

IPhO 2018

Problemas teóricos y soluciones · Lisboa, Portugal · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2018/

Problema 1: LIGO-GW150914

En 2015, el observatorio de ondas gravitacionales LIGO detectó, por primera vez, el paso de ondas gravitacionales (GW) a través de la Tierra. Este evento, denominado GW150914, se debió a las ondas producidas por dos agujeros negros que describían órbitas cuasicirculares. En este problema estimará algunos parámetros físicos del sistema a partir de las propiedades de la señal detectada.

Parte A: Órbitas newtonianas (conservativas) (3.0 puntos)

A.1 1.0pt

Considere un sistema de dos estrellas de masas M_1, M_2 , situadas en las posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, respectivamente, con respecto al centro de masas del sistema, es decir,

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Las estrellas están aisladas del resto del Universo y se mueven a velocidades no relativistas. Utilizando las leyes de Newton, el vector aceleración de la masa M_1 puede expresarse como

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

donde $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Halle $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, donde G es la constante de gravitación de Newton [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

A.2 1.0pt

La energía total del sistema de 2 masas, en órbitas circulares, puede expresarse como:

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

donde

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

son la masa reducida y la masa total del sistema, Ω es la velocidad angular de cada masa y L es la separación total $L = r_1 + r_2$. Obtenga la forma explícita del término $A(\mu, \Omega, L)$.

A.3 1.0pt

La ecuación 3 puede simplificarse a $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Determine el número β .

Parte B: Introducción de la disipación relativista (7.0 puntos)

La teoría correcta de la gravedad, la *relatividad general*, fue formulada por Einstein en 1915 y predice que la gravedad se propaga a la velocidad de la luz. Los mensajeros que transportan información sobre la interacción se denominan GW. Las GW se emiten siempre que las masas se aceleran, lo que hace que el sistema de masas pierda energía.

Considere un sistema de dos partículas puntuales, aislado del resto del Universo. Einstein demostró que, para velocidades suficientemente pequeñas, las GW emitidas: 1) tienen una frecuencia igual al doble de la frecuencia orbital; 2) pueden caracterizarse mediante una luminosidad, es decir, una potencia emitida $\mathcal{P}$, cuyo término dominante viene dado por la fórmula cuadrupolar de Einstein,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Aquí, c es la velocidad de la luz $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Para un sistema de 2 partículas puntuales que orbitan en el plano $x - y$, Q_{ij} es la siguiente matriz (i, j indican el número de fila/columna)

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \\ Q_{22} &= \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Q_{33} &= - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \\ Q_{12} &= Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \end{aligned} \quad (7)$$

y $Q_{ij} = 0$ para todas las demás posibilidades. Aquí, (x_A, y_A) es la posición de la masa A en el sistema de referencia del centro de masas.

B.1 1.0pt

Para las órbitas circulares descritas en A.2, las componentes de Q_{ij} pueden expresarse en función del tiempo t como:

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij}^{i \neq j} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Determine k en función de Ω y los valores numéricos de las constantes a_i, b_i, c_{ij} .

B.2 1.0pt

Calcule la potencia $\mathcal{P}$ emitida en ondas gravitacionales por ese sistema y obtenga:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

¿Cuál es el número ξ ? [Si no ha podido obtener ξ , utilice $\xi = 6.4$ en lo que sigue.]

B.3 1.0pt

En ausencia de emisión de GW, las dos masas describirán una órbita circular fija indefinidamente. Sin embargo, la emisión de GW hace que el sistema pierda energía y evolucione lentamente hacia órbitas circulares más pequeñas. Demuestre que la tasa de variación $\frac{d\Omega}{dt}$ de la velocidad angular orbital tiene la forma

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

donde M_c se denomina masa de chirrido. Obtenga M_c en función de M y μ . Esta masa determina el aumento de la frecuencia durante el decaimiento orbital. [El nombre «chirrido» se inspira en el sonido agudo (de frecuencia creciente) producido por los pájaros pequeños.]

B.4 2.0pt

Utilizando la información anterior, relacione la velocidad angular orbital Ω con la frecuencia de las GW f_{GW} . Sabiendo que, para cualquier función suave $F(t)$ y $a \neq 1$,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

donde χ es una constante y t_0 es una constante de integración, demuestre que (10) implica que la frecuencia de las GW es

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

y determine la constante p .

El 14 de septiembre de 2015, GW150914 fue registrado por los detectores LIGO, que constan de dos brazos dispuestos en forma de L, cada uno de 4 km de longitud. La longitud relativa de estos brazos varió según la Fig. 1. Los brazos del detector responden linealmente al paso de una onda gravitacional, y el patrón de respuesta reproduce la onda. Esta onda fue generada por dos agujeros negros en órbitas cuasicirculares; la pérdida de energía por radiación gravitacional hizo que la órbita se contrajera y que los agujeros negros acabaran colisionando. El instante de la colisión corresponde, aproximadamente, al máximo de la señal posterior al punto D de la Fig. 1.

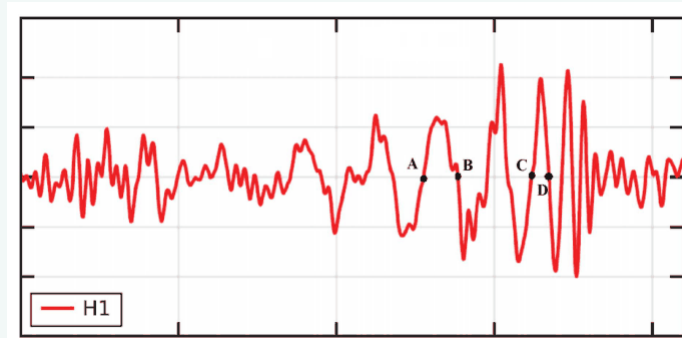


Figura 1. Deformación, es decir, variación relativa del tamaño de cada brazo, en el detector LIGO H1. El eje horizontal representa el tiempo, y los puntos A, B, C, D corresponden a $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ segundos, respectivamente.

B.5 1.0pt

A partir de la figura, estime $f_{\text{GW}}(t)$ en

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad y \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Suponiendo que (12) es válida hasta la colisión (lo cual, estrictamente hablando, no es cierto) y que los dos objetos tienen la misma masa, estime la masa de chirrido, M_c , y la masa total del sistema, en unidades de masas solares $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

B.6 1.0pt

Estime la separación orbital mínima entre los dos objetos en $t_{\overline{CD}}$. A partir de ella, estime un tamaño máximo para cada objeto, $R_{\max}$. Obtenga $R_\odot/R_{\max}$ para comparar este tamaño con el radio de nuestro Sol, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 \text{ km}$. Estime también su velocidad lineal orbital en ese mismo instante, v_{col} , comparándola con la velocidad de la luz, v_{col}/c .

¡Concluya que se trata, en efecto, de objetos extremadamente compactos que se mueven a velocidades extremadamente altas!

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.1:** $n = 3$, $\alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}$.
- **A.2:** $A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2}\mu\Omega^2 L^2$.
- **A.3:** $\beta = -\frac{1}{2}$.
- **B.1:** Con las masas sobre el eje x en $t = 0$ y movimiento orbital en sentido antihorario,

$$k = 2\Omega, \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 0).$$

Además, $c_{12} = c_{21} = 1$; todos los demás c_{ij} fuera de la diagonal son nulos.

- **B.2:** $\xi = \frac{32}{5} = 6.4$, $\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6$.
- **B.3:** $M_c = \mu^{3/5} M^{2/5}$, con

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

- **B.4:** $f_{\text{GW}} = \frac{\Omega}{\pi}$, $p = 1$, y

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} (t_0 - t).$$

- **B.5:** $f_{\text{GW}}(0.0045 \text{ s}) \simeq 56 \text{ Hz}$, $f_{\text{GW}}(0.037 \text{ s}) \simeq 83 \text{ Hz}$; $M_c \simeq 30M_\odot$, $M \simeq 69M_\odot$.
- **B.6:** $L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^2 \text{ km}$, $R_{\max} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}$, $R_\odot/R_{\max} \simeq 2.7 \times 10^3$. La rapidez orbital de cada objeto es $v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}$, por lo que $v_{\text{col}}/c \simeq 0.22$.

Solución

A.1

La ley de gravitación de Newton da la aceleración de la primera estrella:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -GM_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

La condición del centro de masas implica

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}.$$

Al comparar con (2), se obtiene

$$n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

A.2

La condición del centro de masas y $L = r_1 + r_2$ dan

$$r_1 = \frac{M_2}{M} L, \quad r_2 = \frac{M_1}{M} L.$$

Las estrellas tienen rapidez orbital $v_1 = \Omega r_1$ y $v_2 = \Omega r_2$. Por tanto, su energía cinética total es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 \Omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \Omega^2 r_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 L^2 \left(\frac{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2}{M^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2. \end{aligned}$$

La energía potencial gravitatoria, tomando el cero a una separación infinita, es

$$U = -\frac{GM_1 M_2}{L} = -\frac{GM\mu}{L}.$$

Así pues, el término A es la energía cinética:

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2.$$

A.3

Para la primera estrella, la gravedad proporciona la fuerza centrípeta:

$$M_1 \Omega^2 r_1 = \frac{GM_1 M_2}{L^2}.$$

Utilizando $r_1 = M_2 L / M$, obtenemos la relación para las órbitas circulares

$$\Omega^2 = \frac{GM}{L^3}.$$

Por tanto,

$$T = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2 = \frac{GM\mu}{2L},$$

y

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{2L}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}.$$

B.1

Elegimos el origen de tiempos de modo que la primera masa se encuentre sobre el semieje x positivo en $t = 0$, con movimiento en sentido antihorario. Entonces

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t), \\ (x_2, y_2) &= (-r_2 \cos \Omega t, -r_2 \sin \Omega t).\end{aligned}$$

De A.2,

$$M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2.$$

Al sustituir en las componentes del cuadrupolo, se obtiene

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{\mu L^2}{3} (2 \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Omega t \right), \\ Q_{22} &= \frac{\mu L^2}{3} (2 \sin^2 \Omega t - \cos^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right), \\ Q_{33} &= -\frac{\mu L^2}{3} = \frac{\mu L^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right), \\ Q_{12} = Q_{21} &= \mu L^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{\mu L^2}{2} \sin 2\Omega t.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\boxed{k = 2\Omega}.$$

Los coeficientes diagonales son

i	a_i	b_i
1	1/3	1
2	1/3	-1
3	-2/3	0

Los coeficientes fuera de la diagonal son

$$\boxed{c_{12} = c_{21} = 1, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0}.$$

B.2

Escribimos $q = \mu L^2/2$ y $k = 2\Omega$. Para la órbita circular, las terceras derivadas no nulas son

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_{11} &= qk^3 \sin kt, \\ \ddot{Q}_{22} &= -qk^3 \sin kt, \\ \ddot{Q}_{12} &= \ddot{Q}_{21} = -qk^3 \cos kt.\end{aligned}$$

Ambos elementos fuera de la diagonal contribuyen a la suma doble. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} (\ddot{Q}_{ij})^2 &= 2q^2 k^6 \sin^2 kt + 2q^2 k^6 \cos^2 kt \\ &= 2q^2 k^6 \\ &= 2 \left(\frac{\mu L^2}{2} \right)^2 (2\Omega)^6 \\ &= 32\mu^2 L^4 \Omega^6.\end{aligned}$$

La luminosidad es, por consiguiente,

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6}, \quad \boxed{\xi = \frac{32}{5} = 6.4}.$$

El resultado es independiente de la fase orbital.

B.3

Aproximamos el movimiento de acercamiento en espiral mediante una secuencia de órbitas circulares que evoluciona lentamente. Las masas permanecen constantes y la energía que se llevan las ondas cumple

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}.$$

Al eliminar L mediante la relación para las órbitas circulares,

$$L = (GM)^{1/3} \Omega^{-2/3},$$

se obtiene

$$E = -\frac{1}{2} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{2/3}.$$

Su derivada temporal es

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{-1/3} \frac{d\Omega}{dt}.$$

La luminosidad, expresada en función de Ω , es

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 (GM)^{4/3} \Omega^{10/3}.$$

Al igualar la tasa de variación de la energía a $-\mathcal{P}$, se obtiene

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

Elevando al cubo,

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2.$$

Esta expresión tiene la forma requerida si

$$M_c^5 = \mu^3 M^2.$$

Así pues,

$$M_c = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}.$$

En particular, $d\Omega/dt > 0$: a medida que el sistema pierde energía, su órbita se contrae y su frecuencia orbital aumenta.

B.4

La frecuencia orbital es $f_{\text{orb}} = \Omega/(2\pi)$. Por tanto, el factor dos dado entre la frecuencia de las GW y la frecuencia orbital implica

$$f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{\Omega}{\pi}.$$

Tomando la raíz cúbica positiva de (10),

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

Con $\Omega = \pi f_{\text{GW}}$, esto se convierte en

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = 3\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3}.$$

Utilizando (11) con $a = 11/3$, o derivando directamente $f_{\text{GW}}^{-8/3}$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(f_{\text{GW}}^{-8/3} \right) = -8\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3}.$$

La integración da

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_0 - t).$$

Comparando los exponentes con (12),

$$\frac{2}{3} + p = \frac{5}{3}, \quad 2 - p = 1,$$

por lo que

$$p = 1.$$

Aquí, t_0 es el instante formal en el que este modelo aproximado de acercamiento en espiral predice una frecuencia divergente.

B.5

A y B señalan cruces consecutivos por cero a ambos lados de una cresta positiva; C y D hacen lo mismo para una cresta posterior. Por tanto, cada intervalo abarca aproximadamente medio ciclo de la onda gravitacional.

Aproximando la frecuencia durante cada intervalo corto por su valor en el punto medio,

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{AB}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{B}} - t_{\text{A}})} = \frac{1}{2(0.009 \text{ s})} \simeq 55.6 \text{ Hz},$$

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{CD}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{D}} - t_{\text{C}})} = \frac{1}{2(0.006 \text{ s})} \simeq 83.3 \text{ Hz}.$$

Los instantes correspondientes son

$$t_{\overline{\text{AB}}} = 0.0045 \text{ s}, \quad t_{\overline{\text{CD}}} = 0.037 \text{ s},$$

por lo que su diferencia es 0.0325 s.

Sean f_{AB} y f_{CD} estas estimaciones de la frecuencia. Al restar la relación de B.4 evaluada en los dos instantes, se elimina t_0 :

$$f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}}).$$

Despejando la masa de chirrido,

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left[\frac{f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3}}{8\pi^{8/3}\xi (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}})} \right]^{3/5}.$$

Utilizando las constantes proporcionadas y $\xi = 6.4$,

$$M_c \simeq 6.02 \times 10^{31} \text{ kg},$$

o, con la precisión adecuada,

$$\boxed{M_c \simeq 30M_{\odot}}.$$

Para componentes de igual masa, $M_1 = M_2 = M/2$, por lo que

$$\mu = \frac{M}{4}, \quad M_c = \left(\frac{M}{4} \right)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Así pues,

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 1.38 \times 10^{32} \text{ kg},$$

y

$$\boxed{M \simeq 69M_{\odot}}.$$

Por tanto, cada componente tiene una masa de aproximadamente $35M_{\odot}$.

B.6

En el último de los instantes medidos,

$$\Omega_{\overline{\text{CD}}} = \pi f_{\text{CD}} \simeq 2.62 \times 10^2 \text{ rad/s}.$$

La relación para las órbitas circulares da

$$L = \left(\frac{GM}{\Omega_{\overline{\text{CD}}}^2} \right)^{1/3}.$$

La elección de masas iguales también da la masa total mínima y, por tanto, la separación mínima compatibles con la masa de chirrido y la frecuencia inferidas. En efecto,

$$\frac{\mu}{M} = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

por lo que

$$M_c = M \left(\frac{\mu}{M} \right)^{3/5} \leq \frac{M}{4^{3/5}}.$$

La igualdad se cumple para masas iguales. Utilizando la masa hallada en B.5,

$$L_{\min} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.383 \times 10^{32})}{(2.618 \times 10^2)^2} \right]^{1/3} \text{ m},$$

lo que da

$$L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^5 \text{ m} = 5.1 \times 10^2 \text{ km}.$$

Utilizando un radio común para los objetos de igual masa, para que sigan siendo objetos separados se requiere aproximadamente $2R \lesssim L$. Por tanto,

$$R_{\max} \simeq \frac{L_{\min}}{2} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}.$$

La comparación con el Sol es

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq \frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{2.56 \times 10^2 \text{ km}},$$

por lo que

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq 2.7 \times 10^3.$$

Cada objeto orbita alrededor del centro de masas a un radio $L/2$. Por tanto, su rapidez orbital en este instante es

$$v_{\text{col}} = \Omega_{\text{CD}} \frac{L}{2} \simeq (2.618 \times 10^2)(2.562 \times 10^5) \text{ m/s},$$

lo que da

$$v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}, \quad \frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq 0.22.$$

Así pues, cada objeto contiene unas 35 masas solares dentro de un radio no mayor de unos 260 km, mientras se mueve a aproximadamente una quinta parte de la velocidad de la luz. Son objetos extremadamente compactos y rápidos. Las estimaciones numéricas utilizan las aproximaciones newtoniana de órbitas circulares y cuadrupolar estipuladas, cuya precisión empeora cerca de la fusión.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: ¿Dónde está el neutrino?

Cuando dos protones colisionan con una energía muy elevada en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC), pueden producirse varias partículas como resultado de esa colisión, tales como electrones, muones, neutrinos, quarks y sus respectivas antipartículas. La mayoría de estas

partículas pueden detectarse mediante el detector de partículas que rodea el punto de colisión. Por ejemplo, los quarks experimentan un proceso llamado *hadronización*, en el que se convierten en una cascada de partículas subatómicas denominada «jet». Además, el intenso campo magnético presente en los detectores permite que incluso las trayectorias de partículas cargadas muy energéticas se curven lo suficiente para determinar su cantidad de movimiento. El detector ATLAS utiliza un sistema de solenoides superconductores que produce un campo magnético constante y uniforme de 2.00 teslas en la parte interior del detector, alrededor del punto de colisión. Las trayectorias de las partículas cargadas con cantidades de movimiento inferiores a cierto valor se curvarán tanto que estas darán vueltas repetidamente en el campo y, muy probablemente, no serán medidas. Debido a su naturaleza, el neutrino no se detecta en absoluto, pues escapa atravesando el detector sin interaccionar.

Datos: masa en reposo del electrón, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; carga elemental, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

Velocidad de la luz, $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹; permitividad del vacío, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹

Parte A. Física del detector ATLAS (4.0 puntos)

A.1 — 0.5pt

Deduzca una expresión para el radio ciclotrón, r , de la trayectoria circular de un electrón sometido a una fuerza magnética perpendicular a su velocidad, y exprese dicho radio en función de su energía cinética, K ; el módulo de su carga, e ; su masa, m ; y el campo magnético, B . Suponga que el electrón es una partícula clásica no relativista.

Los electrones producidos en el interior del detector ATLAS deben tratarse relativísticamente. Sin embargo, la fórmula del radio ciclotrón también es válida para el movimiento relativista cuando se considera la cantidad de movimiento relativista.

A.2 — 0.5pt

Calcule el valor mínimo de la cantidad de movimiento de un electrón que le permita escapar de la parte interior del detector en la dirección radial. La parte interior del detector tiene forma cilíndrica, con un radio de 1.1 metros, y el electrón se produce en el punto de colisión, exactamente en el centro del cilindro. Exprese su respuesta en MeV/c.

Cuando se aceleran perpendicularmente a su velocidad, las partículas relativistas de carga e y masa en reposo m emiten radiación electromagnética, llamada radiación sincrotrón. La potencia emitida viene dada por

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde a es la aceleración y $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

A.3 — 1.0pt

Una partícula se denomina ultrarrelativista cuando su rapidez es muy próxima a la velocidad de la luz. Para una partícula ultrarrelativista, la potencia emitida puede expresarse como:

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

donde ξ es un número real, n, k son enteros, E es la energía de la partícula cargada y B es el campo magnético. Halle ξ, n y k .

A.4 — 1.0pt

En el límite ultrarrelativista, la energía del electrón en función del tiempo es:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

donde E_0 es la energía inicial del electrón. Halle α en función de e, c, B, ϵ_0 y m .

A.5 — 0.5pt

Considere un electrón producido en el punto de colisión en la dirección radial con una energía de 100 GeV. Estime la cantidad de energía que pierde por radiación sincrotrón hasta que escapa de la parte interior del detector. Expresé su respuesta en MeV.

A.6 — 0.5pt

Halle una expresión para la frecuencia ciclotrón del electrón en función del tiempo en el límite ultrarrelativista.

Parte B. En busca del neutrino (6.0 puntos)

La colisión entre los dos protones mostrada en la Figura 1 da lugar a la producción de un quark top (t) y un antiquark top ($\bar{t}$), las partículas elementales más pesadas jamás detectadas. El quark top se desintegra en un bosón W^+ y un quark bottom (b), mientras que el antiquark top se desintegra en un bosón W^- y un antiquark bottom ($\bar{b}$). En el caso representado en la Figura 1, el bosón W^+ se desintegra en un antimuón (μ^+) y un neutrino (ν), y el bosón W^- se desintegra en un quark y un antiquark. El objetivo de este problema es reconstruir la cantidad de movimiento completa del neutrino utilizando las cantidades de movimiento de algunas partículas detectadas.

Para simplificar, todas las partículas y los jets de este problema se considerarán sin masa, excepto el quark top y los bosones $W^\pm$.

Las cantidades de movimiento de los productos de desintegración del quark top pueden determinarse a partir del experimento (véase la tabla), excepto la componente de la cantidad de movimiento del neutrino a lo largo del eje z . La cantidad de movimiento total de las partículas del estado final captadas por el detector solo es cero en el plano transversal (plano xy), y no a lo largo de la línea de colisión (eje z). Por tanto, se puede hallar la cantidad de movimiento transversal del neutrino a partir de la cantidad de movimiento faltante en el plano transversal.

El 4 de junio de 2015, el experimento ATLAS del LHC registró, a las 00:21:24 GMT+1, una colisión protón-protón como la representada en la Figura 1.

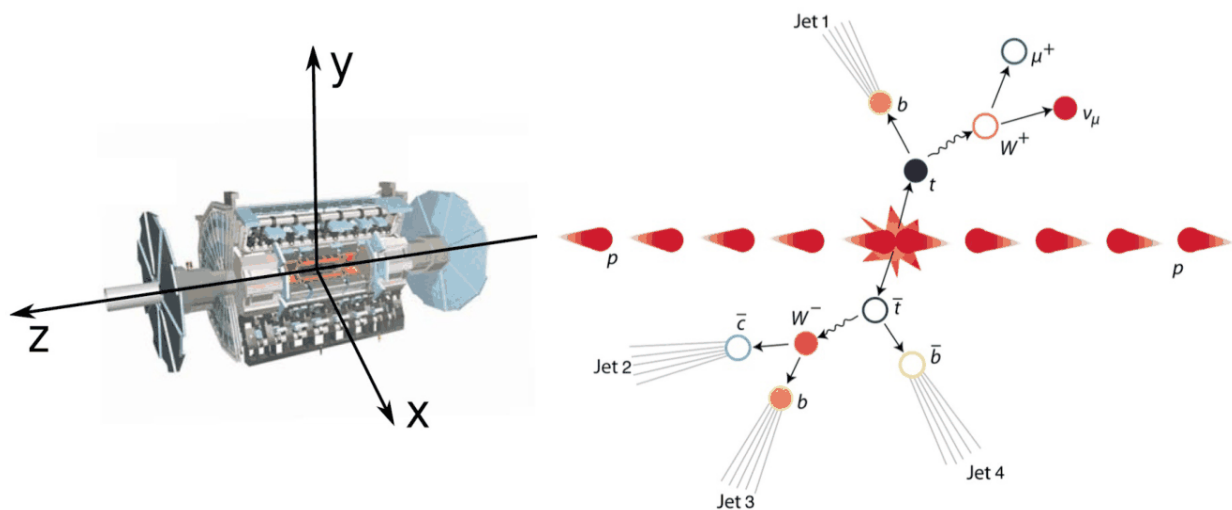


Figura 1. Representación esquemática del sistema de coordenadas del detector ATLAS (izquierda) y de la colisión protón-protón (derecha).

A continuación se presentan las componentes de las cantidades de movimiento de las tres partículas del estado final procedentes de la desintegración del quark top, incluido el neutrino.

Partícula	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
antimuón (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
jet 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
neutrino (ν)	-104.1	+5.3	---

B.1 — 1.5pt

Halle una ecuación que relacione el cuadrado de la masa del bosón W^+ , m_W^2 , con las componentes de las cantidades de movimiento del neutrino y del antimuón presentadas en la tabla anterior. Expresé su respuesta en términos de las cantidades de movimiento transversales del neutrino y del antimuón,

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

y de sus componentes de la cantidad de movimiento en el eje z , $p_z^{(\mu)}$ y $p_z^{(\nu)}$.

B.2 — 1.5pt

Suponiendo una masa del bosón W^+ de $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$, calcule las dos soluciones posibles para la cantidad de movimiento del neutrino a lo largo del eje z , $p_z^{(\nu)}$. Expresé su respuesta en GeV/c.

B.3 — 1.0pt

Calcule la masa del quark top para cada una de las dos soluciones anteriores. Expresé su respuesta en GeV/c^2 .

[Si no ha obtenido las dos soluciones en B.2, utilice $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ y $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$.]

El número normalizado de sucesos de colisión para la medida de la masa del quark top (determinado a partir del experimento) tiene dos componentes: la denominada «señal» (correspondiente a la desintegración de quarks top) y el «fondo» (correspondiente a sucesos de

otros procesos que no incluyen quarks top). Los datos experimentales incluyen ambos procesos; véase la Fig. 2.

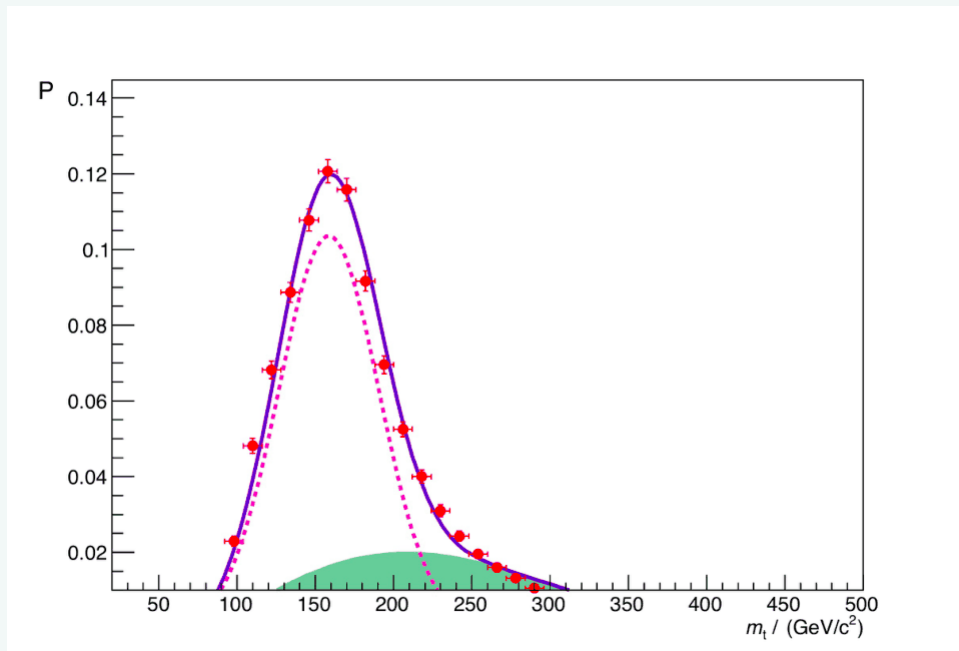


Figura 2. Distribución de la masa del quark top determinada a partir del experimento, es decir, el número normalizado de sucesos representado en función de la masa del quark top. Los puntos corresponden a los datos. La línea discontinua corresponde a la «señal» y la zona sombreada al «fondo».

B.4 — 1.0pt

Según la distribución de la masa del quark top, ¿cuál de las dos soluciones anteriores es más probable que sea la correcta? Estime la probabilidad de la solución más probable.

B.5 — 1.0pt

Calcule la distancia recorrida por el quark top antes de desintegrarse, utilizando la solución más probable. Suponga que el quark top tiene una vida media en reposo de 5×10^{-25} s.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí $p_T^{(a)} = |\vec{p}_T^{(a)}|$.

- **A.1:** $r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}$.
- **A.2:** $p_{\min} = \frac{eBR}{2} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c$.
- **A.3:** $\xi = \frac{1}{6\pi}$, $n = 5$, $k = 4$.
- **A.4:** $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}$.
- **A.5:** $\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}$.

- **A.6:** La frecuencia instantánea es

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

La frecuencia angular es $\omega(t) = 2\pi f(t)$.

- **B.1:**

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

- **B.2:** $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ o $-188 \text{ GeV}/c$.
- **B.3:** Respectivamente, $m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2$ o $311 \text{ GeV}/c^2$.
- **B.4:** La solución $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ es más probable. La probabilidad representada para su masa reconstruida es aproximadamente $P \simeq 0.12$, o 12%.
- **B.5:** La distancia media es $\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}$.

Solución

A.1

Para un movimiento perpendicular al campo magnético, la fuerza magnética de Lorentz proporciona la fuerza centrípeta:

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

Por tanto, $r = mv/(eB)$. Utilizando la energía cinética no relativista $K = \frac{1}{2}mv^2$,

$$r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}.$$

De forma equivalente, $r = p/(eB)$, que también se aplica relativísticamente cuando p es la cantidad de movimiento relativista.

A.2

Sea $R = 1.1 \text{ m}$ el radio del detector. La órbita circular del electrón pasa por el punto de colisión, por lo que el centro de su órbita está a una distancia r de dicho punto. Su máxima distancia radial al punto de colisión es, por tanto, $2r$.

La órbita límite toca la superficie cilíndrica cuando

$$2r = R.$$

La cantidad de movimiento total mínima corresponde al movimiento perpendicular al campo del solenoide. Por tanto, el umbral de escape es

$$p_{\min} = eB \frac{R}{2} = (1.60 \times 10^{-19})(2.00) \frac{1.1}{2} = 1.76 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Puesto que

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{10^6(1.60 \times 10^{-19})}{3.00 \times 10^8} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1},$$

obtenemos

$$p_{\min} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c.$$

Justo por encima de este umbral, la órbita cruza la superficie cilíndrica.

A.3

Para una aceleración perpendicular a la velocidad, la ecuación relativista transversal del movimiento es

$$evB = \gamma ma,$$

por lo que la aceleración debida a la curvatura es

$$a = \frac{evB}{\gamma m}.$$

Al sustituir en la fórmula de radiación dada se obtiene

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{\gamma^2 m^2} \gamma^4 = \frac{e^4 B^2 v^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

En el límite ultrarrelativista, $v \simeq c$, mientras que la energía total es $E = \gamma mc^2$. Por tanto,

$$P \simeq \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \frac{e^4 E^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

La comparación con la forma solicitada da

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$$

A.4

La fuerza magnética no realiza trabajo, por lo que la energía del electrón disminuye en la cantidad de energía radiada:

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\alpha E^2,$$

donde, según A.3,

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

Integrando con $E(0) = E_0$,

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^2} = -\alpha \int_0^t dt,$$

se obtiene

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \alpha t.$$

En consecuencia,

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

como se indica en el enunciado.

A.5

Primero comprobamos la curvatura de la trayectoria. Para un electrón ultrarrelativista, $p \simeq E/c$, por lo que su radio ciclotrón inicial es

$$r_0 \simeq \frac{E_0}{eBc}.$$

Aquí

$$E_0 = 100 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-8} \text{ J},$$

y, por tanto,

$$r_0 = \frac{1.60 \times 10^{-8}}{(1.60 \times 10^{-19})(2.00)(3.00 \times 10^8)} = 1.67 \times 10^2 \text{ m}.$$

Como $r_0 \gg R = 1.1 \text{ m}$, la trayectoria a través del detector es casi rectilínea. Así,

$$t_{\text{exit}} \simeq \frac{R}{c} = \frac{1.1}{3.00 \times 10^8} = 3.67 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

Utilizando las constantes proporcionadas,

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} = 9.39 \times 10^{12} \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

y

$$\alpha E_0 t_{\text{exit}} = 5.51 \times 10^{-4}.$$

La energía perdida es

$$\Delta E = E_0 - \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}} = \frac{\alpha E_0^2 t_{\text{exit}}}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}}.$$

Numéricamente,

$$\Delta E = 8.81 \times 10^{-12} \text{ J} = 55.1 \text{ MeV}.$$

Por tanto, con una precisión razonable,

$$\boxed{\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}}.$$

Esto representa solo aproximadamente 5.5×10^{-4} de la energía inicial, lo que confirma que el radio se mantiene muy grande durante todo el recorrido.

A.6

La velocidad angular instantánea de rotación de la cantidad de movimiento es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

Utilizando $E = \gamma mc^2$,

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E(t)}.$$

Sustituyendo el resultado de A.4,

$$\boxed{\omega(t) = \frac{eBc^2}{E_0}(1 + \alpha E_0 t)}.$$

La frecuencia ordinaria, medida en ciclos por segundo, es, por tanto,

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

Ambas aumentan linealmente con el tiempo dentro de la aproximación ultrarrelativista.

B.1

La conservación del cuadrimomento en $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ da

$$E_W = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}_W = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}.$$

La masa invariante del sistema de dos partículas satisface

$$m_W^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2 - c^2 |\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}|^2.$$

Ambas partículas hijas se tratan como partículas sin masa, por lo que

$$E_\mu = c|\vec{p}^{(\mu)}|, \quad E_\nu = c|\vec{p}^{(\nu)}|.$$

Los términos individuales de energía y cantidad de movimiento se cancelan al desarrollar el invariante:

$$m_W^2 c^4 = 2 \left(E_\mu E_\nu - c^2 \vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} \right).$$

Ahora bien,

$$|\vec{p}^{(a)}| = \sqrt{(p_T^{(a)})^2 + (p_z^{(a)})^2},$$

y

$$\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} = \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} + p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

Por tanto, la relación solicitada es

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2 \right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2 \right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

B.2

Definimos

$$q = p_z^{(\nu)}, \quad \ell = p_z^{(\mu)}, \quad a = (p_T^{(\mu)})^2, \quad b = (p_T^{(\nu)})^2,$$

y sean

$$p_\mu = |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad D = \frac{m_W^2 c^2}{2} + \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)}.$$

La ecuación de B.1 se convierte en

$$p_\mu \sqrt{b + q^2} = D + \ell q.$$

Elevando al cuadrado y utilizando $p_\mu^2 - \ell^2 = a$,

$$aq^2 - 2D\ell q + p_\mu^2 b - D^2 = 0.$$

Sus raíces son

$$q = \frac{D\ell \pm p_\mu \sqrt{D^2 - ab}}{a}.$$

Las componentes medidas dan

$$\begin{aligned} a &= 24.7^2 + 24.9^2 = 1230.1 \text{ (GeV/c)}^2, \\ b &= 104.1^2 + 5.3^2 = 10864.9 \text{ (GeV/c)}^2, \\ p_\mu &= \sqrt{24.7^2 + 24.9^2 + 12.4^2} = 37.2003 \text{ GeV/c}, \\ \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} &= (-24.7)(-104.1) + (-24.9)(5.3) \\ &= 2439.3 \text{ (GeV/c)}^2, \\ D &= \frac{80.4^2}{2} + 2439.3 = 5671.38 \text{ (GeV/c)}^2. \end{aligned}$$

Así, las dos raíces numéricas son

$$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}, \quad q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}.$$

Ambas satisfacen la ecuación original, sin elevar al cuadrado. Por tanto,

$$\boxed{p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV/c} \quad \text{o} \quad -188 \text{ GeV/c}}.$$

B.3

El quark top se desintegra en el antimuón, el neutrino y el jet del quark bottom. La conservación de la energía y de la cantidad de movimiento da

$$E_t = E_\mu + E_\nu + E_{j_1}, \quad \vec{p}_t = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)}.$$

Como los tres productos de desintegración se tratan como partículas sin masa,

$$E_t = c \left(|\vec{p}^{(\mu)}| + |\vec{p}^{(\nu)}| + |\vec{p}^{(j_1)}| \right).$$

El módulo de la cantidad de movimiento del jet es

$$|\vec{p}^{(j_1)}| = \sqrt{(-14.2)^2 + 50.1^2 + 94.1^2} = 107.5475 \text{ GeV/c}.$$

Escribiendo q como su valor numérico en GeV/c,

$$E_t = \left[37.2003 + 107.5475 + \sqrt{10864.9 + q^2} \right] \text{ GeV},$$

y

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 81.7 + q) \text{ GeV/c}.$$

La masa reconstruida del quark top se obtiene de

$$m_t^2 c^4 = E_t^2 - c^2 |\vec{p}_t|^2.$$

Conservando cifras adicionales durante el cálculo se obtiene:

Solución para el neutrino	E_ν (GeV)	E_t (GeV)	p_{tz} (GeV/c)	m_t (GeV/c ²)
$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}$	127.804	272.552	155.653	169.344
$q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}$	215.219	359.967	-106.594	311.183

Por tanto,

$$\boxed{m_t \simeq 169 \text{ GeV/c}^2 \quad \text{para } p_z^{(\nu)} > 0},$$

$$m_t \simeq 311 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{para } p_z^{(\nu)} < 0.$$

B.4

La masa $169 \text{ GeV}/c^2$ se encuentra cerca del máximo de la distribución de la Figura 2, mientras que $311 \text{ GeV}/c^2$ se encuentra en su pequeña cola superior. Por tanto, la solución con $p_z^{(\nu)}$ positivo es más probable.

Al leer la ordenada de la curva de la distribución total representada cerca de $169 \text{ GeV}/c^2$, se obtiene

$$P \simeq 0.12 \quad \text{o aproximadamente } 12\%.$$

La cantidad de movimiento reconstruida del neutrino correspondiente es

$$\vec{p}^{(\nu)} \simeq (-104.1, +5.3, +74.0) \text{ GeV}/c.$$

B.5

Para la solución más probable,

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 155.653) \text{ GeV}/c,$$

por lo que

$$|\vec{p}_t| = 213.558 \text{ GeV}/c.$$

El factor de Lorentz y la rapidez del quark top son

$$\gamma_t = \frac{E_t}{m_t c^2} = \frac{272.552}{169.344} = 1.609,$$

$$\beta_t = \frac{|\vec{p}_t|c}{E_t} = \frac{213.558}{272.552} = 0.7836.$$

La vida media en el sistema de referencia del detector es $\gamma_t \tau_0$. Por tanto, la distancia media recorrida es

$$\bar{L} = v_t \gamma_t \tau_0 = \beta_t \gamma_t c \tau_0 = \frac{|\vec{p}_t|c}{m_t c^2} c \tau_0.$$

Sustituyendo se obtiene

$$\bar{L} = \frac{213.558}{169.344} (3.00 \times 10^8) (5 \times 10^{-25}) = 1.89 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

Por tanto,

$$\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

Esta es una distancia media porque la vida proporcionada en el sistema de referencia en reposo es una vida media.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Física de los sistemas vivos

Datos: Presión atmosférica normal, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Parte A. La física del flujo sanguíneo (4.5 puntos)

En esta parte analizará dos modelos simplificados del flujo sanguíneo en los vasos.

Los vasos sanguíneos tienen una forma aproximadamente cilíndrica, y se sabe que, para un flujo estacionario y no turbulento de un fluido incompresible en un cilindro rígido, la diferencia de presión del fluido entre los dos extremos del cilindro viene dada por

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

donde ℓ y r son la longitud y el radio del cilindro, η es la viscosidad del fluido y Q es el caudal volumétrico, es decir, el volumen de fluido que atraviesa la sección transversal del cilindro por unidad de tiempo. Esta expresión suele proporcionar el orden de magnitud correcto de la diferencia de presión en un vaso, incluso sin tener en cuenta el flujo pulsátil, la compresibilidad y la forma irregular del vaso, ni el hecho de que la sangre no es un fluido simple, sino una mezcla de células y plasma. Además, esta expresión tiene la misma forma que la ley de Ohm, si se interpreta el caudal volumétrico como una corriente, la diferencia de presión como una tensión y el factor $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ como una resistencia.

Considere, por ejemplo, la red simétrica de arteriolas (arterias pequeñas) representada en la Figura 1, que lleva sangre al lecho capilar de un tejido. En esta red, en cada bifurcación un vaso se divide en dos vasos idénticos. Sin embargo, los vasos de los niveles superiores son más estrechos y más cortos: considere que los radios y las longitudes de los vasos de dos niveles consecutivos, i e $i + 1$, están relacionados mediante $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ y $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.

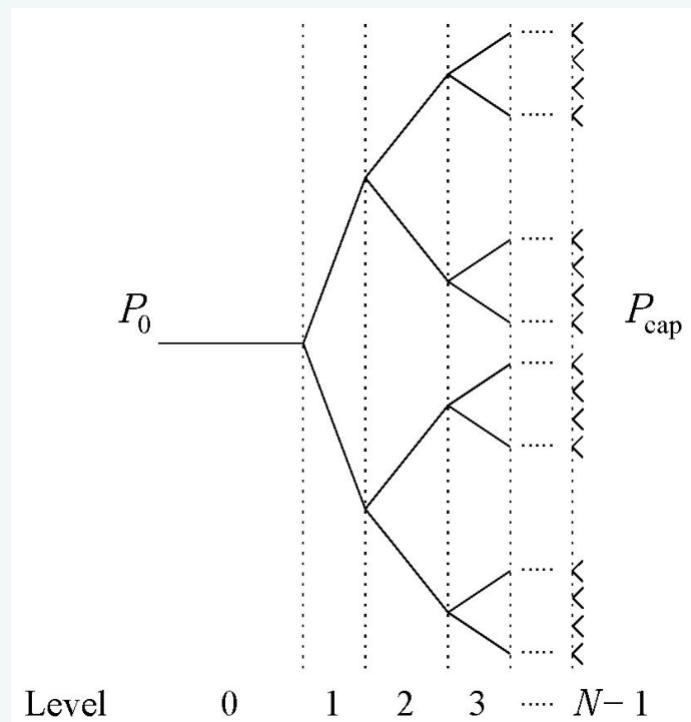


Figura 1. Red de arteriolas.

A.1 (1.3 puntos)

Obtenga una expresión para el caudal volumétrico, Q_i , en un vaso de cualquier nivel i , en función del número total de niveles N , de la viscosidad η , del radio r_0 y la longitud ℓ_0 del primer vaso, y de la diferencia $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ entre la presión en la arteriola del nivel 0, P_0 , y la presión en el

lecho capilar, P_{cap} .

A.2 (0.5 puntos)

Calcule el valor numérico del caudal volumétrico Q_0 de la arteriola del nivel 0, si su radio es $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ y su longitud es $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$. Considere que la presión a la entrada de la arteriola es de 55 mmHg y que la red de vasos tiene $N = 6$ niveles que conectan esta arteriola con el lecho capilar, cuya presión es de 30 mmHg. Considere que la viscosidad de la sangre es $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Exprese el resultado en ml/h.

Un vaso sanguíneo como circuito LCR

La aproximación de vasos cilíndricos rígidos resulta insuficiente por varias razones. Es especialmente importante incluir la dependencia temporal del flujo y tener en cuenta el cambio de diámetro del vaso que se produce cuando la presión varía durante un ciclo de bombeo de sangre realizado por el corazón. Además, se observa que en los vasos de mayor tamaño la presión sanguínea varía significativamente durante un ciclo, mientras que en los vasos más pequeños la amplitud de las oscilaciones de presión es mucho menor y el flujo es casi independiente del tiempo.

Cuando aumenta la presión en un vaso elástico, su diámetro aumenta, lo que permite almacenar más fluido en el vaso y liberarlo cuando la presión disminuye. Por este motivo, el comportamiento elástico del vaso puede simularse añadiendo un condensador a nuestra descripción inicial. Además, al tener en cuenta la dependencia temporal del caudal sanguíneo, hay que considerar la inercia del fluido, proporcional a su densidad $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Esta inercia puede describirse mediante una inductancia en nuestro modelo. En la Figura 2 representamos el circuito equivalente para un solo vaso en este modelo. La capacidad y la inductancia equivalentes vienen dadas por

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{y} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

respectivamente, donde h es el espesor de la pared del vaso y E es el módulo de Young de la arteria, un coeficiente que describe el cambio de tamaño del tejido del vaso cuando se aplica una fuerza. El módulo de Young tiene unidades de presión y es del orden de $E = 0.06 \text{ MPa}$ para las arteriolas.

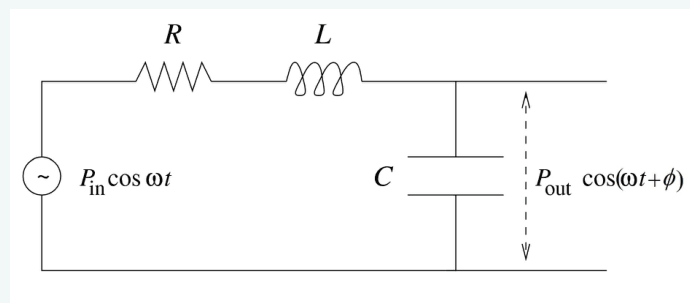


Figura 2. Circuito eléctrico equivalente para un solo vaso.

A.3 (2.0 puntos)

Obtenga, en régimen estacionario, la amplitud de presión a la salida del vaso, P_{out} , en función de la amplitud de presión a la entrada, P_{in} , de la resistencia equivalente, R , de la inductancia, L , y de la capacidad, C , para un flujo de frecuencia angular ω . Establezca la condición entre η , ρ , E ,

h , r y ℓ para que, a bajas frecuencias, la amplitud de las oscilaciones de presión a la salida sea menor que P_{in} .

A.4 (0.7 puntos)

Para la red de vasos de **A.2**, estime el espesor máximo h de la pared de las arteriolas para que se cumpla la condición establecida en **A.3** (considere que h es independiente del nivel).

Parte B. Crecimiento tumoral (5.5 puntos)

El crecimiento tumoral es un proceso muy complejo en el que mecanismos biológicos como la proliferación celular y la selección natural se entrelazan con la física. En este problema consideraremos un modelo simplificado del crecimiento tumoral que aborda el aumento de presión observado habitualmente en los tumores sólidos.

Considere un grupo de células normales que forman un tejido rodeado por una membrana basal inextensible, que obliga al tejido a mantener siempre la misma forma: una esfera de radio R (Figura 3).

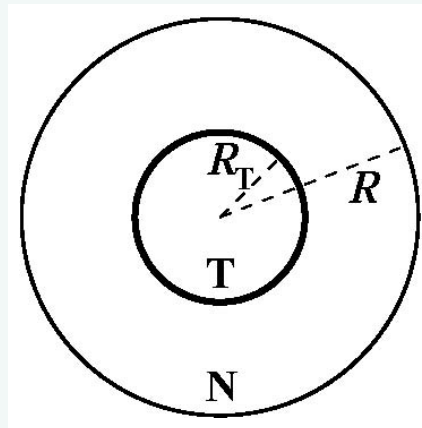


Figura 3. Tumor simplificado.

Inicialmente, el tejido no presenta tensiones residuales, es decir, la presión en todos sus puntos es igual a la presión atmosférica.

En el instante $t = 0$, un tumor comienza a crecer en el centro de esta esfera y, a medida que crece, la presión en el interior del tejido aumenta. Considere que ambos tejidos (normal, N, y tumoral, T) son compresibles, de modo que sus densidades, ρ_N y ρ_T , aumentan linealmente con la presión:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

donde ρ_0 es la densidad del tejido en reposo, p es la diferencia de presión respecto a la presión atmosférica y K_N , K_T son los módulos de compresibilidad (módulos volumétricos) de los tejidos normal y tumoral, respectivamente. En general, los tumores son más rígidos y, por tanto, tienen un módulo volumétrico mayor.

B.1 (1.0 puntos)

La masa de las células normales no cambia mientras el tumor crece. Obtenga la razón entre el volumen del tumor y el volumen total del tejido, $v = V_T/V$, en función de la razón entre la masa del tumor (M_T) y la masa del tejido normal (M_N), $\mu = M_T/M_N$, y de la razón entre los módulos

volumétricos, $\kappa = K_N/K_T$.

La hipertermia se utiliza a veces junto con la quimioterapia y la radioterapia en el tratamiento del cáncer. En la hipertermia, las células cancerosas se calientan selectivamente desde la temperatura normal del cuerpo humano, 37°C , hasta temperaturas superiores a 43°C , lo que provoca su muerte. Actualmente, los investigadores están desarrollando nanotubos de carbono recubiertos de proteínas especiales capaces de unirse a las células tumorales. Cuando el tejido se irradia con radiación infrarroja cercana, los nanotubos la absorben en una proporción mucho mayor que los tejidos circundantes y, por tanto, pueden calentarse selectivamente, al igual que las células tumorales a las que están unidos.

Considere que el tumor, las células normales y el tejido circundante tienen una conductividad térmica constante k , es decir, en la geometría de este problema, la energía que atraviesa una superficie esférica de radio r por unidad de tiempo y por unidad de área es igual a k multiplicado por la derivada de la temperatura respecto a r . Los nanotubos están distribuidos uniformemente en el volumen del tumor y pueden aportar una potencia $\mathcal{P}$ de energía térmica por unidad de volumen. Suponga que la temperatura es igual a la temperatura normal del cuerpo humano a una distancia muy grande del tumor.

B.2 (1.7 puntos)

Obtenga, en el estado estacionario, la temperatura en el centro del tumor en función de $\mathcal{P}$, k , la temperatura del cuerpo humano y el radio del tumor, R_T .

B.3 (0.5 puntos)

Obtenga la potencia mínima por unidad de volumen, $\mathcal{P}_{\min}$, necesaria para calentar todas las células tumorales de un tumor de 5.0 cm de radio hasta una temperatura superior a 43.0°C . Tome la conductividad térmica del tejido igual a $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Considere que el tumor está irrigado por una red de vasos con una estructura ramificada como la de la pregunta A.1. A medida que el tumor crece, cuando su presión p supera la presión P_{cap} en los vasos más estrechos, los radios de estos vasos disminuyen una pequeña cantidad δr . Si esta presión alcanza un valor crítico p_c (que correspondería a una disminución del radio de δr_c), los vasos más estrechos colapsarían, comprometiendo gravemente la irrigación del tumor. La presión y el cambio de radio pueden relacionarse mediante la siguiente relación fenomenológica:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Considere que solo los vasos más pequeños (del nivel $N - 1$) modifican su radio cuando aumenta la presión del tumor.

B.4 (2.3 puntos)

En el régimen lineal (es decir, considere que $p - P_{\text{cap}}$ es muy pequeño), exprese la disminución relativa del caudal, $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$, en estos vasos más estrechos, en función de la razón de volúmenes del tumor $v = V_T/V$ y de K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} .

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- A.1

$$Q_i = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8 \eta \ell_0 N 2^i}, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

- A.2

$$Q_0 = 1.4536 \dots \text{ ml/h} \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

- A.3

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

La atenuación a frecuencias no nulas suficientemente bajas requiere

$$R^2 C \geq 2L \iff h \leq \frac{64 \eta^2 \ell^2}{3 \rho E r^3}.$$

La desigualdad es estricta para la atenuación de orden ω^2 ; la igualdad produce una atenuación de orden ω^4 .

- A.4

$$h_{\text{max}} = \frac{64 \eta^2 \ell_0^2}{3 \rho E r_0^3} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ } \mu\text{m}.$$

El nivel 0 impone la restricción más exigente.

- B.1

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

- B.2 Si T_b es la temperatura corporal normal,

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P} R_T^2}{2k}.$$

- B.3

$$\mathcal{P}_{\text{min}} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Este es el umbral; superar estrictamente 43.0°C en todos los puntos requiere una densidad de potencia superior a él.

- **B.4** Si se toma δQ_{N-1} como la disminución positiva,

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

Esto se aplica justo por encima del inicio de la compresión, donde $p > P_{\text{cap}}$.

Solución

A.1

Las relaciones de escala geométricas dan

$$r_i = r_0 2^{-i/3}, \quad \ell_i = \ell_0 2^{-i/3}.$$

Por consiguiente, la resistencia hidráulica de un vaso del nivel i es

$$R_i = \frac{8\eta\ell_i}{\pi r_i^4} = \frac{8\eta\ell_0}{\pi r_0^4} 2^i = R_0 2^i.$$

La conservación del caudal volumétrico y la simetría implican que el flujo se divide por igual en cada bifurcación. Por tanto,

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i}.$$

La caída de presión a lo largo de cualquier vaso del nivel i es, por tanto,

$$\Delta P_i = R_i Q_i = R_0 Q_0.$$

Cada recorrido desde la entrada hasta el lecho capilar pasa por un vaso de cada uno de los N niveles. Sumando las caídas de presión a lo largo de uno de estos recorridos,

$$\Delta P = NR_0 Q_0.$$

De aquí,

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i} = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8\eta\ell_0 N 2^i}.$$

De forma equivalente, cada nivel aporta $R_i/2^i = R_0$ a la resistencia total de la red, de modo que $R_{\text{eq}} = NR_0$.

A.2

Usando la conversión proporcionada entre mmHg y pascales,

$$\Delta P = (55 - 30) \frac{1.013 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 3.3322 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Por tanto,

$$Q_0 = \frac{\pi(6.0 \times 10^{-5})^4(3.3322 \times 10^3)}{8(3.5 \times 10^{-3})(2.0 \times 10^{-3})(6)} = 4.0379 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Como $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ ml}$ y $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$,

$$Q_0 = (4.0379 \times 10^{-10})(10^6)(3600) = 1.4536 \text{ ml/h}.$$

Con dos cifras significativas,

$$Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

A.3

En la analogía con el circuito, la presión corresponde a la tensión y el caudal volumétrico a la corriente. La relación del condensador y el balance de presiones a lo largo del circuito son

$$Q = C \frac{dp_{\text{out}}}{dt}, \quad p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = RQ + L \frac{dQ}{dt}.$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene

$$LC \frac{d^2 p_{\text{out}}}{dt^2} + RC \frac{dp_{\text{out}}}{dt} + p_{\text{out}} = p_{\text{in}}.$$

Una vez extinguidos los transitorios, la entrada y la salida oscilan con la misma frecuencia angular. Representándolas mediante amplitudes complejas,

$$(1 - \omega^2 LC + i\omega RC) \tilde{P}_{\text{out}} = \tilde{P}_{\text{in}}.$$

Tomando valores absolutos,

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

El cuadrado del denominador es

$$1 + C(R^2 C - 2L)\omega^2 + L^2 C^2 \omega^4.$$

Para ω no nula y suficientemente pequeña, la atenuación en el orden dominante requiere

$$R^2 C > 2L.$$

Si $R^2 C < 2L$, el denominador es menor que la unidad a frecuencias suficientemente bajas y la oscilación de presión se amplifica. En el límite $R^2 C = 2L$, el cuadrado del denominador se convierte en $1 + L^2 C^2 \omega^4 > 1$, de modo que el caso límite también produce atenuación, aunque solo de orden ω^4 . Por tanto, la condición exacta es $R^2 C \geq 2L$.

Sustituyendo los parámetros dados del vaso,

$$R^2 C = \left(\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} \right)^2 \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} = \frac{96\eta^2 \ell^3}{\pi E h r^5},$$

mientras que

$$2L = \frac{9\ell\rho}{2\pi r^2}.$$

Así,

$$64\eta^2 \ell^2 \geq 3\rho E h r^3$$

o, de forma equivalente,

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

Para una atenuación de orden ω^2 , estas desigualdades deben sustituirse por desigualdades estrictas. A frecuencia cero, la ganancia de presión es exactamente la unidad.

A.4

En el nivel i ,

$$h_{\text{crit},i} = \frac{64\eta^2 \ell_i^2}{3\rho E r_i^3} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} 2^{i/3}.$$

Esta cota aumenta con el número de nivel. Como el mismo espesor de pared debe satisfacer la condición en todos los niveles, el nivel 0 impone la restricción más exigente.

Usando $E = 0.06 \times 10^6 \text{ Pa}$,

$$h_{\text{max}} = \frac{64(3.5 \times 10^{-3})^2 (2.0 \times 10^{-3})^2}{3(1.05 \times 10^3)(0.06 \times 10^6)(6.0 \times 10^{-5})^3} = 7.6818 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Así, dentro del modelo dado,

$$h_{\text{max}} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ }\mu\text{m}.$$

Un espesor inferior a este valor límite satisface la condición estricta de atenuación en el orden dominante en toda la red.

B.1

El volumen total del tejido V es fijo. Inicialmente contiene tejido normal de densidad ρ_0 , de modo que la conservación de la masa de las células normales da

$$M_N = \rho_0 V = \rho_N (V - V_T).$$

Escribiendo $v = V_T/V$ y usando la ecuación (3),

$$1 = \left(1 + \frac{p}{K_N}\right)(1 - v).$$

Por tanto, la presión está relacionada con el volumen del tumor mediante

$$p = \frac{K_N v}{1 - v}.$$

La masa del tumor es

$$M_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T.$$

Dividiendo por $M_N = \rho_0 V$,

$$\mu = v \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) = v \left(1 + \frac{\kappa v}{1 - v}\right).$$

Reordenando se obtiene una ecuación de segundo grado para v :

$$(1 - \kappa)v^2 - (1 + \mu)v + \mu = 0.$$

La raíz físicamente admisible tiende a cero cuando μ tiende a cero. Para $\kappa \neq 1$, es

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(1 - \kappa)\mu}}{2(1 - \kappa)}.$$

Racionalizando se obtiene una forma que también es directamente aplicable cuando $\kappa = 1$:

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

Como comprobación, para módulos volumétricos iguales los dos tejidos tienen la misma densidad, lo que da $v = \mu/(1 + \mu)$, tal como predice esta expresión.

B.2

Sea T_b la temperatura corporal lejos del tumor. En el estado estacionario, la corriente de calor hacia fuera a través de una esfera es igual a la potencia total generada en su interior. Tomando como positivo el flujo de calor hacia fuera, la ley de Fourier es

$$\dot{H}(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

Dentro del tumor, $0 \leq r \leq R_T$, la generación uniforme de calor da

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi r^3}{3} \mathcal{P},$$

por lo que

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}r}{3k}.$$

Fuera del tumor, toda la potencia generada atraviesa cada superficie esférica:

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi R_T^3}{3} \mathcal{P}.$$

Integrando con $T(r) \rightarrow T_b$ cuando $r \rightarrow \infty$,

$$T(r) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}, \quad r \geq R_T.$$

Así, la temperatura en la superficie del tumor es

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

La temperatura es continua en la superficie. Integrando el gradiente interior desde esa superficie hacia dentro se obtiene

$$T(r) = T(R_T) + \frac{\mathcal{P}}{6k}(R_T^2 - r^2) = T_b + \frac{\mathcal{P}}{6k}(3R_T^2 - r^2).$$

Por consiguiente,

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

La temperatura disminuye cuadráticamente dentro del tumor y se aproxima a T_b como $1/r$ fuera de él.

B.3

La temperatura disminuye con la distancia al centro, de modo que las células tumorales más frías se encuentran en la superficie. Por tanto, calentar todas las células tumorales por encima de 43.0°C requiere

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k} > 43.0^\circ\text{C}.$$

La densidad de potencia umbral es

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2}.$$

Sustituyendo $R_T = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3(0.60)(6.0)}{(5.0 \times 10^{-2})^2} = 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Así,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\min} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}}.$$

En este umbral, la superficie está exactamente a 43.0°C , mientras que el centro está a 46.0°C .

Superar estrictamente la temperatura especificada en todos los puntos requiere

$$\mathcal{P} > 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

B.4

Primero linealizamos la relación entre la presión y el radio. La ecuación (4) puede escribirse como

$$p - P_{\text{cap}} = (p_c - P_{\text{cap}}) \left[2 \frac{\delta r}{\delta r_c} - \left(\frac{\delta r}{\delta r_c} \right)^2 \right].$$

En la rama conectada con el estado sin compresión, suficientemente cerca de $p = P_{\text{cap}}$,

$$\boxed{\delta r \simeq \frac{\delta r_c}{2(p_c - P_{\text{cap}})}(p - P_{\text{cap}})}.$$

Solo los vasos terminales cambian de radio. Definamos

$$\epsilon = \frac{\delta r}{r_{N-1}} \ll 1.$$

Sus longitudes permanecen constantes, por lo que la ley de Poiseuille da

$$R'_{N-1} = R_{N-1}(1 - \epsilon)^{-4} \simeq R_{N-1}(1 + 4\epsilon).$$

Según **A.1**, los 2^{N-1} vasos terminales aportan inicialmente, en conjunto, R_0 a la resistencia de la red.

Los otros $N - 1$ niveles no cambian. Por tanto,

$$R'_{\text{eq}} = (N - 1)R_0 + R_0(1 - \epsilon)^{-4} \simeq NR_0 + 4R_0\epsilon.$$

Para presiones de entrada y capilar fijas, el caudal total es inversamente proporcional a R_{eq} . Por simetría, el caudal terminal sigue siendo igual al caudal total dividido por 2^{N-1} , de modo que su disminución relativa es la misma que la del caudal total:

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{R'_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

El factor $1/N$ tiene en cuenta que solo cambia una de las N contribuciones iguales a la resistencia.

Sustituyendo el cambio de radio linealizado,

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}} \frac{p - P_{\text{cap}}}{p_c - P_{\text{cap}}}.$$

Finalmente, la conservación de la masa de las células normales de **B.1** da $p = K_N v / (1 - v)$. Por tanto,

$$\boxed{\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right)}.$$

Esta expresión se aplica justo por encima de la fracción volumétrica de inicio

$$v_* = \frac{P_{\text{cap}}}{K_N + P_{\text{cap}}},$$

con $(p - P_{\text{cap}})/(p_c - P_{\text{cap}}) \ll 1$ y $\delta r/r_{N-1} \ll 1$. Por debajo de este umbral, el modelo planteado no prescribe un estrechamiento de los vasos.

La solución se comprobó con la solución oficial.