

IPhO 2018

Teorik sorular ve çözümler · Lizbon, Portekiz · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2018/

Soru 1: LIGO-GW150914

2015 yılında kütleçekim dalgası gözlemevi LIGO, kütleçekim dalgalarının (GW) Dünya'dan geçişini ilk kez tespit etti. GW150914 adı verilen bu olay, yaklaşık dairesel yörüngelerde dolanan iki kara deliğin ürettiği dalgalardan kaynaklandı. Bu soruda, tespit edilen sinyalin özelliklerinden yararlanarak sistemin bazı fiziksel parametrelerini tahmin edeceksiniz.

Bölüm A: Newton mekaniğinde (korunumlu) yörüngeler (3.0 puan)

A.1 1.0 puan

Kütleleri M_1, M_2 olan ve sistemin kütle merkezine göre sırasıyla $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ konumlarında bulunan iki yıldızdan oluşan bir sistem düşünün; yani,

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Yıldızlar Evren'in geri kalanından yalıtılmıştır ve göreceli olmayan hızlarla hareket etmektedir. Newton yasaları kullanılarak M_1 kütlelerinin ivme vektörü

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir; burada $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ ifadelerini bulun; burada G , Newton'un kütleçekim sabitidir [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

A.2 1.0 puan

Dairesel yörüngelerdeki iki kütleli sistemin toplam enerjisi şöyle ifade edilebilir:

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

burada

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

sırasıyla sistemin indirgenmiş kütle ve toplam kütleleridir; Ω , her bir kütle için açısal hızı, L ise aralarındaki toplam uzaklıktır: $L = r_1 + r_2$. $A(\mu, \Omega, L)$ teriminin açık ifadesini elde edin.

A.3 1.0 puan

Denklem 3, $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ biçiminde sadeleştirilebilir. β sayısını belirleyin.

Bölüm B: Göreceli enerji kaybının hesaba katılması (7.0 puan)

Doğru kütleçekim kuramı olan Genel Görelilik, Einstein tarafından 1915 yılında ortaya konmuş olup kütleçekiminin ışık hızıyla yayıldığını öngörür. Etkileşim hakkında bilgi taşıyan habercilere kütleçekim dalgaları (GW) denir. Kütleler ivmelendiğinde GW yayılır ve bu da kütlelerden oluşan

sistemin enerji kaybetmesine neden olur.

Evren'in geri kalanından yalıtılmış, iki noktasal parçacıktan oluşan bir sistem düşünün. Einstein, yeterince küçük hızlarda yayılan GW'lerin: 1) yörünge frekansının iki katı frekansa sahip olduğunu; 2) baskın katkısı Einstein'ın dört kutup formülüyle verilen bir ışıma gücü, yani yayılan güç $\mathcal{P}$, ile karakterize edilebildiğini kanıtlamıştır:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Burada c , ışık hızıdır: $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. $x - y$ düzleminde dolanan iki noktasal parçacıktan oluşan bir sistem için Q_{ij} , aşağıdaki tablodur (i, j , satır/sütun numarasını belirtir):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

ve diğer tüm durumlar için $Q_{ij} = 0$ olur. Burada (x_A, y_A) , A kütlesinin kütle merkezi referans sistemindeki konumudur.

B.1 1.0 puan

A.2'de açıklanan dairesel yörüngeler için Q_{ij} bileşenleri, t zamanının fonksiyonu olarak şöyle ifade edilebilir:

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

k 'yı Ω cinsinden ve a_i, b_i, c_{ij} sabitlerinin sayısal değerlerini belirleyin.

B.2 1.0 puan

Bu sistemin kütleçekim dalgaları biçiminde yaydığı $\mathcal{P}$ gücünü hesaplayın ve şu ifadeyi elde edin:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

ξ sayısı nedir? [ξ 'yi elde edemediyseniz bundan sonra $\xi = 6.4$ kullanın.]

B.3 1.0 puan

GW yayımı olmadığında iki kütle sabit bir dairesel yörüngede süresiz olarak dolanır. Ancak GW yayımı, sistemin enerji kaybetmesine ve yavaşça daha küçük dairesel yörüngelere doğru evrilmesine neden olur. Yörünge açısal hızının değişim hızı $\frac{d\Omega}{dt}$ 'nin

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

biçimini aldığını elde edin; burada M_c , civıltı kütlesi olarak adlandırılır. M_c 'yi M ve μ 'nün fonksiyonu olarak elde edin. Bu kütle, yörünge daralması sırasında frekanstaki artışı belirler. ["Civıltı" adı, küçük kuşların çıkardığı tiz sestten (artan frekans) esinlenilmiştir.]

B.4 2.0 puan

Yukarıda verilen bilgileri kullanarak yörünge açısal hızı Ω ile GW frekansı f_{GW} arasındaki ilişkiyi kurun. Herhangi bir düzgün $F(t)$ fonksiyonu ve $a \neq 1$ için,

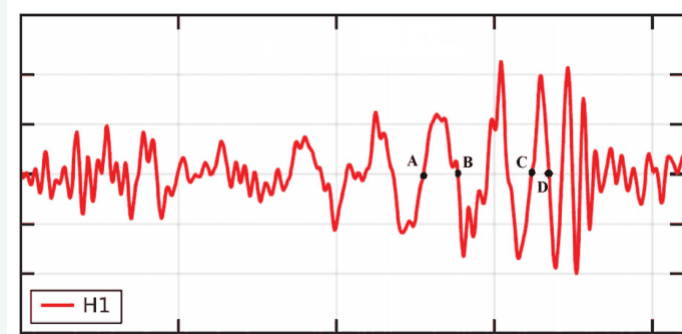
$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

olduğunu kullanarak (burada χ bir sabit, t_0 ise bir integrasyon sabitidir), (10)'dan GW frekansı için

$$f_{GW}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

ifadesinin çıktığını gösterin ve p sabitini belirleyin.

14 Eylül 2015'te GW150914, her biri 4 km uzunluğunda, L biçiminde yerleştirilmiş iki koldan oluşan LIGO dedektörleri tarafından kaydedildi. Bu kolların bağıl uzunlukları Şekil 1'deki gibi değişti. Dedektörün kolları, içlerinden geçen kütleçekim dalgasına doğrusal olarak tepki verir ve bu tepkinin biçimi dalganın biçimini yansıtır. Bu dalga, yaklaşık dairesel yörüngelerde dolanan iki kara delik tarafından oluşturulmuştur; kütleçekim ışıması yoluyla enerji kaybı, yörünge daralmasına ve sonunda kara deliklerin çarpışmasına neden olmuştur. Çarpışma anı, yaklaşık olarak Şekil 1'de D noktasından sonraki sinyal tepesine karşılık gelir.



Şekil 1. LIGO H1 dedektöründeki gerinim, yani her bir kolun boyutundaki bağıl değişim. Yatay eksen zamandır ve A, B, C, D noktaları sırasıyla $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ saniyeye karşılık gelir.

B.5 1.0 puan

Şekilden yararlanarak aşağıdaki anlardaki $f_{GW}(t)$ 'yi tahmin edin:

$$t_{AB} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{ve} \quad t_{CD} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

(12)'nin çarpışmaya kadar geçerli olduğunu (bu, tam olarak doğru değildir) ve iki cismin eşit kütleli olduğunu varsayarak civıltı kütlesini, M_c , ve sistemin toplam kütlesini Güneş kütlesi $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg cinsinden tahmin edin.

B.6 1.0 puan

t_{CD} anında iki cisim arasındaki en küçük yörünge uzaklığını tahmin edin. Buradan her bir cismin en büyük boyutunu, $R_{\max}$, tahmin edin. Bu boyutu Güneş'imizin yarıçapı $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km ile karşılaştırmak için $R_\odot/R_{\max}$ oranını elde edin. Aynı andaki yörüngesel çizgisel hızlarını, v_{col} , da

tahmin ederek ışık hızıyla karşılaştırın: v_{col}/c .

Bunların gerçekten de son derece hızlı hareket eden, son derece kompakt cisimler olduğu sonucuna varın!

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A.1:** $n = 3$, $\alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}$.
- **A.2:** $A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2}\mu\Omega^2 L^2$.
- **A.3:** $\beta = -\frac{1}{2}$.
- **B.1:** Kütleler $t = 0$ anında x ekseninde bulunuyor ve yörünge hareketi saat yönünün tersine gerçekleşiyorsa,

$$k = 2\Omega, \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 0).$$

Ayrıca, $c_{12} = c_{21} = 1$; köşegen dışındaki diğer tüm c_{ij} katsayıları sıfırdır.

- **B.2:** $\xi = \frac{32}{5} = 6.4$, $\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6$.
- **B.3:** $M_c = \mu^{3/5} M^{2/5}$ olup

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

- **B.4:** $f_{\text{GW}} = \frac{\Omega}{\pi}$, $p = 1$ ve

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t).$$

- **B.5:** $f_{\text{GW}}(0.0045 \text{ s}) \simeq 56 \text{ Hz}$, $f_{\text{GW}}(0.037 \text{ s}) \simeq 83 \text{ Hz}$; $M_c \simeq 30M_\odot$, $M \simeq 69M_\odot$.
- **B.6:** $L_{\text{min}} \simeq 5.1 \times 10^2 \text{ km}$, $R_{\text{max}} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}$, $R_\odot/R_{\text{max}} \simeq 2.7 \times 10^3$. Her bir cismin yörünge sürati $v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}$ olduğundan $v_{\text{col}}/c \simeq 0.22$ olur.

Çözüm

A.1

Newton'un evrensel kütleçekim yasası, birinci yıldızın ivmesini verir:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -GM_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Kütle merkezi koşulundan

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1.$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = - \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}.$$

(2) ile karşılaştırıldığında şu sonuç bulunur:

$$n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

A.2

Kütle merkezi koşulu ve $L = r_1 + r_2$ bağıntısı şu sonucu verir:

$$r_1 = \frac{M_2}{M} L, \quad r_2 = \frac{M_1}{M} L.$$

Yıldızların yörünge süratleri $v_1 = \Omega r_1$ ve $v_2 = \Omega r_2$ 'dir. Dolayısıyla toplam kinetik enerjileri

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 \Omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \Omega^2 r_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 L^2 \left(\frac{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2}{M^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2. \end{aligned}$$

olur. Sonsuz uzaklıkta sıfır alınan kütleçekim potansiyel enerjisi ise

$$U = - \frac{GM_1 M_2}{L} = - \frac{GM\mu}{L}.$$

şeklinde. Dolayısıyla A terimi kinetik enerjidir:

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2.$$

A.3

Birinci yıldız için merkezci kuvveti kütleçekimi sağlar:

$$M_1 \Omega^2 r_1 = \frac{GM_1 M_2}{L^2}.$$

$r_1 = M_2 L / M$ kullanılarak dairesel yörünge bağıntısı elde edilir:

$$\Omega^2 = \frac{GM}{L^3}.$$

Böylece

$$T = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2 = \frac{GM\mu}{2L},$$

ve

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = - \frac{GM\mu}{2L}.$$

Dolayısıyla,

$$\beta = - \frac{1}{2}.$$

B.1

Zamanın başlangıcını, birinci kütle $t = 0$ anında pozitif x ekseninde bulunacak ve saat yönünün tersine hareket edecek şekilde seçelim. O hâlde

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t), \\ (x_2, y_2) &= (-r_2 \cos \Omega t, -r_2 \sin \Omega t).\end{aligned}$$

A.2'den,

$$M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2.$$

Dört kutup bileşenlerinde yerine koyulduğunda

$$Q_{11} = \frac{\mu L^2}{3} (2 \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Omega t \right),$$

$$Q_{22} = \frac{\mu L^2}{3} (2 \sin^2 \Omega t - \cos^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right),$$

$$Q_{33} = -\frac{\mu L^2}{3} = \frac{\mu L^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \mu L^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{\mu L^2}{2} \sin 2\Omega t.$$

elde edilir. Böylece

$$\boxed{k = 2\Omega}.$$

Köşegen katsayıları şöyledir:

i	a_i	b_i
1	1/3	1
2	1/3	-1
3	-2/3	0

Köşegen dışı katsayılar ise şöyledir:

$$\boxed{c_{12} = c_{21} = 1, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0}.$$

B.2

$q = \mu L^2/2$ ve $k = 2\Omega$ yazalım. Dairesel yörünge için sıfırdan farklı üçüncü türevler şunlardır:

$$\ddot{Q}_{11} = qk^3 \sin kt,$$

$$\ddot{Q}_{22} = -qk^3 \sin kt,$$

$$\ddot{Q}_{12} = \ddot{Q}_{21} = -qk^3 \cos kt.$$

Köşegen dışındaki her iki eleman da çift toplama katkıda bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} (\ddot{Q}_{ij})^2 &= 2q^2 k^6 \sin^2 kt + 2q^2 k^6 \cos^2 kt \\ &= 2q^2 k^6 \\ &= 2 \left(\frac{\mu L^2}{2} \right)^2 (2\Omega)^6 \\ &= 32\mu^2 L^4 \Omega^6.\end{aligned}$$

Buna göre ışınlım gücü

$$\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6, \quad \xi = \frac{32}{5} = 6.4.$$

olur. Sonuç, yörünge fazından bağımsızdır.

B.3

İçer doğru sarmal hareketi, yavaşça değişen dairesel yörüngeler dizisi olarak yaklaşıyoruz. Kütleler sabit kalır ve dalgaların taşıyarak uzaklaştırdığı enerji

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}.$$

bağıntısına uyar. Dairesel yörünge bağıntısıyla L 'yi eleterek,

$$L = (GM)^{1/3} \Omega^{-2/3},$$

şu ifadeyi elde ederiz:

$$E = -\frac{1}{2} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{2/3}.$$

Bunun zamana göre türevi

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{-1/3} \frac{d\Omega}{dt}.$$

olur. Ω cinsinden ifade edilen ışınlım gücü ise

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 (GM)^{4/3} \Omega^{10/3}.$$

şeklinde. Enerjinin değişim hızını $-\mathcal{P}$ 'ye eşitleyince

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

elde edilir. Küpünü alırsak,

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2.$$

Bu ifade,

$$M_c^5 = \mu^3 M^2.$$

olduğunda istenen biçimdedir. Dolayısıyla

$$M_c = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}.$$

Özellikle, $d\Omega/dt > 0$ olur: sistem enerji kaybettikçe yörüngesi daralır ve yörünge frekansı artar.

B.4

Yörünge frekansı $f_{\text{orb}} = \Omega/(2\pi)$ 'dir. GW frekansı ile yörünge frekansı arasında verilen iki kat ilişkisi dolayısıyla

$$f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{\Omega}{\pi}.$$

elde edilir. (10)'un pozitif küp kökünü alırsak,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

$\Omega = \pi f_{\text{GW}}$ ile bu ifade

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = 3\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3}.$$

biçimini alır. (11)'i $a = 11/3$ ile kullanarak veya doğrudan $f_{\text{GW}}^{-8/3}$ 'ün türevini alarak

$$\frac{d}{dt} (f_{\text{GW}}^{-8/3}) = -8\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3}.$$

elde edilir. İntegrasyon sonucunda

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_0 - t).$$

bulunur. Üsler (12) ile karşılaştırıldığında,

$$\frac{2}{3} + p = \frac{5}{3}, \quad 2 - p = 1,$$

dolayısıyla

$$p = 1.$$

Burada t_0 , bu yaklaşık içe sarmal hareket modelinin frekansın ıraksayacağını öngördüğü biçimsel zamandır.

B.5

A ve B, bir pozitif tepenin iki yanındaki ardışık sıfır geçişlerini işaretler; C ve D de daha sonraki bir tepe için aynı işlevi görür. Dolayısıyla her aralık, yaklaşık olarak bir GW çevriminin yarısını kapsar.

Her kısa aralıktaki frekansı, aralığın orta noktasındaki değeriyle yaklaşıtırsak,

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{AB}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{B}} - t_{\text{A}})} = \frac{1}{2(0.009 \text{ s})} \simeq 55.6 \text{ Hz},$$

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{CD}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{D}} - t_{\text{C}})} = \frac{1}{2(0.006 \text{ s})} \simeq 83.3 \text{ Hz}.$$

Karşılık gelen zamanlar

$$t_{\overline{\text{AB}}} = 0.0045 \text{ s}, \quad t_{\overline{\text{CD}}} = 0.037 \text{ s},$$

olduğundan aralarındaki fark 0.0325 s'dir.

Bu frekans tahminlerini f_{AB} ve f_{CD} ile gösterelim. B.4 bağıntısının bu iki zamandaki değerlerini birbirinden çıkarmak t_0 'ı eler:

$$f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}}).$$

Cıvıltı kütlesi için çözersek,

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left[\frac{f_{AB}^{-8/3} - f_{CD}^{-8/3}}{8\pi^{8/3}\xi (t_{CD} - t_{AB})} \right]^{3/5}.$$

Verilen sabitleri ve $\xi = 6.4$ değerini kullanarak,

$$M_c \simeq 6.02 \times 10^{31} \text{ kg},$$

veya uygun hassasiyetle,

$$\boxed{M_c \simeq 30M_\odot}.$$

elde edilir. Bileşen kütleleri eşitse $M_1 = M_2 = M/2$ olur; dolayısıyla

$$\mu = \frac{M}{4}, \quad M_c = \left(\frac{M}{4} \right)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Böylece

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 1.38 \times 10^{32} \text{ kg},$$

ve

$$\boxed{M \simeq 69M_\odot}.$$

Dolayısıyla her bir bileşenin kütlesi yaklaşık $35M_\odot$ 'tir.

B.6

Ölçüm yapılan daha sonraki anda,

$$\Omega_{CD} = \pi f_{CD} \simeq 2.62 \times 10^2 \text{ rad/s}.$$

Dairesel yörünge bağıntısı şu sonucu verir:

$$L = \left(\frac{GM}{\Omega_{CD}^2} \right)^{1/3}.$$

Eşit kütle seçimi, çıkarılan cıvıltı kütlesi ve frekansla uyumlu en küçük toplam kütle, dolayısıyla en küçük uzaklığı da verir. Nitekim,

$$\frac{\mu}{M} = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

dolayısıyla

$$M_c = M \left(\frac{\mu}{M} \right)^{3/5} \leq \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Eşitlik, kütleler eşit olduğunda sağlanır. B.5'te bulunan kütle, kullanarak,

$$L_{\min} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.383 \times 10^{32})}{(2.618 \times 10^2)^2} \right]^{1/3} \text{ m},$$

buradan

$$\boxed{L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^5 \text{ m} = 5.1 \times 10^2 \text{ km}}.$$

elde edilir. Eşit kütleli cisimlerin yarıçaplarını aynı alırsak, birbirinden ayrı kalmaları yaklaşık olarak $2R \lesssim L$ koşulunu gerektirir. Böylece

$$R_{\max} \simeq \frac{L_{\min}}{2} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}.$$

Güneş ile karşılaştırma

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq \frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{2.56 \times 10^2 \text{ km}},$$

şeklinde; dolayısıyla

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq 2.7 \times 10^3.$$

Her bir cisim, kütle merkezinin çevresinde $L/2$ yarıçaplı bir yörüngede dolandır. Dolayısıyla bu andaki yörünge sürati

$$v_{\text{col}} = \Omega_{\text{CD}} \frac{L}{2} \simeq (2.618 \times 10^2)(2.562 \times 10^5) \text{ m/s},$$

olup buradan

$$v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}, \quad \frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq 0.22.$$

elde edilir. Böylece her bir cisim, yaklaşık 260 km'yi aşmayan bir yarıçap içinde kabaca 35 Güneş kütlesi barındırırken ışık hızının yaklaşık beşte biriyle hareket etmektedir. Bunlar son derece kompakt ve hızlı hareket eden cisimlerdir. Sayısal tahminlerde, öngörüldüğü üzere Newton mekaniğindeki dairesel yörünge ve dört kutup yaklaşımları kullanılmıştır; bu yaklaşımların doğruluğu birleşmeye yakın azalır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Nötrino nerede?

Büyük Hadron Çarpıştırıcısı'nda (LHC) iki proton çok yüksek bir enerjiyle çarpıştığında, bu çarpışma sonucunda elektronlar, müonlar, nötrinolar, kuarklar ve bunların karşı parçacıkları gibi çeşitli parçacıklar üretilebilir. Bu parçacıkların çoğu, çarpışma noktasını çevreleyen parçacık dedektörü tarafından algılanabilir. Örneğin kuarklar, *hadronlaşma* adı verilen bir süreç geçirerek "jet" olarak adlandırılan bir atomaltı parçacık sağanağına dönüşür. Ayrıca dedektörlerde bulunan yüksek manyetik alan, çok yüksek enerjili yüklü parçacıkların bile momentumlarının belirlenmesine yetecek kadar sapmasını sağlar. ATLAS dedektörü, dedektörün çarpışma noktasını çevreleyen iç kısmında sabit ve düzgün bir 2.00 Tesla manyetik alan üreten süperiletken bir solenoid sistemi kullanır. Momentumları belirli bir değerin altında olan yüklü parçacıkların yörüngeleri o kadar güçlü biçimde bükülür ki bu parçacıklar alan içinde tekrar tekrar dolandır ve büyük olasılıkla ölçülemez. Nötrino ise doğası gereği dedektörle etkileşmeden içinden geçip kaçtığı için hiç algılanmaz.

Veriler: Elektronun durgun kütlesi, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; Temel yük, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$;

Işık hızı, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; Boşluğun elektriksel geçirgenliği, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Bölüm A. ATLAS dedektörünün fiziği (4.0 puan)

A.1 — 0.5 puan

Hızına dik bir manyetik kuvvetin etkisindeki bir elektronun dairesel yörüngesinin siklotron yarıçapı r için bir ifade türetin ve bu yarıçapı kinetik enerjisi K , yükünün büyüklüğü e , kütlesi m ve manyetik alan B cinsinden ifade edin. Elektronun göreceli olmayan klasik bir parçacık olduğunu varsayın.

ATLAS dedektörü içinde üretilen elektronlar göreceli olarak ele alınmalıdır. Bununla birlikte, göreceli momentum kullanıldığında siklotron yarıçapı formülü göreceli hareket için de geçerlidir.

A.2 — 0.5 puan

Bir elektronun dedektörün iç kısmından radyal yönde çıkmasını sağlayan en küçük momentum değerini hesaplayın. Dedektörün iç kısmı, yarıçapı 1.1 metre olan silindir biçimindedir ve elektron, silindirin tam merkezindeki çarpışma noktasında üretilir. Cevabınızı MeV/c cinsinden ifade edin.

Yükü e ve durgun kütlesi m olan göreceli parçacıklar, hızlarına dik yönde ivmelendirildiklerinde sinkrotron ışınımı adı verilen elektromanyetik ışınım yayar. Yayılan güç şu şekilde verilir:

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Burada a ivmedir ve $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

A.3 — 1.0 puan

Hızı ışık hızına çok yakın olan bir parçacığa aşırı göreceli parçacık denir. Aşırı göreceli bir parçacığın yaydığı güç şu şekilde ifade edilebilir:

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

Burada ξ bir gerçekte sayı, n , k tam sayılar, E yüklü parçacığın enerjisi ve B manyetik alandır. ξ , n ve k değerlerini bulun.

A.4 — 1.0 puan

Aşırı göreceli limitte elektronun enerjisinin zamana bağıllığı şöyledir:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

Burada E_0 , elektronun başlangıç enerjisidir. α 'yı e , c , B , ϵ_0 ve m cinsinden bulun.

A.5 — 0.5 puan

Çarpışma noktasında radyal yönde 100 GeV enerjiyle üretilen bir elektronu ele alın. Elektron dedektörün iç kısmından çıkana kadar sinkrotron ışınımı nedeniyle kaybettiği enerji miktarını tahmin edin. Cevabınızı MeV cinsinden ifade edin.

A.6 — 0.5 puan

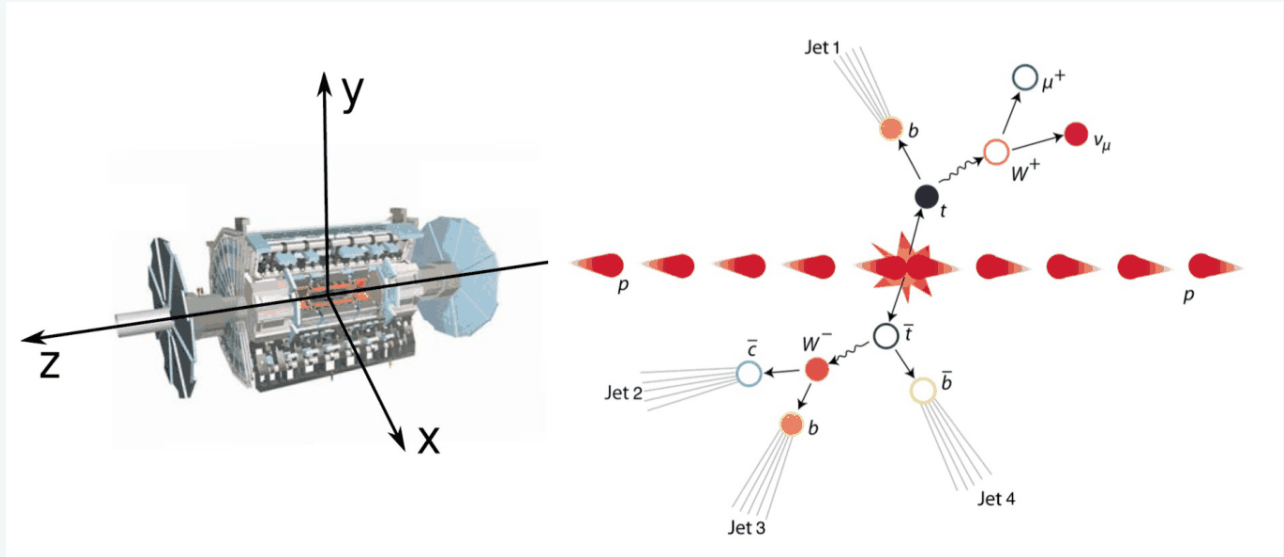
Aşırı göreceli limitte elektronun siklotron frekansının zamana bağlı ifadesini bulun.

Bölüm B. Nötrinoyu bulmak (6.0 puan)

Şekil 1'de gösterilen iki protonun çarpışması, şimdiye kadar algılanmış en ağır temel parçacıklar olan bir üst kuarkın (t) ve bir karşı üst kuarkın ($\bar{t}$) üretilmesine yol açar. Üst kuark bir W^+ bozonuna ve bir alt kuarka (b) bozunurken, karşı üst kuark bir W^- bozonuna ve bir karşı alt kuarka ($\bar{b}$) bozunur. Şekil 1'de gösterilen durumda W^+ bozonu bir karşı müona (μ^+) ve bir nötrinoya (ν), W^- bozonu ise bir kuarka ve bir karşı kuarka bozunur. Bu sorudaki görev, algılanan bazı parçacıkların momentumlarını kullanarak nötrino momentumunu tüm bileşenleriyle yeniden belirlemektir. **Basitlik açısından, bu sorudaki tüm parçacıklar ve jetler, üst kuark ve $W^\pm$ bozonları dışında kütsüz kabul edilecektir.**

Üst kuarkın bozunma ürünlerinin momentumları, nötrino (z ekseni) doğrultusundaki momentum bileşeni dışında deneyden belirlenebilir (tabloya bakınız). Dedektörün yakaladığı son durum parçacıklarının toplam doğrusal momentumu yalnızca enine düzlemde (xy düzlemi) sıfırdır; çarpışma doğrultusunda (z ekseni) sıfır değildir. Dolayısıyla nötrino momentumu, enine düzlemdeki eksik momentumdan bulunabilir.

4 Haziran 2015 tarihinde LHC'deki ATLAS deneyi, GMT+1 saat dilimine göre 00:21:24'te Şekil 1'de gösterilene benzer bir proton-proton çarpışması kaydetti.



Şekil 1. ATLAS dedektörünün koordinat sisteminin (solda) ve proton-proton çarpışmasının (sağda) şematik gösterimi.

Üst kuarkın bozunmasından gelen, nötrino dâhil üç son durum parçacığının doğrusal momentumları aşağıda her bir bileşen için verilmiştir.

Parçacık	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
karşı müon (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
jet 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
nötrino (ν)	-104.1	+5.3	---

B.1 — 1.5 puan

W^+ bozonunun kütlesinin karesini, m_W^2 , yukarıdaki tabloda verilen nötrino ve karşı müon momentum bileşenleriyle ilişkilendiren bir denklem bulun. Cevabınızı nötrino ve karşı müonun enine momentumları

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)}\hat{i} + p_y^{(\nu)}\hat{j} \quad \text{ve} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)}\hat{i} + p_y^{(\mu)}\hat{j},$$

ve z eksenini doğrultusundaki momentum bileşenleri $p_z^{(\mu)}$ ve $p_z^{(\nu)}$ cinsinden ifade edin.

B.2 — 1.5 puan

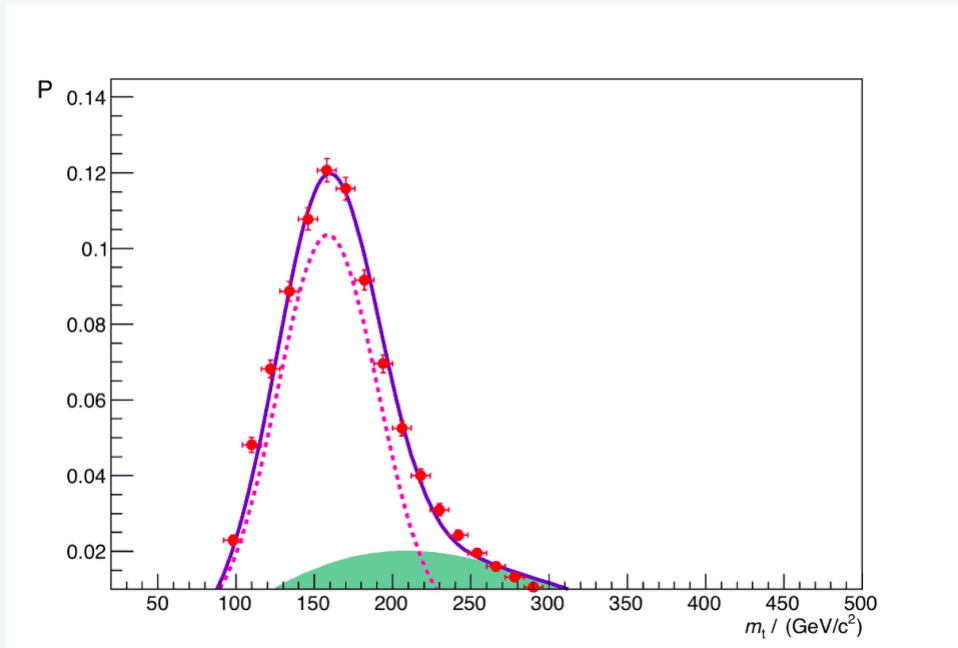
W^+ bozonunun kütlesini $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ kabul ederek nötrinin z eksenini doğrultusundaki momentumu $p_z^{(\nu)}$ için iki olası çözümü hesaplayın. Cevabınızı GeV/c cinsinden ifade edin.

B.3 — 1.0 puan

Önceki iki çözümün her biri için üst kuarkın kütlesini hesaplayın. Cevabınızı GeV/c^2 cinsinden ifade edin.

[B.2'de iki çözümü elde edemediyse $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ ve $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$ değerlerini kullanın.]

Üst kuarkın kütlesinin ölçümüne ilişkin normalize edilmiş çarpışma olayı sayısı (deneyden belirlendiği şekliyle) iki bileşenden oluşur: "sinyal" (üst kuarkların bozunmasına karşılık gelir) ve "arka plan" (üst kuark içermeyen diğer süreçlerden kaynaklanan olaylara karşılık gelir). Deneysel veriler her iki süreci de içerir; Şekil 2'ye bakınız.



Şekil 2. Deneyden belirlenen üst kuark kütle dağılımı, yani üst kuark kütlesine karşı çizilen normalize edilmiş olay sayısı. Noktalar verilere karşılık gelir. Kesikli çizgi "sinyale", gölgeli bölge ise "arka plana" karşılık gelir.

B.4 — 1.0 puan

Üst kuark kütle dağılımına göre önceki iki çözümün hangisinin doğru olma olasılığı daha yüksektir? Daha olası çözümün olasılığını tahmin edin.

B.5 — 1.0 puan

Daha olası çözümü kullanarak üst kuarkın bozunmadan önce aldığı yolu hesaplayın. Üst kuarkın durgun hâldeki ortalama ömrünün 5×10^{-25} s olduğunu varsayın.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada $p_T^{(a)} = |\vec{p}_T^{(a)}|$.

- **A.1:** $r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}$.
- **A.2:** $p_{\min} = \frac{eBR}{2} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c$.
- **A.3:** $\xi = \frac{1}{6\pi}$, $n = 5$, $k = 4$.
- **A.4:** $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}$.
- **A.5:** $\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}$.
- **A.6:** Anlık frekans

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0} (1 + \alpha E_0 t).$$

Açısal frekans $\omega(t) = 2\pi f(t)$ olur.

- **B.1:**

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

- **B.2:** $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ veya $-188 \text{ GeV}/c$.
- **B.3:** Sırasıyla, $m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2$ veya $311 \text{ GeV}/c^2$.
- **B.4:** $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ çözümü daha olasıdır. Bu çözümün yeniden belirlenen kütesine karşılık gelen grafikteki olasılık yaklaşık $P \simeq 0.12$, yani 12%'dir.
- **B.5:** Ortalama yol $\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}$ olur.

Çözüm

A.1

Manyetik alana dik hareket için manyetik Lorentz kuvveti merkezci kuvveti sağlar:

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

Böylece $r = mv/(eB)$ olur. Göreli olmayan kinetik enerji $K = \frac{1}{2}mv^2$ kullanılırsa,

$$r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}.$$

Eşdeğer olarak, $r = p/(eB)$ yazılır; bu bağıntı, p görel momentum olduğunda görel durumda da geçerlidir.

A.2

Dedektörün yarıçapı $R = 1.1$ m olsun. Elektronun dairesel yörüngesi çarpışma noktasından geçtiğinden, yörüngesinin merkezi bu noktadan r uzaklıktadır. Dolayısıyla çarpışma noktasına olan en büyük radyal uzaklığı $2r$ 'dir.

Sınır durumdaki yörünge, şu koşulda silindirik sınıra teğet olur:

$$2r = R.$$

En küçük toplam momentum, solenoid alanına dik hareket için elde edilir. Dolayısıyla çıkış eşiği

$$p_{\min} = eB \frac{R}{2} = (1.60 \times 10^{-19})(2.00) \frac{1.1}{2} = 1.76 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Şu dönüşüm kullanılarak

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{10^6(1.60 \times 10^{-19})}{3.00 \times 10^8} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1},$$

şu sonuç elde edilir:

$$p_{\min} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c.$$

Bu eşiğin hemen üzerinde yörünge silindirik sınırı geçer.

A.3

Hıza dik ivme için görel enine hareket denklemi

$$evB = \gamma ma,$$

olduğundan, yörüngenin eğriliğine bağlı ivme

$$a = \frac{evB}{\gamma m}.$$

Verilen ışınım formülünde yerine konulursa

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{\gamma^2 m^2} \gamma^4 = \frac{e^4 B^2 v^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

Aşırı görel limitte $v \simeq c$ olur; toplam enerji ise $E = \gamma mc^2$ 'dir. Dolayısıyla,

$$P \simeq \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \frac{e^4 E^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

İstenen biçimle karşılaştırıldığında

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$$

A.4

Manyetik kuvvet iş yapmadığından, elektronun enerjisi yayılan enerji kadar azalır:

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\alpha E^2,$$

Burada A.3'ten,

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

$E(0) = E_0$ koşuluyla integral alınırsa,

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^2} = -\alpha \int_0^t dt,$$

buradan

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \alpha t.$$

Sonuç olarak,

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

soruda verilen ifade elde edilir.

A.5

Önce yörüngenin eğriliğini kontrol edelim. Aşırı görel bir elektron için $p \simeq E/c$ olduğundan, başlangıçtaki siklotron yarıçapı

$$r_0 \simeq \frac{E_0}{eBc}.$$

Burada

$$E_0 = 100 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-8} \text{ J},$$

ve dolayısıyla

$$r_0 = \frac{1.60 \times 10^{-8}}{(1.60 \times 10^{-19})(2.00)(3.00 \times 10^8)} = 1.67 \times 10^2 \text{ m}.$$

$r_0 \gg R = 1.1 \text{ m}$ olduğundan dedektör içindeki yol neredeyse doğrusaldır. Böylece

$$t_{\text{exit}} \simeq \frac{R}{c} = \frac{1.1}{3.00 \times 10^8} = 3.67 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

Verilen sabitler kullanılarak,

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} = 9.39 \times 10^{12} \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

ve

$$\alpha E_0 t_{\text{exit}} = 5.51 \times 10^{-4}.$$

Kaybedilen enerji

$$\Delta E = E_0 - \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}} = \frac{\alpha E_0^2 t_{\text{exit}}}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}}.$$

Sayısal olarak,

$$\Delta E = 8.81 \times 10^{-12} \text{ J} = 55.1 \text{ MeV}.$$

Dolayısıyla uygun bir hassasiyetle,

$$\boxed{\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}}.$$

Bu, başlangıç enerjisinin yalnızca yaklaşık 5.5×10^{-4} 'ü kadardır ve yarıçapın hareket boyunca çok büyük kaldığını doğrular.

A.6

Momentumun anlık açısal dönme hızı

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

$E = \gamma mc^2$ kullanılarak,

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E(t)}.$$

A.4'ün sonucu yerine konulursa,

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

Dolayısıyla saniyedeki devir sayısı olarak ölçülen frekans

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

Her ikisi de aşırı görelî yaklaşım çerçevesinde zamanla doğrusal olarak artar.

B.1

$W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ bozunmasında dört-momentumun korunumu şu sonucu verir:

$$E_W = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}_W = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}.$$

İki parçacıklı sistemin değişmez kütlesi şu bağıntıyı sağlar:

$$m_W^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2 - c^2 |\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}|^2.$$

Her iki bozunma ürünü de kütesiz kabul edildiğinden,

$$E_\mu = c|\vec{p}^{(\mu)}|, \quad E_\nu = c|\vec{p}^{(\nu)}|.$$

Değişmez ifade açıldığında tek tek parçacıklara ait enerji-momentum terimleri birbirini götürür:

$$m_W^2 c^4 = 2 \left(E_\mu E_\nu - c^2 \vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} \right).$$

Şimdi

$$|\vec{p}^{(a)}| = \sqrt{(p_T^{(a)})^2 + (p_z^{(a)})^2},$$

ve

$$\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} = \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} + p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

Böylece istenen bağıntı

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2 \right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2 \right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

B.2

Şu tanımları yapalım:

$$q = p_z^{(\nu)}, \quad \ell = p_z^{(\mu)}, \quad a = (p_T^{(\mu)})^2, \quad b = (p_T^{(\nu)})^2,$$

ve

$$p_\mu = |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad D = \frac{m_W^2 c^2}{2} + \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)}.$$

B.1'deki denklem şu hâle gelir:

$$p_\mu \sqrt{b + q^2} = D + \ell q.$$

Karesi alınıp $p_\mu^2 - \ell^2 = a$ kullanılırsa,

$$aq^2 - 2D\ell q + p_\mu^2 b - D^2 = 0.$$

Bu denklemin kökleri

$$q = \frac{D\ell \pm p_\mu \sqrt{D^2 - ab}}{a}.$$

Ölçülen bileşenlerden

$$\begin{aligned} a &= 24.7^2 + 24.9^2 = 1230.1 \text{ (GeV/c)}^2, \\ b &= 104.1^2 + 5.3^2 = 10864.9 \text{ (GeV/c)}^2, \\ p_\mu &= \sqrt{24.7^2 + 24.9^2 + 12.4^2} = 37.2003 \text{ GeV/c}, \\ \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} &= (-24.7)(-104.1) + (-24.9)(5.3) \\ &= 2439.3 \text{ (GeV/c)}^2, \\ D &= \frac{80.4^2}{2} + 2439.3 = 5671.38 \text{ (GeV/c)}^2. \end{aligned}$$

Böylece iki sayısal kök

$$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}, \quad q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}.$$

Her ikisi de karesi alınmamış başlangıç denklemini sağlar. Dolayısıyla,

$$\boxed{p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV/c} \quad \text{veya} \quad -188 \text{ GeV/c}}.$$

B.3

Üst kuark karşı müona, nötrinoya ve alt kuark jetine bozunur. Enerji ve momentumun korunumu şu sonucu verir:

$$E_t = E_\mu + E_\nu + E_{j_1}, \quad \vec{p}_t = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)}.$$

Üç bozunma ürünü de kütsesiz kabul edildiğinden,

$$E_t = c \left(|\vec{p}^{(\mu)}| + |\vec{p}^{(\nu)}| + |\vec{p}^{(j_1)}| \right).$$

Jet momentumunun büyüklüğü

$$|\vec{p}^{(j_1)}| = \sqrt{(-14.2)^2 + 50.1^2 + 94.1^2} = 107.5475 \text{ GeV/c}.$$

q , GeV/c cinsinden sayısal değeriyle yazılırsa,

$$E_t = \left[37.2003 + 107.5475 + \sqrt{10864.9 + q^2} \right] \text{ GeV},$$

ve

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 81.7 + q) \text{ GeV}/c.$$

Üst kuarkın yeniden belirlenen kütlesi şu bağıntıdan elde edilir:

$$m_t^2 c^4 = E_t^2 - c^2 |\vec{p}_t|^2.$$

Hesaplama sırasında ek basamaklar korunduğunda şu değerler elde edilir:

Nötrino çözümü	E_ν (GeV)	E_t (GeV)	p_{tz} (GeV/c)	m_t (GeV/c ²)
$q_+ = 73.9532 \text{ GeV}/c$	127.804	272.552	155.653	169.344
$q_- = -188.2937 \text{ GeV}/c$	215.219	359.967	-106.594	311.183

Dolayısıyla,

$$\boxed{m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{şu koşulda } p_z^{(\nu)} > 0,}$$

$$\boxed{m_t \simeq 311 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{şu koşulda } p_z^{(\nu)} < 0.}$$

B.4

169 GeV/c² kütlesi Şekil 2'deki dağılımın maksimumuna yakinken, 311 GeV/c² kütlesi dağılımın yüksek kütle tarafındaki küçük kuyruğunda yer alır. Dolayısıyla $p_z^{(\nu)}$ değeri pozitif olan çözüm daha olasıdır.

Grafikte çizilen toplam dağılım eğrisinin 169 GeV/c² yakınındaki ordinatı okunursa

$$\boxed{P \simeq 0.12 \quad \text{veya yaklaşık } 12\%}.$$

Buna karşılık gelen, yeniden belirlenmiş nötrino momentumu

$$\boxed{\vec{p}^{(\nu)} \simeq (-104.1, +5.3, +74.0) \text{ GeV}/c}.$$

B.5

Daha olası çözüm için,

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 155.653) \text{ GeV}/c,$$

dolayısıyla

$$|\vec{p}_t| = 213.558 \text{ GeV}/c.$$

Üst kuarkın Lorentz çarpanı ve hızı

$$\gamma_t = \frac{E_t}{m_t c^2} = \frac{272.552}{169.344} = 1.609,$$

$$\beta_t = \frac{|\vec{p}_t| c}{E_t} = \frac{213.558}{272.552} = 0.7836.$$

Dedektörün referans sistemindeki ortalama ömür $\gamma_t \tau_0$ 'dır. Dolayısıyla alınan ortalama yol

$$\bar{L} = v_t \gamma_t \tau_0 = \beta_t \gamma_t c \tau_0 = \frac{|\vec{p}_t| c}{m_t c^2} c \tau_0.$$

Değerler yerine konulursa

$$\bar{L} = \frac{213.558}{169.344}(3.00 \times 10^8)(5 \times 10^{-25}) = 1.89 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

Dolayısıyla,

$$\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

Verilen durgun referans sistemi ömrü ortalama ömür olduğundan, bu da ortalama bir yoldur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Canlı Sistemlerin Fiziği

Veriler: Normal atmosfer basıncı, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Bölüm A. Kan akışının fiziği (4.5 puan)

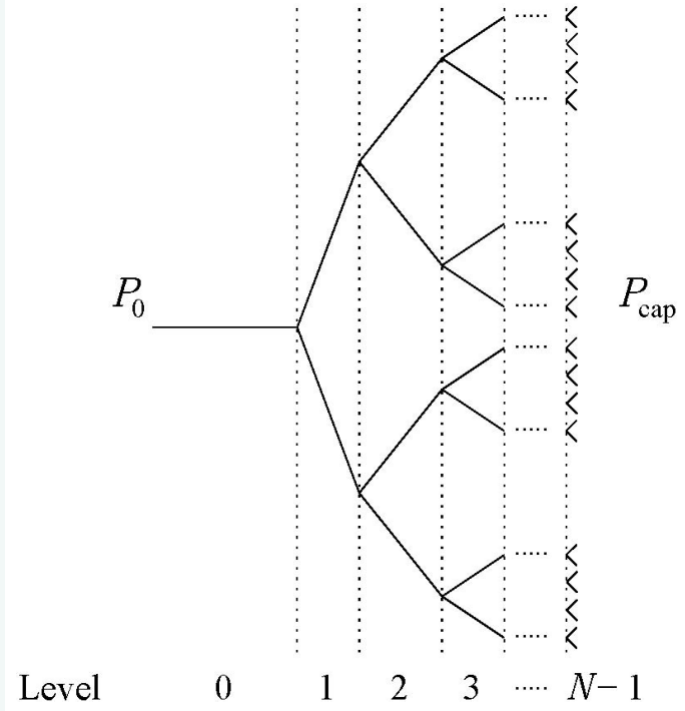
Bu bölümde, damarlardaki kan akışına ilişkin iki basitleştirilmiş modeli inceleyeceksiniz.

Kan damarları yaklaşık olarak silindir biçimindedir. Sıkıştırılamaz bir akışkanın rijit bir silindir içindeki kararlı ve türbülanssız akışı için, silindirin iki ucundaki akışkan basınçları arasındaki farkın aşağıdaki bağıntıyla verildiği bilinmektedir:

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

Burada ℓ ve r silindirin uzunluğu ve yarıçapı, η akışkanın viskozitesi ve Q hacimsel debidir; yani birim zamanda silindirin en kesitinden geçen akışkan hacmidir. Bu ifade, akışın atımlı olması, damarın sıkıştırılabilirliği ve düzensiz biçimi ile kanın basit bir akışkan değil, hücreler ve plazmadan oluşan bir karışım olması hesaba katılmadan bile, bir damardaki basınç farkının büyüklük mertebesini çoğu zaman doğru verebilir. Ayrıca bu ifade, hacimsel debi akım, basınç farkı gerilim ve $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ çarpanı direnç olarak yorumlandığında, Ohm yasasıyla aynı biçimdedir.

Örneğin, bir dokunun kılcal damar yatağına kan taşıyan ve Şekil 1'de gösterilen simetrik arteriyol (küçük atardamar) ağını ele alın. Bu ağda, her çatallanma noktasında bir damar iki özdeş damara ayrılır. Ancak daha yüksek düzeylerdeki damarlar daha ince ve daha kısadır: ardışık iki düzeydeki, i ve $i + 1$, damarların yarıçap ve uzunluklarının $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ ve $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$ bağıntılarıyla ilişkili olduğunu kabul edin.



Şekil 1. Arteriyol ağı.

A.1 (1.3 puan)

Herhangi bir i düzeyindeki bir damarın hacimsel debisi Q_i için; toplam düzey sayısı N , viskozite η , ilk damarın yarıçapı r_0 ve uzunluğu ℓ_0 ile 0. düzeydeki arteriyolün basıncı P_0 ve kılcal damar yatağının basıncı P_{cap} arasındaki $\Delta P = P_0 - P_{cap}$ farkının fonksiyonu olan bir ifade elde edin.

A.2 (0.5 puan)

Yarıçapı $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ ve uzunluğu $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ olan 0. düzeydeki arteriyolün hacimsel debisi Q_0 'ın sayısal değerini hesaplayın. Arteriyol girişindeki basıncın 55 mmHg olduğunu ve bu arteriyolü 30 mmHg basınçtaki kılcal damar yatağına bağlayan damar ağının $N = 6$ düzeyden oluştuğunu kabul edin. Kanın viskozitesini $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ alın. Sonucunuzu ml/h cinsinden ifade edin.

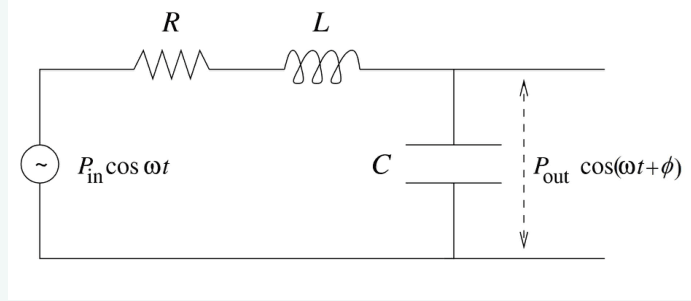
Bir LCR devresi olarak kan damarı

Rijit silindirik damar yaklaşımı çeşitli nedenlerle yetersiz kalır. Zamana bağlı akışı modele katmak ve kalbin gerçekleştirdiği bir kan pompalama çevrimi sırasında basınç değiştikçe damar çapında meydana gelen değişimi hesaba katmak özellikle önemlidir. Ayrıca, büyük damarlarda kan basıncının bir çevrim boyunca önemli ölçüde değiştiği, küçük damarlarda ise basınç salınımlarının genliğinin çok daha küçük olduğu ve akışın neredeyse zamandan bağımsız olduğu gözlenir.

Tek bir elastik damarda basınç arttığında damarın çapı da artar; böylece damarda daha fazla akışkan depolanabilir ve basınç düştüğünde bu akışkan dışarı verilebilir. Bu nedenle, başlangıçtaki betimlememize bir kondansatör ekleyerek damarın elastik davranışını modelleyebiliriz. Ayrıca, zamana bağlı kan debisini hesaba katarken akışkanın, yoğunluğu $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ile orantılı olan eylemsizliğini de dikkate almak gerekir. Bu eylemsizlik, modelimizde bir endüktans ile betimlenebilir. Şekil 2'de bu modeldeki tek bir damarın eşdeğer devresi gösterilmiştir. Eşdeğer kapasitans ve endüktans sırasıyla

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{ve} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

ile verilir. Burada h damar duvarının kalınlığı, E ise atardamarın Young modülüdür; bu katsayı, bir kuvvet uygulandığında damar dokusunun boyutlarında meydana gelen değişimi betimler. Young modülü basınç birimine sahiptir ve arteriyoller için $E = 0.06 \text{ MPa}$ mertebesindedir.



Şekil 2. Tek bir damarın eşdeğer elektrik devresi.

A.3 (2.0 puan)

Kararlı rejimde, açısal frekansı ω olan bir akış için damar çıkışındaki basınç genliği P_{out} 'u; girişteki basınç genliği P_{in} , eşdeğer direnç R , endüktans L ve kapasitans C 'nin fonksiyonu olarak elde edin. Düşük frekanslarda çıkıştaki basınç salınımı genliğinin P_{in} 'den küçük olması için η , ρ , E , h , r ve ℓ arasındaki koşulu belirleyin.

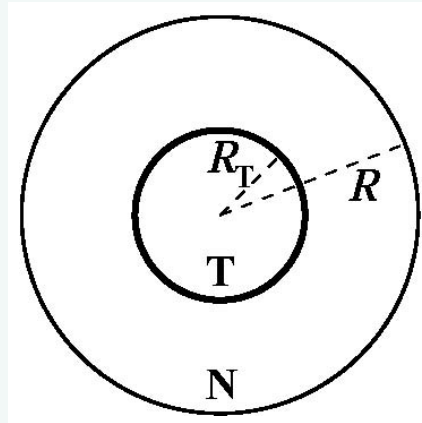
A.4 (0.7 puan)

A.2'deki damar ağı için, A.3'te belirlenen koşulun sağlanmasını mümkün kılan en büyük arteriyol duvar kalınlığı h 'yi tahmin edin (h 'nin düzeyden bağımsız olduğunu kabul edin).

Bölüm B. Tümör büyümesi (5.5 puan)

Tümör büyümesi, hücre çoğalması ve doğal seçilim gibi biyolojik mekanizmaların fizikle iç içe geçtiği çok karmaşık bir süreçtir. Bu soruda, katı tümörlerde yaygın olarak gözlenen basınç artışını ele alan basitleştirilmiş bir tümör büyümesi modelini inceleyeceğiz.

Uzamayan bir bazal membranla çevrili bir doku oluşturan normal hücreler grubunu ele alın. Bu membran, dokunun her zaman aynı biçimi, yani R yarıçaplı bir küre biçimini korumasını zorunlu kılar (Şekil 3).



Şekil 3. Basitleştirilmiş tümör.

Başlangıçta dokuda artık gerilme yoktur; yani her noktadaki basınç atmosfer basıncına eşittir.

$t = 0$ anında bu kürenin merkezinde bir tümör büyümeye başlar ve büyüdükçe doku içindeki basınç artar. Her iki dokunun da (normal, N, ve tümör, T) sıkıştırılabilir olduğunu ve yoğunluklarının, ρ_N ve ρ_T , basınçla doğrusal olarak arttığını kabul edin:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

Burada ρ_0 dokunun gerilmesiz durumdaki yoğunluğu, p atmosfer basıncına göre basınç farkı ve K_N , K_T sırasıyla normal ve tümör dokularının sıkıştırılabilirlik modülleridir (hacim modülleri). Genel olarak tümörler daha serttir ve bu nedenle hacim modülleri daha büyüktür.

B.1 (1.0 puan)

Tümör büyürken normal hücrelerin kütlesi değişmez. Tümör hacminin toplam doku hacmine oranı $v = V_T/V$ 'yi; tümör kütlesinin (M_T) normal doku kütlesine (M_N) oranı $\mu = M_T/M_N$ ve hacim modüllerinin oranı $\kappa = K_N/K_T$ 'nin fonksiyonu olarak elde edin.

Kanser tedavisinde hipertermi bazen kemoterapi ve radyoterapiyle birlikte kullanılır. Hipertermide kanser hücreleri, normal insan vücut sıcaklığı olan 37°C 'den 43°C 'nin üzerindeki sıcaklıklara seçici olarak ısıtılarak ölmeleri sağlanır. Araştırmacılar günümüzde tümör hücrelerine bağlanabilen özel proteinlerle kaplanmış karbon nanotüpler geliştirmektedir. Doku yakın kızılötesi ışınlama ısımlandığında nanotüpler bu ışınlama çevredeki dokulara göre çok daha fazla soğurur; bu nedenle, bağlandıkları tümör hücreleriyle birlikte seçici olarak ısıtılabilirler.

Tümörün, normal hücrelerin ve çevredeki dokunun sabit bir k ısı iletkenliğine sahip olduğunu kabul edin; yani bu sorunun geometrisinde, r yarıçaplı küresel bir yüzeyden birim zamanda ve birim alan başına geçen enerji, sıcaklığın r 'ye göre türevinin k katına eşittir. Nanotüpler tümör hacmi içinde düzgün dağılmıştır ve birim hacim başına $\mathcal{P}$ gücünde ısı enerji sağlayabilmektedir. Tümörden çok uzakta sıcaklığın normal insan vücut sıcaklığına eşit olduğunu varsayın.

B.2 (1.7 puan)

Kararlı durumda tümörün merkezindeki sıcaklığı; $\mathcal{P}$, k , insan vücut sıcaklığı ve tümör yarıçapı R_T 'nin fonksiyonu olarak elde edin.

B.3 (0.5 puan)

Yarıçapı 5.0 cm olan bir tümördeki tüm tümör hücrelerini 43.0°C 'den daha yüksek bir sıcaklığa ısıtmak için gereken birim hacim başına en küçük güç $\mathcal{P}_{\min}$ 'i elde edin. Dokunun ısı iletkenliğini $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ alın.

Tümörün, A.1 sorusundakine benzer dallanmış bir yapıya sahip damar ağıyla kanlandığını kabul edin. Tümör büyürken basıncı p , en ince damarlardaki P_{cap} basıncından büyük olduğunda, bu damarların yarıçapları küçük bir δr miktarı kadar azalır. Bu basınç kritik bir p_c değerine ulaşırsa (bu da δr_c kadar bir yarıçap azalmasına karşılık gelir), en ince damarlar çöker ve tümörün kanlanması ciddi biçimde bozulur. Basınç ile yarıçap değişimi arasında aşağıdaki fenomenolojik bağıntı kurulabilir:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Tümörün basıncı arttığında yalnızca en küçük damarların ($N - 1$ düzeyindekilerin) yarıçaplarının değiştiğini kabul edin.

B.4 (2.3 puan)

Doğrusal rejimde (yani $p - P_{\text{cap}}$ 'ın çok küçük olduğunu kabul ederek), bu en ince damarlardaki debinin bağıl azalmasını, $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$, tümör hacim oranı $v = V_T/V$ ile K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} 'ın fonksiyonu olarak ifade edin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• A.1

$$Q_i = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8 \eta \ell_0 N 2^i}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

• A.2

$$Q_0 = 1.4536 \dots \text{ ml/h} \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

• A.3

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

Yeterince düşük, sıfırdan farklı frekanslarda zayıflama için gereken koşul

$$R^2 C \geq 2L \iff h \leq \frac{64 \eta^2 \ell^2}{3 \rho E r^3}.$$

ω^2 mertebesinde zayıflama için eşitsizlik kesin olmalıdır; eşitlik durumunda zayıflama ω^4 mertebesinde.

• A.4

$$h_{\text{max}} = \frac{64 \eta^2 \ell_0^2}{3 \rho E r_0^3} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \mu\text{m}.$$

En sıkı kısıtlamayı 0. düzey getirir.

• B.1

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

• B.2 T_b normal vücut sıcaklığı olmak üzere,

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P} R_T^2}{2k}.$$

• B.3

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Bu, eşik değeridir; sıcaklığın her yerde 43.0°C 'yi kesin olarak aşması için güç yoğunluğunun bu değerin üzerinde olması gerekir.

• B.4 δQ_{N-1} azalmanın pozitif büyüklüğünü göstermek üzere,

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

Bu ifade, sıkışmanın başlamasının hemen üzerinde, $p > P_{\text{cap}}$ olduğunda geçerlidir.

Çözüm

A.1

Geometrik ölçekleme şu bağıntıları verir:

$$r_i = r_0 2^{-i/3}, \quad \ell_i = \ell_0 2^{-i/3}.$$

Buna göre, i düzeyindeki tek bir damarın hidrolik direnci

$$R_i = \frac{8\eta\ell_i}{\pi r_i^4} = \frac{8\eta\ell_0}{\pi r_0^4} 2^i = R_0 2^i.$$

Hacimsel debinin korunumu ve simetri, akışın her çatallanmada eşit olarak bölünmesini gerektirir. Dolayısıyla

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i}.$$

Bu nedenle, i düzeyindeki herhangi bir damarın iki ucu arasındaki basınç düşüşü

$$\Delta P_i = R_i Q_i = R_0 Q_0.$$

Girişten kılcal damar yatağına uzanan her yol, N düzeyin her birinde bir damardan geçer. Böyle bir yol boyunca basınç düşüşleri toplandığında,

$$\Delta P = NR_0 Q_0.$$

Buradan

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i} = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8\eta\ell_0 N 2^i}.$$

Eşdeğer olarak, her düzey toplam ağ direncine $R_i/2^i = R_0$ katkıda bulunur; dolayısıyla $R_{\text{eq}} = NR_0$ olur.

A.2

mmHg ile pascal arasında verilen dönüşüm kullanılırsa,

$$\Delta P = (55 - 30) \frac{1.013 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 3.3322 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Böylece,

$$Q_0 = \frac{\pi(6.0 \times 10^{-5})^4(3.3322 \times 10^3)}{8(3.5 \times 10^{-3})(2.0 \times 10^{-3})(6)} = 4.0379 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

$1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ ml}$ ve $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ olduğundan,

$$Q_0 = (4.0379 \times 10^{-10})(10^6)(3600) = 1.4536 \text{ ml/h}.$$

İki anlamlı basamakla,

$$\boxed{Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h}}.$$

A.3

Devre benzetiminde basınç gerilime, hacimsel debi ise akıma karşılık gelir. Kondansatör bağıntısı ve devre boyunca basınç dengesi şöyledir:

$$Q = C \frac{dp_{\text{out}}}{dt}, \quad p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = RQ + L \frac{dQ}{dt}.$$

Bu denklemler birleştirildiğinde

$$LC \frac{d^2 p_{\text{out}}}{dt^2} + RC \frac{dp_{\text{out}}}{dt} + p_{\text{out}} = p_{\text{in}}.$$

Geçici rejim söndükten sonra giriş ve çıkış aynı açısal frekansta salınır. Bunlar karmaşık genliklerle gösterildiğinde,

$$(1 - \omega^2 LC + i\omega RC) \tilde{P}_{\text{out}} = \tilde{P}_{\text{in}}.$$

Mutlak değerler alınırsa,

$$\boxed{P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}}.$$

Paydanın karesi

$$1 + C(R^2 C - 2L)\omega^2 + L^2 C^2 \omega^4.$$

Yeterince küçük, sıfırdan farklı ω için, başat mertebede zayıflama şu koşulu gerektirir:

$$R^2 C > 2L.$$

$R^2 C < 2L$ ise yeterince düşük frekanslarda payda birden küçüktür ve basınç salınımı güçlenir.

$R^2 C = 2L$ sınırında paydanın karesi $1 + L^2 C^2 \omega^4 > 1$ olur; dolayısıyla sınır durumunda da zayıflama vardır, ancak bu yalnızca ω^4 mertebesinde. Bu nedenle tam koşul $R^2 C \geq 2L$ 'dir.

Verilen damar parametreleri yerine konursa,

$$R^2 C = \left(\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} \right)^2 \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} = \frac{96\eta^2 \ell^3}{\pi E h r^5},$$

öte yandan

$$2L = \frac{9\ell\rho}{2\pi r^2}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{64\eta^2 \ell^2 \geq 3\rho E h r^3}$$

veya eşdeğer olarak,

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{64\eta^2\ell^2}{3\rho Er^3}.$$

ω^2 mertebesinde zayıflama için bu eşitsizlikler kesin eşitsizliklerle değiştirilmelidir. Sıfır frekansta basınç kazancı tam olarak birdir.

A.4

i düzeyinde,

$$h_{\text{crit},i} = \frac{64\eta^2\ell_i^2}{3\rho Er_i^3} = \frac{64\eta^2\ell_0^2}{3\rho Er_0^3} 2^{i/3}.$$

Bu sınır, düzey numarasıyla birlikte artar. Aynı duvar kalınlığının her düzeyde koşulu sağlaması gerektiğinden, en sıkı kısıtlamayı 0. düzey getirir.

$E = 0.06 \times 10^6$ Pa kullanılarak,

$$h_{\text{max}} = \frac{64(3.5 \times 10^{-3})^2(2.0 \times 10^{-3})^2}{3(1.05 \times 10^3)(0.06 \times 10^6)(6.0 \times 10^{-5})^3} = 7.6818 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Böylece, verilen model kapsamında,

$$h_{\text{max}} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \mu\text{m}.$$

Bu sınır değer altındaki bir kalınlık, ağıın tamamında başat mertebede zayıflama için gereken kesin eşitsizlik koşulunu sağlar.

B.1

Toplam doku hacmi V sabittir. Başlangıçta bu hacim, yoğunluğu ρ_0 olan normal dokuyla doludur; dolayısıyla normal hücre kütlelerinin korunumu

$$M_N = \rho_0 V = \rho_N (V - V_T).$$

$v = V_T/V$ yazılıp (3) denklemi kullanıldığında,

$$1 = \left(1 + \frac{p}{K_N}\right)(1 - v).$$

Böylece basınç ile tümör hacmi arasındaki ilişki

$$p = \frac{K_N v}{1 - v}.$$

Tümörün kütlesi

$$M_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T.$$

$M_N = \rho_0 V$ 'ye bölünürse,

$$\mu = v \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) = v \left(1 + \frac{\kappa v}{1 - v}\right).$$

Yeniden düzenlendiğinde v için ikinci dereceden bir denklem elde edilir:

$$(1 - \kappa)v^2 - (1 + \mu)v + \mu = 0.$$

Fiziksel kök, μ sıfıra yaklaşırken sıfıra yaklaşır. $\kappa \neq 1$ için bu kök

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(1 - \kappa)\mu}}{2(1 - \kappa)}.$$

Pay eşleniğiyle çarpılarak kökten arındırıldığında, $\kappa = 1$ durumunda da doğrudan geçerli olan bir biçim elde edilir:

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

Kontrol etmek için, hacim modülleri eşit olduğunda iki dokunun yoğunlukları da eşittir ve bu ifadenin öngördüğü gibi $v = \mu/(1 + \mu)$ elde edilir.

B.2

T_b , tümörden uzaktaki vücut sıcaklığı olsun. Kararlı durumda bir küreden dışarıya doğru geçen ısı akımı, kürenin içinde üretilen toplam güce eşittir. Dışarıya doğru ısı akışı pozitif alındığında Fourier yasası

$$\dot{H}(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

Tümörün içinde, $0 \leq r \leq R_T$ için, düzgün ısı üretimi

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi r^3}{3} \mathcal{P},$$

verir; dolayısıyla

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}r}{3k}.$$

Tümörün dışında, üretilen gücün tamamı her küresel yüzeyden geçer:

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi R_T^3}{3} \mathcal{P}.$$

$r \rightarrow \infty$ iken $T(r) \rightarrow T_b$ koşuluyla integral alınırsa,

$$T(r) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}, \quad r \geq R_T.$$

Böylece tümör yüzeyindeki sıcaklık

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

Sıcaklık yüzeyde süreklidir. İç bölgedeki sıcaklık gradyanının bu yüzeyden içeriye doğru integrali alınırsa

$$T(r) = T(R_T) + \frac{\mathcal{P}}{6k}(R_T^2 - r^2) = T_b + \frac{\mathcal{P}}{6k}(3R_T^2 - r^2).$$

Sonuç olarak,

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

Sıcaklık tümörün içinde ikinci dereceden bir fonksiyon olarak azalır ve dışında $1/r$ biçiminde T_b 'ye yaklaşır.

B.3

Sıcaklık merkezden uzaklaştıkça azalır; bu nedenle en soğuk tümör hücreleri yüzeyledir. Dolayısıyla her tümör hücresini 43.0°C 'nin üzerine ısıtmak için

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k} > 43.0^\circ\text{C}.$$

Eşik güç yoğunluğu

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0)\text{ K}}{R_T^2}.$$

$R_T = 5.0 \times 10^{-2}\text{ m}$ yerine konursa,

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3(0.60)(6.0)}{(5.0 \times 10^{-2})^2} = 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\mathcal{P}_{\min} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}}.$$

Bu eşikte yüzey tam olarak 43.0°C , merkez ise 46.0°C sıcaklıktadır. Belirtilen sıcaklığın her yerde kesin olarak aşılması için $\mathcal{P} > 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}$ gerekir.

B.4

Önce basınç-yarıçap bağıntısını doğrusallaştıralım. (4) denklemi şöyle yazılabilir:

$$p - P_{\text{cap}} = (p_c - P_{\text{cap}}) \left[2 \frac{\delta r}{\delta r_c} - \left(\frac{\delta r}{\delta r_c} \right)^2 \right].$$

Sıkışmamış duruma bağlı olan dal üzerinde, $p = P_{\text{cap}}$ 'a yeterince yakinken,

$$\boxed{\delta r \simeq \frac{\delta r_c}{2(p_c - P_{\text{cap}})}(p - P_{\text{cap}})}.$$

Yalnızca uç damarların yarıçapları değişir. Şu tanıımı yapalım:

$$\epsilon = \frac{\delta r}{r_{N-1}} \ll 1.$$

Uzunlukları değişmediğinden, Poiseuille yasası

$$R'_{N-1} = R_{N-1}(1 - \epsilon)^{-4} \simeq R_{N-1}(1 + 4\epsilon).$$

A.1'e göre, 2^{N-1} uç damarın tümü başlangıçta ağ direncine R_0 katkıda bulunur. Diğer $N - 1$ düzey değişmeden kalır. Dolayısıyla

$$R'_{\text{eq}} = (N - 1)R_0 + R_0(1 - \epsilon)^{-4} \simeq NR_0 + 4R_0\epsilon.$$

Giriş ve kılcal damar basınçları sabitken toplam debi, R_{eq} ile ters orantılıdır. Simetri nedeniyle uç damarlardaki debi hâlâ toplam debinin 2^{N-1} 'e bölümüne eşittir; dolayısıyla bu debinin bağlı azalması, toplam debinin bağlı azalmasıyla aynıdır:

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{R'_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

$1/N$ çarpanı, dirence yapılan N eşit katkıdan yalnızca birinin değişmesini hesaba katar.

Doğrusallaştırılmış yarıçap değişimi yerine konursa,

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}} \frac{p - P_{\text{cap}}}{p_c - P_{\text{cap}}}.$$

Son olarak, **B.1'**deki normal hücre kütlelerinin korunumu $p = K_N v / (1 - v)$ verir. Böylece,

$$\boxed{\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right)}.$$

Bu ifade, sıkışmanın başladığı hacim oranı olan

$$v_* = \frac{P_{\text{cap}}}{K_N + P_{\text{cap}}},$$

değerinin hemen üzerinde, $(p - P_{\text{cap}})/(p_c - P_{\text{cap}}) \ll 1$ ve $\delta r/r_{N-1} \ll 1$ koşulları altında geçerlidir. Başlangıç eşiğinin altında, verilen model damar daralmasını belirlemez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.