].$$

ومن ثم

$$H_i = \vec{E} \cdot \dot{\vec{p}}.$$

أما إذا قيس θ من المحور x الموجب الثابت وكان $E(t)$ مركبة ذات إشارة، فتصبح هذه العلاقة

$$H_i = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta) = -p_0 E(t) \sin \theta \dot{\theta}.$$

لا يوجد حدٌ يتضمن $\dot{E}$ في القدرة الميكانيكية المنقولة إلى ثنائي القطب.

B.2

بجمع قدرة ثنائي القطب الواحد على وحدة الحجم، نحصل على

$$H(t) = \vec{E}(t) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

مشتقة الاستقطاب المعطى هي

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \beta \varepsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \hat{x}.$$

لذلك

$$H(t) = \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t - \delta).$$

باستخدام

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta,$$

والمتوسطين على مدى دورة

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin \delta.$$

عندما يكون التأخر في الطور موجباً، يكون متوسط القدرة الممتصة موجباً.

B.3

لنرمز إلى سعة المجال الكهربائي المحلية بالرمز $\mathcal{E}(z)$. متوسط كثافة الطاقة الكهربائية هو

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

متوسط كثافة الطاقة المغناطيسية يساوي هذه القيمة، ومن ثم

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

باستخدام سرعة الانتشار c/n في نموذج الموجة في العازل المعتمد في المسألة،

$$I(z) = \frac{c}{n} \langle u \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2(z),$$

حيث $n^2 = \varepsilon_r$.

يعطي انحفاظ الطاقة في طبقة رقيقة سمكها dz

$$-\frac{dI}{dz} = \langle H \rangle.$$

بالتعويض بنتيجة B.2 وحذف $\mathcal{E}^2$ ،

$$-\frac{dI}{dz} = \frac{1}{2} \beta \varepsilon_0 \omega \mathcal{E}^2 \sin \delta = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} I.$$

في وسط متجانس عند درجة حرارة ثابتة، يكون المعامل ثابتاً. يعطي التكامل

$$I(z) = I(0) \exp \left[-\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} z \right].$$

ومن ثم فإن معامل توهين القدرة هو

$$\alpha = \frac{\beta \omega \sin \delta}{nc}.$$

B.4

تعطي المعادلة (2) سعة للمجال الكهربائي تتناسب مع

$$e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta}.$$

بما أن الشدة تتناسب مع مربع هذه السعة،

$$I(z) = I(0) e^{-n k_0 z \tan \delta}.$$

بالمقارنة مع B.3، واستخدام $k_0 = \omega/c$ ، نحصل على

$$\frac{\beta \omega \sin \delta}{nc} = \frac{n \omega}{c} \tan \delta.$$

إذن

$$\beta \sin \delta = n^2 \tan \delta.$$

ضمن التقريب المطلوب $\tan \delta \simeq \sin \delta$ ،

$$\beta \simeq n^2 = \varepsilon_r.$$

تنتج هذه النتيجة ضمن تقريبي العازل والفقد الصغير المحددين في المسألة.

B.5

باستخدام العلاقة المعطاة $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$ ، يكون معامل توهين القدرة

$$\alpha = nk_0 \tan \delta = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\ell}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

عند درجة حرارة موحدة، تتناسب القدرة الممتصة محلياً لكل وحدة حجم مع الشدة المحلية:

$$\langle H(z) \rangle = \alpha I(z).$$

ولذلك يكون لها الاعتماد الأسّي نفسه،

$$\frac{\langle H(z) \rangle}{\langle H(0) \rangle} = e^{-\alpha z}.$$

1. عمق نصف القدرة عند 20°C .

يعطي الشرط $e^{-\alpha z_{1/2}} = 1/2$

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_r} \ln 2}{\omega \varepsilon_\ell}.$$

عند التردد المحدد، تعطي المنحنيات المتصلة الخاصة بدرجة حرارة 20°C تقريباً

$$\varepsilon_r \simeq 78, \quad \varepsilon_\ell \simeq 10.$$

وبناءً على ذلك،

$$z_{1/2} \simeq \frac{(3.0 \times 10^8) \sqrt{78} \ln 2}{(2\pi)(2.45 \times 10^9)(10)} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

إنّ يؤيد الرسم البياني عمقاً لنصف القدرة يقارب

$$z_{1/2} \simeq 1.2 \text{ cm}.$$

هذا هو عمق نصف القدرة؛ أما تناقص سعة المجال فأُسّه أصغر بعامل مقداره اثنان.

2. الماء النقي مع ارتفاع درجة الحرارة.

عند تردد ثابت،

$$z_{1/2} \propto \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\varepsilon_\ell}.$$

تبيّن المنحنيات الزرقاء المتصلة انخفاضاً كبيراً في ε_ℓ مع ارتفاع درجة الحرارة. أما انخفاض $\sqrt{\varepsilon_r}$ فأصغر بكثير من حيث النسبة. ولذلك تزداد النسبة:

$$\text{يزداد عمق الاختراق في الماء النقي مع ارتفاع درجة الحرارة.}$$

3. الحساء مع ارتفاع درجة الحرارة.

عند التردد نفسه، تبيّن المنحنيات الزرقاء المتقطعة ازدياد الفقد العازل مع ارتفاع درجة الحرارة، بينما تبيّن المنحنيات الحمراء المتقطعة انخفاض ε_r . ويقلّل كلا التغيرين من $\sqrt{\varepsilon_r} / \varepsilon_\ell$. لذلك

$$\text{ينقص عمق الاختراق في الحساء مع ارتفاع درجة الحرارة.}$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

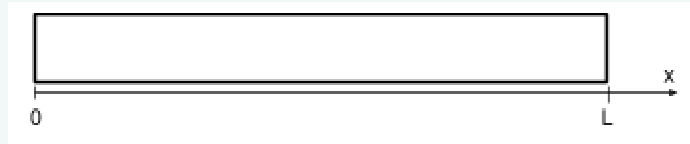
المسألة 3: المحرك الحراري الصوتي

المحرك الحراري الصوتي جهاز يحول الحرارة إلى قدرة صوتية، أو موجات صوتية، وهي صورة من صور الشغل الميكانيكي. وكما في كثير من الآلات الحرارية الأخرى، يمكن تشغيله بصورة معكوسة ليصبح ثلاجة، باستخدام الصوت لضخ الحرارة من مستودع بارد إلى مستودع ساخن. وتقلل ترددات التشغيل العالية من التوصيل الحراري وتلغي الحاجة إلى حصر مائع التشغيل في حجرة. وعلى خلاف كثير من أنواع المحركات الأخرى، لا يحتوي المحرك الحراري الصوتي على أجزاء متحركة سوى مائع التشغيل نفسه.

تكون كفاءات الآلات الحرارية الصوتية عادةً أقل من كفاءات أنواع المحركات الأخرى، لكنها تتميز بانخفاض تكاليف الإنشاء والصيانة. ويتيح ذلك فرصاً لتطبيقات الطاقة المتجددة، مثل محطات الطاقة الشمسية الحرارية والاستفادة من الحرارة المهدرة. وسيركز تحليلنا على توليد الطاقة الصوتية داخل النظام، مع إهمال استخلاصها أو تحويلها لتشغيل أجهزة خارجية.

الجزء A: موجة صوتية في أنبوب مغلق (3.7 نقطة)

اعتبر أنبوباً عازلاً حرارياً طوله L ومساحة مقطعه العرضي S ، يقع محوره على امتداد الاتجاه x . يقع طرفا الأنبوب عند $x = 0$ و $x = L$. الأنبوب مملوء بغاز مثالي ومحكم الإغلاق عند كلا الطرفين. عند الاتزان، تكون درجة حرارة الغاز T_0 ، وضغطه p_0 ، وكثافته الكتلية ρ_0 . افترض إمكان إهمال اللزوجة، وأن حركة الغاز تقتصر على الاتجاه x . خواص الغاز منتظمة في الاتجاهين العموديين y و z .



الشكل 1

A.1 (0.3 نقطة)

عندما تتشكل موجة صوتية واقفة، تهتز عناصر الغاز في الاتجاه x بتردد زاوي ω . وتعتمد سعة الاهتزازات على موضع اتزان كل عنصر x على امتداد الأنبوب. وتُعطى الإزاحة الطولية لكل عنصر من الغاز عن موضع اتزانه x بالعلاقة

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(يرجى ملاحظة أن u هنا تصف إزاحة عنصر من الغاز)

حيث $L \ll a$ ثابت موجب، و $k = 2\pi/\lambda$ هو العدد الموجي، و λ هو الطول الموجي. ما أكبر طول موجي ممكن $\lambda_{\max}$ في هذا النظام؟

سنفترض في جميع أجزاء المسألة نمط اهتزاز طوله الموجي $\lambda = \lambda_{\max}$.

اعتبر الآن شريحة ضيقة من الغاز تقع في حالة السكون بين x و $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). نتيجةً لموجة الإزاحة في البند A.1، تهتز الشريحة على امتداد المحور x ، ويتغير حجمها وخواصها الديناميكية الحرارية الأخرى.

افترض في جميع البنود التالية أن كل هذه التغيرات في الخواص الديناميكية الحرارية صغيرة مقارنةً بالقيم غير المضطربة.

A.2 (0.5 نقطة)

يتذبذب حجم الشريحة $V(x, t)$ حول قيمة الاتزان $V_0 = S\Delta x$ ، ويأخذ الصورة

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

أوجد تعبيراً عن $V_1(x)$ بدلالة V_0 و a و k و x .

A.3 (0.7 نقطة)

افترض أن الضغط الكلي للغاز، نتيجةً للموجة الصوتية، يأخذ الصورة التقريبية

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

بالنظر إلى القوى المؤثرة في شريحة الغاز، احسب سعة تذبذب الضغط $p_1(x)$ إلى الرتبة الرائدة، بدلالة الموضع x ، وكثافة الاتزان ρ_0 ، وسعة الإزاحة a ، ومعلمتي الموجة k و ω .

عند الترددات الصوتية، يمكن إهمال التوصيل الحراري للغاز. وسنعامل تمدد شرائح الغاز وانكماشها على أنهما عمليتان كظومتان تماماً، تحققان العلاقة $pV^\gamma = \text{const}$ ، حيث γ هو ثابت الكظومة.

A.4 (0.3 نقطة)

استخدم العلاقة أعلاه ونتائج البنود السابقة لإيجاد تعبير عن سرعة الموجات الصوتية $c = \omega/k$ في الأنبوب، إلى الرتبة الأولى. عبّر عن إجابتك بدلالة p_0 و ρ_0 وثابت الكظومة γ .

A.5 (0.7 نقطة)

يأخذ تغير درجة حرارة الغاز بسبب التمدد والانكماش الكظوميين، نتيجةً للموجة الصوتية، الصورة:

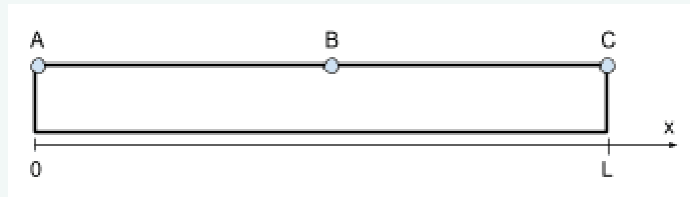
$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

احسب سعة تذبذبات درجة الحرارة $T_1(x)$ بدلالة T_0 و γ و a و k و x .

A.6 (1.2 نقطة)

لأغراض هذا البند فقط، نفترض وجود تفاعل حراري ضعيف بين الأنبوب والغاز. ونتيجةً لذلك، تبقى الموجة الصوتية الواقفة دون تغير يُذكر، لكن يمكن للغاز تبادل كمية صغيرة من الحرارة مع الأنبوب. ويمكن إهمال التسخين الناجم عن اللزوجة.

لكل نقطة من النقاط في الشكل 2 (A و C عند طرفي الأنبوب، و B عند مركزه)، بين ما إذا كانت درجة حرارة الأنبوب عند تلك النقطة سترتفع أو تنخفض أو تبقى كما هي على مدى زمن طويل.



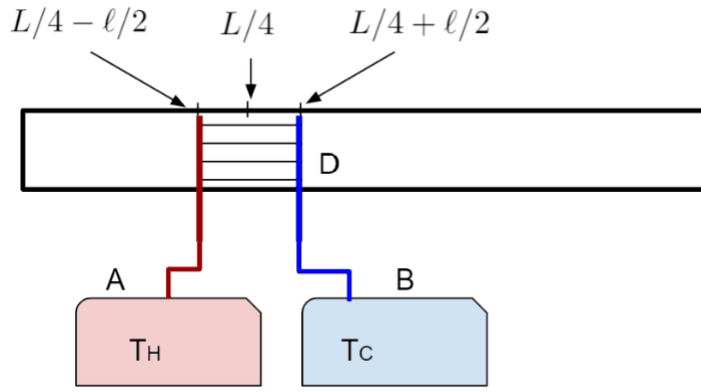
الشكل 2

الجزء B: تضخيم الموجة الصوتية بفعل التلامس الحراري الخارجي (6.3 نقطة)

توضع داخل الأنبوب حزمة من صفائح صلبة رقيقة تفصل بينها مسافات كافية. تصطف صفائح الحزمة موازيةً لمحور الأنبوب، كي لا تعيق جريان الغاز على امتداده. يقع مركز الحزمة عند $x_0 = L/4$ ، وتمتد بعرض $\ell \ll L$ على امتداد محور الأنبوب، وتملأ مقطعه العرضي بالكامل. ويُحافظ على فرق في درجة الحرارة مقداره τ بين طرفي الحزمة الأيمن والأيسر. يُحافظ على الطرف الأيسر للحزمة، عند $x_H = x_0 - \ell/2$ ، بواسطة مستودع حراري خارجي عند درجة الحرارة $T_H = T_0 + \tau/2$ ، وفي الوقت نفسه، يُحافظ على طرفها الأيمن، عند $x_C = x_0 + \ell/2$ ، عند درجة الحرارة $T_C = T_0 - \tau/2$.

تسمح حزمة الصفائح بسريان حراري طولي طفيف للحفاظ على تدرج ثابت لدرجة الحرارة بين طرفيها، بحيث يكون

$$T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell} \tau$$



الشكل 3. رسم تخطيطي للنظام. يرمز (A) و (B) إلى المستودعين الحراريين الساخن والبارد على الترتيب. ويرمز (D) إلى الحزمة. لتحليل أثر التلامس الحراري بين حزمة الصفائح والغاز في الموجات الصوتية داخل الأنبوب، خذ بالافتراضات التالية:

- كما في الجزء السابق، تكون جميع التغيرات في الخواص الديناميكية الحرارية صغيرة مقارنةً بالقيم غير المضطربة.
- يعمل النظام في النمط الأساسي للموجة الواقفة ذي أكبر طول موجي ممكن. ولا يتغير هذا النمط إلا قليلاً بوجود حزمة الصفائح.
- الحزمة أقصر بكثير من الطول الموجي $\ell \ll \lambda_{\max}$ ، ويمكن وضعها بعيداً بما يكفي عن كل من عقد الإزاحة وعقد الضغط، بحيث يمكن اعتبار الإزاحة $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ والضغط $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ منتظمين على امتداد الحزمة كله.
- يمكننا إهمال أي تأثيرات طرفية ناتجة عن دخول الشرائح إلى الحزمة وخروجها منها.
- فرق درجة الحرارة بين طرفي حزمة الصفائح، أي بين المستودعين الساخن والبارد، صغير مقارنةً بدرجة الحرارة المطلقة: $\tau \ll T_0$.
- يمكن إهمال التوصيل الحراري عبر الحزمة وعبر الغاز وعلى امتداد الأنبوب. والآليتان الوحيدتان المهمتان لانتقال الحرارة هما الحمل الناجم عن حركة الغاز والتوصيل بين الغاز والحزمة.

B.1 (0.4 نقطة)

اعتبر شريحة معينة من الغاز في منطقة الحزمة، تقع أصلاً عند $x_0 = L/4$. عندما تتحرك الشريحة داخل الحزمة، تتغير درجة الحرارة المحلية للجزء المجاور من الحزمة على النحو التالي:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

عبر عن T_{st} بدلالة a و τ و ℓ .

B.2 (1.0 نقطة)

ما فرق درجة الحرارة الحرج τ_{cr} الذي إذا جرى تجاوزه ينقل الغاز الحرارة من المستودع الساخن إلى المستودع البارد؟ عبر عن τ_{cr} بدلالة T_0 و γ و k و ℓ .

B.3 (0.8 نقطة)

أوجد التعبير التقريبي العام لمعدل سريان الحرارة $\frac{dQ}{dt}$ إلى داخل شريحة صغيرة من الغاز بوصفه دالة خطية في معدلَي تغير حجمها وضغطها. عبر عن إجابتك بدلالة معدل تغير الحجم $\frac{dV}{dt}$ ، ومعدل تغير الضغط $\frac{dp}{dt}$ ، وقيمتَي الاتزان غير المضطربتين لضغط الشريحة وحجمها p_0, V_0 ، ومعامل الكظومة γ . (يمكنك استخدام تعبير السعة الحرارية المولية عند حجم ثابت $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ ، حيث R هو ثابت الغازات.)

يتسبب معدل سريان الحرارة المحدود بين الشريحة والحزمة في فرق طور بين تذبذبي ضغط الشريحة وحجمها. وسنرى كيف يولّد ذلك شغلاً.

ليكن التدفق الحراري الداخل إلى الشريحة من الحزمة متناسباً مع فرق درجة الحرارة بين الشريحة والعنصر المجاور من الحزمة، ويُعطى تقريباً بالعلاقة $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{st} - T_1) \cos(\omega t)$. هنا T_{st} و T_1 هما سعتا تذبذب درجة حرارة شريحة الغاز والحزمة المجاورة من البندين A.5 و B.1، على الترتيب، و $\beta > 0$ ثابت. افترض أنه عند ترددات تشغيل الآلة، يكون تغير درجة حرارة الغاز نتيجةً لهذا السريان الحراري ضئيلاً مقارنةً بكل من T_{st} و T_1 .

B.4 (1.9 نقطة)

لحساب الشغل، سنأخذ في الحسبان تغيراً في حجم الشريحة المتحركة نتيجةً للتلامس الحراري مع الحزمة. لنكتب ضغط الشريحة وحجمها تحت تأثير الحزمة على الصورة:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

بمعلومية p_a و p_b ، أوجد المعاملين V_a و V_b . عبّر عن إجابتك بدلالة ℓ ، p_a ، p_b ، p_0 ، V_0 ، γ ، τ ، τ_{cr} ، β ، ω ، a .

B.5 (0.8 نقطة)

أوجد تعبيراً تقريبياً عن الشغل الصوتي لكل وحدة حجم w الذي تنتجه شريحة الغاز خلال دورة واحدة. أجرِ التكامل على حجم الحزمة لإيجاد الشغل الكلي W_{tot} الذي يولده الغاز خلال دورة واحدة. عبّر عن W_{tot} بدلالة k ، ω ، β ، τ_{cr} ، γ ، S .

B.6 (0.8 نقطة)

أوجد تعبيراً تقريبياً عن الحرارة Q_{tot} المنقولة من الجانب الأيسر للمستوى $x = x_0$ إلى الجانب الأيمن خلال دورة. عبّر عن إجابتك بدلالة ℓ ، S ، a ، ω ، β ، τ_{cr} .

(تلميح: يمكنك استخدام الصيغة $j = Q \frac{du}{dt}$ للتيار الحراري الناجم عن الحمل).

B.7 (0.6 نقطة)

أوجد كفاءة المحرك الحراري الصوتي η . تُعرّف الكفاءة بأنها نسبة الشغل الصوتي المتولد إلى الحرارة المسحوبة من المستودع الساخن. عبّر عن إجابتك بدلالة فرق درجة الحرارة τ بين المستودعين الساخن والبارد، وفرق درجة الحرارة الحرج τ_{cr} ، وكفاءة كارنو $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

المعاملات V_1 ، p_1 ، T_1 معاملات ذات إشارة في الصيغ التذبذبية المحددة. وفي جميع ما يلي، $k = \pi/L$.

A.1 •

$$\lambda_{\max} = 2L.$$

A.2 •

$$V_1(x) = V_0 a k \cos(kx).$$

A.3 •

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4 •

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

A.5 •

$$T_1(x) = (\gamma - 1)T_0ak \cos(kx).$$

A.6 A • ترتفع؛ B: تنخفض؛ C: ترتفع.

B.1 •

$$T_{st} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

B.2 •

$$\tau_{cr} = (\gamma - 1)T_0k\ell.$$

تنتقل الحرارة من الساخن إلى البارد عندما $\tau > \tau_{cr}$.

B.3 •

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{\gamma p_0 dV/dt + V_0 dp/dt}{\gamma - 1}.$$

B.4 •

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{cr})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right], \quad V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

B.5 •

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{cr}),$$

$$W_{tot} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{cr}).$$

B.6 •

$$Q_{tot} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{cr}).$$

B.7 •

$$\eta \simeq \frac{\tau_{cr}}{\tau} \eta_c, \quad \tau > \tau_{cr}.$$

الحل

نحتفظ بالاضطرابات من الرتبة الأولى عند إيجاد الكميات الديناميكية الحرارية المتذبذبة. أما الشغل والحرارة المنقولة، فأول متوسطاتهما غير الصفريّة على دورة تكون من الرتبة الثانية في سعة الموجة. والاقتران الحراري ضعيف، لذا يمكن استخدام ساعات الموجة غير المضطربة في التعابير التي تتناسب أصلاً مع ذلك الاقتران.

A.1

يشترط الطرفان الصليبان المحكمان انعدام الإزاحة الطولية:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

الشرط الأول متحقق بالفعل. أما الثاني فيعطي

$$\sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

الاختيار $n = 0$ لا يعطي موجة. ومن ثم

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}.$$

يقابل أكبر طول موجي القيمة $n = 1$:

$$\lambda_{\max} = 2L, \quad k = \frac{\pi}{L}.$$

A.2

ينتقل حدًا الشريحة إلى

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t).$$

وبناءً على ذلك،

$$V(x, t) = S [\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)].$$

عندما $k\Delta x \ll 1$

$$V(x, t) \simeq S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = V_0 [1 + ak \cos(kx) \cos(\omega t)].$$

إن،

$$V_1(x) = V_0 ak \cos(kx).$$

A.3

تعطي قوى الضغط المؤثرة في الشريحة، إلى الرتبة الأولى،

$$F_x = S[p(x, t) - p(x + \Delta x, t)] \simeq -S\Delta x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

كتلة الشريحة هي $\rho_0 S\Delta x$. ولذلك يصبح قانون نيوتن الثاني

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

بالتعويض بالتذبذبات المعطاة،

$$-\rho_0 a \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = p'_1(x) \cos(\omega t),$$

ومن ثم

$$p'_1(x) = -\rho_0 a \omega^2 \sin(kx).$$

يعطي التكامل

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx) + C.$$

لا يوجد انضغاط صوتي منتظم مكانياً: فتغير الحجم الكلي يتناسب مع

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(L, t) - u(0, t) = 0.$$

وعليه، فإن العلاقة الخطية بين الضغط والانضغاط، التي تُبيّن صراحةً في A.4، تقتضي انعدام المتوسط المكاني لاضطراب الضغط.

وبما أن $\int_0^L \cos(kx) dx = 0$ ، فإن هذا يحدد $C = 0$. ومن ثم

$$p_1(x) = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \cos(kx).$$

A.4

بأخذ التقريب الخطي للعلاقة $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$

$$\frac{\delta p}{p_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0.$$

باستخدام $\delta V = V_1 \cos(\omega t)$ و $\delta p = -p_1 \cos(\omega t)$

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{V_1}{V_0} = \gamma p_0 a k \cos(kx).$$

تعطي المقارنة مع A.3

$$\frac{\rho_0 a \omega^2}{k} = \gamma p_0 a k,$$

وبالتالي

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

A.5

لكمية ثابتة من الغاز المثالي،

$$pV = nRT.$$

الصورة الخطية لهذه العلاقة هي

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{\delta p}{p_0} + \frac{\delta V}{V_0}.$$

باستخدام العلاقة الكظومية من A.4،

$$\frac{\delta T}{T_0} = -(\gamma - 1) \frac{\delta V}{V_0} = -(\gamma - 1) a k \cos(kx) \cos(\omega t).$$

بالمقارنة مع تذبذب درجة الحرارة المحدد،

$$T_1(x) = (\gamma - 1) T_0 a k \cos(kx).$$

A.6

اعتبر شريحة في النصف الأيسر من الأنبوب، حيث $\cos(kx) > 0$.

عندما تُزاح نحو اليمين، تتمدد وتبرد. ولذلك تمتص الحرارة من الأنبوب عند موضع يقع نسبياً إلى اليمين. وعندما تُزاح نحو اليسار، تنضغط وتسخن، فتطلق الحرارة إلى الأنبوب عند موضع يقع نسبياً إلى اليسار. وينقل تكرار هذه العملية الحرارة نحو الطرف الأيسر.

في النصف الأيمن، $\cos(kx) < 0$ ، فتنعكس العلاقة: تمتص الشريحة الحرارة عندما تُزاح نحو المركز، وتطلق الحرارة عندما تُزاح نحو الطرف الأيمن.

وهكذا تضخ الحركة الصوتية الحرارة بعيداً عن المنطقة المركزية نحو كلا الطرفين:

$$\boxed{A : \text{ترتفع درجة الحرارة}, \quad B : \text{تنخفض درجة الحرارة}, \quad C : \text{ترتفع درجة الحرارة}.}$$

على الرغم من أن الشريحة التي يقع موضع اتزانها عند المركز تماماً ليس لها تذبذب في درجة الحرارة من الرتبة الأولى، فإن الشرائح المجاورة تتحرك عبر المنطقة المركزية وتسحب منها الحرارة. والأثر الحراري المتوسط من الرتبة الثانية في السعة؛ ولا تحدده درجة الحرارة من الرتبة الأولى عند موضع اتران واحد.

B.1

عند مركز الحزمة،

$$kx_0 = \frac{\pi}{L} \frac{L}{4} = \frac{\pi}{4},$$

فتكون إزاحة الشريحة

$$u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t).$$

موضعها اللحظي هو $x_0 + u(x_0, t)$. وبالتعويض في توزيع درجة حرارة الصفائح نحصل على

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - \frac{\tau}{\ell} u(x_0, t) = T_0 - \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} \cos(\omega t).$$

إن،

$$T_{\text{st}} = \frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell}.$$

B.2

سعة تذبذب درجة حرارة الغاز الكظومي عند مركز الحزمة هي

$$T_1(x_0) = \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

عند أقصى موضع يسارًا في حركة الشريحة، تكون درجة حرارة الغاز $T_0 + T_1$ ، بينما تكون درجة حرارة الحزمة المجاورة $T_0 + T_{\text{st}}$. ولكي تمتص الشريحة الحرارة هناك، يجب أن يتحقق

$$T_{\text{st}} > T_1.$$

وعند أقصى موضع يمينًا، يجعل الشرط نفسه الحزمة أبرد من الغاز، فتطلق الشريحة الحرارة هناك. ومن ثم فإنها تنقل الحرارة من الساخن إلى البارد تحديدًا عندما

$$\frac{a\tau}{\sqrt{2}\ell} > \frac{(\gamma - 1)T_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

ولذلك يكون فرق درجة الحرارة الحرج

$$\tau_{\text{cr}} = (\gamma - 1)T_0 k \ell.$$

عند المساواة، تتطابق تذبذبات درجة حرارة الغاز والحزمة المجاورة، فينعدم التبادل الحراري من الرتبة الرائدة. ودون هذه العتبة، ينعكس اتجاه انتقال الحرارة.

B.3

نأخذ $dQ > 0$ للحرارة الداخلة إلى الشريحة، و $p dV > 0$ للشغل الذي يبذله الغاز. القانون الأول هو

$$dQ = dU + p dV.$$

للغاز المثالي،

$$U = n c_v T = \frac{n R T}{\gamma - 1} = \frac{p V}{\gamma - 1}.$$

ومن ثم

$$dQ = \frac{V dp + p dV}{\gamma - 1} + p dV = \frac{V dp + \gamma p dV}{\gamma - 1}.$$

إلى الرتبة الأولى، يمكن استبدال المعاملات المضروبة في المعدلات الصغيرة بقيم الاتزان:

$$\frac{dQ}{dt} \simeq \frac{V_0 dp/dt + \gamma p_0 dV/dt}{\gamma - 1}.$$

B.4

من B.1 و B.2،

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{\sqrt{2}\ell}(\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

للاختصار، نعرّف

$$\Delta T \equiv \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\ell}.$$

وعندئذ يكون معدل دخول الحرارة المعطى

$$\dot{Q} = -\beta V_0 \Delta T \cos(\omega t).$$

باشتقاق تعبيرى الضغط والحجم،

$$\dot{p} = \omega p_a \cos(\omega t) + \omega p_b \sin(\omega t),$$

$$\dot{V} = \omega V_a \cos(\omega t) - \omega V_b \sin(\omega t).$$

يعطى التعويض في B.3

$$\dot{Q} = \frac{\omega}{\gamma - 1} [(V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) \cos(\omega t) + (V_0 p_b - \gamma p_0 V_b) \sin(\omega t)].$$

بمساواة معاملى الجيب،

$$V_0 p_b - \gamma p_0 V_b = 0,$$

ومن ثم

$$V_b = \frac{V_0 p_b}{\gamma p_0}.$$

بمساواة معاملى جيب التمام،

$$\frac{\omega}{\gamma - 1} (V_0 p_a + \gamma p_0 V_a) = -\beta V_0 \Delta T.$$

إذن

$$V_a = -\frac{V_0}{\gamma p_0} \left[p_a + \frac{(\gamma - 1)\beta a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2}\omega\ell} \right].$$

يوفر الحد المتناسب مع β مركبة الحجم اللازمة للحصول على شغل غير صفري خلال دورة.

B.5

الشغل الذي تبذله شريحة خلال دورة واحدة هو

$$W_{\text{parcel}} = \oint p dV.$$

بكتابة $\theta = \omega t$ ، يكون تكامل مساهمة الضغط الثابت صفراً، ويتبقى

$$W_{\text{parcel}} = \int_0^{2\pi} (p_a \sin \theta - p_b \cos \theta)(V_a \cos \theta - V_b \sin \theta) d\theta.$$

باستخدام

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi,$$

نحصل على

$$W_{\text{parcel}} = -\pi(p_a V_b + p_b V_a).$$

تُلغى الحدود التي تحتوي على $p_a p_b$ عند التعويض من B.4:

$$W_{\text{parcel}} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta V_0 p_b}{\gamma p_0 \omega} \Delta T.$$

إذن، الشغل لكل وحدة من حجم الاتزان هو

$$w = \frac{W_{\text{parcel}}}{V_0} = \frac{\pi(\gamma - 1)\beta p_b}{\gamma p_0 \omega} \frac{a(\tau - \tau_{\text{cr}})}{\sqrt{2} \ell}.$$

بما أن هذا التعبير من الرتبة الأولى أصلاً في الاقتران الحراري، نستخدم معامل الضغط غير المضطرب:

$$p_b \simeq p_1(x_0) = \gamma p_0 a k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\gamma p_0 a k}{\sqrt{2}}.$$

ومن ثم

$$w \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k}{2\omega \ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

الحزمة قصيرة، لذا تكون كثافة الشغل هذه منتظمة تقريباً على حجم الغاز فيها $S\ell$. ومن ثم

$$W_{\text{tot}} \simeq w S \ell,$$

فنحصل على

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi(\gamma - 1)\beta a^2 k S}{2\omega} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

يكون الشغل موجباً في نظام التشغيل كمحرك $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

B.6

ليرمز $q(t)$ إلى الحرارة المكتسبة من الحزمة لكل وحدة من حجم الغاز عند الاتزان، مقاسةً بالنسبة إلى ثابت اعتباطي. إلى الرتبة المحتفظ بها،

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V_0} = -\beta \Delta T \cos(\omega t).$$

بالتكامل،

$$q(t) = -\frac{\beta \Delta T}{\omega} \sin(\omega t) + q_*.$$

سرعة الشريحة عند مركز الحزمة هي

$$v(t) = \dot{u}(x_0, t) = -\frac{a\omega}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

مع التعبير عن q لكل وحدة حجم، يكون التدفق الحراري بالحمل لكل وحدة مساحة

$$j(t) = q(t)v(t).$$

لا يسهم الثابت الاعتباطي في أي انتقال صافي لأن متوسط السرعة يساوي صفراً. وتعطي المساهمة الكظومية البحتة أيضاً متوسطاً صفرياً على دورة: فهي تتناسب مع $\cos(\omega t)$ ، بينما تتناسب السرعة مع $\sin(\omega t)$. ولذلك تكون الحرارة الصافية المنقولة عبر المقطع العرضي

$$\begin{aligned}
Q_{\text{tot}} &= S \int_0^{2\pi/\omega} q(t)v(t) dt \\
&= \frac{S\beta a\Delta T}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \\
&= \frac{\pi S\beta a\Delta T}{\sqrt{2}\omega}.
\end{aligned}$$

بالتعويض عن ΔT ،

$$Q_{\text{tot}} \simeq \frac{\pi\beta a^2 S}{2\omega\ell} (\tau - \tau_{\text{cr}}).$$

تكون الإشارة موجبة للانتقال من اليسار إلى اليمين عندما $\tau > \tau_{\text{cr}}$.

B.7

ضمن الدقة المعتمدة للحزمة القصيرة وفرق درجة الحرارة الصغير، تساوي الحرارة المسحوبة من المستودع الساخن تقريباً الحرارة المنقولة عبر مركز الحزمة:

$$Q_H \simeq Q_{\text{tot}}.$$

الفرق بينهما من رتبة الشغل الصوتي. وبما أن الكفاءة نفسها صغيرة، فإن أخذ هذا الفرق في الحساب لن يغير الكفاءة إلا في رتبة أعلى.

باستخدام B.5 و B.6،

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_H} \simeq \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma - 1)k\ell = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0}.$$

وفي الوقت نفسه،

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0 - \tau/2}{T_0 + \tau/2} = \frac{\tau}{T_0 + \tau/2} \simeq \frac{\tau}{T_0},$$

لأن $T_0 \gg \tau$. ولذلك،

$$\eta \simeq \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c.$$

للتشغيل كمحرك، $\tau > \tau_{\text{cr}}$ ، فنكون الكفاءة أقل من كفاءة كارنو. وعند الاقتراب من العتبة من الأعلى، تقترب الكفاءة من قيمة كارنو عند هذه الرتبة، بينما ينعدم كل من الشغل الناتج وانتقال الحرارة. وعند العتبة نفسها، لا تُعرّف نسبتهما كفاءة محرك ذي خرج غير صفري.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.