

IPhO 2018

Теоретические задачи и решения · Лиссабон, Португалия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iphO/2018/

Задача 1: LIGO-GW150914

В 2015 году гравитационно-волновая обсерватория LIGO впервые зарегистрировала прохождение гравитационных волн (ГВ) через Землю. Это событие, получившее название GW150914, было вызвано волнами, созданными двумя чёрными дырами, которые двигались по квазикруговым орбитам. В этой задаче вам предстоит оценить некоторые физические параметры системы по свойствам зарегистрированного сигнала.

Часть А: Ньютоновские (консервативные) орбиты (3.0 балла)

А.1 1.0 балла

Рассмотрим систему двух звёзд с массами M_1, M_2 , положения которых относительно центра масс системы задаются радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ соответственно, то есть

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Звёзды изолированы от остальной Вселенной и движутся с нерелятивистскими скоростями. Используя законы Ньютона, вектор ускорения тела массой M_1 можно выразить как

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

где $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Найдите $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, где G — гравитационная постоянная [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

А.2 1.0 балла

Полную энергию системы двух тел, движущихся по круговым орбитам, можно выразить как:

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

где

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

— приведённая масса и полная масса системы, Ω — угловая скорость каждого тела, а L — расстояние между телами $L = r_1 + r_2$. Получите явный вид слагаемого $A(\mu, \Omega, L)$.

А.3 1.0 балла

Уравнение 3 можно упростить до $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Определите число β .

Часть В: Учёт релятивистской диссипации (7.0 балла)

Верная теория гравитации, *общая теория относительности*, была сформулирована Эйнштейном в 1915 году и предсказывает, что гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света. Носители информации об этом взаимодействии называются ГВ. ГВ излучаются всякий раз, когда тела движутся с ускорением, в результате чего система тел теряет энергию.

Рассмотрим систему двух точечных частиц, изолированную от остальной Вселенной. Эйнштейн доказал, что при достаточно малых скоростях излучаемые ГВ: 1) имеют частоту, вдвое превышающую орбитальную частоту; 2) могут быть охарактеризованы светимостью, то есть мощностью излучения $\mathcal{P}$, основной вклад в которую задаётся квадрупольной формулой Эйнштейна,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Здесь c — скорость света $c \simeq 3 \times 10^8$ м/с. Для системы двух точечных частиц, движущихся по орбитам в плоскости $x - y$, Q_{ij} задаётся следующей таблицей (i, j обозначают номер строки и столбца)

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \\ Q_{22} &= \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Q_{33} &= - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \\ Q_{12} &= Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \end{aligned} \quad (7)$$

а $Q_{ij} = 0$ для всех остальных сочетаний индексов. Здесь (x_A, y_A) — положение тела А в системе отсчёта центра масс.

В.1 1.0 балла

Для круговых орбит, описанных в А.2, компоненты Q_{ij} можно выразить как функции времени t :

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Выразите k через Ω и определите численные значения постоянных a_i, b_i, c_{ij} .

В.2 1.0 балла

Вычислите мощность $\mathcal{P}$, излучаемую этой системой в виде гравитационных волн, и получите:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Чему равно число ξ ? [Если вам не удалось получить ξ , далее используйте $\xi = 6.4$.]

В.3 1.0 балла

В отсутствие излучения ГВ два тела будут неограниченно долго двигаться по неизменным круговым орбитам. Однако излучение ГВ приводит к потере энергии системой и медленному переходу на круговые орбиты меньшего радиуса. Покажите, что скорость изменения $\frac{d\Omega}{dt}$ орбитальной угловой скорости имеет вид

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

где M_c называется чирп-массой. Выразите M_c через M и μ . Эта масса определяет рост частоты при уменьшении орбиты. [Название «чирп» происходит от английского слова, обозначающего щебетание — высокий звук с возрастающей частотой, издаваемый маленькими птицами.]

В.4 2.0 балла

Используя приведённые выше сведения, установите связь орбитальной угловой скорости Ω с частотой ГВ f_{GW} . Зная, что для любой гладкой функции $F(t)$ и $a \neq 1$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

где χ — постоянная, а t_0 — постоянная интегрирования, покажите, что из (10) следует выражение для частоты ГВ

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

и определите постоянную p .

14 сентября 2015 года событие GW150914 было зарегистрировано детекторами LIGO, состоящими из двух плеч, расположенных в форме буквы L, длиной 4 км каждое. Относительное изменение длины этих плеч показано на рис. 1. Плечи детектора линейно откликаются на проходящую гравитационную волну, и форма отклика повторяет форму волны. Эта волна была создана двумя чёрными дырами, двигавшимися по квазикруговым орбитам; потеря энергии за счёт гравитационного излучения привела к уменьшению орбиты и в конечном счёте к столкновению чёрных дыр. Момент столкновения приблизительно соответствует максимуму сигнала после точки D на рис. 1.

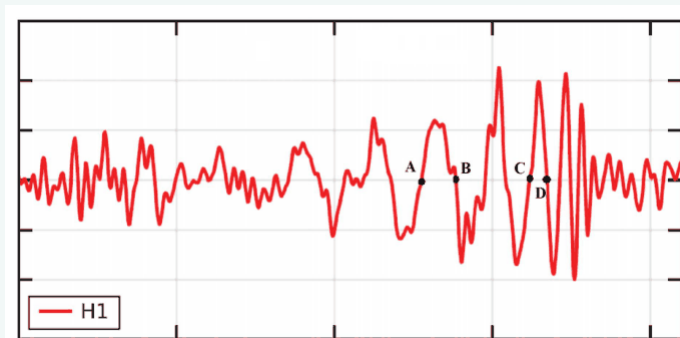


Рисунок 1. Деформация, то есть относительное изменение длины каждого плеча, в детекторе LIGO H1. По горизонтальной оси отложено время, а точки A, B, C, D соответствуют $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ секунды соответственно.

В.5 1.0 балла

По рисунку оцените $f_{\text{GW}}(t)$ в моменты времени

$$t_{\overline{\text{AB}}} = \frac{t_{\text{B}} + t_{\text{A}}}{2} \quad \text{и} \quad t_{\overline{\text{CD}}} = \frac{t_{\text{D}} + t_{\text{C}}}{2}. \quad (13)$$

Предполагая, что (12) справедливо вплоть до столкновения (что, строго говоря, неверно) и что оба объекта имеют одинаковую массу, оцените чирп-массу M_c и полную массу системы в единицах массы Солнца $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

В.6 1.0 балла

Оцените минимальное расстояние между двумя объектами на орбитах в момент $t_{\overline{\text{CD}}}$. Затем оцените максимальный размер каждого объекта R_{max} . Найдите $R_{\odot}/R_{\text{max}}$, чтобы сравнить этот размер с радиусом нашего Солнца $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5 \text{ km}$. Оцените также их линейную орбитальную скорость в тот же момент v_{col} , сравнив её со скоростью света с помощью отношения v_{col}/c .

Сделайте вывод о том, что это действительно чрезвычайно компактные объекты, движущиеся с чрезвычайно высокой скоростью!

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A.1:** $n = 3$, $\alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}$.
- **A.2:** $A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2}\mu\Omega^2 L^2$.
- **A.3:** $\beta = -\frac{1}{2}$.
- **B.1:** Если в момент $t = 0$ тела находятся на оси x и движутся по орбитам против часовой стрелки,

$$k = 2\Omega, \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 0).$$

Кроме того, $c_{12} = c_{21} = 1$; все остальные недиагональные c_{ij} равны нулю.

- **B.2:** $\xi = \frac{32}{5} = 6.4$, $\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6$.
- **B.3:** $M_c = \mu^{3/5} M^{2/5}$, причём

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

- **B.4:** $f_{\text{GW}} = \frac{\Omega}{\pi}$, $p = 1$, и

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t).$$

- **B.5:** $f_{\text{GW}}(0.0045 \text{ s}) \simeq 56 \text{ Hz}$, $f_{\text{GW}}(0.037 \text{ s}) \simeq 83 \text{ Hz}$; $M_c \simeq 30M_{\odot}$, $M \simeq 69M_{\odot}$.

- **В.6:** $L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^2 \text{ km}$, $R_{\max} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}$, $R_{\odot}/R_{\max} \simeq 2.7 \times 10^3$. Орбитальная скорость каждого объекта равна $v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}$, поэтому $v_{\text{col}}/c \simeq 0.22$.

Решение

А.1

Закон всемирного тяготения Ньютона даёт ускорение первой звезды:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -GM_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Из условия для центра масс следует

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}.$$

Сравнение с (2) даёт

$$n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

А.2

Условие для центра масс и равенство $L = r_1 + r_2$ дают

$$r_1 = \frac{M_2}{M} L, \quad r_2 = \frac{M_1}{M} L.$$

Орбитальные скорости звёзд равны $v_1 = \Omega r_1$ и $v_2 = \Omega r_2$. Поэтому их полная кинетическая энергия равна

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 \Omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \Omega^2 r_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 L^2 \left(\frac{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2}{M^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2. \end{aligned}$$

Гравитационная потенциальная энергия, если принять её равной нулю при бесконечном расстоянии между телами, равна

$$U = -\frac{GM_1 M_2}{L} = -\frac{GM\mu}{L}.$$

Таким образом, слагаемое A представляет собой кинетическую энергию:

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2.$$

А.3

Для первой звезды сила тяготения играет роль центростремительной силы:

$$M_1 \Omega^2 r_1 = \frac{GM_1 M_2}{L^2}.$$

Используя $r_1 = M_2 L / M$, получаем соотношение для круговых орбит

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{GM}{L^3}}.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2 = \frac{GM\mu}{2L},$$

и

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{2L}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}.$$

В.1

Выберем начало отсчёта времени так, чтобы в момент $t = 0$ первое тело находилось на положительной полуоси x и двигалось против часовой стрелки. Тогда

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t), \\ (x_2, y_2) &= (-r_2 \cos \Omega t, -r_2 \sin \Omega t).\end{aligned}$$

Из А.2,

$$M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2.$$

Подстановка в выражения для компонент квадрупольного момента даёт

$$Q_{11} = \frac{\mu L^2}{3} (2 \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Omega t \right),$$

$$Q_{22} = \frac{\mu L^2}{3} (2 \sin^2 \Omega t - \cos^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right),$$

$$Q_{33} = -\frac{\mu L^2}{3} = \frac{\mu L^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \mu L^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{\mu L^2}{2} \sin 2\Omega t.$$

Таким образом,

$$\boxed{k = 2\Omega}.$$

Диагональные коэффициенты равны

i	a_i	b_i
1	1/3	1
2	1/3	-1
3	-2/3	0

Недиагональные коэффициенты равны

$$c_{12} = c_{21} = 1, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0.$$

B.2

Обозначим $q = \mu L^2/2$ и $k = 2\Omega$. Для круговой орбиты ненулевые третьи производные равны

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_{11} &= qk^3 \sin kt, \\ \ddot{Q}_{22} &= -qk^3 \sin kt, \\ \ddot{Q}_{12} &= \ddot{Q}_{21} = -qk^3 \cos kt.\end{aligned}$$

Оба недиагональных элемента вносят вклад в двойную сумму. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} (\ddot{Q}_{ij})^2 &= 2q^2 k^6 \sin^2 kt + 2q^2 k^6 \cos^2 kt \\ &= 2q^2 k^6 \\ &= 2 \left(\frac{\mu L^2}{2} \right)^2 (2\Omega)^6 \\ &= 32\mu^2 L^4 \Omega^6.\end{aligned}$$

Таким образом, светимость равна

$$\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6, \quad \xi = \frac{32}{5} = 6.4.$$

Результат не зависит от орбитальной фазы.

B.3

Приближённо представим сближение по спирали как медленно изменяющуюся последовательность круговых орбит. Массы остаются постоянными, а энергия, уносимая волнами, удовлетворяет соотношению

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}.$$

Исключение L с помощью соотношения для круговых орбит,

$$L = (GM)^{1/3} \Omega^{-2/3},$$

даёт

$$E = -\frac{1}{2} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{2/3}.$$

Производная этой энергии по времени равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{-1/3} \frac{d\Omega}{dt}.$$

Светимость, выраженная через Ω , равна

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 (GM)^{4/3} \Omega^{10/3}.$$

Приравняв скорость изменения энергии к $-\mathcal{P}$, получаем

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

Возводя в куб,

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2.$$

Это выражение имеет требуемый вид, если

$$M_c^5 = \mu^3 M^2.$$

Таким образом,

$$M_c = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}.$$

В частности, $d\Omega/dt > 0$: по мере потери энергии системой её орбита уменьшается, а орбитальная частота возрастает.

B.4

Орбитальная частота равна $f_{\text{orb}} = \Omega/(2\pi)$. Поэтому указанное в условии двукратное превышение частоты ГВ над орбитальной частотой означает

$$f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{\Omega}{\pi}.$$

Извлекая положительный кубический корень из (10),

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

При $\Omega = \pi f_{\text{GW}}$ это выражение принимает вид

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = 3\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3}.$$

Использование (11) при $a = 11/3$ или непосредственное дифференцирование $f_{\text{GW}}^{-8/3}$ даёт

$$\frac{d}{dt} \left(f_{\text{GW}}^{-8/3} \right) = -8\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3}.$$

Интегрирование приводит к

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t).$$

Сравнивая показатели степеней с (12),

$$\frac{2}{3} + p = \frac{5}{3}, \quad 2 - p = 1,$$

получаем

$$p = 1.$$

Здесь t_0 — формальный момент времени, в который эта приближённая модель сближения по спирали предсказывает обращение частоты в бесконечность.

B.5

Точки А и В обозначают последовательные пересечения нулевого уровня по обе стороны одного положительного гребня; точки С и D аналогичным образом ограничивают более поздний гребень. Поэтому каждый интервал охватывает приблизительно половину периода ГВ.

Приблизённо заменяя частоту на каждом коротком интервале её значением в середине интервала,

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{AB}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{B}} - t_{\text{A}})} = \frac{1}{2(0.009 \text{ s})} \simeq 55.6 \text{ Hz},$$
$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{CD}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{D}} - t_{\text{C}})} = \frac{1}{2(0.006 \text{ s})} \simeq 83.3 \text{ Hz}.$$

Соответствующие моменты времени равны

$$t_{\overline{\text{AB}}} = 0.0045 \text{ s}, \quad t_{\overline{\text{CD}}} = 0.037 \text{ s},$$

так что их разность составляет 0.0325 s.

Обозначим эти оценки частоты через f_{AB} и f_{CD} . Вычитание соотношений из В.4, записанных для двух моментов времени, исключает t_0 :

$$f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}}).$$

Выражая чирп-массу,

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left[\frac{f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3}}{8\pi^{8/3}\xi (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}})} \right]^{3/5}.$$

Используя приведённые постоянные и $\xi = 6.4$,

$$M_c \simeq 6.02 \times 10^{31} \text{ kg},$$

или, с подходящей точностью,

$$\boxed{M_c \simeq 30M_{\odot}}.$$

При равных массах компонентов $M_1 = M_2 = M/2$, поэтому

$$\mu = \frac{M}{4}, \quad M_c = \left(\frac{M}{4} \right)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Таким образом,

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 1.38 \times 10^{32} \text{ kg},$$

и

$$\boxed{M \simeq 69M_{\odot}}.$$

Следовательно, масса каждого компонента составляет приблизительно $35M_{\odot}$.

B.6

В более поздний из рассмотренных моментов времени

$$\Omega_{\overline{\text{CD}}} = \pi f_{\text{CD}} \simeq 2.62 \times 10^2 \text{ rad/s}.$$

Соотношение для круговых орбит даёт

$$L = \left(\frac{GM}{\Omega_{\text{CD}}^2} \right)^{1/3}.$$

Выбор равных масс также даёт минимальную полную массу и, следовательно, минимальное расстояние между телами, совместимые с найденной чирп-массой и частотой. Действительно,

$$\frac{\mu}{M} = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

поэтому

$$M_c = M \left(\frac{\mu}{M} \right)^{3/5} \leq \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Равенство достигается при равных массах. Используя массу, найденную в В.5,

$$L_{\min} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.383 \times 10^{32})}{(2.618 \times 10^2)^2} \right]^{1/3} \text{ м},$$

получаем

$$L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^5 \text{ м} = 5.1 \times 10^2 \text{ км}.$$

Если принять радиусы объектов равной массы одинаковыми, то для того, чтобы они оставались отдельными объектами, должно приближённо выполняться условие $2R \lesssim L$. Отсюда

$$R_{\max} \simeq \frac{L_{\min}}{2} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ км}.$$

Сравнение с Солнцем даёт

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq \frac{7 \times 10^5 \text{ км}}{2.56 \times 10^2 \text{ км}},$$

так что

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq 2.7 \times 10^3.$$

Каждый объект движется вокруг центра масс по орбите радиуса $L/2$. Поэтому его орбитальная скорость в этот момент равна

$$v_{\text{col}} = \Omega_{\text{CD}} \frac{L}{2} \simeq (2.618 \times 10^2)(2.562 \times 10^5) \text{ м/с},$$

откуда

$$v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ м/с}, \quad \frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq 0.22.$$

Таким образом, каждый объект содержит примерно 35 солнечных масс в пределах радиуса не более примерно 260 km, двигаясь при этом со скоростью около одной пятой скорости света. Это чрезвычайно компактные и быстро движущиеся объекты. В численных оценках использованы заданные ньютоновское приближение круговых орбит и квадрупольное приближение, точность которых ухудшается вблизи слияния.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Где нейтрино?

При столкновении двух протонов с очень высокой энергией на Большом адронном коллайдере (LHC) могут образовываться различные частицы, например электроны, мюоны, нейтрино, кварки и соответствующие им античастицы. Большинство этих частиц можно зарегистрировать с помощью детектора частиц, окружающего точку столкновения. Например, кварки претерпевают процесс, называемый *адронизацией*, в ходе которого они превращаются в ливень субатомных частиц, называемый «струей». Кроме того, сильное магнитное поле в детекторах позволяет достаточно сильно искривлять траектории даже очень энергичных заряженных частиц, чтобы можно было определить их импульс. В детекторе ATLAS используется система сверхпроводящих соленоидов, создающая постоянное однородное магнитное поле величиной 2.00 тесла во внутренней части детектора, окружающей точку столкновения. Траектории заряженных частиц с импульсами ниже некоторого значения искривляются настолько сильно, что частицы совершают многократные обороты в магнитном поле и, скорее всего, не будут зарегистрированы. В силу своих свойств нейтрино вообще не регистрируется, поскольку проходит сквозь детектор, не взаимодействуя с ним.

Данные: масса покоя электрона, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; элементарный заряд, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$;

скорость света, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; электрическая постоянная, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Часть А. Физика детектора ATLAS (4.0 балла)

А.1 — 0.5 балла

Выведите выражение для циклотронного радиуса r круговой траектории электрона, на который действует магнитная сила, перпендикулярная его скорости, и выразите этот радиус через его кинетическую энергию K , модуль заряда e , массу m и магнитное поле B . Считайте электрон нерелятивистской классической частицей.

Электроны, рождающиеся внутри детектора ATLAS, необходимо рассматривать релятивистски. Однако формула для циклотронного радиуса справедлива и для релятивистского движения, если использовать релятивистский импульс.

А.2 — 0.5 балла

Вычислите минимальное значение импульса электрона, при котором он может покинуть внутреннюю часть детектора в радиальном направлении. Внутренняя часть детектора имеет форму цилиндра радиусом 1.1 метра, а электрон рождается в точке столкновения точно в

центре цилиндра. Выразите ответ в МэВ/с.

При ускорении, перпендикулярном скорости, релятивистские частицы с зарядом e и массой покоя m испускают электромагнитное излучение, называемое синхротронным. Мощность излучения задаётся выражением

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

где a — ускорение, а $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

A.3 — 1.0 балла

Частица называется ультрарелятивистской, если её скорость очень близка к скорости света. Для ультрарелятивистской частицы мощность излучения можно выразить следующим образом:

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

где ξ — действительное число, n, k — целые числа, E — энергия заряженной частицы, а B — магнитное поле. Найдите ξ, n и k .

A.4 — 1.0 балла

В ультрарелятивистском пределе энергия электрона зависит от времени следующим образом:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

где E_0 — начальная энергия электрона. Найдите α как функцию e, c, B, ϵ_0 и m .

A.5 — 0.5 балла

Рассмотрите электрон, родившийся в точке столкновения и движущийся в радиальном направлении с энергией 100 ГэВ. Оцените энергию, потерянную вследствие синхротронного излучения к моменту выхода электрона из внутренней части детектора. Выразите ответ в МэВ.

A.6 — 0.5 балла

Найдите выражение для циклотронной частоты электрона как функции времени в ультрарелятивистском пределе.

Часть В. Поиск нейтрино (6.0 балла)

Столкновение двух протонов, показанное на рисунке 1, приводит к рождению топ-кварка (t) и анти-топ-кварка ($\bar{t}$) — самых тяжёлых из когда-либо зарегистрированных элементарных частиц. Топ-кварк распадается на бозон W^+ и боттом-кварк (b), а анти-топ-кварк — на бозон W^- и анти-боттом-кварк ($\bar{b}$). В случае, изображённом на рисунке 1, бозон W^+ распадается на антимюон (μ^+) и нейтрино (ν), а бозон W^- — на кварк и антикварк. Цель этой задачи — восстановить полный импульс нейтрино по импульсам некоторых зарегистрированных частиц. **Для простоты все частицы и струи в этой задаче считаются безмассовыми, за исключением топ-кварка и бозонов $W^\pm$.**

Импульсы продуктов распада топ-кварка можно определить экспериментально (см. таблицу), за исключением компоненты импульса нейтрино вдоль оси z . Полный импульс частиц конечного состояния, зарегистрированных детектором, равен нулю только в поперечной плоскости (плоскости xy), но не вдоль линии столкновения (оси z). Таким образом, поперечный импульс нейтрино можно найти по недостающему импульсу в поперечной плоскости.

4 июня 2015 года в эксперименте ATLAS на LHC в 00:21:24 GMT+1 было зарегистрировано протон-протонное столкновение, подобное изображённому на рисунке 1.

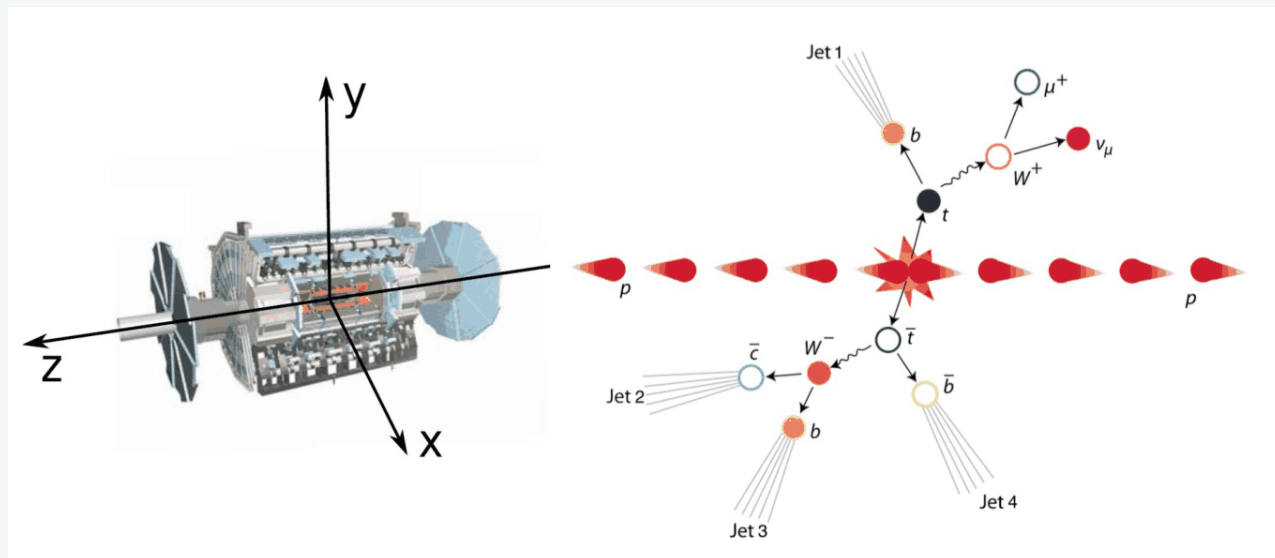


Рисунок 1. Схематическое изображение системы координат детектора ATLAS (слева) и протон-протонного столкновения (справа).

Ниже приведены компоненты импульсов трёх частиц конечного состояния, образовавшихся при распаде топ-кварка, включая нейтрино.

Частица	p_x (ГэВ/с)	p_y (ГэВ/с)	p_z (ГэВ/с)
антимюон (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
струя 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
нейтрино (ν)	-104.1	+5.3	---

В.1 — 1.5 балла

Найдите уравнение, связывающее квадрат массы бозона W^+ , m_W^2 , с компонентами импульсов нейтрино и антимюона, приведёнными в таблице выше. Выразите ответ через поперечные импульсы нейтрино и антимюона,

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{и} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

и компоненты их импульсов вдоль оси z , $p_z^{(\mu)}$ и $p_z^{(\nu)}$.

В.2 — 1.5 балла

Считая массу бозона W^+ равной $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$, вычислите два возможных значения импульса нейтрино вдоль оси z , $p_z^{(\nu)}$. Выразите ответ в ГэВ/с.

В.3 — 1.0 балла

Вычислите массу топ-кварка для каждого из двух полученных выше решений. Выразите ответ в $\text{ГэВ}/c^2$.

[Если вы не получили два решения в В.2, используйте $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ и $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$.]

Нормированное число событий столкновения, используемых для измерения массы топ-кварка (определённое экспериментально), имеет две составляющие: так называемый «сигнал» (соответствующий распадам топ-кварков) и «фон» (соответствующий событиям других процессов, в которых топ-кварки не участвуют). Экспериментальные данные включают оба процесса, см. рис. 2.

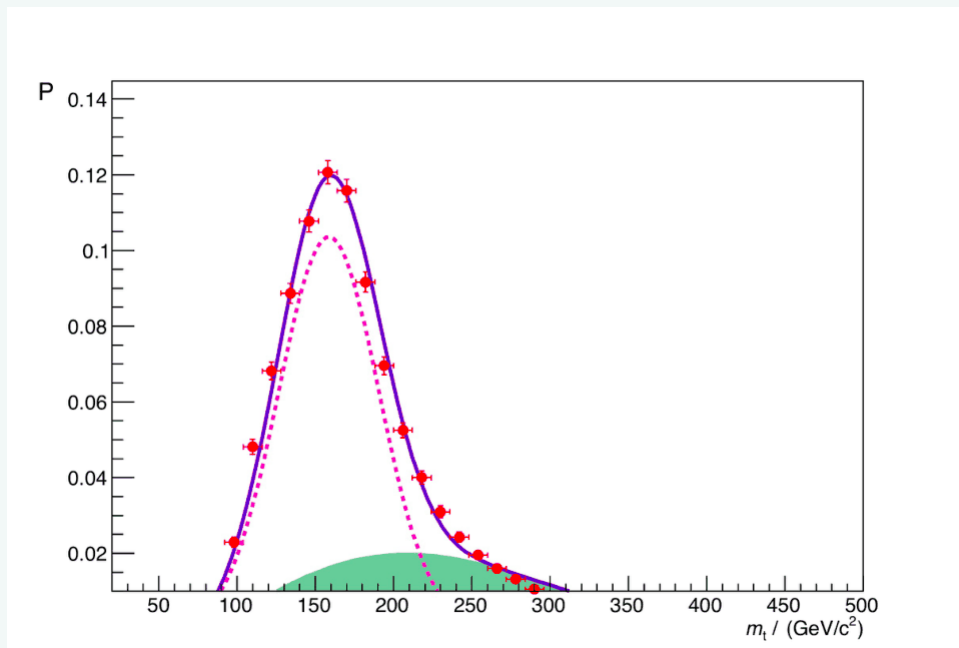


Рисунок 2. Экспериментально определённое распределение массы топ-кварка, то есть нормированное число событий в зависимости от массы топ-кварка. Точки соответствуют данным. Штриховая линия соответствует «сигналу», а затенённая область — «фону».

В.4 — 1.0 балла

Судя по распределению массы топ-кварка, какое из двух полученных выше решений с большей вероятностью является правильным? Оцените вероятность для наиболее вероятного решения.

В.5 — 1.0 балла

Вычислите расстояние, пройденное топ-кварком до распада, используя наиболее вероятное решение. Считайте, что среднее время жизни топ-кварка в покое равно $5 \times 10^{-25} \text{ s}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь $p_T^{(a)} = |\vec{p}_T^{(a)}|$.

- **A.1:** $r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}$.
- **A.2:** $p_{\min} = \frac{eBR}{2} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c$.
- **A.3:** $\xi = \frac{1}{6\pi}$, $n = 5$, $k = 4$.
- **A.4:** $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}$.
- **A.5:** $\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}$.
- **A.6:** Мгновенная частота равна

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0} (1 + \alpha E_0 t).$$

Угловая частота равна $\omega(t) = 2\pi f(t)$.

- **B.1:**

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

- **B.2:** $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ или $-188 \text{ GeV}/c$.
- **B.3:** Соответственно, $m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2$ или $311 \text{ GeV}/c^2$.
- **B.4:** Решение $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ более вероятно. Вероятность, считываемая с графика при соответствующей восстановленной массе, приблизительно равна $P \simeq 0.12$, или 12%.
- **B.5:** Среднее расстояние равно $\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}$.

Решение

A.1

При движении перпендикулярно магнитному полю магнитная составляющая силы Лоренца играет роль центростремительной силы:

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

Следовательно, $r = mv/(eB)$. Используя выражение для нерелятивистской кинетической энергии $K = \frac{1}{2}mv^2$, получаем

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}}.$$

Эквивалентная запись $r = p/(eB)$ справедлива и в релятивистском случае, если p — релятивистский импульс.

A.2

Пусть радиус детектора равен $R = 1.1$ m. Круговая орбита электрона проходит через точку столкновения, поэтому её центр находится на расстоянии r от этой точки. Следовательно, максимальное радиальное расстояние электрона от точки столкновения равно $2r$.

Предельная орбита касается цилиндрической границы при

$$2r = R.$$

Минимальный полный импульс соответствует движению перпендикулярно полю соленоида. Поэтому пороговое значение импульса для выхода из детектора равно

$$p_{\min} = eB \frac{R}{2} = (1.60 \times 10^{-19})(2.00) \frac{1.1}{2} = 1.76 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Поскольку

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{10^6(1.60 \times 10^{-19})}{3.00 \times 10^8} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1},$$

получаем

$$p_{\min} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c.$$

При импульсе чуть выше этого порога орбита пересекает цилиндрическую границу.

A.3

Для ускорения, перпендикулярного скорости, релятивистское уравнение движения в поперечном направлении имеет вид

$$evB = \gamma m a,$$

поэтому нормальное ускорение равно

$$a = \frac{evB}{\gamma m}.$$

Подстановка в данную формулу мощности излучения даёт

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{\gamma^2 m^2} \gamma^4 = \frac{e^4 B^2 v^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

В ультрарелятивистском пределе $v \simeq c$, а полная энергия равна $E = \gamma m c^2$. Следовательно,

$$P \simeq \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{m c^2} \right)^2 = \frac{e^4 E^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

Сравнение с требуемым видом выражения даёт

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$$

A.4

Магнитная сила не совершает работы, поэтому энергия электрона уменьшается на величину излучённой энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\alpha E^2,$$

где, согласно А.3,

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

Интегрируя с учётом $E(0) = E_0$, получаем

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^2} = -\alpha \int_0^t dt,$$

откуда

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \alpha t.$$

Следовательно,

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

как и указано в условии.

A.5

Сначала оценим кривизну траектории. Для ультрарелятивистского электрона $p \simeq E/c$, поэтому его начальный циклотронный радиус равен

$$r_0 \simeq \frac{E_0}{eBc}.$$

Здесь

$$E_0 = 100 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-8} \text{ J},$$

и, следовательно,

$$r_0 = \frac{1.60 \times 10^{-8}}{(1.60 \times 10^{-19})(2.00)(3.00 \times 10^8)} = 1.67 \times 10^2 \text{ m}.$$

Поскольку $r_0 \gg R = 1.1 \text{ m}$, траектория внутри детектора почти прямолинейна. Поэтому

$$t_{\text{exit}} \simeq \frac{R}{c} = \frac{1.1}{3.00 \times 10^8} = 3.67 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

Используя приведённые значения констант, получаем

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} = 9.39 \times 10^{12} \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

и

$$\alpha E_0 t_{\text{exit}} = 5.51 \times 10^{-4}.$$

Потерянная энергия равна

$$\Delta E = E_0 - \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}} = \frac{\alpha E_0^2 t_{\text{exit}}}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}}.$$

Численно

$$\Delta E = 8.81 \times 10^{-12} \text{ J} = 55.1 \text{ MeV}.$$

Таким образом, с разумной точностью,

$$\boxed{\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}}.$$

Это составляет лишь около 5.5×10^{-4} начальной энергии, что подтверждает, что радиус остаётся очень большим на протяжении всего пролёта.

A.6

Мгновенная угловая скорость вращения импульса равна

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

Используя $E = \gamma mc^2$, получаем

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E(t)}.$$

Подставляя результат A.4, находим

$$\boxed{\omega(t) = \frac{eBc^2}{E_0}(1 + \alpha E_0 t)}.$$

Следовательно, обычная частота, измеряемая числом оборотов в секунду, равна

$$\boxed{f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t)}.$$

Обе частоты линейно возрастают со временем в рамках ультрарелятивистского приближения.

B.1

Закон сохранения четырёхимпульса при $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ даёт

$$E_W = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}_W = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}.$$

Инвариантная масса системы двух частиц удовлетворяет соотношению

$$m_W^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2 - c^2 |\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}|^2.$$

Обе дочерние частицы считаются безмассовыми, поэтому

$$E_\mu = c|\vec{p}^{(\mu)}|, \quad E_\nu = c|\vec{p}^{(\nu)}|.$$

При раскрытии выражения для инварианта слагаемые с квадратами энергии и импульса каждой отдельной частицы сокращаются:

$$m_W^2 c^4 = 2 \left(E_\mu E_\nu - c^2 \vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} \right).$$

Теперь

$$|\vec{p}^{(a)}| = \sqrt{(p_T^{(a)})^2 + (p_z^{(a)})^2},$$

и

$$\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} = \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} + p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

Следовательно, искомое соотношение имеет вид

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right] - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}}.$$

B.2

Введём обозначения

$$q = p_z^{(\nu)}, \quad \ell = p_z^{(\mu)}, \quad a = (p_T^{(\mu)})^2, \quad b = (p_T^{(\nu)})^2,$$

и положим

$$p_\mu = |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad D = \frac{m_W^2 c^2}{2} + \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)}.$$

Уравнение из B.1 принимает вид

$$p_\mu \sqrt{b + q^2} = D + \ell q.$$

Возводя в квадрат и используя $p_\mu^2 - \ell^2 = a$, получаем

$$a q^2 - 2 D \ell q + p_\mu^2 b - D^2 = 0.$$

Его корни равны

$$q = \frac{D \ell \pm p_\mu \sqrt{D^2 - a b}}{a}.$$

Из измеренных компонент получаем

$$\begin{aligned} a &= 24.7^2 + 24.9^2 = 1230.1 \text{ (GeV/c)}^2, \\ b &= 104.1^2 + 5.3^2 = 10864.9 \text{ (GeV/c)}^2, \\ p_\mu &= \sqrt{24.7^2 + 24.9^2 + 12.4^2} = 37.2003 \text{ GeV/c}, \\ \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} &= (-24.7)(-104.1) + (-24.9)(5.3) \\ &= 2439.3 \text{ (GeV/c)}^2, \\ D &= \frac{80.4^2}{2} + 2439.3 = 5671.38 \text{ (GeV/c)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, численные значения двух корней равны

$$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}, \quad q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}.$$

Оба удовлетворяют исходному уравнению до возведения в квадрат. Следовательно,

$$p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV/c} \quad \text{или} \quad -188 \text{ GeV/c}.$$

B.3

Топ-кварк распадается на антимюон, нейтрино и струю боттом-кварка. Законы сохранения энергии и импульса дают

$$E_t = E_\mu + E_\nu + E_{j_1}, \quad \vec{p}_t = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)}.$$

Поскольку все три продукта распада считаются безмассовыми,

$$E_t = c \left(|\vec{p}^{(\mu)}| + |\vec{p}^{(\nu)}| + |\vec{p}^{(j_1)}| \right).$$

Модуль импульса струи равен

$$|\vec{p}^{(j_1)}| = \sqrt{(-14.2)^2 + 50.1^2 + 94.1^2} = 107.5475 \text{ GeV}/c.$$

Обозначая через q его численное значение в GeV/c , получаем

$$E_t = \left[37.2003 + 107.5475 + \sqrt{10864.9 + q^2} \right] \text{ GeV},$$

и

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 81.7 + q) \text{ GeV}/c.$$

Восстановленная масса топ-кварка находится из соотношения

$$m_t^2 c^4 = E_t^2 - c^2 |\vec{p}_t|^2.$$

Сохраняя дополнительные значащие цифры в ходе вычислений, получаем:

Решение для нейтрино	E_ν (ГэВ)	E_t (ГэВ)	p_{tz} (ГэВ/ c)	m_t (ГэВ/ c^2)
$q_+ = 73.9532 \text{ GeV}/c$	127.804	272.552	155.653	169.344
$q_- = -188.2937 \text{ GeV}/c$	215.219	359.967	-106.594	311.183

Следовательно,

$$m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{при } p_z^{(\nu)} > 0,$$

$$m_t \simeq 311 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{при } p_z^{(\nu)} < 0.$$

В.4

Масса $169 \text{ GeV}/c^2$ находится вблизи максимума распределения на рисунке 2, тогда как $311 \text{ GeV}/c^2$ соответствует его малому хвосту со стороны больших масс. Поэтому решение с положительным $p_z^{(\nu)}$ более вероятно.

Считывая ординату кривой полного распределения вблизи $169 \text{ GeV}/c^2$, получаем

$$P \simeq 0.12 \quad \text{или приблизительно } 12\%.$$

Соответствующий восстановленный импульс нейтрино равен

$$\vec{p}^{(\nu)} \simeq (-104.1, +5.3, +74.0) \text{ GeV}/c.$$

В.5

Для более вероятного решения

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 155.653) \text{ GeV}/c,$$

поэтому

$$|\vec{p}_t| = 213.558 \text{ GeV}/c.$$

Лоренц-фактор и скорость топ-кварка равны

$$\gamma_t = \frac{E_t}{m_t c^2} = \frac{272.552}{169.344} = 1.609,$$

$$\beta_t = \frac{|\vec{p}_t| c}{E_t} = \frac{213.558}{272.552} = 0.7836.$$

Среднее время жизни в системе отсчёта детектора равно $\gamma_t \tau_0$. Следовательно, среднее пройденное расстояние равно

$$\bar{L} = v_t \gamma_t \tau_0 = \beta_t \gamma_t c \tau_0 = \frac{|\vec{p}_t| c}{m_t c^2} c \tau_0.$$

Подстановка даёт

$$\bar{L} = \frac{213.558}{169.344} (3.00 \times 10^8) (5 \times 10^{-25}) = 1.89 \times 10^{-16} \text{ м}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ м}}.$$

Это среднее расстояние, поскольку заданное время жизни в системе покоя является средним временем жизни.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Физика живых систем

Дано: нормальное атмосферное давление, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Па} = 760 \text{ mmHg}$

Часть А. Физика кровотока (4.5 балла)

В этой части вы проанализируете две упрощённые модели течения крови в сосудах.

Кровеносные сосуды имеют приблизительно цилиндрическую форму. Известно, что при стационарном нетурбулентном течении несжимаемой жидкости в жёстком цилиндре разность давлений жидкости на двух концах цилиндра определяется выражением

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

где ℓ и r — длина и радиус цилиндра, η — вязкость жидкости, а Q — объёмный расход, то есть объём жидкости, проходящий через поперечное сечение цилиндра за единицу времени. Это выражение часто позволяет правильно оценить порядок величины разности давлений в сосуде даже без учёта пульсирующего характера течения, сжимаемости сосуда и неправильности его формы, а также того факта, что кровь представляет собой не простую жидкость, а смесь клеток и плазмы. Кроме того, это выражение имеет тот же вид, что и закон Ома: объёмный расход можно интерпретировать как ток, разность давлений — как напряжение, а множитель $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ — как сопротивление.

Рассмотрим, например, симметричную сеть артериол (мелких артерий), изображённую на рисунке 1, которая доставляет кровь к капиллярному руслу ткани. В этой сети при каждом разветвлении сосуд разделяется на два одинаковых сосуда. Однако сосуды более высоких уровней тоньше и короче: считайте, что радиусы и длины сосудов двух последовательных уровней, i и $i + 1$, связаны соотношениями $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ и $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.

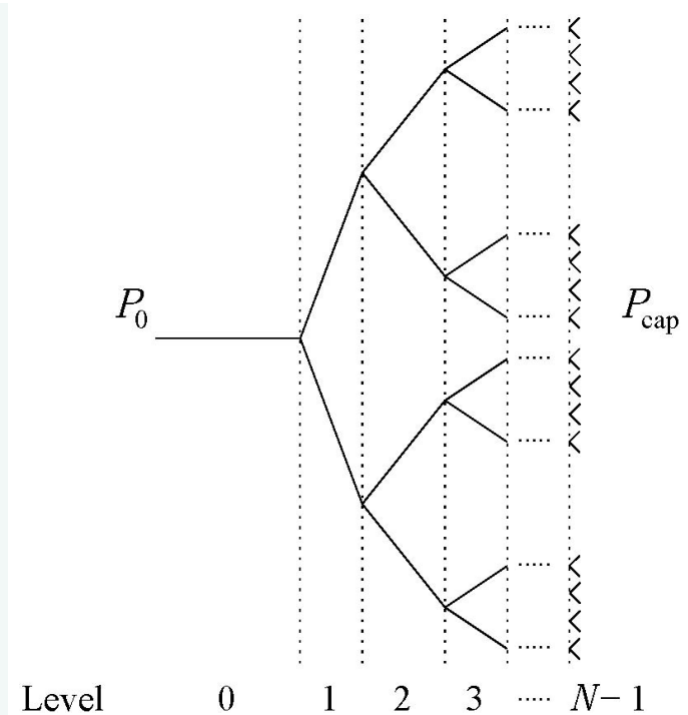


Рисунок 1. Сеть артериол.

A.1 (1.3 балла)

Получите выражение для объёмного расхода Q_i в сосуда произвольного уровня i как функции общего числа уровней N , вязкости η , радиуса r_0 и длины ℓ_0 первого сосуда, а также разности $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ между давлением в артериоле уровня 0, P_0 , и давлением в капиллярном русле, P_{cap} .

A.2 (0.5 балла)

Вычислите численное значение объёмного расхода Q_0 в артериоле уровня 0, если её радиус равен $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$, а длина — $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$. Считайте, что давление на входе в артериолу равно 55 мм рт. ст., а сеть сосудов имеет $N = 6$ уровней, соединяющих эту артериолу с капиллярным руслем, давление в котором равно 30 мм рт. ст. Считайте, что вязкость крови равна $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Выразите результат в мл/ч.

Кровеносный сосуд как LCR-цепь

Приближение жёстких цилиндрических сосудов оказывается недостаточным по нескольким причинам. Особенно важно учесть зависимость кровотока от времени и изменение диаметра сосуда при изменении давления в течение цикла перекачивания крови сердцем. Кроме того, наблюдается, что в крупных сосудах давление крови существенно меняется в течение цикла, тогда как в мелких сосудах амплитуда колебаний давления гораздо меньше и течение почти не зависит от времени.

При повышении давления в отдельном эластичном сосуде его диаметр увеличивается, что позволяет накапливать в сосуде дополнительную жидкость и отдавать её при падении давления. Поэтому упругие свойства сосуда можно моделировать, добавив конденсатор к нашему исходному описанию. Кроме того, при учёте зависимости объёмного расхода крови от времени необходимо учитывать инерцию жидкости, пропорциональную её плотности

$\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. В нашей модели эту инерцию можно описать с помощью индуктивности. На рисунке 2 представлена эквивалентная цепь для отдельного сосуда в этой модели. Эквивалентные ёмкость и индуктивность задаются выражениями

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{и} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

соответственно, где h — толщина стенки сосуда, а E — модуль Юнга артерии, коэффициент, описывающий изменение размеров ткани сосуда при приложении силы. Модуль Юнга имеет размерность давления и для артериол составляет величину порядка $E = 0.06 \text{ МПа}$.

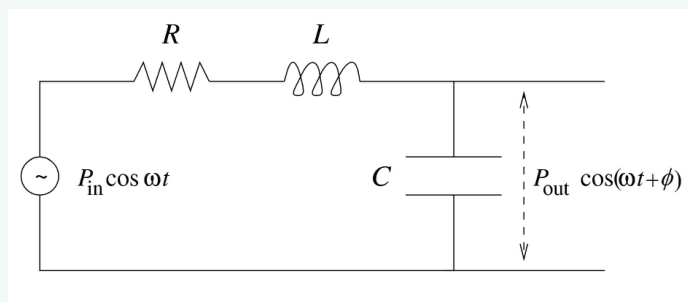


Рисунок 2. Эквивалентная электрическая цепь для отдельного сосуда.

A.3 (2.0 балла)

Получите для установившегося режима амплитуду давления на выходе из сосуда P_{out} как функцию амплитуды давления на входе P_{in} , эквивалентного сопротивления R , индуктивности L и ёмкости C для течения с угловой частотой ω . Установите условие на η , ρ , E , h , r и ℓ , при котором на низких частотах амплитуда колебаний давления на выходе меньше P_{in} .

A.4 (0.7 балла)

Для сети сосудов из A.2 оцените максимальную толщину стенки артериолы h , при которой выполняется условие, установленное в A.3 (считайте, что h не зависит от уровня).

Часть В. Рост опухоли (5.5 балла)

Рост опухоли — очень сложный процесс, в котором биологические механизмы, такие как размножение клеток и естественный отбор, переплетаются с физическими явлениями. В этой задаче мы рассмотрим упрощённую модель роста опухоли, описывающую повышение давления, обычно наблюдаемое в солидных опухолях.

Рассмотрим группу нормальных клеток, образующих ткань, окружённую нерастяжимой базальной мембраной, которая заставляет ткань всегда сохранять одну и ту же форму: шар радиуса R (рисунок 3).

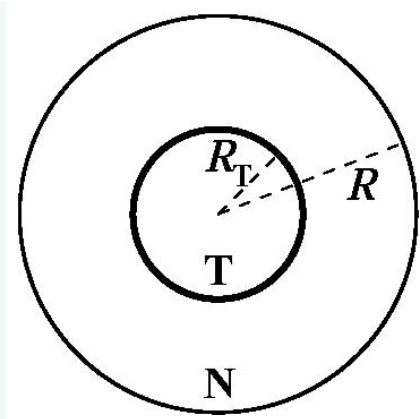


Рисунок 3. Упрощённая модель опухоли.

Первоначально в ткани отсутствуют остаточные напряжения, то есть давление в каждой точке равно атмосферному.

В момент времени $t = 0$ в центре этого шара начинает расти опухоль, и по мере её роста давление внутри ткани повышается. Считайте, что обе ткани (нормальная, N, и опухолевая, T) сжимаемы, причём их плотности, ρ_N и ρ_T , линейно возрастают с давлением:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

где ρ_0 — плотность ткани в ненапряжённом состоянии, p — разность между давлением в ткани и атмосферным давлением, а K_N , K_T — модули объёмного сжатия нормальной и опухолевой тканей соответственно. Как правило, опухоли более жёсткие и поэтому имеют больший модуль объёмного сжатия.

В.1 (1.0 балла)

Масса нормальных клеток не изменяется при росте опухоли. Получите отношение объёма опухоли к общему объёму ткани, $v = V_T/V$, как функцию отношения массы опухоли (M_T) к массе нормальной ткани (M_N), $\mu = M_T/M_N$, и отношения модулей объёмного сжатия, $\kappa = K_N/K_T$.

При лечении рака наряду с химиотерапией и лучевой терапией иногда применяется гипертермия. При гипертермии раковые клетки избирательно нагревают от нормальной температуры человеческого тела, 37°C , до температуры выше 43°C , вызывая их гибель. В настоящее время исследователи разрабатывают углеродные нанотрубки, покрытые специальными белками, способными связываться с опухолевыми клетками. При облучении ткани излучением ближнего инфракрасного диапазона нанотрубки поглощают его гораздо сильнее, чем окружающие ткани, и поэтому могут избирательно нагреваться вместе с опухолевыми клетками, к которым они прикреплены.

Считайте, что опухоль, нормальные клетки и окружающая ткань имеют постоянный коэффициент теплопроводности k , то есть в геометрии данной задачи энергия, проходящая через сферическую поверхность радиуса r за единицу времени на единицу площади, равна произведению k на производную температуры по r . Нанотрубки равномерно распределены по объёму опухоли и могут выделять тепловую мощность $\mathcal{P}$ на единицу объёма.

Предположите, что очень далеко от опухоли температура равна нормальной температуре человеческого тела.

В.2 (1.7 балла)

Получите для стационарного состояния температуру в центре опухоли как функцию $\mathcal{P}$, k , температуры человеческого тела и радиуса опухоли R_T .

В.3 (0.5 балла)

Получите минимальную мощность на единицу объёма $\mathcal{P}_{\min}$, необходимую для нагревания всех опухолевых клеток в опухоли радиуса 5.0 см до температуры выше 43.0°C . Примите коэффициент теплопроводности ткани равным $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Считайте, что опухоль снабжается кровью через сеть сосудов с разветвлённой структурой, как в вопросе **A.1**. По мере роста опухоли, когда давление в ней p становится больше давления P_{cap} в самых тонких сосудах, радиусы этих сосудов уменьшаются на малую величину δr . Если это давление достигнет критического значения p_c (которому соответствовало бы уменьшение радиуса на δr_c), самые тонкие сосуды спадутся, что серьёзно нарушит кровоснабжение опухоли. Давление и изменение радиуса можно связать следующим феноменологическим соотношением:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Считайте, что при повышении давления в опухоли радиус изменяется только у самых мелких сосудов (уровня $N - 1$).

В.4 (2.3 балла)

В линейном режиме (то есть считая $p - P_{\text{cap}}$ очень малой величиной) выразите относительное уменьшение расхода $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ в этих самых тонких сосудах как функцию объёмной доли опухоли $v = V_T/V$ и величин K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы• **A.1**

$$Q_i = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8 \eta \ell_0 N 2^i}, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

• **A.2**

$$Q_0 = 1.4536 \dots \text{ ml/h} \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

• A.3

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

Для ослабления колебаний на достаточно низких ненулевых частотах необходимо

$$R^2 C \geq 2L \iff h \leq \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

Для ослабления в порядке ω^2 неравенство должно быть строгим; равенство даёт ослабление в порядке ω^4 .

• A.4

$$h_{\text{max}} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ }\mu\text{m}.$$

Самое жёсткое ограничение накладывает уровень 0.

• B.1

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

• B.2 Если T_b — нормальная температура тела, то

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

• B.3

$$\mathcal{P}_{\text{min}} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Это пороговое значение; чтобы температура всюду строго превышала 43.0°C , объёмная плотность мощности должна быть больше него.

• B.4 Если под δQ_{N-1} понимать положительную величину уменьшения расхода, то

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

Это выражение применимо непосредственно после начала сжатия, когда $p > P_{\text{cap}}$.

Решение

A.1

Из закона изменения геометрических размеров следует

$$r_i = r_0 2^{-i/3}, \quad \ell_i = \ell_0 2^{-i/3}.$$

Следовательно, гидравлическое сопротивление одного сосуда уровня i равно

$$R_i = \frac{8\eta\ell_i}{\pi r_i^4} = \frac{8\eta\ell_0}{\pi r_0^4} 2^i = R_0 2^i.$$

Из сохранения объёмного расхода и симметрии следует, что при каждом разветвлении поток делится поровну. Поэтому

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i}.$$

Таким образом, падение давления на любом одном сосуде уровня i равно

$$\Delta P_i = R_i Q_i = R_0 Q_0.$$

Любой путь от входа до капиллярного русла проходит через один сосуд каждого из N уровней. Складывая падения давления вдоль такого пути, получаем

$$\Delta P = N R_0 Q_0.$$

Отсюда

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i} = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8\eta\ell_0 N 2^i}.$$

То же самое можно выразить иначе: каждый уровень вносит вклад $R_i/2^i = R_0$ в полное сопротивление сети, поэтому $R_{\text{eq}} = N R_0$.

A.2

Используя данное соотношение между миллиметрами ртутного столба и паскалями, получаем

$$\Delta P = (55 - 30) \frac{1.013 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 3.3322 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Следовательно,

$$Q_0 = \frac{\pi(6.0 \times 10^{-5})^4(3.3322 \times 10^3)}{8(3.5 \times 10^{-3})(2.0 \times 10^{-3})(6)} = 4.0379 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Поскольку $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ ml}$ и $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$,

$$Q_0 = (4.0379 \times 10^{-10})(10^6)(3600) = 1.4536 \text{ ml/h}.$$

С точностью до двух значащих цифр

$$Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

A.3

В электрической аналогии давлению соответствует напряжение, а объёмному расходу — ток. Соотношение для конденсатора и баланс давлений в цепи имеют вид

$$Q = C \frac{dp_{\text{out}}}{dt}, \quad p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = RQ + L \frac{dQ}{dt}.$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$LC \frac{d^2 p_{\text{out}}}{dt^2} + RC \frac{dp_{\text{out}}}{dt} + p_{\text{out}} = p_{\text{in}}.$$

После затухания переходных процессов входное и выходное давления колеблются с одной и той же угловой частотой. Представляя их комплексными амплитудами, получаем

$$(1 - \omega^2 LC + i\omega RC) \tilde{P}_{\text{out}} = \tilde{P}_{\text{in}}.$$

Взяв модули, находим

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Квадрат знаменателя равен

$$1 + C(R^2 C - 2L)\omega^2 + L^2 C^2 \omega^4.$$

При достаточно малых ненулевых ω для ослабления в главном порядке необходимо

$$R^2 C > 2L.$$

Если $R^2 C < 2L$, то на достаточно низких частотах знаменатель меньше единицы и колебания давления усиливаются. На границе $R^2 C = 2L$ квадрат знаменателя принимает вид

$$1 + L^2 C^2 \omega^4 > 1, \text{ поэтому на границе колебания также ослабляются, хотя лишь в порядке } \omega^4.$$

Таким образом, точное условие имеет вид $R^2 C \geq 2L$.

Подставляя заданные параметры сосуда, получаем

$$R^2 C = \left(\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} \right)^2 \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} = \frac{96\eta^2 \ell^3}{\pi E h r^5},$$

тогда как

$$2L = \frac{9\ell\rho}{2\pi r^2}.$$

Следовательно,

$$64\eta^2 \ell^2 \geq 3\rho E h r^3$$

или, что эквивалентно,

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

Для ослабления в порядке ω^2 эти неравенства следует заменить строгими. При нулевой частоте коэффициент передачи по давлению точно равен единице.

A.4

На уровне i

$$h_{\text{crit},i} = \frac{64\eta^2 \ell_i^2}{3\rho E r_i^3} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} 2^{i/3}.$$

Эта верхняя граница возрастает с номером уровня. Поскольку одна и та же толщина стенки должна удовлетворять условию на каждом уровне, самое жёсткое ограничение накладывает уровень 0.

Используя $E = 0.06 \times 10^6$ Па, получаем

$$h_{\text{max}} = \frac{64(3.5 \times 10^{-3})^2 (2.0 \times 10^{-3})^2}{3(1.05 \times 10^3)(0.06 \times 10^6)(6.0 \times 10^{-5})^3} = 7.6818 \times 10^{-5} \text{ м.}$$

Таким образом, в рамках данной модели

$$h_{\max} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ }\mu\text{m}.$$

При толщине меньше этого предельного значения строгое условие ослабления в главном порядке выполняется во всей сети.

В.1

Общий объём ткани V фиксирован. Первоначально его занимает нормальная ткань плотности ρ_0 , поэтому из сохранения массы нормальных клеток следует

$$M_N = \rho_0 V = \rho_N (V - V_T).$$

Обозначая $v = V_T/V$ и используя уравнение (3), получаем

$$1 = \left(1 + \frac{p}{K_N}\right)(1 - v).$$

Следовательно, давление связано с объёмом опухоли соотношением

$$p = \frac{K_N v}{1 - v}.$$

Масса опухоли равна

$$M_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T.$$

Деля на $M_N = \rho_0 V$, получаем

$$\mu = v \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) = v \left(1 + \frac{\kappa v}{1 - v}\right).$$

После преобразования получаем квадратное уравнение для v :

$$(1 - \kappa)v^2 - (1 + \mu)v + \mu = 0.$$

Физически допустимый корень стремится к нулю при стремлении μ к нулю. При $\kappa \neq 1$ он равен

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(1 - \kappa)\mu}}{2(1 - \kappa)}.$$

Умножение числителя и знаменателя на сопряжённое выражение даёт форму, непосредственно применимую и при $\kappa = 1$:

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

Для проверки заметим, что при одинаковых модулях объёмного сжатия обе ткани имеют одинаковую плотность, откуда $v = \mu/(1 + \mu)$, что согласуется с полученным выражением.

В.2

Пусть T_b — температура тела вдали от опухоли. В стационарном состоянии поток тепла наружу через сферу равен полной мощности, выделяющейся внутри неё. Считая поток тепла наружу положительным, запишем закон Фурье:

$$\dot{H}(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

Внутри опухоли, $0 \leq r \leq R_T$, равномерное тепловыделение даёт

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi r^3}{3} \mathcal{P},$$

откуда

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}r}{3k}.$$

Вне опухоли вся выделяемая мощность проходит через каждую сферическую поверхность:

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi R_T^3}{3} \mathcal{P}.$$

Интегрируя с условием $T(r) \rightarrow T_b$ при $r \rightarrow \infty$, получаем

$$T(r) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}, \quad r \geq R_T.$$

Таким образом, температура на поверхности опухоли равна

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

Температура непрерывна на поверхности. Интегрируя внутренний градиент от этой поверхности к центру, получаем

$$T(r) = T(R_T) + \frac{\mathcal{P}}{6k}(R_T^2 - r^2) = T_b + \frac{\mathcal{P}}{6k}(3R_T^2 - r^2).$$

Следовательно,

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

Внутри опухоли температура убывает по квадратичному закону, а снаружи приближается к T_b по закону $1/r$.

В.3

Температура уменьшается с расстоянием от центра, поэтому самые холодные опухолевые клетки находятся на поверхности. Следовательно, для нагревания каждой опухолевой клетки выше 43.0°C необходимо

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k} > 43.0^\circ\text{C}.$$

Пороговая объёмная плотность мощности равна

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2}.$$

Подставляя $R_T = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$, получаем

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3(0.60)(6.0)}{(5.0 \times 10^{-2})^2} = 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}_{\min} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

При этом пороговом значении температура поверхности точно равна 43.0°C , а температура в центре — 46.0°C . Чтобы температура всюду строго превышала указанное значение, необходимо $P > 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}$.

B.4

Сначала линеаризуем связь между давлением и радиусом. Уравнение (4) можно записать в виде

$$p - P_{\text{cap}} = (p_c - P_{\text{cap}}) \left[2 \frac{\delta r}{\delta r_c} - \left(\frac{\delta r}{\delta r_c} \right)^2 \right].$$

На ветви, связанной с несжатым состоянием, достаточно близко к $p = P_{\text{cap}}$,

$$\delta r \simeq \frac{\delta r_c}{2(p_c - P_{\text{cap}})} (p - P_{\text{cap}}).$$

Радиус изменяется только у концевых сосудов. Положим

$$\epsilon = \frac{\delta r}{r_{N-1}} \ll 1.$$

Их длины остаются неизменными, поэтому закон Пуазейля даёт

$$R'_{N-1} = R_{N-1}(1 - \epsilon)^{-4} \simeq R_{N-1}(1 + 4\epsilon).$$

Согласно **A.1**, все 2^{N-1} концевых сосудов первоначально вносят суммарный вклад R_0 в сопротивление сети. Остальные $N - 1$ уровней остаются неизменными. Поэтому

$$R'_{\text{eq}} = (N - 1)R_0 + R_0(1 - \epsilon)^{-4} \simeq NR_0 + 4R_0\epsilon.$$

При фиксированных давлениях на входе и в капиллярном русле общий расход обратно пропорционален R'_{eq} . В силу симметрии расход через концевой сосуд по-прежнему равен общему расходу, делённому на 2^{N-1} , поэтому его относительное уменьшение совпадает с относительным уменьшением общего расхода:

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{R'_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

Множитель $1/N$ учитывает тот факт, что изменяется лишь один из N равных вкладов в сопротивление.

Подставляя линеаризованное изменение радиуса, получаем

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}} \frac{p - P_{\text{cap}}}{p_c - P_{\text{cap}}}.$$

Наконец, сохранение массы нормальных клеток из **B.1** даёт $p = K_N v / (1 - v)$. Следовательно,

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

Это выражение применимо при объёмной доле, лишь немного превышающей порог начала сжатия

$$v_* = \frac{P_{\text{cap}}}{K_N + P_{\text{cap}}},$$

при условии $(p - P_{\text{cap}})/(p_c - P_{\text{cap}}) \ll 1$ и $\delta r/r_{N-1} \ll 1$. Ниже порога заданная модель не предусматривает сужения сосудов.

Решение проверено по официальному решению.