

IPhO 2018

Theorieaufgaben und Lösungen · Lissabon, Portugal · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2018/

Aufgabe 1: LIGO-GW150914

Im Jahr 2015 registrierte das Gravitationswellenobservatorium LIGO erstmals den Durchgang von Gravitationswellen (GW) durch die Erde. Dieses Ereignis mit der Bezeichnung GW150914 wurde durch Wellen ausgelöst, die von zwei schwarzen Löchern auf nahezu kreisförmigen Umlaufbahnen erzeugt wurden. In dieser Aufgabe werden Sie aus den Eigenschaften des gemessenen Signals einige physikalische Parameter des Systems abschätzen.

Teil A: Newtonsche (konservative) Umlaufbahnen (3.0 Punkte)

A.1 1.0 Punkte

Betrachten Sie ein System aus zwei Sternen mit den Massen M_1, M_2 , die sich bezüglich des Schwerpunkts des Systems an den Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ befinden, das heißt,

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Die Sterne sind vom Rest des Universums isoliert und bewegen sich mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten. Mithilfe der Newtonschen Gesetze lässt sich der Beschleunigungsvektor der Masse M_1 ausdrücken als

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

wobei $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

A.2 1.0 Punkte

Die Gesamtenergie des Systems aus zwei Massen auf Kreisbahnen lässt sich ausdrücken als:

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

wobei

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

die reduzierte Masse und die Gesamtmasse des Systems sind, Ω die Winkelgeschwindigkeit jeder Masse ist und L den gesamten Abstand $L = r_1 + r_2$ bezeichnet. Bestimmen Sie die explizite Form des Terms $A(\mu, \Omega, L)$.

A.3 1.0 Punkte

Gleichung 3 lässt sich zu $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ vereinfachen. Bestimmen Sie die Zahl β .

Teil B: Einführung relativistischer Dissipation (7.0 Punkte)

Die korrekte Gravitationstheorie, die *allgemeine Relativitätstheorie*, wurde 1915 von Einstein formuliert und sagt voraus, dass sich die Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Die Träger der Information über die Wechselwirkung werden GW genannt. GW werden immer dann ausgesendet, wenn Massen beschleunigt werden, wodurch das System aus diesen Massen Energie verliert.

Betrachten Sie ein System aus zwei punktförmigen Teilchen, das vom Rest des Universums isoliert ist. Einstein bewies, dass die ausgesendeten GW bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten: 1) eine Frequenz haben, die doppelt so groß wie die Umlauffrequenz ist; 2) durch eine Leuchtkraft, also eine abgestrahlte Leistung $\mathcal{P}$, charakterisiert werden können, deren dominierender Beitrag durch Einsteins Quadrupolformel gegeben ist,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Für ein System aus zwei punktförmigen Teilchen, die in der $x - y$ -Ebene umlaufen, ist Q_{ij} durch die folgende Tabelle gegeben (i, j bezeichnen die Zeilen- bzw. Spaltennummer)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$
$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$
$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

und $Q_{ij} = 0$ für alle anderen Kombinationen. Hier ist (x_A, y_A) die Position der Masse A im Schwerpunktsystem.

B.1 1.0 Punkte

Für die in A.2 beschriebenen Kreisbahnen lassen sich die Komponenten von Q_{ij} als Funktion der Zeit t ausdrücken als:

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Bestimmen Sie k in Abhängigkeit von Ω sowie die Zahlenwerte der Konstanten a_i, b_i, c_{ij} .

B.2 1.0 Punkte

Berechnen Sie die von diesem System in Form von Gravitationswellen abgestrahlte Leistung $\mathcal{P}$, und leiten Sie her:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Welchen Wert hat die Zahl ξ ? [Falls Sie ξ nicht bestimmen konnten, verwenden Sie im Folgenden $\xi = 6.4$.]

B.3 1.0 Punkte

Ohne die Emission von GW würden die beiden Massen unbegrenzt auf einer unveränderlichen Kreisbahn umlaufen. Durch die Emission von GW verliert das System jedoch Energie und geht langsam zu kleineren Kreisbahnen über. Zeigen Sie, dass die Änderungsrate $\frac{d\Omega}{dt}$ der Bahnwinkelgeschwindigkeit die Form

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

annimmt, wobei M_c als Chirp-Masse bezeichnet wird. Bestimmen Sie M_c als Funktion von M und μ . Diese Masse bestimmt die Zunahme der Frequenz während des Schrumpfens der Umlaufbahn. [Die Bezeichnung „Chirp“ ist vom hohen Zwitschern (mit zunehmender Frequenz) kleiner Vögel inspiriert.]

B.4 2.0 Punkte

Stellen Sie mithilfe der oben gegebenen Informationen den Zusammenhang zwischen der Bahnwinkelgeschwindigkeit Ω und der GW-Frequenz f_{GW} her. Für jede glatte Funktion $F(t)$ und $a \neq 1$ gilt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

wobei χ eine Konstante und t_0 eine Integrationskonstante ist. Zeigen Sie damit, dass aus (10) für die GW-Frequenz

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

folgt, und bestimmen Sie die Konstante p .

Am 14. September 2015 wurde GW150914 von den LIGO-Detektoren registriert, die aus zwei L-förmig angeordneten Armen von jeweils 4 km Länge bestehen. Die relative Längenänderung dieser Arme ist in Abb. 1 dargestellt. Die Arme des Detektors reagieren linear auf eine durchlaufende Gravitationswelle, und der Verlauf ihrer Reaktion bildet die Welle nach. Diese Welle wurde von zwei schwarzen Löchern auf nahezu kreisförmigen Umlaufbahnen erzeugt; der Energieverlust durch Gravitationsstrahlung führte dazu, dass die Umlaufbahn schrumpfte und die schwarzen Löcher schließlich kollidierten. Der Zeitpunkt der Kollision entspricht ungefähr dem Maximum des Signals nach Punkt D in Abb. 1.

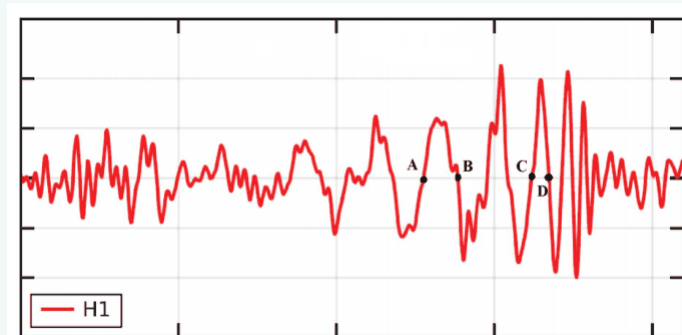


Abbildung 1. Dehnung, also die relative Längenänderung jedes Arms, am LIGO-Detektor H1. Die horizontale Achse zeigt die Zeit, und die Punkte A, B, C, D entsprechen den Zeiten $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ Sekunden.

B.5 1.0 Punkte

Schätzen Sie anhand der Abbildung $f_{\text{GW}}(t)$ zu den Zeitpunkten

$$t_{\overline{\text{AB}}} = \frac{t_{\text{B}} + t_{\text{A}}}{2} \quad \text{und} \quad t_{\overline{\text{CD}}} = \frac{t_{\text{D}} + t_{\text{C}}}{2}. \quad (13)$$

Nehmen Sie an, dass (12) bis zur Kollision gültig bleibt (was streng genommen nicht zutrifft) und dass die beiden Objekte die gleiche Masse haben. Schätzen Sie die Chirp-Masse M_c und die Gesamtmasse des Systems in Einheiten der Sonnenmasse $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

B.6 1.0 Punkte

Schätzen Sie den minimalen Bahnabstand zwischen den beiden Objekten zum Zeitpunkt $t_{\overline{\text{CD}}}$. Schätzen Sie daraus eine maximale Größe für jedes Objekt, R_{max} . Bestimmen Sie $R_{\odot}/R_{\text{max}}$, um diese Größe mit dem Radius unserer Sonne, $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5 \text{ km}$, zu vergleichen. Schätzen Sie auch ihre lineare Bahngeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt, v_{col} , und vergleichen Sie diese mit der Lichtgeschwindigkeit, v_{col}/c .

Schließen Sie daraus, dass es sich tatsächlich um extrem schnell bewegte, extrem kompakte Objekte handelt!

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A.1:** $n = 3$, $\alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}$.
- **A.2:** $A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2}\mu\Omega^2 L^2$.
- **A.3:** $\beta = -\frac{1}{2}$.
- **B.1:** Wenn die Massen bei $t = 0$ auf der x -Achse liegen und gegen den Uhrzeigersinn umlaufen,

$$k = 2\Omega, \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 0).$$

Außerdem gilt $c_{12} = c_{21} = 1$; alle anderen außerdiagonalen c_{ij} verschwinden.

- **B.2:** $\xi = \frac{32}{5} = 6.4$, $\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6$.
- **B.3:** $M_c = \mu^{3/5} M^{2/5}$, mit

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

- **B.4:** $f_{\text{GW}} = \frac{\Omega}{\pi}$, $p = 1$, und

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_0 - t).$$

- **B.5:** $f_{\text{GW}}(0.0045 \text{ s}) \simeq 56 \text{ Hz}$, $f_{\text{GW}}(0.037 \text{ s}) \simeq 83 \text{ Hz}$; $M_c \simeq 30M_\odot$, $M \simeq 69M_\odot$.
- **B.6:** $L_{\text{min}} \simeq 5.1 \times 10^2 \text{ km}$, $R_{\text{max}} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}$, $R_\odot/R_{\text{max}} \simeq 2.7 \times 10^3$. Die Bahngeschwindigkeit jedes Objekts beträgt $v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}$, also $v_{\text{col}}/c \simeq 0.22$.

Lösung

A.1

Das Newtonsche Gravitationsgesetz liefert für die Beschleunigung des ersten Sterns:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -GM_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Aus der Schwerpunktsbedingung folgt

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1.$$

Folglich gilt

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}.$$

Der Vergleich mit (2) ergibt

$$n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

A.2

Aus der Schwerpunktsbedingung und $L = r_1 + r_2$ folgt

$$r_1 = \frac{M_2}{M} L, \quad r_2 = \frac{M_1}{M} L.$$

Die Sterne haben die Bahngeschwindigkeiten $v_1 = \Omega r_1$ und $v_2 = \Omega r_2$. Ihre gesamte kinetische Energie beträgt daher

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 \Omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \Omega^2 r_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 L^2 \left(\frac{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2}{M^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2. \end{aligned}$$

Die potenzielle Gravitationsenergie mit dem Nullpunkt bei unendlichem Abstand ist

$$U = -\frac{GM_1 M_2}{L} = -\frac{GM\mu}{L}.$$

Der Term A ist somit die kinetische Energie:

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2.$$

A.3

Für den ersten Stern liefert die Gravitation die Zentripetalkraft:

$$M_1 \Omega^2 r_1 = \frac{GM_1 M_2}{L^2}.$$

Mit $r_1 = M_2 L / M$ erhalten wir die Beziehung für Kreisbahnen

$$\Omega^2 = \frac{GM}{L^3}.$$

Damit gilt

$$T = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2 = \frac{GM\mu}{2L},$$

und

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{2L}.$$

Also ist

$$\beta = -\frac{1}{2}.$$

B.1

Wir wählen den Zeitnullpunkt so, dass die erste Masse bei $t = 0$ auf der positiven x -Achse liegt und sich gegen den Uhrzeigersinn bewegt. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t), \\(x_2, y_2) &= (-r_2 \cos \Omega t, -r_2 \sin \Omega t).\end{aligned}$$

Aus A.2 folgt

$$M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2.$$

Einsetzen in die Quadrupolkomponenten ergibt

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{\mu L^2}{3} (2 \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Omega t \right), \\Q_{22} &= \frac{\mu L^2}{3} (2 \sin^2 \Omega t - \cos^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right), \\Q_{33} &= -\frac{\mu L^2}{3} = \frac{\mu L^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right), \\Q_{12} = Q_{21} &= \mu L^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{\mu L^2}{2} \sin 2\Omega t.\end{aligned}$$

Somit ist

$$k = 2\Omega.$$

Die Diagonalkoeffizienten sind

i	a_i	b_i
1	$1/3$	1
2	$1/3$	-1
3	$-2/3$	0

Die außerdiagonalen Koeffizienten sind

$$c_{12} = c_{21} = 1, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0.$$

B.2

Wir setzen $q = \mu L^2/2$ und $k = 2\Omega$. Für die Kreisbahn sind die von null verschiedenen dritten Ableitungen

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_{11} &= qk^3 \sin kt, \\ \ddot{Q}_{22} &= -qk^3 \sin kt, \\ \ddot{Q}_{12} &= \ddot{Q}_{21} = -qk^3 \cos kt.\end{aligned}$$

Beide außerdiagonalen Einträge tragen zur Doppelsumme bei. Daher gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} (\ddot{Q}_{ij})^2 &= 2q^2 k^6 \sin^2 kt + 2q^2 k^6 \cos^2 kt \\ &= 2q^2 k^6 \\ &= 2 \left(\frac{\mu L^2}{2} \right)^2 (2\Omega)^6 \\ &= 32\mu^2 L^4 \Omega^6.\end{aligned}$$

Die Leuchtkraft ist folglich

$$\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6, \quad \xi = \frac{32}{5} = 6.4.$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Bahnphase.

B.3

Wir nähern die Einspiralbewegung durch eine sich langsam entwickelnde Folge von Kreisbahnen an. Die Massen bleiben konstant, und für die durch die Wellen abgeführte Energie gilt

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}.$$

Die Eliminierung von L mithilfe der Beziehung für Kreisbahnen,

$$L = (GM)^{1/3} \Omega^{-2/3},$$

ergibt

$$E = -\frac{1}{2} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{2/3}.$$

Die zeitliche Ableitung davon ist

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{-1/3} \frac{d\Omega}{dt}.$$

Die Leuchtkraft, ausgedrückt durch Ω , ist

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 (GM)^{4/3} \Omega^{10/3}.$$

Setzt man die Energieänderungsrate gleich $-\mathcal{P}$, ergibt sich

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

Durch Kubieren folgt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2.$$

Dies hat die geforderte Form, wenn

$$M_c^5 = \mu^3 M^2.$$

Somit ist

$$M_c = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}.$$

Insbesondere gilt $d\Omega/dt > 0$: Wenn das System Energie verliert, schrumpft seine Umlaufbahn und seine Umlauffrequenz nimmt zu.

B.4

Die Umlauffrequenz ist $f_{\text{orb}} = \Omega/(2\pi)$. Aus dem gegebenen Faktor zwei zwischen GW-Frequenz und Umlauffrequenz folgt daher

$$f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{\Omega}{\pi}.$$

Ziehen der positiven Kubikwurzel aus (10) ergibt

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

Mit $\Omega = \pi f_{\text{GW}}$ wird daraus

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = 3\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3}.$$

Die Anwendung von (11) mit $a = 11/3$ oder die direkte Ableitung von $f_{\text{GW}}^{-8/3}$ liefert

$$\frac{d}{dt} \left(f_{\text{GW}}^{-8/3} \right) = -8\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3}.$$

Integration ergibt

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_0 - t).$$

Der Vergleich der Exponenten mit (12) ergibt

$$\frac{2}{3} + p = \frac{5}{3}, \quad 2 - p = 1,$$

also

$$\boxed{p = 1}.$$

Hier ist t_0 der formale Zeitpunkt, zu dem dieses Näherungsmodell der Einspiralbewegung eine divergierende Frequenz vorhersagt.

B.5

A und B markieren aufeinanderfolgende Nulldurchgänge beiderseits eines positiven Wellenbergs; C und D tun dies entsprechend für einen späteren Wellenberg. Jedes Intervall umfasst daher ungefähr eine halbe GW-Periode.

Wir nähern die Frequenz während jedes kurzen Intervalls durch ihren Wert in der Intervallmitte an:

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{AB}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{B}} - t_{\text{A}})} = \frac{1}{2(0.009 \text{ s})} \simeq 55.6 \text{ Hz},$$

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{CD}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{D}} - t_{\text{C}})} = \frac{1}{2(0.006 \text{ s})} \simeq 83.3 \text{ Hz}.$$

Die entsprechenden Zeitpunkte sind

$$t_{\overline{\text{AB}}} = 0.0045 \text{ s}, \quad t_{\overline{\text{CD}}} = 0.037 \text{ s},$$

ihre Differenz beträgt also 0.0325 s.

Diese Frequenzschätzungen seien mit f_{AB} und f_{CD} bezeichnet. Subtrahiert man die für die beiden Zeitpunkte ausgewertete Beziehung aus B.4, wird t_0 eliminiert:

$$f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}}).$$

Auflösen nach der Chirp-Masse ergibt

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left[\frac{f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3}}{8\pi^{8/3}\xi (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}})} \right]^{3/5}.$$

Mit den angegebenen Konstanten und $\xi = 6.4$ folgt

$$M_c \simeq 6.02 \times 10^{31} \text{ kg},$$

oder mit angemessener Genauigkeit

$$\boxed{M_c \simeq 30M_{\odot}}.$$

Bei gleichen Einzelmassen gilt $M_1 = M_2 = M/2$, also

$$\mu = \frac{M}{4}, \quad M_c = \left(\frac{M}{4} \right)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Somit ist

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 1.38 \times 10^{32} \text{ kg},$$

und

$$\boxed{M \simeq 69M_{\odot}}.$$

Jede Komponente hat daher eine Masse von ungefähr $35M_{\odot}$.

B.6

Zum späteren Messzeitpunkt gilt

$$\Omega_{\text{CD}} = \pi f_{\text{CD}} \simeq 2.62 \times 10^2 \text{ rad/s.}$$

Die Beziehung für Kreisbahnen liefert

$$L = \left(\frac{GM}{\Omega_{\text{CD}}^2} \right)^{1/3}.$$

Die Wahl gleicher Massen ergibt zugleich die minimale Gesamtmasse und damit den minimalen Abstand, die mit der abgeleiteten Chirp-Masse und Frequenz vereinbar sind. Es gilt nämlich

$$\frac{\mu}{M} = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

also

$$M_c = M \left(\frac{\mu}{M} \right)^{3/5} \leq \frac{M}{4^{3/5}}.$$

Gleichheit gilt bei gleichen Massen. Mit der in B.5 bestimmten Masse folgt

$$L_{\min} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.383 \times 10^{32})}{(2.618 \times 10^2)^2} \right]^{1/3} \text{ m,}$$

woraus sich ergibt

$$\boxed{L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^5 \text{ m} = 5.1 \times 10^2 \text{ km} .}$$

Wenn wir für die gleich schweren Objekte denselben Radius ansetzen, erfordert ihr Fortbestehen als getrennte Objekte näherungsweise $2R \lesssim L$. Daher gilt

$$\boxed{R_{\max} \simeq \frac{L_{\min}}{2} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km} .}$$

Der Vergleich mit der Sonne ergibt

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq \frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{2.56 \times 10^2 \text{ km}},$$

also

$$\boxed{\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq 2.7 \times 10^3 .}$$

Jedes Objekt umläuft den Schwerpunkt auf einer Bahn mit dem Radius $L/2$. Seine Bahngeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt beträgt daher

$$v_{\text{col}} = \Omega_{\text{CD}} \frac{L}{2} \simeq (2.618 \times 10^2)(2.562 \times 10^5) \text{ m/s,}$$

woraus folgt

$$\boxed{v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s},} \quad \boxed{\frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq 0.22 .}$$

Somit enthält jedes Objekt etwa 35 Sonnenmassen innerhalb eines Radius von höchstens ungefähr 260 km und bewegt sich dabei mit etwa einem Fünftel der Lichtgeschwindigkeit. Es handelt sich um extrem kompakte und schnell bewegte Objekte. Die numerischen Abschätzungen verwenden die vorgegebenen Näherungen Newtonscher Kreisbahnen und der Quadrupolstrahlung, deren Genauigkeit in der Nähe der Verschmelzung abnimmt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Wo ist das Neutrino?

Wenn am Large Hadron Collider (LHC) zwei Protonen mit sehr hoher Energie kollidieren, können bei dieser Kollision verschiedene Teilchen entstehen, etwa Elektronen, Myonen, Neutrinos, Quarks und ihre jeweiligen Antiteilchen. Die meisten dieser Teilchen können mit dem Teilchendetektor nachgewiesen werden, der den Kollisionspunkt umgibt. Beispielsweise durchlaufen Quarks einen Prozess namens *Hadronisierung*, bei dem sie sich in einen Schauer subatomarer Teilchen verwandeln, der als „Jet“ bezeichnet wird. Außerdem bewirkt das starke Magnetfeld in den Detektoren, dass die Bahnen selbst sehr energiereicher geladener Teilchen ausreichend gekrümmt werden, um ihren Impuls bestimmen zu können. Der ATLAS-Detektor verwendet ein supraleitendes Solenoidsystem, das im inneren Teil des Detektors um den Kollisionspunkt ein zeitlich konstantes und homogenes Magnetfeld von 2.00 Tesla erzeugt. Die Bahnen geladener Teilchen mit Impulsen unterhalb eines bestimmten Wertes werden so stark gekrümmt, dass die Teilchen das Feld wiederholt auf geschlossenen Bahnen durchlaufen und höchstwahrscheinlich nicht gemessen werden. Das Neutrino wird aufgrund seiner Eigenschaften überhaupt nicht nachgewiesen, da es den Detektor ohne Wechselwirkung durchquert und entkommt.

Gegebene Daten: Ruhemasse des Elektrons, $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; Elementarladung, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$;

Lichtgeschwindigkeit, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; elektrische Feldkonstante, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Teil A. Physik des ATLAS-Detektors (4.0 Punkte)

A.1 — 0.5 Punkte

Leiten Sie einen Ausdruck für den Zyklotronradius r der Kreisbahn eines Elektrons her, auf das eine magnetische Kraft senkrecht zu seiner Geschwindigkeit wirkt, und drücken Sie diesen Radius als Funktion seiner kinetischen Energie K , seines Ladungsbetrags e , seiner Masse m und des Magnetfelds B aus. Nehmen Sie an, dass das Elektron ein nichtrelativistisches klassisches Teilchen ist.

Elektronen, die im ATLAS-Detektor entstehen, müssen relativistisch behandelt werden. Die Formel für den Zyklotronradius gilt jedoch auch für relativistische Bewegungen, wenn der relativistische Impuls verwendet wird.

A.2 — 0.5 Punkte

Berechnen Sie den Mindestwert des Impulses eines Elektrons, bei dem es den inneren Teil des Detektors in radialer Richtung verlassen kann. Der innere Teil des Detektors hat die Form eines Zylinders mit einem Radius von 1.1 Metern, und das Elektron entsteht am Kollisionspunkt genau im Zentrum des Zylinders. Geben Sie Ihre Antwort in MeV/c an.

Werden relativistische Teilchen mit der Ladung e und der Ruhemasse m senkrecht zu ihrer Geschwindigkeit beschleunigt, so emittieren sie elektromagnetische Strahlung, die als Synchrotronstrahlung bezeichnet wird. Die abgestrahlte Leistung ist gegeben durch

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

wobei a die Beschleunigung ist und $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ gilt.

A.3 — 1.0 Punkte

Ein Teilchen wird als ultrarelativistisch bezeichnet, wenn seine Geschwindigkeit sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt. Für ein ultrarelativistisches Teilchen lässt sich die abgestrahlte Leistung folgendermaßen ausdrücken:

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

wobei ξ eine reelle Zahl ist, n und k ganze Zahlen sind, E die Energie des geladenen Teilchens und B das Magnetfeld ist. Bestimmen Sie ξ , n und k .

A.4 — 1.0 Punkte

Im ultrarelativistischen Grenzfall ist die Energie des Elektrons als Funktion der Zeit gegeben durch:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

wobei E_0 die Anfangsenergie des Elektrons ist. Bestimmen Sie α als Funktion von e , c , B , ϵ_0 und m .

A.5 — 0.5 Punkte

Betrachten Sie ein Elektron, das am Kollisionspunkt mit einer Energie von 100 GeV in radialer Richtung erzeugt wird. Schätzen Sie die Energie ab, die durch Synchrotronstrahlung verloren geht, bis das Elektron den inneren Teil des Detektors verlässt. Geben Sie Ihre Antwort in MeV an.

A.6 — 0.5 Punkte

Bestimmen Sie im ultrarelativistischen Grenzfall einen Ausdruck für die Zyklotronfrequenz des Elektrons als Funktion der Zeit.

Teil B. Das Neutrino finden (6.0 Punkte)

Die in Abbildung 1 dargestellte Kollision zweier Protonen führt zur Erzeugung eines Top-Quarks (t) und eines Anti-Top-Quarks ($\bar{t}$), der schwersten jemals nachgewiesenen Elementarteilchen. Das Top-Quark zerfällt in ein W^+ -Boson und ein Bottom-Quark (b), während das Anti-Top-Quark in ein W^- -Boson und ein Anti-Bottom-Quark ($\bar{b}$) zerfällt. Im in Abbildung 1 dargestellten Fall zerfällt das W^+ -Boson in ein Antimyon (μ^+) und ein Neutrino (ν), und das W^- -Boson zerfällt in ein

Quark und ein Antiquark. Ziel dieser Aufgabe ist es, den vollständigen Impuls des Neutrinos mithilfe der Impulse einiger nachgewiesener Teilchen zu rekonstruieren. **Der Einfachheit halber werden alle Teilchen und Jets in dieser Aufgabe als masselos betrachtet, mit Ausnahme des Top-Quarks und der $W^\pm$ -Bosonen.**

Die Impulse der Zerfallsprodukte des Top-Quarks können experimentell bestimmt werden (siehe Tabelle), mit Ausnahme der Impulskomponente des Neutrinos entlang der z -Achse. Der Gesamtimpuls der vom Detektor erfassten Teilchen im Endzustand ist nur in der Transversalebene (xy -Ebene) null, nicht aber entlang der Kollisionsachse (z -Achse). Daher lässt sich der Transversalimpuls des Neutrinos aus dem fehlenden Impuls in der Transversalebene bestimmen.

Am 4. Juni 2015 zeichnete das ATLAS-Experiment am LHC um 00:21:24 GMT+1 eine Proton-Proton-Kollision auf, wie sie in Abbildung 1 dargestellt ist.

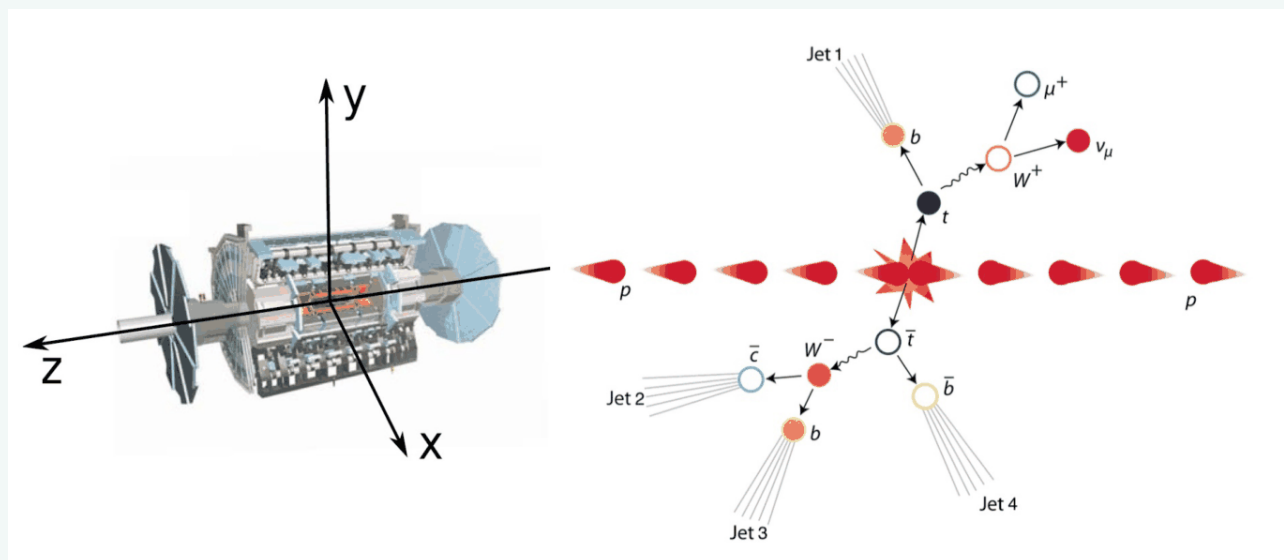


Abbildung 1. Schematische Darstellung des Koordinatensystems des ATLAS-Detektors (links) und der Proton-Proton-Kollision (rechts).

Die Impulse der drei Teilchen im Endzustand, die aus dem Zerfall des Top-Quarks hervorgehen, einschließlich des Neutrinos, sind nachfolgend für jede Komponente angegeben.

Teilchen	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
Antimyon (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
Jet 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
Neutrino (ν)	-104.1	+5.3	---

B.1 — 1.5 Punkte

Bestimmen Sie eine Gleichung, die das Quadrat der Masse des W^+ -Bosons, m_W^2 , mit den in der obigen Tabelle angegebenen Impulscomponenten des Neutrinos und des Antimyons verknüpft. Drücken Sie Ihre Antwort durch die Transversalimpulse des Neutrinos und des Antimyons,

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{und} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

und ihre Impulscomponenten entlang der z -Achse, $p_z^{(\mu)}$ und $p_z^{(\nu)}$, aus.

B.2 — 1.5 Punkte

Berechnen Sie unter der Annahme einer Masse des W^+ -Bosons von $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ die beiden möglichen Lösungen für den Impuls des Neutrinos entlang der z -Achse, $p_z^{(\nu)}$. Geben Sie Ihre Antwort in GeV/c an.

B.3 — 1.0 Punkte

Berechnen Sie die Masse des Top-Quarks für jede der beiden vorherigen Lösungen. Geben Sie Ihre Antwort in GeV/c^2 an.

[Falls Sie in B.2 die beiden Lösungen nicht erhalten haben, verwenden Sie $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ und $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$.]

Die normierte Anzahl der Kollisionsereignisse zur Messung der Masse des Top-Quarks (wie sie experimentell bestimmt wird) hat zwei Komponenten: das sogenannte „Signal“ (das dem Zerfall von Top-Quarks entspricht) und den „Untergrund“ (der Ereignissen aus anderen Prozessen entspricht, an denen keine Top-Quarks beteiligt sind). Die experimentellen Daten enthalten beide Prozesse, siehe Abb. 2.

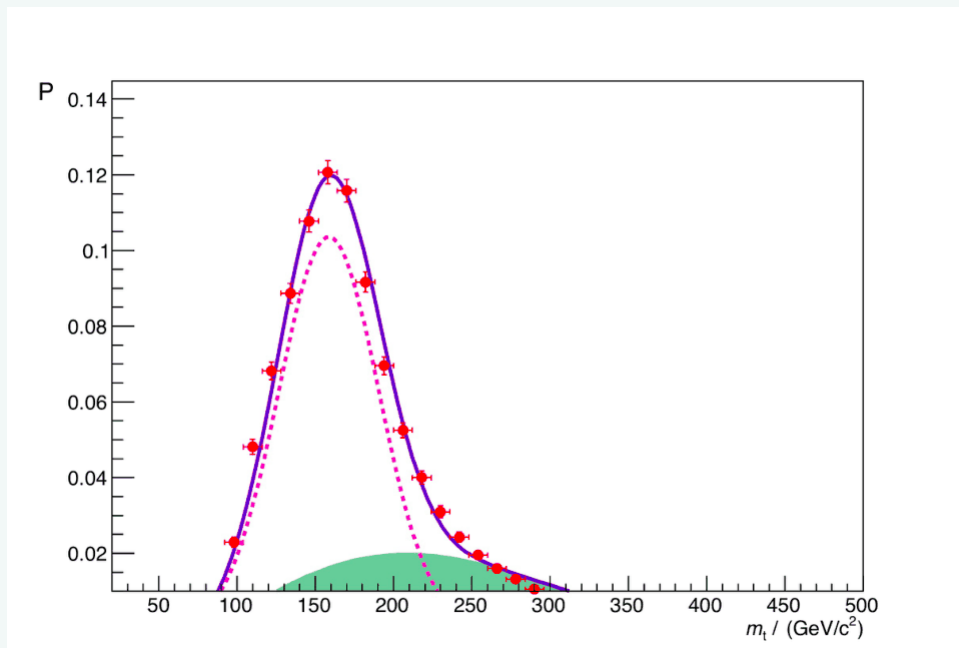


Abbildung 2. Experimentell bestimmte Massenverteilung des Top-Quarks, d. h. die normierte Anzahl der Ereignisse, aufgetragen gegen die Masse des Top-Quarks. Die Punkte entsprechen den Daten. Die gestrichelte Linie entspricht dem „Signal“ und die schattierte Fläche dem „Untergrund“.

B.4 — 1.0 Punkte

Welche der beiden vorherigen Lösungen ist gemäß der Massenverteilung des Top-Quarks mit größerer Wahrscheinlichkeit die richtige? Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für die wahrscheinlichere Lösung ab.

B.5 — 1.0 Punkte

Berechnen Sie anhand der wahrscheinlicheren Lösung die Strecke, die das Top-Quark vor seinem Zerfall zurücklegt. Nehmen Sie für das Top-Quark eine mittlere Lebensdauer in Ruhe von 5×10^{-25} s an.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier gilt $p_T^{(a)} = |\vec{p}_T^{(a)}|$.

- **A.1:** $r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}$.
- **A.2:** $p_{\min} = \frac{eBR}{2} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c$.
- **A.3:** $\xi = \frac{1}{6\pi}$, $n = 5$, $k = 4$.
- **A.4:** $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}$.
- **A.5:** $\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}$.
- **A.6:** Die momentane Frequenz ist

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t).$$

Die Kreisfrequenz ist $\omega(t) = 2\pi f(t)$.

- **B.1:**

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

- **B.2:** $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ oder $-188 \text{ GeV}/c$.
- **B.3:** Entsprechend $m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2$ oder $311 \text{ GeV}/c^2$.
- **B.4:** Die Lösung $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ ist wahrscheinlicher. Die im Diagramm dargestellte Wahrscheinlichkeit bei ihrer rekonstruierten Masse beträgt ungefähr $P \simeq 0.12$, also 12%.
- **B.5:** Die mittlere Strecke beträgt $\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}$.

Lösung

A.1

Bei einer Bewegung senkrecht zum Magnetfeld liefert die magnetische Lorentzkraft die Zentripetalkraft:

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

Somit gilt $r = mv/(eB)$. Mit der nichtrelativistischen kinetischen Energie $K = \frac{1}{2}mv^2$ ergibt sich

$$r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}.$$

Äquivalent dazu gilt $r = p/(eB)$, was auch relativistisch gilt, wenn p der relativistische Impuls ist.

A.2

Der Detektorradius sei $R = 1.1$ m. Die Kreisbahn des Elektrons verläuft durch den Kollisionspunkt, sodass ihr Mittelpunkt den Abstand r von diesem Punkt hat. Der größte radiale Abstand vom Kollisionspunkt beträgt daher $2r$.

Die Grenzbahn berührt die zylindrische Begrenzung, wenn

$$2r = R.$$

Der minimale Gesamtimpuls ergibt sich bei einer Bewegung senkrecht zum Solenoidfeld. Daher beträgt der Schwellenimpuls für das Verlassen des Detektors

$$p_{\min} = eB \frac{R}{2} = (1.60 \times 10^{-19})(2.00) \frac{1.1}{2} = 1.76 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Wegen

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{10^6(1.60 \times 10^{-19})}{3.00 \times 10^8} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1},$$

erhalten wir

$$p_{\min} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c.$$

Knapp oberhalb dieser Schwelle schneidet die Bahn die zylindrische Begrenzung.

A.3

Für eine Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit lautet die relativistische transversale Bewegungsgleichung

$$evB = \gamma ma,$$

sodass die Zentripetalbeschleunigung gegeben ist durch

$$a = \frac{evB}{\gamma m}.$$

Einsetzen in die angegebene Strahlungsformel ergibt

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{\gamma^2 m^2} \gamma^4 = \frac{e^4 B^2 v^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

Im ultrarelativistischen Grenzfall gilt $v \simeq c$, während die Gesamtenergie $E = \gamma mc^2$ beträgt. Daher gilt

$$P \simeq \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \frac{e^4 E^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

Der Vergleich mit der gesuchten Form liefert

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$$

A.4

Die magnetische Kraft verrichtet keine Arbeit, sodass die Energie des Elektrons um die abgestrahlte Energie abnimmt:

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\alpha E^2,$$

wobei nach A.3 gilt:

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

Integration mit $E(0) = E_0$ ergibt

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^2} = -\alpha \int_0^t dt,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \alpha t.$$

Somit gilt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

wie in der Aufgabenstellung angegeben.

A.5

Zunächst überprüfen wir die Bahnkrümmung. Für ein ultrarelativistisches Elektron gilt $p \simeq E/c$, sodass sein anfänglicher Zyklotronradius gegeben ist durch

$$r_0 \simeq \frac{E_0}{eBc}.$$

Hier gilt

$$E_0 = 100 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-8} \text{ J},$$

und daher

$$r_0 = \frac{1.60 \times 10^{-8}}{(1.60 \times 10^{-19})(2.00)(3.00 \times 10^8)} = 1.67 \times 10^2 \text{ m}.$$

Da $r_0 \gg R = 1.1 \text{ m}$ gilt, ist die Bahn durch den Detektor nahezu geradlinig. Somit gilt

$$t_{\text{exit}} \simeq \frac{R}{c} = \frac{1.1}{3.00 \times 10^8} = 3.67 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

Mit den angegebenen Konstanten ergibt sich

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} = 9.39 \times 10^{12} \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

und

$$\alpha E_0 t_{\text{exit}} = 5.51 \times 10^{-4}.$$

Die verlorene Energie beträgt

$$\Delta E = E_0 - \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}} = \frac{\alpha E_0^2 t_{\text{exit}}}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\Delta E = 8.81 \times 10^{-12} \text{ J} = 55.1 \text{ MeV}.$$

Mit angemessener Genauigkeit gilt somit

$$\boxed{\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}}.$$

Dies entspricht nur etwa 5.5×10^{-4} der Anfangsenergie und bestätigt, dass der Radius während des gesamten Flugs sehr groß bleibt.

A.6

Die momentane Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Impulsvektors ist

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

Mit $E = \gamma mc^2$ ergibt sich

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E(t)}.$$

Einsetzen des Ergebnisses aus A.4 liefert

$$\boxed{\omega(t) = \frac{eBc^2}{E_0}(1 + \alpha E_0 t)}.$$

Die gewöhnliche Frequenz, gemessen in Umläufen pro Sekunde, ist daher

$$\boxed{f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0}(1 + \alpha E_0 t)}.$$

Beide nehmen im Rahmen der ultrarelativistischen Näherung linear mit der Zeit zu.

B.1

Die Erhaltung des Viererimpulses bei $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ ergibt

$$E_W = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}_W = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}.$$

Die invariante Masse des Zweiteilchensystems erfüllt

$$m_W^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2 - c^2 |\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}|^2.$$

Beide Tochterteilchen werden als masselos behandelt, daher gilt

$$E_\mu = c |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad E_\nu = c |\vec{p}^{(\nu)}|.$$

Beim Ausmultiplizieren der Invariante heben sich die einzelnen Energie-Impuls-Terme auf:

$$m_W^2 c^4 = 2 \left(E_\mu E_\nu - c^2 \vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} \right).$$

Nun gilt

$$|\vec{p}^{(a)}| = \sqrt{(p_T^{(a)})^2 + (p_z^{(a)})^2},$$

und

$$\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} = \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} + p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

Die gesuchte Beziehung lautet daher

$$\boxed{\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}}.$$

B.2

Wir definieren

$$q = p_z^{(\nu)}, \quad \ell = p_z^{(\mu)}, \quad a = (p_T^{(\mu)})^2, \quad b = (p_T^{(\nu)})^2,$$

und setzen

$$p_\mu = |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad D = \frac{m_W^2 c^2}{2} + \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)}.$$

Die Gleichung aus B.1 wird zu

$$p_\mu \sqrt{b + q^2} = D + \ell q.$$

Quadrieren und Verwenden von $p_\mu^2 - \ell^2 = a$ ergibt

$$a q^2 - 2 D \ell q + p_\mu^2 b - D^2 = 0.$$

Ihre Lösungen lauten

$$q = \frac{D \ell \pm p_\mu \sqrt{D^2 - a b}}{a}.$$

Die gemessenen Komponenten liefern

$$\begin{aligned} a &= 24.7^2 + 24.9^2 = 1230.1 \text{ (GeV/c)}^2, \\ b &= 104.1^2 + 5.3^2 = 10864.9 \text{ (GeV/c)}^2, \\ p_\mu &= \sqrt{24.7^2 + 24.9^2 + 12.4^2} = 37.2003 \text{ GeV/c}, \\ \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} &= (-24.7)(-104.1) + (-24.9)(5.3) \\ &= 2439.3 \text{ (GeV/c)}^2, \\ D &= \frac{80.4^2}{2} + 2439.3 = 5671.38 \text{ (GeV/c)}^2. \end{aligned}$$

Die beiden numerischen Lösungen sind somit

$$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}, \quad q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}.$$

Beide erfüllen die ursprüngliche, nicht quadrierte Gleichung. Daher gilt

$$\boxed{p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV/c} \quad \text{oder} \quad -188 \text{ GeV/c}}.$$

B.3

Das Top-Quark zerfällt in das Antimyon, das Neutrino und den Bottom-Quark-Jet. Aus der Energie- und Impulserhaltung folgt

$$E_t = E_\mu + E_\nu + E_{j_1}, \quad \vec{p}_t = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j_1)}.$$

Da alle drei Zerfallsprodukte als masselos behandelt werden, gilt

$$E_t = c \left(|\vec{p}^{(\mu)}| + |\vec{p}^{(\nu)}| + |\vec{p}^{(j_1)}| \right).$$

Der Betrag des Jetimpulses ist

$$|\vec{p}^{(j_1)}| = \sqrt{(-14.2)^2 + 50.1^2 + 94.1^2} = 107.5475 \text{ GeV}/c.$$

Wenn q als sein Zahlenwert in GeV/c eingesetzt wird, ergibt sich

$$E_t = \left[37.2003 + 107.5475 + \sqrt{10864.9 + q^2} \right] \text{ GeV},$$

und

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 81.7 + q) \text{ GeV}/c.$$

Die rekonstruierte Masse des Top-Quarks folgt aus

$$m_t^2 c^4 = E_t^2 - c^2 |\vec{p}_t|^2.$$

Wenn während der Rechnung zusätzliche Stellen beibehalten werden, ergibt sich:

Neutrinolösung	E_ν (GeV)	E_t (GeV)	p_{tz} (GeV/c)	m_t (GeV/c ²)
$q_+ = 73.9532 \text{ GeV}/c$	127.804	272.552	155.653	169.344
$q_- = -188.2937 \text{ GeV}/c$	215.219	359.967	-106.594	311.183

Daher gilt

$$m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{für } p_z^{(\nu)} > 0,$$

$$m_t \simeq 311 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{für } p_z^{(\nu)} < 0.$$

B.4

Die Masse $169 \text{ GeV}/c^2$ liegt nahe am Maximum der Verteilung in Abbildung 2, während $311 \text{ GeV}/c^2$ in ihrem schwach besetzten oberen Ausläufer liegt. Die Lösung mit positivem $p_z^{(\nu)}$ ist daher wahrscheinlicher.

Das Ablesen der Ordinate der dargestellten Gesamtverteilungskurve in der Nähe von $169 \text{ GeV}/c^2$ ergibt

$$P \simeq 0.12 \quad \text{oder ungefähr } 12\%.$$

Der zugehörige rekonstruierte Neutrinoimpuls ist

$$\vec{p}^{(\nu)} \simeq (-104.1, +5.3, +74.0) \text{ GeV}/c.$$

B.5

Für die wahrscheinlichere Lösung gilt

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 155.653) \text{ GeV}/c,$$

somit gilt

$$|\vec{p}_t| = 213.558 \text{ GeV}/c.$$

Der Lorentzfaktor und die Geschwindigkeit des Top-Quarks sind

$$\gamma_t = \frac{E_t}{m_t c^2} = \frac{272.552}{169.344} = 1.609,$$

$$\beta_t = \frac{|\vec{p}_t|c}{E_t} = \frac{213.558}{272.552} = 0.7836.$$

Die mittlere Lebensdauer im Bezugssystem des Detektors beträgt $\gamma_t \tau_0$. Somit ist die mittlere zurückgelegte Strecke

$$\bar{L} = v_t \gamma_t \tau_0 = \beta_t \gamma_t c \tau_0 = \frac{|\vec{p}_t|c}{m_t c^2} c \tau_0.$$

Einsetzen ergibt

$$\bar{L} = \frac{213.558}{169.344} (3.00 \times 10^8) (5 \times 10^{-25}) = 1.89 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}}.$$

Dies ist eine mittlere Strecke, da die angegebene Lebensdauer im Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Physik lebender Systeme

Gegeben: Normaler Atmosphärendruck, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Teil A. Die Physik der Blutströmung (4.5 Punkte)

In diesem Teil untersuchen Sie zwei vereinfachte Modelle der Blutströmung in Gefäßen.

Blutgefäße sind näherungsweise zylinderförmig. Für eine stationäre, nicht turbulente Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem starren Zylinder ist bekannt, dass die Druckdifferenz der Flüssigkeit zwischen den beiden Enden des Zylinders gegeben ist durch

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

wobei ℓ und r die Länge und der Radius des Zylinders sind, η die Viskosität der Flüssigkeit und Q der Volumenstrom, also das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch den Zylinderquerschnitt strömt. Dieser Ausdruck liefert häufig die richtige Größenordnung der Druckdifferenz in einem Gefäß, selbst wenn die pulsierende Strömung, die Kompressibilität und die unregelmäßige Form des Gefäßes sowie die Tatsache unberücksichtigt bleiben, dass Blut keine einfache Flüssigkeit, sondern ein Gemisch aus Zellen und Plasma ist. Außerdem hat dieser Ausdruck dieselbe Form wie das ohmsche Gesetz, wobei der Volumenstrom als Stromstärke, die Druckdifferenz als Spannung und der Faktor $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ als Widerstand interpretiert werden.

Betrachten Sie beispielsweise das in Abbildung 1 dargestellte symmetrische Netzwerk aus Arteriolen (kleinen Arterien), das das Kapillarbett eines Gewebes mit Blut versorgt. In diesem Netzwerk teilt sich an jeder Verzweigung ein Gefäß in zwei identische Gefäße. Die Gefäße höherer Ebenen sind jedoch dünner und kürzer: Nehmen Sie an, dass die Radien und Längen der Gefäße zweier aufeinanderfolgender Ebenen, i und $i+1$, durch $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ und $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$ miteinander verknüpft sind.

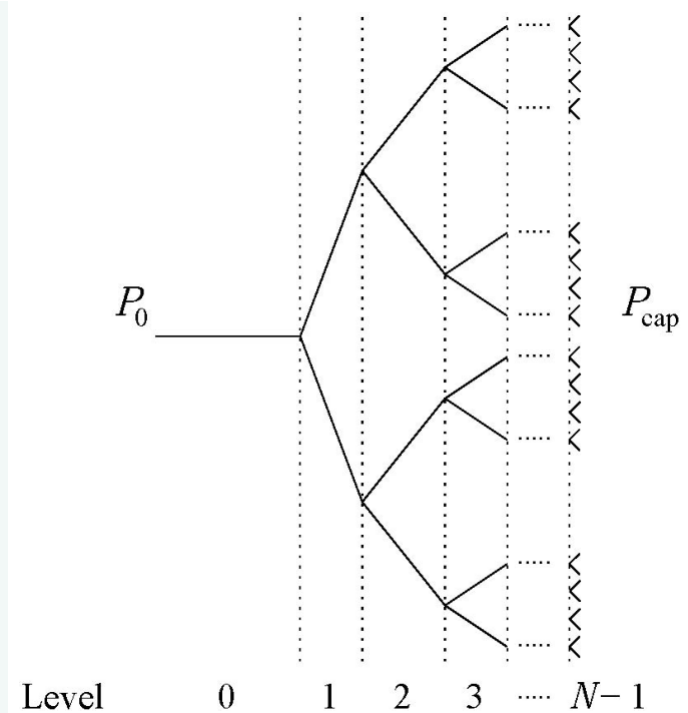


Abbildung 1. Netzwerk aus Arteriolen.

A.1 (1.3 Punkte)

Leiten Sie einen Ausdruck für den Volumenstrom Q_i in einem Gefäß einer beliebigen Ebene i her, als Funktion der Gesamtzahl der Ebenen N , der Viskosität η , des Radius r_0 und der Länge ℓ_0 des ersten Gefäßes sowie der Differenz $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ zwischen dem Druck P_0 in der Arteriole auf Ebene 0 und dem Druck P_{cap} im Kapillarbett.

A.2 (0.5 Punkte)

Berechnen Sie den Zahlenwert des Volumenstroms Q_0 der Arteriole auf Ebene 0, wenn ihr Radius $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ und ihre Länge $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ betragen. Nehmen Sie an, dass der Druck am Einlass der Arteriole 55 mmHg beträgt und das Gefäßnetzwerk $N = 6$ Ebenen besitzt, die diese Arteriole mit dem Kapillarbett bei einem Druck von 30 mmHg verbinden. Nehmen Sie für die Viskosität des Blutes $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ an. Geben Sie Ihr Ergebnis in ml/h an.

Ein Blutgefäß als LCR-Schaltung

Die Näherung starrer zylindrischer Gefäße ist aus mehreren Gründen unzureichend. Besonders wichtig ist es, die zeitabhängige Strömung einzubeziehen und die Änderung des Gefäßdurchmessers zu berücksichtigen, die auftritt, wenn sich der Druck während eines Pumpzyklus des Herzens ändert. Außerdem beobachtet man, dass der Blutdruck in größeren Gefäßen während eines Zyklus erheblich schwankt, während in kleineren Gefäßen die Amplitude der Druckschwingungen wesentlich geringer und die Strömung nahezu zeitunabhängig ist.

Wenn der Druck in einem einzelnen elastischen Gefäß zunimmt, vergrößert sich dessen Durchmesser. Dadurch kann das Gefäß mehr Flüssigkeit speichern und diese bei sinkendem Druck wieder abgeben. Aus diesem Grund lässt sich das elastische Verhalten des Gefäßes simulieren, indem wir unsere ursprüngliche Beschreibung um einen Kondensator ergänzen. Berücksichtigt man zudem den zeitabhängigen Blutvolumenstrom, muss man die Trägheit der Flüssigkeit einbeziehen, die proportional zu ihrer Dichte $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ist. Diese

Trägheit lässt sich in unserem Modell durch eine Induktivität beschreiben. In Abbildung 2 ist das Ersatzschaltbild für ein einzelnes Gefäß in diesem Modell dargestellt. Die Ersatzkapazität und die Ersatzinduktivität sind gegeben durch

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{und} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

wobei h die Dicke der Gefäßwand und E der Elastizitätsmodul der Arterie ist, ein Koeffizient, der die Größenänderung des Gefäßgewebes unter Einwirkung einer Kraft beschreibt. Der Elastizitätsmodul hat die Einheit eines Drucks und liegt bei Arteriolen in der Größenordnung von $E = 0.06 \text{ MPa}$.

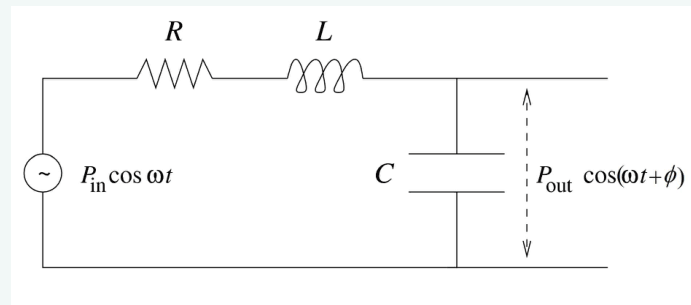


Abbildung 2. Elektrisches Ersatzschaltbild für ein einzelnes Gefäß.

A.3 (2.0 Punkte)

Bestimmen Sie im eingeschwungenen Zustand die Druckamplitude am Gefäßauslass, P_{out} , als Funktion der Druckamplitude am Einlass, P_{in} , des Ersatzwiderstands R , der Ersatzinduktivität L und der Ersatzkapazität C für eine Strömung mit der Kreisfrequenz ω . Stellen Sie die Bedingung zwischen η , ρ , E , h , r und ℓ auf, unter der bei niedrigen Frequenzen die Amplitude der Druckschwingung am Auslass kleiner als P_{in} ist.

A.4 (0.7 Punkte)

Schätzen Sie für das Gefäßnetzwerk aus **A.2** die maximale Wanddicke h der Arteriolen ab, für die die in **A.3** aufgestellte Bedingung erfüllt ist (nehmen Sie an, dass h von der Ebene unabhängig ist).

Teil B. Tumorwachstum (5.5 Punkte)

Tumorwachstum ist ein sehr komplexer Prozess, bei dem biologische Mechanismen wie Zellvermehrung und natürliche Selektion mit physikalischen Vorgängen verflochten sind. In dieser Aufgabe betrachten wir ein vereinfachtes Modell des Tumorwachstums, das den häufig in soliden Tumoren beobachteten Druckanstieg beschreibt.

Betrachten Sie eine Gruppe normaler Zellen, die ein Gewebe bilden, das von einer undehnbaren Basalmembran umgeben ist. Diese zwingt das Gewebe, stets dieselbe Form beizubehalten: eine Kugel mit dem Radius R (Abbildung 3).

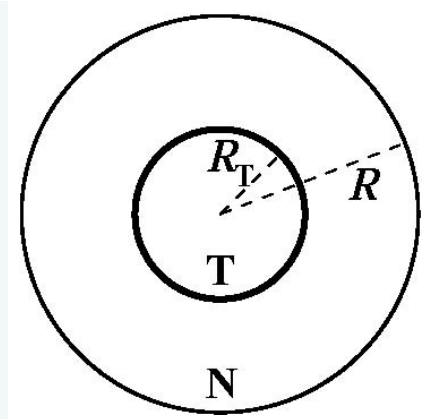


Abbildung 3. Vereinfachter Tumor.

Anfangs weist das Gewebe keine Eigenspannungen auf, d. h., der Druck ist an jedem Punkt gleich dem Atmosphärendruck.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt im Zentrum dieser Kugel ein Tumor zu wachsen, und mit seinem Wachstum steigt der Druck im Gewebe. Nehmen Sie an, dass beide Gewebe (normales Gewebe, N, und Tumorgewebe, T) kompressibel sind, sodass ihre Dichten ρ_N und ρ_T linear mit dem Druck zunehmen:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

wobei ρ_0 die Gewebedichte im Ruhezustand, p die Druckdifferenz gegenüber dem Atmosphärendruck und K_N , K_T die Kompressionsmoduln des normalen Gewebes bzw. des Tumorgewebes sind. Im Allgemeinen sind Tumoren steifer und besitzen daher einen höheren Kompressionsmodul.

B.1 (1.0 Punkte)

Die Masse der normalen Zellen ändert sich während des Tumorwachstums nicht. Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen Tumolvolumen und gesamtem Gewebevolumen, $v = V_T/V$, als Funktion des Verhältnisses zwischen der Tumormasse (M_T) und der Masse des normalen Gewebes (M_N), $\mu = M_T/M_N$, sowie des Verhältnisses der Kompressionsmoduln, $\kappa = K_N/K_T$.

Hyperthermie wird bei der Krebsbehandlung gelegentlich gemeinsam mit Chemotherapie und Strahlentherapie eingesetzt. Bei der Hyperthermie werden die Krebszellen gezielt von der normalen menschlichen Körpertemperatur von 37°C auf Temperaturen über 43°C erwärmt, wodurch ihr Absterben ausgelöst wird. Forschende entwickeln derzeit Kohlenstoffnanoröhren, die mit speziellen Proteinen beschichtet sind, die an Tumorzellen binden können. Wird das Gewebe mit nahinfraroter Strahlung bestrahlt, absorbieren die Nanoröhren diese wesentlich stärker als das umgebende Gewebe und können daher zusammen mit den Tumorzellen, an die sie gebunden sind, gezielt erwärmt werden.

Nehmen Sie an, dass der Tumor, die normalen Zellen und das umgebende Gewebe eine konstante Wärmeleitfähigkeit k besitzen, d. h., in der Geometrie dieser Aufgabe ist die Energie, die eine Kugeloberfläche mit dem Radius r pro Zeiteinheit und Flächeneinheit durchquert, gleich k mal der Ableitung der Temperatur nach r . Die Nanoröhren sind gleichmäßig im Tumolvolumen verteilt und können pro Volumeneinheit eine Wärmeleistung $\mathcal{P}$ abgeben. Nehmen Sie an, dass die Temperatur in sehr großer Entfernung vom Tumor gleich der normalen menschlichen Körpertemperatur ist.

B.2 (1.7 Punkte)

Bestimmen Sie für den stationären Zustand die Temperatur im Zentrum des Tumors als Funktion von $\mathcal{P}$, k , der menschlichen Körpertemperatur und dem Tumorradius R_T .

B.3 (0.5 Punkte)

Bestimmen Sie die minimale Leistung pro Volumeneinheit, $\mathcal{P}_{\min}$, die benötigt wird, um alle Tumorzellen in einem Tumor mit einem Radius von 5.0 cm auf eine Temperatur über 43.0°C zu erwärmen. Nehmen Sie für die Wärmeleitfähigkeit des Gewebes $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ an.

Nehmen Sie an, dass der Tumor von einem Gefäßnetzwerk mit einer Verzweigungsstruktur wie in Aufgabe A.1 durchblutet wird. Wenn der Tumor wächst und sein Druck p den Druck P_{cap} in den dünnsten Gefäßen übersteigt, verringern sich die Radien dieser Gefäße um einen kleinen Betrag δr . Erreicht dieser Druck einen kritischen Wert p_c (der einer Radiusverringern von δr_c entspräche), würden die dünnsten Gefäße kollabieren, wodurch die Durchblutung des Tumors stark beeinträchtigt würde. Druck und Radiusänderung lassen sich durch die folgende phänomenologische Beziehung miteinander verknüpfen:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Nehmen Sie an, dass sich bei steigendem Tumordruck nur die Radien der kleinsten Gefäße (auf Ebene $N - 1$) ändern.

B.4 (2.3 Punkte)

Drücken Sie im linearen Bereich (nehmen Sie also an, dass $p - P_{\text{cap}}$ sehr klein ist) die relative Abnahme des Volumenstroms $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ in diesen dünnsten Gefäßen als Funktion des Tumolvolumenanteils $v = V_T/V$ sowie von K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} aus.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

• A.1

$$Q_i = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8 \eta \ell_0 N 2^i}, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

• A.2

$$Q_0 = 1.4536 \dots \text{ ml/h} \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

- **A.3**

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

Eine Abschwächung bei hinreichend niedrigen, von null verschiedenen Frequenzen erfordert

$$R^2 C \geq 2L \iff h \leq \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

Für eine Abschwächung in der Ordnung ω^2 gilt die strikte Ungleichung; bei Gleichheit erfolgt die Abschwächung in der Ordnung ω^4 .

- **A.4**

$$h_{\text{max}} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ }\mu\text{m}.$$

Ebene 0 liefert die strengste Einschränkung.

- **B.1**

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

- **B.2** Mit T_b als normaler Körpertemperatur gilt

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

- **B.3**

$$\mathcal{P}_{\text{min}} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Dies ist der Schwellenwert; damit $43.0 \text{ }^\circ\text{C}$ überall strikt überschritten werden, muss die Leistungsdichte darüber liegen.

- **B.4** Wenn δQ_{N-1} die positiv gezählte Abnahme bezeichnet, gilt

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

Dies gilt knapp oberhalb des Beginns der Kompression, wo $p > P_{\text{cap}}$ ist.

Lösung

A.1

Aus der geometrischen Skalierung folgt

$$r_i = r_0 2^{-i/3}, \quad \ell_i = \ell_0 2^{-i/3}.$$

Folglich beträgt der hydraulische Widerstand eines einzelnen Gefäßes auf Ebene i

$$R_i = \frac{8\eta\ell_i}{\pi r_i^4} = \frac{8\eta\ell_0}{\pi r_0^4} 2^i = R_0 2^i.$$

Die Erhaltung des Volumenstroms und die Symmetrie bedingen, dass sich die Strömung an jeder Verzweigung gleichmäßig aufteilt. Daher gilt

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i}.$$

Der Druckabfall über ein beliebiges einzelnes Gefäß auf Ebene i beträgt somit

$$\Delta P_i = R_i Q_i = R_0 Q_0.$$

Jeder Weg vom Einlass zum Kapillarbett führt durch jeweils ein Gefäß auf jeder der N Ebenen. Die Addition der Druckabfälle entlang eines solchen Weges ergibt

$$\Delta P = N R_0 Q_0.$$

Damit folgt

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i} = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8\eta\ell_0 N 2^i}.$$

Gleichwertig trägt jede Ebene $R_i/2^i = R_0$ zum Gesamtwiderstand des Netzwerks bei, sodass $R_{\text{eq}} = N R_0$ gilt.

A.2

Mit der angegebenen Umrechnung zwischen mmHg und Pascal erhält man

$$\Delta P = (55 - 30) \frac{1.013 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 3.3322 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Daher gilt

$$Q_0 = \frac{\pi(6.0 \times 10^{-5})^4(3.3322 \times 10^3)}{8(3.5 \times 10^{-3})(2.0 \times 10^{-3})(6)} = 4.0379 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Da $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ ml}$ und $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ sind, folgt

$$Q_0 = (4.0379 \times 10^{-10})(10^6)(3600) = 1.4536 \text{ ml/h}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet ergibt sich

$$Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

A.3

In der Schaltungsanalogie entspricht der Druck der Spannung und der Volumenstrom der Stromstärke. Die Kondensatorgleichung und die Druckbilanz entlang des Stromkreises lauten

$$Q = C \frac{dp_{\text{out}}}{dt}, \quad p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = RQ + L \frac{dQ}{dt}.$$

Die Kombination dieser Gleichungen ergibt

$$LC \frac{d^2 p_{\text{out}}}{dt^2} + RC \frac{dp_{\text{out}}}{dt} + p_{\text{out}} = p_{\text{in}}.$$

Nachdem die Einschwingvorgänge abgeklungen sind, schwingen Eingangs- und Ausgangsdruck mit derselben Kreisfrequenz. Stellt man sie durch komplexe Amplituden dar, erhält man

$$(1 - \omega^2 LC + i\omega RC) \tilde{P}_{\text{out}} = \tilde{P}_{\text{in}}.$$

Durch Betragsbildung folgt

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Das Quadrat des Nenners ist

$$1 + C(R^2 C - 2L)\omega^2 + L^2 C^2 \omega^4.$$

Für hinreichend kleine, von null verschiedene ω erfordert eine Abschwächung in führender Ordnung

$$R^2 C > 2L.$$

Ist $R^2 C < 2L$, so ist der Nenner bei hinreichend niedrigen Frequenzen kleiner als eins, und die Druckschwingung wird verstärkt. Im Grenzfall $R^2 C = 2L$ wird das Quadrat des Nenners zu $1 + L^2 C^2 \omega^4 > 1$, sodass auch im Grenzfall eine Abschwächung auftritt, allerdings erst in der Ordnung ω^4 . Die exakte Bedingung lautet daher $R^2 C \geq 2L$.

Setzt man die gegebenen Gefäßparameter ein, erhält man

$$R^2 C = \left(\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} \right)^2 \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} = \frac{96\eta^2 \ell^3}{\pi E h r^5},$$

während

$$2L = \frac{9\ell\rho}{2\pi r^2}.$$

Somit gilt

$$64\eta^2 \ell^2 \geq 3\rho E h r^3$$

oder gleichwertig

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

Für eine Abschwächung in der Ordnung ω^2 sind diese Ungleichungen durch strikte Ungleichungen zu ersetzen. Bei der Frequenz null beträgt der Druckverstärkungsfaktor genau eins.

A.4

Auf Ebene i gilt

$$h_{\text{crit},i} = \frac{64\eta^2 \ell_i^2}{3\rho E r_i^3} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} 2^{i/3}.$$

Diese Schranke nimmt mit der Ebenennummer zu. Da dieselbe Wanddicke die Bedingung auf jeder Ebene erfüllen muss, ergibt sich die strengste Einschränkung aus Ebene 0.

Mit $E = 0.06 \times 10^6$ Pa erhält man

$$h_{\text{max}} = \frac{64(3.5 \times 10^{-3})^2 (2.0 \times 10^{-3})^2}{3(1.05 \times 10^3)(0.06 \times 10^6)(6.0 \times 10^{-5})^3} = 7.6818 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Somit gilt im Rahmen des gegebenen Modells

$$h_{\max} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ }\mu\text{m}.$$

Bei einer Dicke unterhalb dieses Grenzwerts ist die strikte Bedingung für eine Abschwächung in führender Ordnung im gesamten Netzwerk erfüllt.

B.1

Das gesamte Gewebevolumen V ist fest. Anfangs enthält es normales Gewebe mit der Dichte ρ_0 , sodass aus der Erhaltung der Masse der normalen Zellen folgt

$$M_N = \rho_0 V = \rho_N (V - V_T).$$

Mit $v = V_T/V$ und Gleichung (3) erhält man

$$1 = \left(1 + \frac{p}{K_N}\right)(1 - v).$$

Damit ist der Druck mit dem Tumolvolumen verknüpft durch

$$p = \frac{K_N v}{1 - v}.$$

Die Tumormasse beträgt

$$M_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T.$$

Division durch $M_N = \rho_0 V$ ergibt

$$\mu = v \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) = v \left(1 + \frac{\kappa v}{1 - v}\right).$$

Durch Umstellen erhält man eine quadratische Gleichung für v :

$$(1 - \kappa)v^2 - (1 + \mu)v + \mu = 0.$$

Die physikalische Lösung geht gegen null, wenn μ gegen null geht. Für $\kappa \neq 1$ lautet sie

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(1 - \kappa)\mu}}{2(1 - \kappa)}.$$

Durch Rationalisieren erhält man eine Form, die auch für $\kappa = 1$ unmittelbar gilt:

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

Zur Kontrolle: Bei gleichen Kompressionsmoduln haben beide Gewebe dieselbe Dichte, woraus $v = \mu/(1 + \mu)$ folgt, wie es dieser Ausdruck vorhersagt.

B.2

Es sei T_b die Körpertemperatur weit entfernt vom Tumor. Im stationären Zustand ist der nach außen gerichtete Wärmestrom durch eine Kugel gleich der gesamten in ihrem Inneren erzeugten Leistung. Wählt man den nach außen gerichteten Wärmestrom als positiv, lautet das fouriersche Gesetz

$$\dot{H}(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

Im Inneren des Tumors, $0 \leq r \leq R_T$, ergibt die gleichmäßige Wärmeerzeugung

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi r^3}{3} \mathcal{P},$$

also

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}r}{3k}.$$

Außerhalb des Tumors durchquert die gesamte erzeugte Leistung jede Kugeloberfläche:

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi R_T^3}{3} \mathcal{P}.$$

Integration unter der Bedingung $T(r) \rightarrow T_b$ für $r \rightarrow \infty$ ergibt

$$T(r) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}, \quad r \geq R_T.$$

Damit beträgt die Temperatur an der Tumoroberfläche

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

Die Temperatur ist an der Oberfläche stetig. Integriert man den Temperaturgradienten im Inneren von dieser Oberfläche aus nach innen, erhält man

$$T(r) = T(R_T) + \frac{\mathcal{P}}{6k}(R_T^2 - r^2) = T_b + \frac{\mathcal{P}}{6k}(3R_T^2 - r^2).$$

Folglich gilt

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$$

Die Temperatur nimmt im Inneren des Tumors quadratisch ab und nähert sich außerhalb davon mit $1/r$ dem Wert T_b .

B.3

Die Temperatur nimmt mit dem Abstand vom Zentrum ab, sodass sich die kältesten Tumorzellen an der Oberfläche befinden. Damit jede Tumorzelle auf über 43.0°C erwärmt wird, muss daher gelten

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k} > 43.0^\circ\text{C}.$$

Der Schwellenwert der Leistungsdichte beträgt

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2}.$$

Einsetzen von $R_T = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ergibt

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3(0.60)(6.0)}{(5.0 \times 10^{-2})^2} = 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Damit folgt

$$\mathcal{P}_{\min} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

Bei diesem Schwellenwert beträgt die Temperatur an der Oberfläche genau 43.0°C , während sie im Zentrum 46.0°C beträgt. Damit die angegebene Temperatur überall strikt überschritten wird, ist $\mathcal{P} > 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}$ erforderlich.

B.4

Zunächst wird die Druck-Radius-Beziehung linearisiert. Gleichung (4) lässt sich schreiben als

$$p - P_{\text{cap}} = (p_c - P_{\text{cap}}) \left[2 \frac{\delta r}{\delta r_c} - \left(\frac{\delta r}{\delta r_c} \right)^2 \right].$$

Auf dem mit dem unkomprimierten Zustand verbundenen Lösungszweig gilt hinreichend nahe bei $p = P_{\text{cap}}$

$$\delta r \simeq \frac{\delta r_c}{2(p_c - P_{\text{cap}})} (p - P_{\text{cap}}).$$

Nur die Endgefäße ändern ihren Radius. Wir setzen

$$\epsilon = \frac{\delta r}{r_{N-1}} \ll 1.$$

Ihre Längen bleiben unverändert, sodass das Gesetz von Poiseuille ergibt

$$R'_{N-1} = R_{N-1}(1 - \epsilon)^{-4} \simeq R_{N-1}(1 + 4\epsilon).$$

Nach **A.1** tragen die 2^{N-1} Endgefäße zusammen anfangs R_0 zum Netzwerkwiderstand bei. Die übrigen $N - 1$ Ebenen bleiben unverändert. Somit gilt

$$R'_{\text{eq}} = (N - 1)R_0 + R_0(1 - \epsilon)^{-4} \simeq NR_0 + 4R_0\epsilon.$$

Bei festen Einlass- und Kapillardrücken ist der Gesamtvolumenstrom umgekehrt proportional zu R_{eq} . Aufgrund der Symmetrie ist der Volumenstrom durch ein Endgefäß weiterhin gleich dem Gesamtvolumenstrom geteilt durch 2^{N-1} , sodass seine relative Abnahme derjenigen des Gesamtvolumenstroms entspricht:

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{R'_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

Der Faktor $1/N$ berücksichtigt, dass sich nur einer der N gleichen Widerstandsbeiträge ändert.

Durch Einsetzen der linearisierten Radiusänderung erhält man

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}} \frac{p - P_{\text{cap}}}{p_c - P_{\text{cap}}}.$$

Schließlich ergibt die Erhaltung der Masse der normalen Zellen aus **B.1** die Beziehung $p = K_N v / (1 - v)$. Daher gilt

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

Dieser Ausdruck gilt knapp oberhalb des Volumenanteils, bei dem die Kompression einsetzt,

$$v_* = \frac{P_{\text{cap}}}{K_N + P_{\text{cap}}},$$

mit $(p - P_{\text{cap}})/(p_c - P_{\text{cap}}) \ll 1$ und $\delta r/r_{N-1} \ll 1$. Unterhalb dieses Einsatzpunkts gibt das angegebene Modell keine Gefäßverengung vor.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.