

IPhO 2018

理论题与解答 · 葡萄牙里斯本 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2018/

题目 1: LIGO–GW150914

2015 年，引力波天文台 LIGO 首次探测到引力波（GW）穿过地球。这一事件被命名为 GW150914，其信号来自两个沿准圆轨道相互绕转的黑洞所产生的引力波。本题将要求你根据探测到的信号的特征，估算该系统的一些物理参数。

部分 A: 牛顿力学中的（保守）轨道（3.0 分）

A.1 1.0分

考虑一个由两颗恒星组成的系统，它们的质量分别为 M_1, M_2 ，相对于系统质心的位置分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ，即

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

这两颗恒星与宇宙中的其他物体隔离，并以非相对论性速度运动。利用牛顿定律，质量为 M_1 的恒星的加速度矢量可表示为

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

其中 $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$ 。求 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ ，其中 G 为牛顿引力常量 [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$]。

A.2 1.0分

这两个质量体沿圆轨道运动时，系统的总能量可表示为：

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

其中

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

分别为系统的约化质量和总质量， Ω 为每个质量体的角速度， L 为两者之间的总距离 $L = r_1 + r_2$ 。求 $A(\mu, \Omega, L)$ 项的显式表达式。

A.3 1.0分

式 3 可简化为 $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ 。确定数值 β 。

部分 B: 引入相对论性耗散（7.0 分）

正确的引力理论——*广义相对论*——由爱因斯坦于 1915 年提出，它预言引力以光速传播。传递有关相互作用信息的信使称为引力波。只要质量体发生加速运动，就会发射引力波，使质量体组成的系统损失能量。

考虑一个由两个点状粒子组成、与宇宙中的其他物体隔离的系统。爱因斯坦证明，在速度足够小时，发射的引力波：1) 频率为轨道频率的两倍；2) 可用光度，即辐射功率 $\mathcal{P}$ 来表征，其主要贡献由爱因斯坦四极矩公式给出，

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

这里， c 为光速， $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。对于两个在 $x-y$ 平面内绕转的点状粒子组成的系统， Q_{ij} 由下列矩阵元素给出 (i, j 分别表示行号和列号)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

其余所有情况下均有 $Q_{ij} = 0$ 。这里， (x_A, y_A) 为质量体 A 在质心参考系中的位置。

B.1 1.0分

对于 A.2 中描述的圆轨道， Q_{ij} 的各分量可表示为时间 t 的函数：

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

用 Ω 表示 k ，并确定常数 a_i, b_i, c_{ij} 的数值。

B.2 1.0分

计算该系统以引力波形式辐射的功率 $\mathcal{P}$ ，并得到：

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

数值 ξ 是多少？[如果你未能求出 ξ ，请在后续计算中使用 $\xi = 6.4$ 。]

B.3 1.0分

如果不发射引力波，两个质量体将无限期地沿固定圆轨道绕转。然而，引力波的发射使系统损失能量，并缓慢演化至更小的圆轨道。推导出轨道角速度的变化率 $\frac{d\Omega}{dt}$ 具有以下形式

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

其中 M_c 称为啁啾质量。求 M_c 关于 M 和 μ 的表达式。这一质量决定了轨道衰减过程中频率的增长。[“啁啾”这一名称源于小鸟发出的音调逐渐升高（频率逐渐增大）的鸣叫声。]

B.4 2.0分

利用上述信息，建立轨道角速度 Ω 与引力波频率 f_{GW} 之间的关系。已知，对于任意光滑函数 $F(t)$ 和 $a \neq 1$,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

其中 χ 为常数, t_0 为积分常数, 证明由式 (10) 可得引力波频率为

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

并确定常数 p 。

2015 年 9 月 14 日, LIGO 探测器记录到了 GW150914。探测器由两条呈 L 形布置的臂组成, 每条臂长 4 km。这些臂的相对长度变化如图 1 所示。探测器的臂对通过的引力波作出线性响应, 响应的变化形态与引力波一致。这一引力波由两个沿准圆轨道绕转的黑洞产生; 引力辐射造成的能量损失使轨道收缩, 黑洞最终相撞。碰撞时刻大致对应于图 1 中 D 点之后的信号峰值。

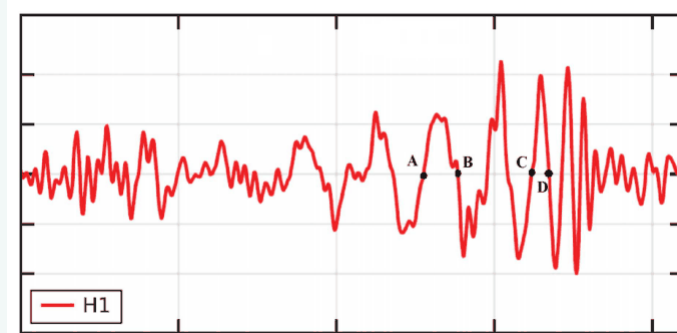


图 1. LIGO 的 H1 探测器处的应变, 即每条臂长度的相对变化。横轴为时间, A、B、C、D 点分别对应于 $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ 秒。

B.5 1.0分

根据图像, 估算以下时刻的 $f_{\text{GW}}(t)$:

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{和} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

假设式 (12) 一直适用到碰撞发生 (严格来说并非如此), 且两个天体质量相等, 估算啁啾质量 M_c 和系统的总质量, 以太阳质量 $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ 为单位。

B.6 1.0分

估算在 $t_{\overline{CD}}$ 时刻两个天体之间的最小轨道间距。由此估算每个天体的最大尺度 R_{max} 。求 $R_\odot/R_{\text{max}}$, 以将这一尺度与太阳半径 $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 \text{ km}$ 进行比较。还需估算它们在同一时刻的轨道线速度 v_{col} , 并通过 v_{col}/c 将其与光速比较。

由此得出结论: 这些天体确实运动极快且极为致密!

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1: $n = 3$, $\alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}$ 。
- A.2: $A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2$ 。

- **A.3:** $\beta = -\frac{1}{2}$ 。

- **B.1:** 取 $t = 0$ 时两个质量体位于 x 轴上, 且沿逆时针方向绕转,

$$k = 2\Omega, \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 0).$$

此外, $c_{12} = c_{21} = 1$; 其余所有非对角系数 c_{ij} 均为零。

- **B.2:** $\xi = \frac{32}{5} = 6.4$, $\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6$ 。

- **B.3:** $M_c = \mu^{3/5} M^{2/5}$, 且

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

- **B.4:** $f_{\text{GW}} = \frac{\Omega}{\pi}$, $p = 1$, 且

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t).$$

- **B.5:** $f_{\text{GW}}(0.0045 \text{ s}) \simeq 56 \text{ Hz}$, $f_{\text{GW}}(0.037 \text{ s}) \simeq 83 \text{ Hz}$; $M_c \simeq 30M_\odot$, $M \simeq 69M_\odot$ 。
- **B.6:** $L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^2 \text{ km}$, $R_{\max} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}$, $R_\odot/R_{\max} \simeq 2.7 \times 10^3$ 。每个天体的轨道速率为 $v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}$, 因此 $v_{\text{col}}/c \simeq 0.22$ 。

解答

A.1

由牛顿万有引力定律, 第一颗恒星的加速度为:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -GM_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

由质心条件可得

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1.$$

因此,

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}.$$

与式 (2) 比较可得

$$\boxed{n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}}.$$

A.2

由质心条件和 $L = r_1 + r_2$ 可得

$$r_1 = \frac{M_2}{M} L, \quad r_2 = \frac{M_1}{M} L.$$

两颗恒星的轨道速率分别为 $v_1 = \Omega r_1$ 和 $v_2 = \Omega r_2$ 。因此, 它们的总动能为

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M_1\Omega^2r_1^2 + \frac{1}{2}M_2\Omega^2r_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\Omega^2L^2 \left(\frac{M_1M_2^2 + M_2M_1^2}{M^2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\mu\Omega^2L^2.
\end{aligned}$$

取两者相距无穷远时的引力势能为零，则引力势能为

$$U = -\frac{GM_1M_2}{L} = -\frac{GM\mu}{L}.$$

因此， A 项就是动能：

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2}\mu\Omega^2L^2.$$

A.3

对于第一颗恒星，引力提供向心力：

$$M_1\Omega^2r_1 = \frac{GM_1M_2}{L^2}.$$

利用 $r_1 = M_2L/M$ ，得到圆轨道关系式

$$\Omega^2 = \frac{GM}{L^3}.$$

因此

$$T = \frac{1}{2}\mu\Omega^2L^2 = \frac{GM\mu}{2L},$$

且

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{2L}.$$

所以，

$$\beta = -\frac{1}{2}.$$

B.1

选取时间原点，使得在 $t = 0$ 时第一个质量体位于 x 轴正半轴上，并沿逆时针方向运动。于是

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t), \\
(x_2, y_2) &= (-r_2 \cos \Omega t, -r_2 \sin \Omega t).
\end{aligned}$$

由 A.2,

$$M_1r_1^2 + M_2r_2^2 = \mu L^2.$$

代入四极矩的各分量可得

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{\mu L^2}{3}(2 \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Omega t \right), \\
Q_{22} &= \frac{\mu L^2}{3}(2 \sin^2 \Omega t - \cos^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right), \\
Q_{33} &= -\frac{\mu L^2}{3} = \frac{\mu L^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right), \\
Q_{12} = Q_{21} &= \mu L^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{\mu L^2}{2} \sin 2\Omega t.
\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{k = 2\Omega}.$$

对角系数为

i	a_i	b_i
1	1/3	1
2	1/3	-1
3	-2/3	0

非对角系数为

$$\boxed{c_{12} = c_{21} = 1, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0}.$$

B.2

记 $q = \mu L^2/2$, $k = 2\Omega$ 。对于圆轨道，非零的三阶导数为

$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_{11} &= qk^3 \sin kt, \\
\ddot{Q}_{22} &= -qk^3 \sin kt, \\
\ddot{Q}_{12} = \ddot{Q}_{21} &= -qk^3 \cos kt.
\end{aligned}$$

两个非对角元素都对双重求和有贡献。因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} (\ddot{Q}_{ij})^2 &= 2q^2 k^6 \sin^2 kt + 2q^2 k^6 \cos^2 kt \\
&= 2q^2 k^6 \\
&= 2 \left(\frac{\mu L^2}{2} \right)^2 (2\Omega)^6 \\
&= 32\mu^2 L^4 \Omega^6.
\end{aligned}$$

由此得到光度为

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6}, \quad \boxed{\xi = \frac{32}{5} = 6.4}.$$

这一结果与轨道相位无关。

B.3

我们将旋近过程近似为一系列缓慢演化的圆轨道。各质量保持不变，引力波带走能量，使系统满足

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}.$$

利用圆轨道关系式消去 L ,

$$L = (GM)^{1/3} \Omega^{-2/3},$$

得到

$$E = -\frac{1}{2} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{2/3}.$$

它对时间的导数为

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{-1/3} \frac{d\Omega}{dt}.$$

用 Ω 表示的光度为

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 (GM)^{4/3} \Omega^{10/3}.$$

令能量变化率等于 $-\mathcal{P}$, 可得

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

两边取三次方,

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2.$$

当满足下式时, 上式便具有所要求的形式:

$$M_c^5 = \mu^3 M^2.$$

因此

$$M_c = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}.$$

特别地, $d\Omega/dt > 0$: 随着系统损失能量, 其轨道收缩, 轨道频率增大。

B.4

轨道频率为 $f_{\text{orb}} = \Omega/(2\pi)$ 。由题目给出的引力波频率与轨道频率之间的两倍关系可得

$$f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{\Omega}{\pi}.$$

对式 (10) 取正的立方根,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

利用 $\Omega = \pi f_{\text{GW}}$, 上式变为

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = 3\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3}.$$

在式 (11) 中取 $a = 11/3$, 或直接对 $f_{\text{GW}}^{-8/3}$ 求导, 得到

$$\frac{d}{dt} \left(f_{\text{GW}}^{-8/3} \right) = -8\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3}.$$

积分得到

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3}(t_0 - t).$$

与式 (12) 中的指数比较,

$$\frac{2}{3} + p = \frac{5}{3}, \quad 2 - p = 1,$$

所以

$$p = 1.$$

这里, t_0 是这一近似旋近模型预言频率发散的形式上的时刻。

B.5

A 和 B 标记了一个正波峰两侧相邻的过零点; C 和 D 则同样标记了较后一个波峰两侧的过零点。因此, 每个时间间隔大约对应半个引力波周期。

将每个短时间间隔内的频率近似取为其中点时刻的值,

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{AB}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{B}} - t_{\text{A}})} = \frac{1}{2(0.009 \text{ s})} \simeq 55.6 \text{ Hz},$$

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{CD}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{D}} - t_{\text{C}})} = \frac{1}{2(0.006 \text{ s})} \simeq 83.3 \text{ Hz}.$$

对应的时刻为

$$t_{\overline{\text{AB}}} = 0.0045 \text{ s}, \quad t_{\overline{\text{CD}}} = 0.037 \text{ s},$$

因此两者的时间差为 0.0325 s 。

用 f_{AB} 和 f_{CD} 表示这些频率估计值。将 B.4 中的关系式分别用于这两个时刻, 再相减, 便可消去 t_0 :

$$f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3}(t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}}).$$

解出啁啾质量,

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left[\frac{f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3}}{8\pi^{8/3}\xi(t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}})} \right]^{3/5}.$$

代入题目给出的常量及 $\xi = 6.4$,

$$M_c \simeq 6.02 \times 10^{31} \text{ kg},$$

或保留适当的精度,

$$M_c \simeq 30M_{\odot}.$$

对于质量相等的两个天体, $M_1 = M_2 = M/2$, 因此

$$\mu = \frac{M}{4}, \quad M_c = \left(\frac{M}{4}\right)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}.$$

于是

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 1.38 \times 10^{32} \text{ kg},$$

且

$$M \simeq 69M_{\odot}.$$

因此，每个天体的质量约为 $35M_{\odot}$ 。

B.6

在较后的测量时刻，

$$\Omega_{\text{CD}} = \pi f_{\text{CD}} \simeq 2.62 \times 10^2 \text{ rad/s}.$$

由圆轨道关系式可得

$$L = \left(\frac{GM}{\Omega_{\text{CD}}^2} \right)^{1/3}.$$

在与推得的啁啾质量和频率相容的所有情况中，等质量的取值也给出了最小的总质量，从而给出了最小的间距。事实上，

$$\frac{\mu}{M} = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

所以

$$M_c = M \left(\frac{\mu}{M} \right)^{3/5} \leq \frac{M}{4^{3/5}}.$$

当两个质量相等时等号成立。利用 B.5 中求得的质量，

$$L_{\min} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.383 \times 10^{32})}{(2.618 \times 10^2)^2} \right]^{1/3} \text{ m},$$

得到

$$L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^5 \text{ m} = 5.1 \times 10^2 \text{ km}.$$

对这两个等质量天体取相同的半径，要使它们仍彼此分离，近似要求 $2R \lesssim L$ 。因此

$$R_{\max} \simeq \frac{L_{\min}}{2} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}.$$

与太阳的比较为

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq \frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{2.56 \times 10^2 \text{ km}},$$

所以

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq 2.7 \times 10^3.$$

每个天体都以 $L/2$ 为半径绕质心运动。因此，它在这一时刻的轨道速率为

$$v_{\text{col}} = \Omega_{\text{CD}} \frac{L}{2} \simeq (2.618 \times 10^2)(2.562 \times 10^5) \text{ m/s},$$

得到

$$v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}, \quad \frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq 0.22.$$

因此，每个天体都将约 35 个太阳质量的物质容纳在不超过约 260 km 的半径内，同时以约五分之一光速运动。这些天体极为致密，且运动极快。上述数值估算采用了题目规定的牛顿圆轨道近似和四极矩近似，这些近似在接近并合时精度会下降。

解答已与官方解答核对。

题目 2：中微子在哪里？

当两个质子在大型强子对撞机（LHC）中以极高的能量碰撞时，碰撞可能产生多种粒子，例如电子、 μ 子、中微子、夸克及其各自的反粒子。这些粒子中的大多数都能被环绕碰撞点的粒子探测器探测到。例如，夸克会经历一个称为强子化的过程，在这一过程中，它们转变成一簇亚原子粒子，称为“喷注”。此外，探测器中的强磁场能使即使能量很高的带电粒子也发生足够大的偏转，从而测定其动量。ATLAS 探测器采用超导螺线管系统，在探测器内部环绕碰撞点的区域产生恒定、均匀的 2.00 特斯拉磁场。动量低于某一数值的带电粒子会发生很强的偏转，以至于在磁场中反复绕圈，因此很可能无法被测量。由于中微子自身的性质，它会穿过探测器而不发生相互作用，因此完全无法被探测到。

已知数据：电子静止质量， $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ；元电荷， $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ；

光速， $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ；真空介电常数， $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

部分 A. ATLAS 探测器的物理原理（4.0 分）

A.1 — 0.5分

电子受到垂直于其速度方向的磁力作用而做圆周运动。推导其圆形轨迹的回旋半径 r 的表达式，并将该半径表示为其动能 K 、电荷量的绝对值 e 、质量 m 和磁场 B 的函数。假设电子是非相对论性的经典粒子。

ATLAS 探测器内部产生的电子必须用相对论处理。不过，只要采用相对论动量，回旋半径公式同样适用于相对论运动。

A.2 — 0.5分

计算使电子能够沿径向逃出探测器内部区域所需的最小动量。探测器内部区域呈圆柱形，半径为 1.1 米，电子在恰好位于圆柱中心的碰撞点产生。用 MeV/c 表示答案。

当电荷量为 e 、静止质量为 m 的相对论性粒子沿垂直于速度的方向加速时，会发出称为同步辐射的电磁辐射。辐射功率为

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

其中 a 为加速度， $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ 。

A.3 — 1.0分

当粒子的速率非常接近光速时，称其为超相对论性粒子。对于超相对论性粒子，辐射功率可表示为：

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

其中 ξ 为实数， n 、 k 为整数， E 为带电粒子的能量， B 为磁场。求 ξ 、 n 和 k 。

A.4 — 1.0分

在超相对论极限下，电子能量随时间的变化为：

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

其中 E_0 为电子的初始能量。求 α 关于 e 、 c 、 B 、 ϵ_0 和 m 的表达式。

A.5 — 0.5分

考虑一个在碰撞点沿径向产生、能量为 100 GeV 的电子。估算该电子逃出探测器内部区域之前因同步辐射而损失的能量。用 MeV 表示答案。

A.6 — 0.5分

求超相对论极限下电子的回旋频率随时间变化的表达式。

部分 B. 寻找中微子 (6.0 分)

图 1 所示的两个质子的碰撞产生了一个顶夸克 (t) 和一个反顶夸克 ($\bar{t}$)，它们是迄今探测到的最重的基本粒子。顶夸克衰变为一个 W^+ 玻色子和一个底夸克 (b)，而反顶夸克衰变为一个 W^- 玻色子和一个反底夸克 ($\bar{b}$)。在图 1 所示的情形中， W^+ 玻色子衰变为一个反 μ 子 (μ^+) 和一个中微子 (ν)，而 W^- 玻色子衰变为一个夸克和一个反夸克。本题的任务是利用部分已探测粒子的动量，重建中微子的完整动量。为简单起见，本题中除顶夸克和 $W^\pm$ 玻色子外，所有粒子和喷注均视为无质量。

除中微子沿 (z 轴) 的动量分量外，顶夸克衰变产物的动量均可由实验确定 (见表)。探测器捕获的末态粒子的总线动量仅在横向平面 (xy 平面) 内为零，而沿碰撞轴线 (z 轴) 方向并不为零。因此，可以由横向平面内的缺失动量求出中微子的横向动量。

2015 年 6 月 4 日，LHC 的 ATLAS 实验在 GMT+1 时间 00:21:24 记录到一次如图 1 所示的质子—质子碰撞。

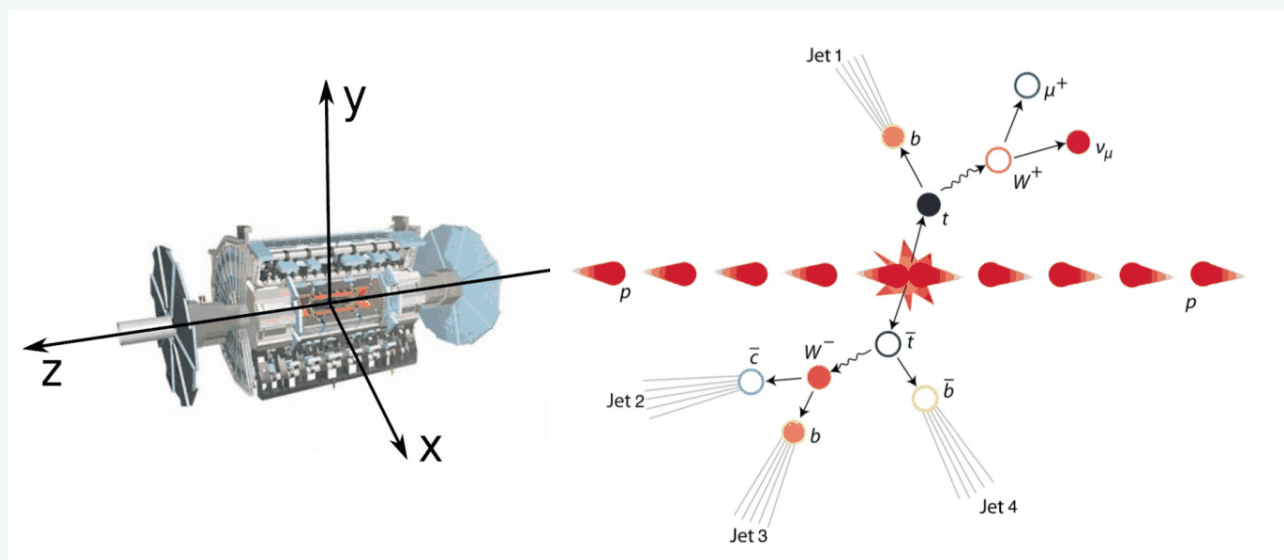


图 1. ATLAS 探测器坐标系 (左) 和质子—质子碰撞 (右) 的示意图。

顶夸克衰变产生的三个末态粒子 (包括中微子) 的线动量各分量列于下表。

粒子	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
反 μ 子 (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4

粒子	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
喷注 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
中微子 (ν)	-104.1	+5.3	---

B.1 — 1.5分

求一个方程，将 W^+ 玻色子质量的平方 m_W^2 与上表中中微子和反 μ 子的动量分量联系起来。用中微子和反 μ 子的横向动量

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{和} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

以及它们沿 z 轴的动量分量 $p_z^{(\mu)}$ 和 $p_z^{(\nu)}$ 表示答案。

B.2 — 1.5分

假设 W^+ 玻色子的质量为 $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ ，计算中微子沿 z 轴的动量 $p_z^{(\nu)}$ 的两个可能解。用 GeV/c 表示答案。

B.3 — 1.0分

分别计算上述两个解对应的顶夸克质量。用 GeV/c^2 表示答案。

[如果你未能在 B.2 中求出这两个解，请使用 $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ 和 $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$ 。]

用于测量顶夸克质量的碰撞事件的归一化数目（由实验确定）包含两个部分：所谓的“信号”（对应于顶夸克的衰变）和“本底”（对应于其他不包含顶夸克的过程所产生的事件）。实验数据包含这两种过程，见图 2。

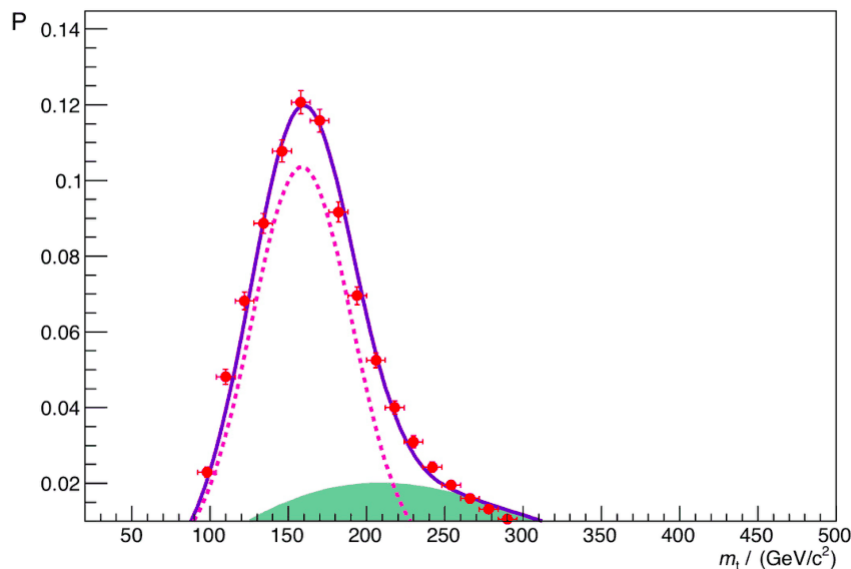


图 2. 由实验确定的顶夸克质量分布，即归一化事件数随顶夸克质量的变化。圆点对应于数据。虚线对应于“信号”，阴影对应于“本底”。

B.4 — 1.0分

根据顶夸克质量分布，上述两个解中哪一个更可能是正确的？估算最可能的解所对应的概率。

B.5 — 1.0分

利用最可能的解，计算顶夸克在衰变之前运动的距离。假设顶夸克在静止时的平均寿命为 5×10^{-25} s。

题目译自官方英文原文。

答案

这里 $p_T^{(a)} = |\vec{p}_T^{(a)}|$ 。

- A.1: $r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}$ 。
- A.2: $p_{\min} = \frac{eBR}{2} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c$ 。
- A.3: $\xi = \frac{1}{6\pi}$, $n = 5$, $k = 4$ 。
- A.4: $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}$ 。
- A.5: $\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}$ 。
- A.6: 瞬时频率为

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

角频率为 $\omega(t) = 2\pi f(t)$ 。

- B.1:

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right] - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}}.$$

- B.2: $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ 或 $-188 \text{ GeV}/c$ 。
- B.3: 分别为 $m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2$ 或 $311 \text{ GeV}/c^2$ 。
- B.4: $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ 这一解更可能正确。图中在其重建质量处的概率约为 $P \simeq 0.12$, 即 12%。
- B.5: 平均距离为 $\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}$ 。

解答

A.1

对于垂直于磁场方向的运动，洛伦兹磁力提供向心力：

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

因此 $r = mv/(eB)$ 。利用非相对论动能 $K = \frac{1}{2}mv^2$ ，可得

$$r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}.$$

等价地, $r = p/(eB)$, 当 p 为相对论动量时, 该式也适用于相对论情形。

A.2

设探测器半径为 $R = 1.1 \text{ m}$ 。电子的圆形轨道经过碰撞点, 因此轨道圆心到碰撞点的距离为 r 。所以, 电子距碰撞点的最大径向距离为 $2r$ 。

临界轨道与圆柱边界相切的条件为

$$2r = R.$$

当运动方向垂直于螺线管磁场时, 所需的总动量最小。因此, 逃逸阈值为

$$p_{\min} = eB \frac{R}{2} = (1.60 \times 10^{-19})(2.00) \frac{1.1}{2} = 1.76 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

由于

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{10^6(1.60 \times 10^{-19})}{3.00 \times 10^8} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1},$$

得到

$$p_{\min} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c.$$

动量略高于这一阈值时, 轨道就会穿过圆柱边界。

A.3

对于垂直于速度方向的加速度, 相对论横向运动方程为

$$evB = \gamma ma,$$

因此, 轨迹弯曲所对应的加速度为

$$a = \frac{evB}{\gamma m}.$$

代入给定的辐射公式, 得到

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{\gamma^2 m^2} \gamma^4 = \frac{e^4 B^2 v^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

在超相对论极限下, $v \simeq c$, 而总能量为 $E = \gamma mc^2$ 。因此,

$$P \simeq \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \frac{e^4 E^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

与题目要求的形式比较, 得到

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$$

A.4

磁力不做功, 因此电子能量的减少量等于辐射带走的能量:

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\alpha E^2,$$

其中, 由 A.3 可得

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

利用 $E(0) = E_0$ 积分,

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^2} = -\alpha \int_0^t dt,$$

得到

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \alpha t.$$

于是,

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

与题目中给出的表达式一致。

A.5

首先检查轨迹的弯曲程度。对于超相对论性电子, $p \simeq E/c$, 因此其初始回旋半径为

$$r_0 \simeq \frac{E_0}{eBc}.$$

这里

$$E_0 = 100 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-8} \text{ J},$$

因此

$$r_0 = \frac{1.60 \times 10^{-8}}{(1.60 \times 10^{-19})(2.00)(3.00 \times 10^8)} = 1.67 \times 10^2 \text{ m}.$$

由于 $r_0 \gg R = 1.1 \text{ m}$, 电子穿过探测器的路径近似为直线。因此

$$t_{\text{exit}} \simeq \frac{R}{c} = \frac{1.1}{3.00 \times 10^8} = 3.67 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

利用给定的常数,

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} = 9.39 \times 10^{12} \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

并且

$$\alpha E_0 t_{\text{exit}} = 5.51 \times 10^{-4}.$$

损失的能量为

$$\Delta E = E_0 - \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}} = \frac{\alpha E_0^2 t_{\text{exit}}}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}}.$$

代入数值得

$$\Delta E = 8.81 \times 10^{-12} \text{ J} = 55.1 \text{ MeV}.$$

因此, 取合理精度,

$$\boxed{\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}}.$$

这仅约为初始能量的 5.5×10^{-4} , 证实了在整个飞行过程中, 回旋半径始终很大。

A.6

动量方向旋转的瞬时角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

利用 $E = \gamma mc^2$, 得到

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E(t)}.$$

代入 A.4 的结果,

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

因此, 以每秒的周期数计量的普通频率为

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

在超相对论近似下, 两者均随时间线性增大。

B.1

由 $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ 过程中的四动量守恒可得

$$E_W = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}_W = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}.$$

这两个粒子组成的系统的不变质量满足

$$m_W^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2 - c^2 |\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}|^2.$$

两个衰变子粒子均视为无质量, 因此

$$E_\mu = c|\vec{p}^{(\mu)}|, \quad E_\nu = c|\vec{p}^{(\nu)}|.$$

展开上述不变量时, 各粒子自身的能量项与动量项相消:

$$m_W^2 c^4 = 2(E_\mu E_\nu - c^2 \vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)}).$$

又有

$$|\vec{p}^{(a)}| = \sqrt{(p_T^{(a)})^2 + (p_z^{(a)})^2},$$

以及

$$\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} = \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} + p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

因此, 所求关系为

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2][(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

B.2

定义

$$q = p_z^{(\nu)}, \quad \ell = p_z^{(\mu)}, \quad a = (p_T^{(\mu)})^2, \quad b = (p_T^{(\nu)})^2,$$

并令

$$p_\mu = |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad D = \frac{m_W^2 c^2}{2} + \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)}.$$

B.1 中的方程变为

$$p_\mu \sqrt{b + q^2} = D + \ell q.$$

两边平方，并利用 $p_\mu^2 - \ell^2 = a$ ，得到

$$aq^2 - 2D\ell q + p_\mu^2 b - D^2 = 0.$$

其根为

$$q = \frac{D\ell \pm p_\mu \sqrt{D^2 - ab}}{a}.$$

由测得的动量分量可得

$$\begin{aligned} a &= 24.7^2 + 24.9^2 = 1230.1 \text{ (GeV/c)}^2, \\ b &= 104.1^2 + 5.3^2 = 10864.9 \text{ (GeV/c)}^2, \\ p_\mu &= \sqrt{24.7^2 + 24.9^2 + 12.4^2} = 37.2003 \text{ GeV/c}, \\ \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} &= (-24.7)(-104.1) + (-24.9)(5.3) \\ &= 2439.3 \text{ (GeV/c)}^2, \\ D &= \frac{80.4^2}{2} + 2439.3 = 5671.38 \text{ (GeV/c)}^2. \end{aligned}$$

因此，两个根的数值为

$$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}, \quad q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}.$$

两者均满足平方之前的原方程。因此，

$$\boxed{p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV/c} \quad \text{或} \quad -188 \text{ GeV/c}}.$$

B.3

顶夸克衰变产生反 μ 子、中微子和底夸克喷注。由能量和动量守恒可得

$$E_t = E_\mu + E_\nu + E_{j_1}, \quad \vec{p}_t = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)}.$$

由于这三个衰变产物均视为无质量，

$$E_t = c \left(|\vec{p}^{(\mu)}| + |\vec{p}^{(\nu)}| + |\vec{p}^{(j_1)}| \right).$$

喷注的动量大小为

$$|\vec{p}^{(j_1)}| = \sqrt{(-14.2)^2 + 50.1^2 + 94.1^2} = 107.5475 \text{ GeV/c}.$$

用 q 表示以 GeV/c 为单位的数值，则

$$E_t = \left[37.2003 + 107.5475 + \sqrt{10864.9 + q^2} \right] \text{ GeV},$$

并且

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 81.7 + q) \text{ GeV/c}.$$

由下式可重建顶夸克质量：

$$m_t^2 c^4 = E_t^2 - c^2 |\vec{p}_t|^2.$$

计算过程中多保留几位数字，得到：

中微子的解	E_ν (GeV)	E_t (GeV)	p_{tz} (GeV/c)	m_t (GeV/c ²)
$q_+ = 73.9532 \text{ GeV}/c$	127.804	272.552	155.653	169.344
$q_- = -188.2937 \text{ GeV}/c$	215.219	359.967	-106.594	311.183

因此，

$$m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{当 } p_z^{(\nu)} > 0,$$

$$m_t \simeq 311 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{当 } p_z^{(\nu)} < 0.$$

B.4

质量 $169 \text{ GeV}/c^2$ 接近图 2 中分布的峰值位置，而 $311 \text{ GeV}/c^2$ 位于其数值很小的高质量尾部。因此， $p_z^{(\nu)}$ 为正的解更可能正确。

读取图中总分布曲线在 $169 \text{ GeV}/c^2$ 附近的纵坐标，得到

$$P \simeq 0.12 \quad \text{即约为 } 12\%.$$

相应的重建中微子动量为

$$\vec{p}^{(\nu)} \simeq (-104.1, +5.3, +74.0) \text{ GeV}/c.$$

B.5

对于更可能正确的解，

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 155.653) \text{ GeV}/c,$$

因此

$$|\vec{p}_t| = 213.558 \text{ GeV}/c.$$

顶夸克的洛伦兹因子和速率为

$$\gamma_t = \frac{E_t}{m_t c^2} = \frac{272.552}{169.344} = 1.609,$$

$$\beta_t = \frac{|\vec{p}_t|c}{E_t} = \frac{213.558}{272.552} = 0.7836.$$

在探测器参考系中，平均寿命为 $\gamma_t \tau_0$ 。因此，平均运动距离为

$$\bar{L} = v_t \gamma_t \tau_0 = \beta_t \gamma_t c \tau_0 = \frac{|\vec{p}_t|c}{m_t c^2} c \tau_0.$$

代入得到

$$\bar{L} = \frac{213.558}{169.344} (3.00 \times 10^8) (5 \times 10^{-25}) = 1.89 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

因此，

$$\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

这是平均距离，因为给定的静止参考系寿命是平均寿命。

解答已与官方解答核对。

题目 3：生命系统的物理学

已知数据：标准大气压， $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

部分 A. 血液流动的物理学 (4.5 分)

在本部分中，你将分析两个描述血管内血液流动的简化模型。

血管的形状近似为圆柱形。已知不可压缩流体在刚性圆柱管内作稳定的非湍流流动时，圆柱管两端的流体压强差为

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

其中， ℓ 和 r 分别为圆柱管的长度和半径， η 为流体的黏度， Q 为体积流量，即单位时间内通过圆柱管横截面的流体体积。即使不考虑脉动流、血管的可压缩性和不规则形状，以及血液并非简单流体而是细胞与血浆的混合物这一事实，该表达式通常也能给出血管内压强差的正确数量级。此外，该表达式与欧姆定律具有相同的形式：体积流量可类比为电流，压强差可类比为电压，而因子 $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ 则可类比为电阻。

例如，考虑图 1 所示的对称微动脉（小动脉）网络，它向组织的毛细血管床输送血液。在该网络中，每个分叉处的一条血管都分成两条相同的血管。不过，级数较高的血管更细、更短：设相邻两级 i 和 $i+1$ 的血管半径和长度满足 $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ 和 $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$ 。

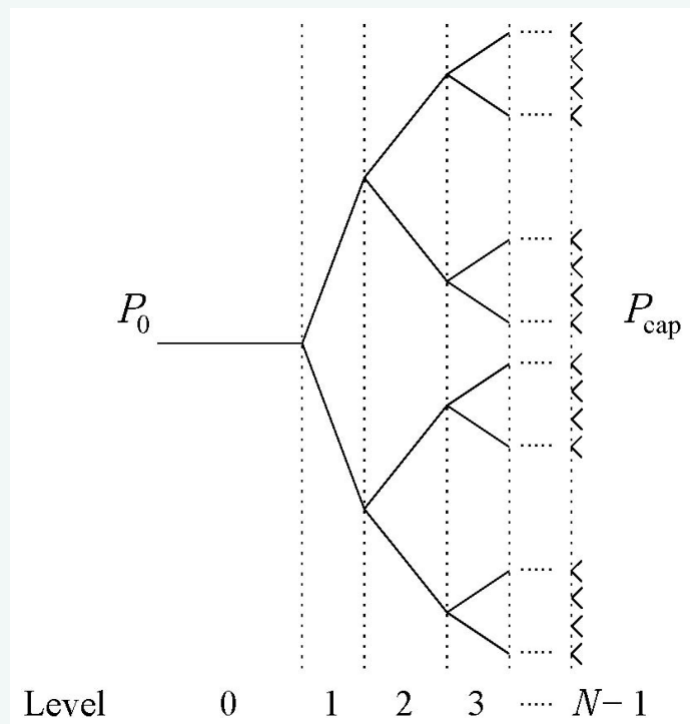


图 1. 微动脉网络。

A.1 (1.3 分)

求任意第 i 级的一条血管中的体积流量 Q_i 的表达式，用总级数 N 、黏度 η 、第一条血管的半径 r_0 和长度 ℓ_0 ，以及第 0 级微动脉处的压强 P_0 与毛细血管床处的压强 P_{cap} 之差 $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ 表示。

A.2 (0.5 分)

若第 0 级微动脉的半径为 $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ ，长度为 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ，计算其体积流量 Q_0 的数值。设微动脉入口处的压强为 55 mmHg，血管网络共有 $N = 6$ 级，将这条微动脉与压强为 30 mmHg 的毛细血管床相连。设血液的黏度为 $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 。用 ml/h 表示结果。

将血管视为 LCR 电路

将血管近似为刚性圆柱管存在若干不足。尤其重要的是，需要纳入随时间变化的流动，并考虑心脏一次泵血周期中压强变化所引起的血管直径变化。此外，观察表明，较大血管中的血压在一个周期内变化显著，而在较小血管中，压强振荡的振幅要小得多，流动几乎不随时间变化。

当一条弹性血管内的压强升高时，其直径会增大，从而使血管能够储存更多流体，并在压强降低时将其输送出去。因此，可以在最初的描述中加入一个电容器来模拟血管的弹性行为。此外，在考虑随时间变化的血液流量时，还必须考虑流体的惯性，它与流体密度 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 成正比。在本模型中，这种惯性可用电感来描述。图 2 给出了本模型中单条血管的等效电路。等效电容和电感分别为

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{和} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

其中， h 为血管壁厚度， E 为动脉的杨氏模量，即描述血管组织在受力时尺寸变化的系数。杨氏模量的单位与压强相同，微动脉的杨氏模量约为 $E = 0.06 \text{ MPa}$ 。

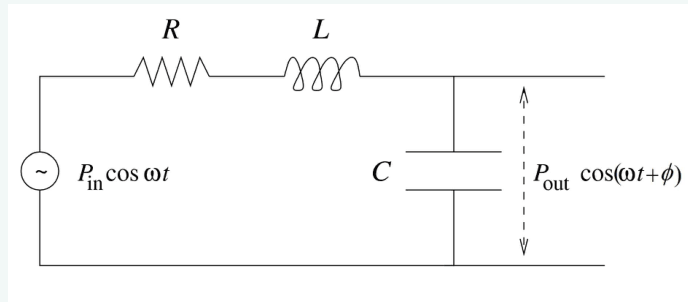


图 2. 单条血管的等效电路。

A.3 (2.0 分)

对于角频率为 ω 的流动，求稳态下血管出口处的压强振幅 P_{out} ，用入口处的压强振幅 P_{in} 、等效电阻 R 、电感 L 和电容 C 表示。求出 η 、 ρ 、 E 、 h 、 r 和 ℓ 之间应满足的条件，使得在低频下，出口处的压强振荡振幅小于 P_{in} 。

A.4 (0.7 分)

对于 A.2 中的血管网络，估算使 A.3 中所得条件成立的最大微动脉壁厚 h （设 h 与级数无关）。

部分 B. 肿瘤生长 (5.5 分)

肿瘤生长是一个极其复杂的过程，其中细胞增殖和自然选择等生物学机制与物理过程相互交织。本题将考虑一个简化的肿瘤生长模型，以研究实体肿瘤中普遍观察到的压强升高现象。

考虑一组正常细胞所形成的组织，其外部包围着一层不可伸展的基底膜，迫使组织始终保持相同的形状：半径为 R 的球体（图 3）。

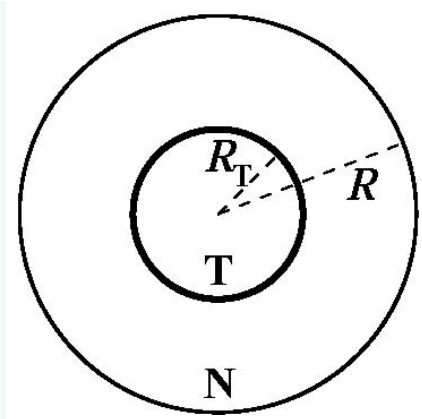


图 3. 简化的肿瘤。

初始时，组织内不存在残余应力，即各处的压强均等于大气压。

在 $t = 0$ 时刻，一个肿瘤开始在该球体的中心生长；随着肿瘤生长，组织内部的压强升高。设两种组织（正常组织 N 和肿瘤组织 T）均可压缩，其密度 ρ_N 和 ρ_T 随压强线性增大：

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

其中， ρ_0 为组织的初始密度， p 为相对于大气压的压强差， K_N 、 K_T 分别为正常组织和肿瘤组织的压缩模量（体积弹性模量）。一般而言，肿瘤更硬，因此具有更大的体积弹性模量。

B.1 (1.0 分)

肿瘤生长过程中，正常细胞的质量保持不变。求肿瘤体积与组织总体积之比 $v = V_T/V$ ，用肿瘤质量 (M_T) 与正常组织质量 (M_N) 之比 $\mu = M_T/M_N$ 以及体积弹性模量之比 $\kappa = K_N/K_T$ 表示。

在癌症治疗中，有时会将热疗与化疗、放疗结合使用。热疗选择性地癌细胞从正常人体体温 37°C 加热至 43°C 以上，从而使其死亡。研究人员目前正在开发表面覆盖特殊蛋白质的碳纳米管，这些蛋白质能够与肿瘤细胞结合。当用近红外辐射照射组织时，纳米管对辐射的吸收远强于周围组织，因此可以选择性地加热纳米管及其附着的肿瘤细胞。

设肿瘤、正常细胞及周围组织具有恒定的热导率 k ，即在本题的几何构型中，单位时间内通过半径为 r 的球面单位面积的能量，等于 k 乘以温度对 r 的导数。纳米管均匀分布于肿瘤体积内，能够在单位体积内提供功率为 $\mathcal{P}$ 的热能。假设在距肿瘤非常远的地方，温度等于正常人体体温。

B.2 (1.7 分)

求稳态下肿瘤中心的温度，用 $\mathcal{P}$ 、 k 、人体体温和肿瘤半径 R_T 表示。

B.3 (0.5 分)

求将半径为 5.0 cm 的肿瘤中所有肿瘤细胞加热至 43.0°C 以上所需的最小单位体积功率 $\mathcal{P}_{\min}$ 。取组织的热导率为 $k = 0.60\text{ W K}^{-1}\text{ m}^{-1}$ 。

设肿瘤由一个具有 A.1 中所述分支结构的血管网络供血。随着肿瘤生长，当其压强 p 超过最细血管内的压强 P_{cap} 时，这些血管的半径将减小一个微量 δr 。若该压强达到临界值 p_c （对应于半径减小量 δr_c ），最细的血管就会塌陷，严重影响肿瘤的血液灌注。压强与半径变化可由以下唯象关系联系起来：

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

设肿瘤压强升高时，只有最细的血管（第 $N - 1$ 级）的半径发生变化。

B.4 (2.3 分)

在线性范围内（即认为 $p - P_{\text{cap}}$ 非常小），将这些最细血管中流量的相对下降量 $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ 表示为肿瘤体积比 $v = V_T/V$ 以及 K_N 、 N 、 p_c 、 δr_c 、 r_{N-1} 、 P_{cap} 的函数。

题目译自官方英文原文。

答案

- A.1

$$Q_i = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8 \eta \ell_0 N 2^i}, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

- A.2

$$Q_0 = 1.4536 \dots \text{ ml/h} \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

- A.3

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

在足够低的非零频率下发生衰减，要求

$$R^2 C \geq 2L \iff h \leq \frac{64 \eta^2 \ell^2}{3 \rho E r^3}.$$

若衰减出现在 ω^2 阶，则须满足严格不等式；等号成立时，衰减出现在 ω^4 阶。

- A.4

$$h_{\text{max}} = \frac{64 \eta^2 \ell_0^2}{3 \rho E r_0^3} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ } \mu\text{m}.$$

第 0 级给出最严格的约束。

- B.1

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

- B.2 以 T_b 表示正常体温，

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P} R_T^2}{2k}.$$

- B.3

$$\mathcal{P}_{\text{min}} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

这是阈值；若要使所有位置的温度均严格超过 43.0°C ，功率密度必须高于该值。

- B.4 将 δQ_{N-1} 定义为取正值的下降量,

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1-v} - P_{\text{cap}} \right).$$

此式适用于刚开始受压后的情形, 此时 $p > P_{\text{cap}}$ 。

解答

A.1

由几何尺度关系可得

$$r_i = r_0 2^{-i/3}, \quad \ell_i = \ell_0 2^{-i/3}.$$

因此, 第 i 级单条血管的流阻为

$$R_i = \frac{8\eta\ell_i}{\pi r_i^4} = \frac{8\eta\ell_0}{\pi r_0^4} 2^i = R_0 2^i.$$

由体积流量守恒及对称性可知, 流量在每个分叉处均等分。因此

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i}.$$

于是, 第 i 级任意一条血管两端的压强降为

$$\Delta P_i = R_i Q_i = R_0 Q_0.$$

从入口到毛细血管床的每一条路径, 都依次经过 N 级中每一级的一条血管。将沿此路径的压强降相加, 得到

$$\Delta P = NR_0 Q_0.$$

所以

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i} = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8\eta\ell_0 N 2^i}.$$

等价地, 每一级对网络总流阻的贡献均为 $R_i/2^i = R_0$, 故 $R_{\text{eq}} = NR_0$ 。

A.2

利用题目给出的 mmHg 与帕斯卡之间的换算关系,

$$\Delta P = (55 - 30) \frac{1.013 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 3.3322 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

因此,

$$Q_0 = \frac{\pi(6.0 \times 10^{-5})^4(3.3322 \times 10^3)}{8(3.5 \times 10^{-3})(2.0 \times 10^{-3})(6)} = 4.0379 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

由于 $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ ml}$ 且 $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$,

$$Q_0 = (4.0379 \times 10^{-10})(10^6)(3600) = 1.4536 \text{ ml/h}.$$

保留两位有效数字,

$$Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

A.3

在电路类比中，压强对应于电压，体积流量对应于电流。电容器的关系式和电路中的压强平衡式为

$$Q = C \frac{dp_{\text{out}}}{dt}, \quad p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = RQ + L \frac{dQ}{dt}.$$

联立上述方程，得到

$$LC \frac{d^2 p_{\text{out}}}{dt^2} + RC \frac{dp_{\text{out}}}{dt} + p_{\text{out}} = p_{\text{in}}.$$

暂态过程衰减后，输入和输出以相同的角频率振荡。用复振幅表示二者，

$$(1 - \omega^2 LC + i\omega RC) \tilde{P}_{\text{out}} = \tilde{P}_{\text{in}}.$$

取模，得到

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

分母的平方为

$$1 + C(R^2 C - 2L)\omega^2 + L^2 C^2 \omega^4.$$

对于足够小的非零 ω ，若要在最低阶出现衰减，必须满足

$$R^2 C > 2L.$$

若 $R^2 C < 2L$ ，则在足够低的频率下，分母小于 1，压强振荡被放大。在边界情形 $R^2 C = 2L$ 下，分母的平方变为 $1 + L^2 C^2 \omega^4 > 1$ ，因此边界情形也会产生衰减，只是衰减出现在 ω^4 阶。所以，确切条件为 $R^2 C \geq 2L$ 。

代入给定的血管参数，

$$R^2 C = \left(\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} \right)^2 \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} = \frac{96\eta^2 \ell^3}{\pi E h r^5},$$

而

$$2L = \frac{9\ell\rho}{2\pi r^2}.$$

因此

$$64\eta^2 \ell^2 \geq 3\rho E h r^3$$

或等价地，

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

若要求衰减出现在 ω^2 阶，则应将这些不等式改为严格不等式。在零频率下，压强增益恰好为 1。

A.4

在第 i 级，

$$h_{\text{crit},i} = \frac{64\eta^2 \ell_i^2}{3\rho E r_i^3} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} 2^{i/3}.$$

该上限随级数增大而增大。由于相同的壁厚必须在每一级都满足条件，因此第 0 级给出最严格的约束。

取 $E = 0.06 \times 10^6 \text{ Pa}$,

$$h_{\max} = \frac{64(3.5 \times 10^{-3})^2(2.0 \times 10^{-3})^2}{3(1.05 \times 10^3)(0.06 \times 10^6)(6.0 \times 10^{-5})^3} = 7.6818 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

因此, 在给定模型下,

$$h_{\max} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ } \mu\text{m}.$$

当壁厚小于该极限值时, 整个网络都满足最低阶衰减的严格条件。

B.1

组织总体积 V 固定不变。初始时, 其中充满密度为 ρ_0 的正常组织, 因此由正常细胞的质量守恒可得

$$M_N = \rho_0 V = \rho_N (V - V_T).$$

记 $v = V_T/V$, 并利用式 (3),

$$1 = \left(1 + \frac{p}{K_N}\right)(1 - v).$$

因此, 压强与肿瘤体积的关系为

$$p = \frac{K_N v}{1 - v}.$$

肿瘤质量为

$$M_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T.$$

除以 $M_N = \rho_0 V$, 得到

$$\mu = v \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) = v \left(1 + \frac{\kappa v}{1 - v}\right).$$

整理后得到关于 v 的二次方程:

$$(1 - \kappa)v^2 - (1 + \mu)v + \mu = 0.$$

具有物理意义的根应在 μ 趋于零时也趋于零。对于 $\kappa \neq 1$, 该根为

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(1 - \kappa)\mu}}{2(1 - \kappa)}.$$

有理化后得到一个在 $\kappa = 1$ 时也可直接适用的形式:

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

作为检验, 当体积弹性模量相等时, 两种组织的密度相等, 从而有 $v = \mu/(1 + \mu)$, 与该表达式给出的结果一致。

B.2

设 T_b 为远离肿瘤处的体温。在稳态下, 通过一个球面向外传递的热流率等于其内部产生的总功率。规定向外传热为正, 傅里叶定律为

$$\dot{H}(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

在肿瘤内部, $0 \leq r \leq R_T$, 由均匀产热可得

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi r^3}{3} \mathcal{P},$$

所以

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}r}{3k}.$$

在肿瘤外部, 全部产热功率都通过每一个球面:

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi R_T^3}{3} \mathcal{P}.$$

积分, 并利用当 $r \rightarrow \infty$ 时 $T(r) \rightarrow T_b$, 得到

$$T(r) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}, \quad r \geq R_T.$$

因此, 肿瘤表面的温度为

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

温度在表面处连续。从该表面向内对内部温度梯度积分, 得到

$$T(r) = T(R_T) + \frac{\mathcal{P}}{6k}(R_T^2 - r^2) = T_b + \frac{\mathcal{P}}{6k}(3R_T^2 - r^2).$$

于是,

$$\boxed{T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}}.$$

肿瘤内部的温度按二次函数规律下降, 而在肿瘤外部, 温度以 $1/r$ 的规律趋近于 T_b 。

B.3

温度随距中心的距离增大而降低, 因此温度最低的肿瘤细胞位于表面。要将每个肿瘤细胞都加热至 43.0°C 以上, 必须满足

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k} > 43.0^\circ\text{C}.$$

阈值功率密度为

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2}.$$

代入 $R_T = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3(0.60)(6.0)}{(5.0 \times 10^{-2})^2} = 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

因此

$$\boxed{\mathcal{P}_{\min} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}}.$$

在此阈值下, 表面温度恰好为 43.0°C , 而中心温度为 46.0°C 。若要使所有位置的温度均严格超过指定温度, 则要求 $\mathcal{P} > 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}$ 。

B.4

首先将压强与半径之间的关系线性化。式 (4) 可写为

$$p - P_{\text{cap}} = (p_c - P_{\text{cap}}) \left[2 \frac{\delta r}{\delta r_c} - \left(\frac{\delta r}{\delta r_c} \right)^2 \right].$$

在与未受压状态相连的分支上，当足够接近 $p = P_{\text{cap}}$ 时，

$$\delta r \simeq \frac{\delta r_c}{2(p_c - P_{\text{cap}})} (p - P_{\text{cap}}).$$

只有末端血管的半径发生变化。令

$$\epsilon = \frac{\delta r}{r_{N-1}} \ll 1.$$

这些血管的长度保持不变，因此由泊肃叶定律得到

$$R'_{N-1} = R_{N-1}(1 - \epsilon)^{-4} \simeq R_{N-1}(1 + 4\epsilon).$$

由 A.1 可知， 2^{N-1} 条末端血管最初对网络总流阻的共同贡献为 R_0 。其余 $N - 1$ 级保持不变。因此

$$R'_{\text{eq}} = (N - 1)R_0 + R_0(1 - \epsilon)^{-4} \simeq NR_0 + 4R_0\epsilon.$$

在入口压强和毛细血管压强固定的条件下，总流量与 R_{eq} 成反比。由对称性，末端血管中的流量仍等于总流量除以 2^{N-1} ，因此其相对下降量与总流量的相对下降量相同：

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{R'_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

因子 $1/N$ 反映了这样一个事实： N 个相等的流阻贡献中，只有一个发生变化。

代入线性化的半径变化量，

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}} \frac{p - P_{\text{cap}}}{p_c - P_{\text{cap}}}.$$

最后，由 B.1 中正常细胞的质量守恒关系可得 $p = K_N v / (1 - v)$ 。因此，

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

该表达式适用于体积分数刚超过开始受压的阈值

$$v_* = \frac{P_{\text{cap}}}{K_N + P_{\text{cap}}},$$

且满足 $(p - P_{\text{cap}})/(p_c - P_{\text{cap}}) \ll 1$ 和 $\delta r/r_{N-1} \ll 1$ 的情形。低于该阈值时，题述模型并未规定血管会变窄。

解答已与官方解答核对。