

المسألة 1: LIGO-GW150914

في عام 2015، رصد مرصد الموجات الثقالية LIGO، للمرة الأولى، مرور موجات ثقالية (GW) عبر الأرض. وقد نتج هذا الحدث، الذي سُمّي GW150914، عن موجات ولّدها ثقبان أسودان كانا يدوران في مدارين شبه دائريين. ستقدّر في هذه المسألة بعض المعلومات الفيزيائية للنظام انطلاقاً من خصائص الإشارة المرصودة.

الجزء A: المدارات النيوتونية (المحافظة) (3.0 نقاط)

A.1 1.0 نقطة

اعتبر نظاماً من نجمين كتليهما M_1, M_2 ، يقعان عند الموضعين $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ، على الترتيب، بالنسبة إلى مركز كتلة النظام، أي إن

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

النجمان معزولان عن بقية الكون ويتحركان بسرعات غير نسبية. باستخدام قوانين نيوتن، يمكن التعبير عن متجه تسارع الكتلة M_1 على النحو الآتي:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

حيث $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. أوجد $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ حيث G هو ثابت نيوتن $[G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}]$.

A.2 1.0 نقطة

يمكن التعبير عن الطاقة الكلية لنظام الكتلتين، في مدارين دائريين، كما يأتي:

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

حيث

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

هما الكتلة المختزلة والكتلة الكلية للنظام، و Ω هي السرعة الزاوية لكل كتلة، و L هي المسافة الكلية الفاصلة بينهما $L = r_1 + r_2$. أوجد الصيغة الصريحة لـ $A(\mu, \Omega, L)$.

A.3 1.0 نقطة

يمكن تبسيط المعادلة 3 إلى $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ حدّد العدد β .

الجزء B: إدخال التبدّد النسبي (7.0 نقاط)

صاغ أينشتاين النظرية الصحيحة للجاذبية، النسبية العامة، في عام 1915، وهي تتنبأ بأن الجاذبية تنتشر بسرعة الضوء. وتُسمّى الوسائط التي تحمل المعلومات عن التفاعل بالموجات الثقالية. تنبعث الموجات الثقالية كلما تسارعت الكتل، مما يؤدي إلى فقدان نظام الكتل للطاقة.

اعتبر نظاماً من جسيمين نقطيين معزولاً عن بقية الكون. أثبت أينشتاين أنه عند السرعات الصغيرة بما يكفي، تكون الموجات الثقالية المنبعثة: (1) ذات تردد يساوي ضعف التردد المداري؛ (2) قابلة للوصف بلمعان، أي بقدرة منبعثة $\mathcal{P}$ ، تهيمن عليها صيغة أينشتاين لرباعي القطب،

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

هنا، c هي سرعة الضوء $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. بالنسبة إلى نظام من جسيمين نقطيين يدوران في المستوى $x - y$ ، يُعطى Q_{ij} بالجدول الآتي (يشير j, i إلى رقم الصف/العمود):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

و $Q_{ij} = 0$ في جميع الحالات الأخرى. هنا، (x_A, y_A) هو موضع الكتلة A في إطار مركز الكتلة.

B.1 1.0 نقطة

بالنسبة إلى المدارين الدائريين الموصوفين في A.2، يمكن التعبير عن مركبات Q_{ij} بدلالة الزمن t كما يأتي:

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

حدّد k بدلالة Ω ، والقيم العددية للثوابت a_i, b_i, c_{ij} .

B.2 1.0 نقطة

احسب القدرة $\mathcal{P}$ المنبعثة على هيئة موجات ثقالية من هذا النظام، وتوصّل إلى:

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

ما قيمة العدد ξ ؟ [إذا لم تتمكن من إيجاد ξ ، فاستخدم $\xi = 6.4$ فيما يأتي].

B.3 1.0 نقطة

في غياب انبعاث الموجات الثقالية، ستستمر الكتلتان في الدوران في مدارين دائريين ثابتين إلى أجل غير مسمى. لكن انبعاث الموجات الثقالية يجعل النظام يفقد الطاقة ويتطور ببطء نحو مدارين دائريين أصغر. بين أن معدل تغيّر السرعة الزاوية المدارية $\frac{d\Omega}{dt}$ يأخذ الصورة

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

حيث تُسمّى M_c كتلة الزقزقة. أوجد M_c بدلالة M و μ . تحدّد هذه الكتلة زيادة التردد أثناء اضمحلال المدار. [استُوحى اسم «الزقزقة» من الصوت الحاد (المتزايد التردد) الذي تصدره الطيور الصغيرة].

B.4 2.0 نقطة

باستخدام المعلومات المعطاة أعلاه، اربط السرعة الزاوية المدارية Ω بتردد الموجات الثقالية f_{GW} . مع العلم أنه لأي دالة ملساء $F(t)$ و $a \neq 1$

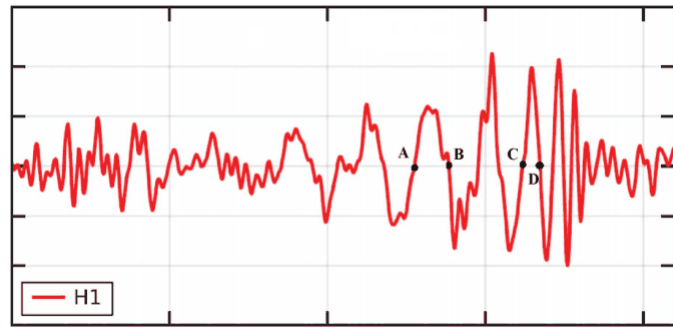
$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

حيث χ ثابت و t_0 ثابت تكامل، بيّن أن (10) تستلزم أن تردد الموجات الثقالية هو

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

وحّد الثابت p .

في 14 سبتمبر 2015، سجّلت كواشف LIGO الحدث GW150914، ويتكوّن كل كاشف من ذراعين على شكل حرف L، طول كل منهما 4 km. تغيّر الطول النسبي لهاتين الذراعين وفقاً للشكل 1. تستجيب أذرع الكاشف خطياً لموجة ثقالية عابرة، ويحاكي نمط الاستجابة الموجة. وقد ولّد هذه الموجة ثقبان أسودان في مدارين شبه دائريين؛ إذ أدّى فقدان الطاقة عبر الإشعاع الثقالي إلى تقلّص المدار وإلى تصادم الثقبين الأسودين في النهاية. تقابل نقطة التصادم، على نحو تقريبي، ذروة الإشارة بعد النقطة D في الشكل 1.



الشكل 1. الانفعال، أي التغيّر النسبي في طول كل ذراع، عند كاشف LIGO المسمّى H1. يمثّل المحور الأفقي الزمن، وتقابل النقاط A و B و C و D الأزمنة $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ ثانية، على الترتيب.

B.5 1.0 نقطة

قدّر من الشكل $f_{\text{GW}}(t)$ عند

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{و} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

بافتراض أن (12) تظل صالحة حتى التصادم (وهو أمر غير صحيح بالمعنى الدقيق)، وأن الجسمين متساويي الكتلة، قدّر كتلة الزرقعة M_c والكتلة الكلية للنظام بوحدة الكتلة الشمسية $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

B.6 1.0 نقطة

قدّر المسافة المدارية الدنيا الفاصلة بين الجسمين عند $t_{\overline{CD}}$. ومن ثمّ قدّر الحجم الأقصى لكل جسم، R_{max} . أوجد $R_\odot/R_{\text{max}}$ لمقارنة هذا الحجم بنصف قطر شمسنا، $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 \text{ km}$. قدّر أيضاً سرعتيهما الخطية المدارية عند اللحظة نفسها، v_{col} ، مع مقارنتها بسرعة الضوء، v_{col}/c .

استنتج أن هذين الجسمين شديدا السرعة وشديدا التراص بالفعل!

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

$$\bullet \text{A.1} \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}, \quad n = 3,$$

$$\bullet \text{A.2} \quad A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2$$

• **A.3:** $\beta = -\frac{1}{2}$.

• **B.1:** عندما تكون الكتلتان على المحور x عند $t = 0$ ، وتكون الحركة المدارية عكس اتجاه عقارب الساعة،

$$k = 2\Omega, \quad (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 0).$$

كذلك، $c_{12} = c_{21} = 1$ ؛ وتتعدم جميع المعاملات الأخرى c_{ij} خارج القطر.

• **B.2:** $\xi = \frac{32}{5} = 6.4, \quad \mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6$.

• **B.3:** $M_c = \mu^{3/5} M^{2/5}$ مع

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

• **B.4:** $p = 1$ و $f_{\text{GW}} = \frac{\Omega}{\pi}$

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_0 - t).$$

• **B.5:** $M_c \simeq 30M_\odot, \quad M \simeq 69M_\odot; f_{\text{GW}}(0.037 \text{ s}) \simeq 83 \text{ Hz}, f_{\text{GW}}(0.0045 \text{ s}) \simeq 56 \text{ Hz}$

• **B.6:** $R_\odot/R_{\text{max}} \simeq 2.7 \times 10^3, R_{\text{max}} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}, L_{\text{min}} \simeq 5.1 \times 10^2 \text{ km}$
جسم هي $v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}$ ، ومن ثم $v_{\text{col}}/c \simeq 0.22$. السرعة المدارية لكل

الحل

A.1

يعطي قانون نيوتن للجذب العام تسارع النجم الأول:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -GM_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

يستلزم شرط مركز الكتلة أن

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1.$$

وبالتالي،

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}.$$

بالمقارنة مع (2)، نحصل على

$$\boxed{n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}}.$$

A.2

من شرط مركز الكتلة و $L = r_1 + r_2$ ، نحصل على

$$r_1 = \frac{M_2}{M} L, \quad r_2 = \frac{M_1}{M} L.$$

السرعتان المداريتان للنجمين هما $v_1 = \Omega r_1$ و $v_2 = \Omega r_2$. ولذلك تكون طاقتهما الحركية الكلية

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} M_1 \Omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \Omega^2 r_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \Omega^2 L^2 \left(\frac{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2}{M^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2.
\end{aligned}$$

طاقة الوضع الثقالية، باختيار الصفر عند تباعد لا نهائي، هي

$$U = -\frac{GM_1 M_2}{L} = -\frac{GM\mu}{L}.$$

إذن، الحد A هو الطاقة الحركية:

$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2.$$

A.3

بالنسبة إلى النجم الأول، توفر الجاذبية القوة المركزية:

$$M_1 \Omega^2 r_1 = \frac{GM_1 M_2}{L^2}.$$

باستخدام $r_1 = M_2 L / M$ ، نحصل على علاقة المدار الدائري

$$\Omega^2 = \frac{GM}{L^3}.$$

ومن ثم

$$T = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 L^2 = \frac{GM\mu}{2L},$$

و

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2L} - \frac{GM\mu}{L} = -\frac{GM\mu}{2L}.$$

وعليه،

$$\beta = -\frac{1}{2}.$$

B.1

نختار مبدأ الزمن بحيث تقع الكتلة الأولى على الجزء الموجب من المحور x عند $t = 0$ ، ويتحرك عكس اتجاه عقارب الساعة. عندئذٍ

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= (r_1 \cos \Omega t, r_1 \sin \Omega t), \\
(x_2, y_2) &= (-r_2 \cos \Omega t, -r_2 \sin \Omega t).
\end{aligned}$$

من A.2،

$$M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2.$$

بالتعويض في مركبات رباعي القطب، نحصل على

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{\mu L^2}{3}(2 \cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Omega t \right), \\
Q_{22} &= \frac{\mu L^2}{3}(2 \sin^2 \Omega t - \cos^2 \Omega t) = \frac{\mu L^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \cos 2\Omega t \right), \\
Q_{33} &= -\frac{\mu L^2}{3} = \frac{\mu L^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right), \\
Q_{12} = Q_{21} &= \mu L^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{\mu L^2}{2} \sin 2\Omega t.
\end{aligned}$$

إن

$$k = 2\Omega.$$

المعاملات القطرية هي

b_i	a_i	i
1	1/3	1
-1	1/3	2
0	-2/3	3

المعاملات خارج القطر هي

$$c_{12} = c_{21} = 1, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0.$$

B.2

نكتب $k = 2\Omega$ و $q = \mu L^2/2$. بالنسبة إلى المدار الدائري، المشتقات الثالثة غير المنعدمة هي

$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_{11} &= qk^3 \sin kt, \\
\ddot{Q}_{22} &= -qk^3 \sin kt, \\
\ddot{Q}_{12} = \ddot{Q}_{21} &= -qk^3 \cos kt.
\end{aligned}$$

يسهم كلا العنصرين خارج القطر في المجموع المزدوج. ولذلك،

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} (\ddot{Q}_{ij})^2 &= 2q^2 k^6 \sin^2 kt + 2q^2 k^6 \cos^2 kt \\
&= 2q^2 k^6 \\
&= 2 \left(\frac{\mu L^2}{2} \right)^2 (2\Omega)^6 \\
&= 32\mu^2 L^4 \Omega^6.
\end{aligned}$$

وبالتالي يكون اللمعان

$$\mathcal{P} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6, \quad \xi = \frac{32}{5} = 6.4.$$

هذه النتيجة مستقلة عن الطور المداري.

B.3

نقرب الحركة الحزونية نحو الداخل بمتتالية من المدارات الدائرية التي تتطور ببطء. تبقى الكتلتان ثابتتين، وتخضع الطاقة التي تحملها الموجات بعيداً للعلاقة

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}.$$

بحذف L باستخدام علاقة المدار الدائري،

$$L = (GM)^{1/3} \Omega^{-2/3},$$

نحصل على

$$E = -\frac{1}{2} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{2/3}.$$

مشتقتها بالنسبة إلى الزمن هي

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \mu (GM)^{2/3} \Omega^{-1/3} \frac{d\Omega}{dt}.$$

اللمعان، معبراً عنه بدلالة Ω ، هو

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 (GM)^{4/3} \Omega^{10/3}.$$

بمساواة معدل تغير الطاقة نتيجة فقدانها بـ $-\mathcal{P}$ ، نحصل على

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

بالتكعيب،

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2.$$

تأخذ هذه العلاقة الصورة المطلوبة إذا كان

$$M_c^5 = \mu^3 M^2.$$

إن

$$M_c = \mu^{3/5} M^{2/5} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}.$$

وعلى وجه الخصوص، $d\Omega/dt > 0$: عندما يفقد النظام الطاقة، يتقلص مداره ويزداد تردده المداري.

B.4

التردد المداري هو $f_{\text{orb}} = \Omega/(2\pi)$. ولذلك فإن عامل الاثنين المعطى بين تردد الموجات الثقالية والتردد المداري يستلزم

$$f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}} = \frac{\Omega}{\pi}.$$

بأخذ الجذر التكعيبي الموجب للطرفين في (10)،

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\xi \frac{(GM_c)^{5/3}}{c^5} \Omega^{11/3}.$$

باستخدام $\Omega = \pi f_{\text{GW}}$ ، تصبح هذه العلاقة

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = 3\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{GW}}^{11/3}.$$

باستخدام (11) مع $a = 11/3$ ، أو باشتقاق $f_{\text{GW}}^{-8/3}$ مباشرةً، نحصل على

$$\frac{d}{dt} \left(f_{\text{GW}}^{-8/3} \right) = -8\xi \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3}.$$

يعطي التكامل

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_0 - t).$$

بمقارنة الأسس مع (12)،

$$\frac{2}{3} + p = \frac{5}{3}, \quad 2 - p = 1,$$

إذن

$$\boxed{p = 1}.$$

هنا، t_0 هو الزمن الشكلي الذي يتنبأ عنده هذا النموذج التقريبي للحركة الحلزونية نحو الداخل بتباعد التردد إلى ما لا نهاية.

B.5

تمثل A و B نقطتي عبور متتاليتين للصفر على جانبي قمة موجبة واحدة؛ وينطبق الأمر نفسه على C و D بالنسبة إلى قمة لاحقة. ولذلك يغطي كل فاصل زمني نحو نصف دورة من الموجة الثقالية.

بتقريب التردد خلال كل فاصل قصير بقيمته عند منتصف الفاصل،

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{AB}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{B}} - t_{\text{A}})} = \frac{1}{2(0.009 \text{ s})} \simeq 55.6 \text{ Hz},$$

$$f_{\text{GW}}(t_{\overline{\text{CD}}}) \simeq \frac{1}{2(t_{\text{D}} - t_{\text{C}})} = \frac{1}{2(0.006 \text{ s})} \simeq 83.3 \text{ Hz}.$$

الزمنان المقابلان هما

$$t_{\overline{\text{AB}}} = 0.0045 \text{ s}, \quad t_{\overline{\text{CD}}} = 0.037 \text{ s},$$

ومن ثم فإن الفرق بينهما هو 0.0325 s.

لنرمز بـ f_{AB} و f_{CD} إلى هذين التقديرين للتردد. بطرح علاقة B.4 المحسوبة عند أحد الزمنين من نظيرتها عند الزمن الآخر، نحذف t_0 :

$$f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}}).$$

بحل المعادلة لإيجاد كتلة الزقزقة،

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left[\frac{f_{\text{AB}}^{-8/3} - f_{\text{CD}}^{-8/3}}{8\pi^{8/3} \xi (t_{\overline{\text{CD}}} - t_{\overline{\text{AB}}})} \right]^{3/5}.$$

باستخدام الثوابت المعطاة و $\xi = 6.4$ ،

$$M_c \simeq 6.02 \times 10^{31} \text{ kg},$$

أو، بدقة مناسبة،

$$\boxed{M_c \simeq 30M_{\odot}}.$$

عندما تكون كتلتا الجسمين متساويتين، $M_1 = M_2 = M/2$ ، ومن ثم

$$\mu = \frac{M}{4}, \quad M_c = \left(\frac{M}{4} \right)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}.$$

إذن

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 1.38 \times 10^{32} \text{ kg},$$

و

$$\boxed{M \simeq 69M_{\odot}}.$$

وعليه، تبلغ كتلة كل جسم نحو $35M_{\odot}$.

عند زمن القياس المتأخر،

$$\Omega_{\text{CD}} = \pi f_{\text{CD}} \simeq 2.62 \times 10^2 \text{ rad/s.}$$

تعطي علاقة المدار الدائري

$$L = \left(\frac{GM}{\Omega_{\text{CD}}^2} \right)^{1/3}.$$

كما أن اختيار كتلتين متساويتين يعطي الكتلة الكلية الدنيا، ومن ثمَّ المسافة الفاصلة الدنيا، المتوافقتين مع كتلة الزقزقة والتردد المستنتجين. بالفعل،

$$\frac{\mu}{M} = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

ومن ثمَّ

$$M_c = M \left(\frac{\mu}{M} \right)^{3/5} \leq \frac{M}{4^{3/5}}.$$

تتحقق المساواة عند تساوي الكتلتين. باستخدام الكتلة التي وجدناها في B.5،

$$L_{\min} \simeq \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.383 \times 10^{32})}{(2.618 \times 10^2)^2} \right]^{1/3} \text{ m,}$$

وهذا يعطي

$$L_{\min} \simeq 5.1 \times 10^5 \text{ m} = 5.1 \times 10^2 \text{ km}.$$

بافتراض نصف قطر مشترك للجسمين المتساويين في الكتلة، فإن بقاءهما منفصلين يتطلب تقريباً $2R \lesssim L$. ومن ثمَّ

$$R_{\max} \simeq \frac{L_{\min}}{2} \simeq 2.6 \times 10^2 \text{ km}.$$

تكون المقارنة مع الشمس كما يأتي:

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq \frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{2.56 \times 10^2 \text{ km}},$$

ومن ثمَّ

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\max}} \simeq 2.7 \times 10^3.$$

يدور كل جسم حول مركز الكتلة في مدار نصف قطره $L/2$. ولذلك تكون سرعته المدارية عند هذه اللحظة

$$v_{\text{col}} = \Omega_{\text{CD}} \frac{L}{2} \simeq (2.618 \times 10^2)(2.562 \times 10^5) \text{ m/s,}$$

مما يعطي

$$v_{\text{col}} \simeq 6.7 \times 10^7 \text{ m/s}, \quad \frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq 0.22.$$

إن، يحتوي كل جسم على نحو 35 كتلة شمسية ضمن نصف قطر لا يزيد على نحو 260 km، ويتحرك بسرعة تقارب خمس سرعة الضوء. هذان جسمان شديداً التراص والسرعة. تستخدم التقديرات العددية التقريبيين المفروضين، أي تقريب المدار الدائري النيوتوني وتقريب رباعي القطب، اللذين تتدهور دقتهما قرب الاندماج.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: أين النيوتريونو؟

عندما يتصادم بروتونان بطاقة عالية جداً في مصادم الهادرونات الكبير (LHC)، قد ينتج عن هذا التصادم عدد من الجسيمات، مثل الإلكترونات والميونات والنيوترينوات والكواركات والجسيمات المضادة المناظرة لها. ويمكن رصد معظم هذه الجسيمات بواسطة كاشف الجسيمات المحيط بنقطة التصادم. فعلى سبيل المثال، تخضع الكواركات لعملية تسمى /تهدرن، تتحول فيها إلى وابل من الجسيمات دون الذرية يسمى «نفائة». إضافة إلى ذلك، يسمح المجال المغناطيسي الشديد الموجود في الكاشف بانحناء مسارات الجسيمات المشحونة، حتى ذات الطاقات العالية جداً، بمقدار يكفي لتحديد زخمها. ويستخدم كاشف ATLAS منظومة ملفات لولبية فائقة التوصيل تولّد مجاًلاً مغناطيسياً ثابتاً ومنتظماً مقداره 2.00 تسلا في الجزء الداخلي من الكاشف، المحيط بنقطة التصادم. أما الجسيمات المشحونة التي يقل زخمها عن قيمة معينة، فتتحنى مساراتها بشدة بحيث تدور مراراً داخل المجال، وعلى الأرجح لا تُقاس. وبحكم طبيعة النيوتريونو، لا يُرصد إطلاقاً، إذ ينفذ عبر الكاشف دون أن يتفاعل.

المعطيات: كتلة سكون الإلكترون، $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ؛ الشحنة الأولية، $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ؛

سرعة الضوء، $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ؛ سماحية الفراغ، $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ ؛

الجزء A. فيزياء كاشف ATLAS (4.0 نقاط)

0.5 — A.1 نقطة

اشتق تعبيراً لنصف قطر السيكلوترون، r ، للمسار الدائري للإلكترون تؤثر فيه قوة مغناطيسية عمودية على سرعته، وعبر عن نصف القطر هذا بدلالة طاقته الحركية، K ؛ ومقدار شحنته، e ؛ وكتلته، m ؛ والمجال المغناطيسي، B . افترض أن الإلكترون جسيم كلاسيكي غير نسبي.

يجب التعامل مع الإلكترونات الناتجة داخل كاشف ATLAS وفقاً للنظرية النسبية. ومع ذلك، فإن صيغة نصف قطر السيكلوترون تصح أيضاً للحركة النسبية عند استخدام الزخم النسبي.

0.5 — A.2 نقطة

احسب القيمة الدنيا لزخم إلكترون التي تتيح له الخروج من الجزء الداخلي للكاشف في الاتجاه الشعاعي. يتخذ الجزء الداخلي للكاشف شكل أسطوانة نصف قطرها 1.1 متر، وينتج الإلكترون عند نقطة التصادم الواقعة تماماً في مركز الأسطوانة. عبّر عن إجابتك بوحدة MeV/c .

عندما تتسارع جسيمات نسبية ذات شحنة e وكتلة سكون m في اتجاه عمودي على سرعتها، فإنها تبعث إشعاعاً كهرومغناطيسياً يسمى إشعاع السنكروترون. وتُعطى القدرة المنبعثة بالعلاقة

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

حيث a هو التسارع و $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

1.0 — A.3 نقطة

يسمى الجسيم فائق النسبية عندما تكون سرعته قريبة جداً من سرعة الضوء. ويمكن التعبير عن القدرة المنبعثة من جسيم فائق النسبية كما يلي:

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

حيث ξ عدد حقيقي، و n ، k عدنان صحيحان، و E طاقة الجسيم المشحون، و B المجال المغناطيسي. أوجد ξ و n و k .

1.0 — A.4 نقطة

في الحد فائق النسبية، تكون طاقة الإلكترون بدلالة الزمن:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

حيث E_0 هي الطاقة الابتدائية للإلكترون. أوجد α بدلالة e و c و B و ϵ_0 و m .

0.5 — A.5 نقطة

اعتبر إلكترونًا ينتج عند نقطة التصادم ويتحرك في الاتجاه الشعاعي بطاقة مقدارها 100 GeV. قدر مقدار الطاقة التي يفقدها بسبب إشعاع السنكروترون حتى يخرج من الجزء الداخلي للكاشف. عبّر عن إجابتك بوحدة MeV.

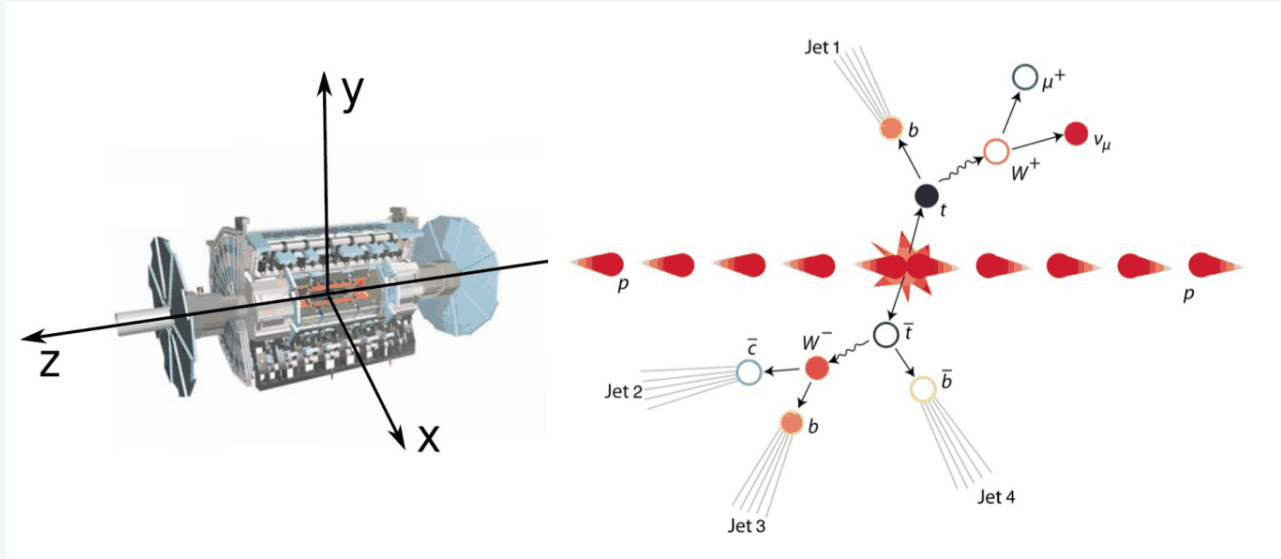
0.5 — A.6 نقطة

أوجد تعبيرًا لتردد السيكلوترون للإلكترون بدلالة الزمن في الحد فائق النسبية.

الجزء B. العثور على النيوتريـنو (6.0 نقاط)

يؤدي التصادم بين البروتونين الموضح في الشكل 1 إلى إنتاج كوارك قمـي (t) وكوارك قمـي مضاد ($\bar{t}$)، وهما أثقل الجسيمات الأولية التي رُصدت على الإطلاق. يضمحل الكوارك القمي إلى بوزون W^+ وكوارك قمري (b)، بينما يضمحل الكوارك القمي المضاد إلى بوزون W^- وكوارك قمري مضاد ($\bar{b}$). وفي الحالة المبينة في الشكل 1، يضمحل البوزون W^+ إلى ميون مضاد (μ^+) ونيوترينو (ν_μ)، ويضمحل البوزون W^- إلى كوارك وكوارك مضاد. والمطلوب في هذه المسألة هو إعادة بناء الزخم الكامل للنيوترينو باستخدام زخم بعض الجسيمات المرصودة. للتبسيط، ستُعد جميع الجسيمات والنفاثات في هذه المسألة عديمة الكتلة، باستثناء الكوارك القمي وبوزونات $W^\pm$.

يمكن تحديد زخم نواتج اضمحلال الكوارك القمي من التجربة (انظر الجدول)، باستثناء مركبة زخم النيوتريـنو على امتداد المحور (z). ولا ينعـمـد الزخم الخطي الكلي لجسيمات الحالة النهائية التي يرصدها الكاشف إلا في المستوى المستعرض (المستوى xy)، ولا ينعـمـد على امتداد خط التصادم (المحور z). لذلك، يمكن إيجاد الزخم المستعرض للنيوترينو من الزخم المفقود في المستوى المستعرض. في 4 يونيو 2015، سجلت تجربة ATLAS في LHC تصادمًا بين بروتونين عند الساعة 00:21:24 بتوقيت GMT+1 مماثلًا للتصادم الممثل في الشكل 1.



الشكل 1. تمثيل تخطيطي لنظام إحداثيات كاشف ATLAS (يسارًا) ولتصادم بروتونين (يمينًا).

تُعرض أدناه مركبات الزخم الخطية لجسيمات الحالة النهائية الثلاثة الناتجة عن اضمحلال الكوارك القمي، بما فيها النيوتريـنو.

الجسيم	(c/GeV) p_x	(c/GeV) p_y	(c/GeV) p_z
ميون مضاد (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
النفاثة 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
نيوترينو (ν)	-104.1	+5.3	---

1.5 — B.1 نقطة

أوجد معادلة تربط مربع كتلة البوزون W^+ ، أي m_W^2 ، بمركبات زخمي النيوترينو والميون المضاد الواردة في الجدول أعلاه. عبّر عن إجابتك بدلالة الزخمين المستعرضين للنيوترينو والميون المضاد،

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$

ومركبتي زخميتهما على المحور z ، أي $p_z^{(\nu)}$ و $p_z^{(\mu)}$.

1.5 — B.2 نقطة

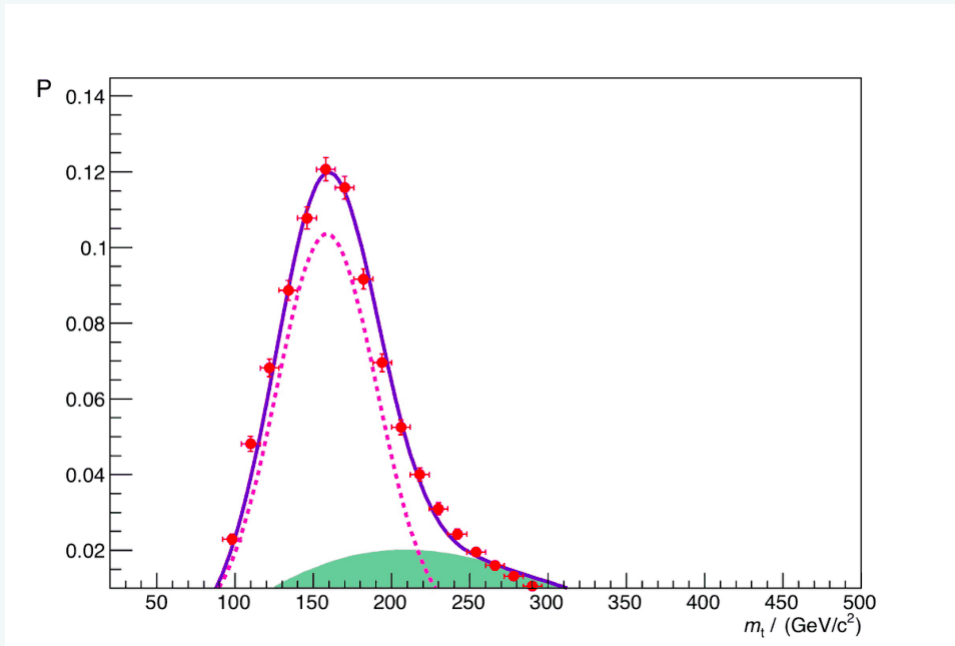
بافتراض أن كتلة البوزون W^+ هي $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ ، احسب الحلين الممكنين لزخم النيوترينو على امتداد المحور z ، أي $p_z^{(\nu)}$. عبّر عن إجابتك بوحدة GeV/c .

1.0 — B.3 نقطة

احسب كتلة الكوارك القمي لكل من الحلين السابقين. عبّر عن إجابتك بوحدة GeV/c^2 .

[إذا لم تحصل على الحلين في B.2، فاستخدم $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ و $p_z^{(\mu)} = -180 \text{ GeV}/c$]

يتألف العدد المُطَبَّع لأحداث التصادم المستخدمة في قياس كتلة الكوارك القمي (كما تحدده التجربة) من مكونين: ما يسمى «الإشارة» (المقابلة لاضمحلال الكواركات القمية) و«الخلفية» (المقابلة لأحداث ناتجة عن عمليات أخرى لا تتضمن كواركات قمية). وتشمل البيانات التجريبية كلا النوعين من العمليات، انظر الشكل 2.



الشكل 2. توزيع كتلة الكوارك القمي كما تحدده التجربة، أي العدد المُطَبَّع للأحداث مرسومًا بدلالة كتلة الكوارك القمي. تمثل النقاط البيانات. ويمثل الخط المتقطع «الإشارة»، وتمثل المنطقة المظلمة «الخلفية».

1.0 — B.4 نقطة

وفقًا لتوزيع كتلة الكوارك القمي، أي الحلين السابقين أرجح أن يكون صحيحًا؟ قدّر احتمال الحل الأرجح.

1.0 — B.5 نقطة

احسب المسافة التي يقطعها الكوارك القمي قبل اضمحلاله، باستخدام الحل الأرجح. افترض أن متوسط عمر الكوارك القمي في حالة السكون هو $5 \times 10^{-25} \text{ s}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

هنا $p_T^{(a)} = |\vec{p}_T^{(a)}|$

• **A.1:** $r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}$

• **A.2:** $p_{\min} = \frac{eBR}{2} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c$

• **A.3:** $\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4$

• **A.4:** $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}$

• **A.5:** $\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}$

• **A.6:** التردد اللحظي هو

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0} (1 + \alpha E_0 t).$$

والتردد الزاوي هو $\omega(t) = 2\pi f(t)$

• **B.1:**

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2\right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2\right] - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}}.$$

• **B.2:** $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ أو $-188 \text{ GeV}/c$

• **B.3:** على الترتيب، $m_t \simeq 169 \text{ GeV}/c^2$ أو $311 \text{ GeV}/c^2$

• **B.4:** الحل $p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV}/c$ هو الأرجح. والاحتمال المبين في الرسم عند الكتلة المعاد بناؤها لهذا الحل يساوي تقريباً $P \simeq 0.12$ ، أو 12% .

• **B.5:** متوسط المسافة هو $\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}$

الحل

A.1

في الحركة العمودية على المجال المغناطيسي، توفر قوة لورنتز المغناطيسية القوة الجاذبة المركزية:

$$evB = \frac{mv^2}{r}.$$

إن $r = mv/(eB)$ وباستخدام الطاقة الحركية غير النسبية $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$r = \frac{\sqrt{2mK}}{eB}.$$

وبصورة مكافئة، $r = p/(eB)$ ، وهي علاقة تنطبق أيضاً في الحالة النسبية عندما يكون p هو الزخم النسبي.

A.2

ليكن نصف قطر الكاشف $R = 1.1 \text{ m}$. يمر المدار الدائري للإلكترون بنقطة التصادم، ولذلك يقع مركز مداره على بُعد r من تلك النقطة. ومن ثم فإن أكبر مسافة شعاعية له عن نقطة التصادم هي $2r$.

يلامس المدار الحدي السطح الأسطوانى عندما

$$2r = R.$$

تتحقق القيمة الدنيا للزخم الكلي عندما تكون الحركة عمودية على مجال الملف اللولبي. ومن ثم فإن عتبة الخروج هي

$$p_{\min} = eB \frac{R}{2} = (1.60 \times 10^{-19})(2.00) \frac{1.1}{2} = 1.76 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}.$$

وبما أن

$$1 \text{ MeV}/c = \frac{10^6(1.60 \times 10^{-19})}{3.00 \times 10^8} = 5.33 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1},$$

نحصل على

$$p_{\min} = 3.3 \times 10^2 \text{ MeV}/c.$$

عند تجاوز هذه العتبة بقليل، يعبر المدار السطح الأسطواناني.

A.3

عندما يكون التسارع عمودياً على السرعة، تكون معادلة الحركة النسبية المستعرضة

$$evB = \gamma ma,$$

ومن ثم فإن التسارع الناتج عن انحناء المسار هو

$$a = \frac{evB}{\gamma m}.$$

بالتعويض في صيغة الإشعاع المعطاة نحصل على

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2}{\gamma^2 m^2} \gamma^4 = \frac{e^4 B^2 v^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

في الحد فائق النسبية، $v \simeq c$ ، بينما تكون الطاقة الكلية $E = \gamma mc^2$. لذلك،

$$P \simeq \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \frac{e^4 E^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

بالمقارنة مع الصيغة المطلوبة نجد

$$\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$$

A.4

لا تبذل القوة المغناطيسية شغلاً، ولذلك تنخفض طاقة الإلكترون بمقدار الطاقة المشعة:

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\alpha E^2,$$

حيث، من A.3،

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$$

بالتكامل مع الشرط $E(0) = E_0$

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^2} = -\alpha \int_0^t dt,$$

فنحصل على

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \alpha t.$$

وبالتالي،

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

كما ورد في السؤال.

A.5

نتحقق أولاً من انحناء المسار. بالنسبة إلى إلكترون فائق النسبية، $p \simeq E/c$ ، ولذلك يكون نصف قطر السيكلوترون الابتدائي له

$$r_0 \simeq \frac{E_0}{eBc}.$$

هنا

$$E_0 = 100 \text{ GeV} = 1.60 \times 10^{-8} \text{ J},$$

ومن ثم

$$r_0 = \frac{1.60 \times 10^{-8}}{(1.60 \times 10^{-19})(2.00)(3.00 \times 10^8)} = 1.67 \times 10^2 \text{ m}.$$

بما أن $r_0 \gg R = 1.1 \text{ m}$ فإن المسار عبر الكاشف شبه مستقيم. لذا

$$t_{\text{exit}} \simeq \frac{R}{c} = \frac{1.1}{3.00 \times 10^8} = 3.67 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

باستخدام الثوابت المعطاة،

$$\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} = 9.39 \times 10^{12} \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

و

$$\alpha E_0 t_{\text{exit}} = 5.51 \times 10^{-4}.$$

الطاقة المفقودة هي

$$\Delta E = E_0 - \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}} = \frac{\alpha E_0^2 t_{\text{exit}}}{1 + \alpha E_0 t_{\text{exit}}}.$$

عددياً،

$$\Delta E = 8.81 \times 10^{-12} \text{ J} = 55.1 \text{ MeV}.$$

إذن، بدقة مناسبة،

$$\boxed{\Delta E \simeq 55 \text{ MeV}}.$$

لا يمثل ذلك إلا نحو 5.5×10^{-4} من الطاقة الابتدائية، مما يؤكد أن نصف القطر يبقى كبيراً جداً طوال الرحلة.

A.6

المعدل الزاوي اللحظي لدوران الزخم هو

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

باستخدام $E = \gamma mc^2$ ،

$$\omega(t) = \frac{eBc^2}{E(t)}.$$

بالتعويض بنتيجة A.4،

$$\boxed{\omega(t) = \frac{eBc^2}{E_0}(1 + \alpha E_0 t)}.$$

ومن ثم فإن التردد العادي، المقاس بعدد الدورات في الثانية، هو

$$f(t) = \frac{eBc^2}{2\pi E_0} (1 + \alpha E_0 t).$$

كلاهما يزداد خطياً مع الزمن ضمن التقريب فائق النسبية.

B.1

يعطي انحفاظ الزخم الرباعي في $W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$

$$E_W = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}_W = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}.$$

تحقق الكتلة اللامتغيرة لمنظومة الجسيمين العلاقة

$$m_W^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2 - c^2 |\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}|^2.$$

يُعامل كلا الجسيمين الناتجين عن الاضمحلال على أنه عديم الكتلة، ولذلك

$$E_\mu = c |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad E_\nu = c |\vec{p}^{(\nu)}|.$$

عند نشر التعبير اللامتغير، تُلغى حدود الطاقة والزخم الخاصة بكل جسيم على حدة:

$$m_W^2 c^4 = 2 \left(E_\mu E_\nu - c^2 \vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} \right).$$

والآن

$$|\vec{p}^{(a)}| = \sqrt{(p_T^{(a)})^2 + (p_z^{(a)})^2},$$

و

$$\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)} = \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} + p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

ومن ثم فإن العلاقة المطلوبة هي

$$\frac{m_W^2 c^2}{2} = \sqrt{\left[(p_T^{(\mu)})^2 + (p_z^{(\mu)})^2 \right] \left[(p_T^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2 \right]} - \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} - p_z^{(\mu)} p_z^{(\nu)}.$$

B.2

نعرف

$$q = p_z^{(\nu)}, \quad \ell = p_z^{(\mu)}, \quad a = (p_T^{(\mu)})^2, \quad b = (p_T^{(\nu)})^2,$$

ونضع

$$p_\mu = |\vec{p}^{(\mu)}|, \quad D = \frac{m_W^2 c^2}{2} + \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)}.$$

تصبح المعادلة المستنتجة في B.1

$$p_\mu \sqrt{b + q^2} = D + \ell q.$$

بالتربيع واستخدام $p_\mu^2 - \ell^2 = a$

$$aq^2 - 2D\ell q + p_\mu^2 b - D^2 = 0.$$

وجذراها هما

$$q = \frac{D\ell \pm p_\mu \sqrt{D^2 - ab}}{a}.$$

$$\begin{aligned}
 a &= 24.7^2 + 24.9^2 = 1230.1 \text{ (GeV/c)}^2, \\
 b &= 104.1^2 + 5.3^2 = 10864.9 \text{ (GeV/c)}^2, \\
 p_\mu &= \sqrt{24.7^2 + 24.9^2 + 12.4^2} = 37.2003 \text{ GeV/c}, \\
 \vec{p}_T^{(\mu)} \cdot \vec{p}_T^{(\nu)} &= (-24.7)(-104.1) + (-24.9)(5.3) \\
 &= 2439.3 \text{ (GeV/c)}^2, \\
 D &= \frac{80.4^2}{2} + 2439.3 = 5671.38 \text{ (GeV/c)}^2.
 \end{aligned}$$

إن القيمتان العدديتان للجذرين هما

$$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}, \quad q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}.$$

كلاهما يحقق المعادلة الأصلية قبل تربيعها. لذلك،

$$p_z^{(\nu)} \simeq +74.0 \text{ GeV/c} \quad \text{أو} \quad -188 \text{ GeV/c}.$$

B.3

يضمحل الكوارك القمي إلى الميون المضاد والنيوترينو ونفاثة الكوارك القعري. ويعطي انحفاظ الطاقة والزخم

$$E_t = E_\mu + E_\nu + E_{j1}, \quad \vec{p}_t = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)} + \vec{p}^{(j1)}.$$

لأن نواتج الاضمحلال الثلاثة جميعها تُعامل على أنها عديمة الكتلة،

$$E_t = c \left(|\vec{p}^{(\mu)}| + |\vec{p}^{(\nu)}| + |\vec{p}^{(j1)}| \right).$$

مقدار زخم النفاثة هو

$$|\vec{p}^{(j1)}| = \sqrt{(-14.2)^2 + 50.1^2 + 94.1^2} = 107.5475 \text{ GeV/c}.$$

بكتابة q على صورة قيمته العددية بوحدة GeV/c .

$$E_t = \left[37.2003 + 107.5475 + \sqrt{10864.9 + q^2} \right] \text{ GeV},$$

و

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 81.7 + q) \text{ GeV/c}.$$

تُستنتج كتلة الكوارك القمي المعاد بناؤها من

$$m_t^2 c^4 = E_t^2 - c^2 |\vec{p}_t|^2.$$

بالاحتفاظ بأرقام إضافية أثناء الحساب نحصل على:

$(c^2/\text{GeV}) m_t$	$(c/\text{GeV}) p_{tz}$	$(\text{GeV}) E_t$	$(\text{GeV}) E_\nu$	حل النيوترينو
169.344	155.653	272.552	127.804	$q_+ = 73.9532 \text{ GeV/c}$
311.183	-106.594	359.967	215.219	$q_- = -188.2937 \text{ GeV/c}$

لذلك،

$$m_t \simeq 169 \text{ GeV/c}^2 \quad \text{عندما } p_z^{(\nu)} > 0,$$

$$m_t \simeq 311 \text{ GeV/c}^2 \quad \text{عندما } p_z^{(\nu)} < 0.$$

B.4

تقع الكتلة $169 \text{ GeV}/c^2$ بالقرب من القيمة العظمى للتوزيع في الشكل 2، بينما تقع الكتلة $311 \text{ GeV}/c^2$ في ذيله الصغير عند الكتل العالية. لذلك فإن الحل الذي تكون فيه $p_z^{(\nu)}$ موجبة هو الأرجح.

بقراءة الإحداثي الرأسي لمنحنى التوزيع الكلي المرسوم بالقرب من $169 \text{ GeV}/c^2$ نجد

$$P \simeq 0.12 \quad \text{أو تقريباً} \quad 12\%.$$

زخم النيوتريينو المعاد بناؤه الموافق لذلك هو

$$\vec{p}^{(\nu)} \simeq (-104.1, +5.3, +74.0) \text{ GeV}/c.$$

B.5

بالنسبة إلى الحل الأرجح،

$$\vec{p}_t = (-143.0, 30.5, 155.653) \text{ GeV}/c,$$

ومن ثم

$$|\vec{p}_t| = 213.558 \text{ GeV}/c.$$

عامل لورنتز للكوارك القمي وسرعته هما

$$\gamma_t = \frac{E_t}{m_t c^2} = \frac{272.552}{169.344} = 1.609,$$

$$\beta_t = \frac{|\vec{p}_t|c}{E_t} = \frac{213.558}{272.552} = 0.7836.$$

متوسط العمر في إطار الكاشف هو $\gamma_t \tau_0$. لذا فإن متوسط المسافة المقطوعة هو

$$\bar{L} = v_t \gamma_t \tau_0 = \beta_t \gamma_t c \tau_0 = \frac{|\vec{p}_t|c}{m_t c^2} c \tau_0.$$

بالتعويض نحصل على

$$\bar{L} = \frac{213.558}{169.344} (3.00 \times 10^8) (5 \times 10^{-25}) = 1.89 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

لذلك،

$$\bar{L} \simeq 1.9 \times 10^{-16} \text{ m}.$$

هذه مسافة متوسطة لأن العمر المعطى في إطار السكون هو متوسط العمر.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: فيزياء الأنظمة الحية

المعطيات: الضغط الجوي المعتاد، $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

الجزء A. فيزياء جريان الدم (4.5 نقاط)

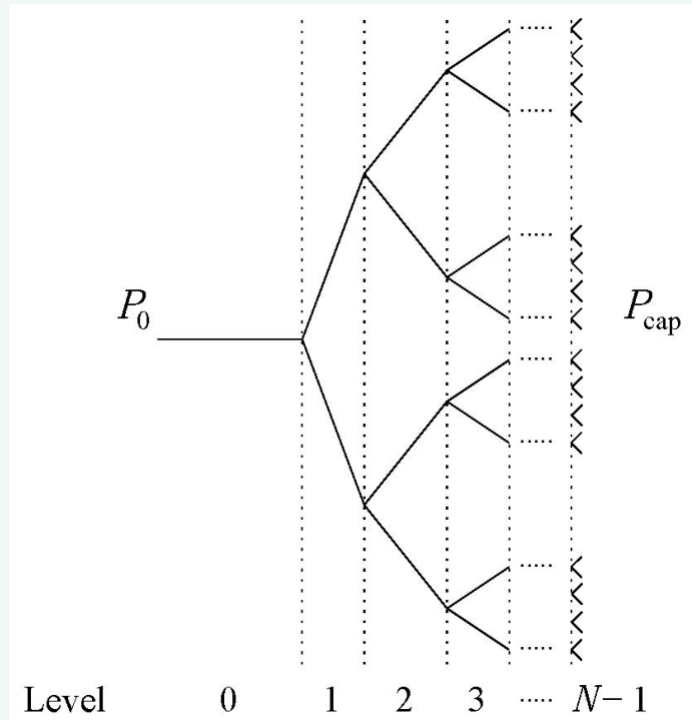
ستحلل في هذا الجزء نموذجين مبسطين لجريان الدم في الأوعية.

الأوعية الدموية أسطوانية الشكل تقريباً، ومن المعلوم أنه في حالة الجريان المستقر غير المضطرب للمائع غير قابل للانضغاط داخل أسطوانة صلبة، يُعطى فرق ضغط المائع بين طرفي الأسطوانة بالعلاقة

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

حيث r و ℓ هما طول الأسطوانة ونصف قطرها، و η لزوجة المائع، و Q معدل التدفق الحجمي، أي حجم المائع الذي يعبر المقطع العرضي للأسطوانة في وحدة الزمن. غالبًا ما يتيح هذا التعبير الحصول على رتبة المقدار الصحيحة لفرق الضغط في وعاء، حتى من دون مراعاة الجريان النابض، وقابلية الوعاء للانضغاط وشكله غير المنتظم، وحقيقة أن الدم ليس مائعًا بسيطًا، بل مزيج من الخلايا والبلازما. علاوة على ذلك، يتخذ هذا التعبير الشكل نفسه لقانون أوم، إذ يُفسَّر معدل التدفق الحجمي على أنه تيار، وفرق الضغط على أنه فرق جهد، والعامل $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ على أنه مقاومة.

لننظر، على سبيل المثال، إلى الشبكة المتناظرة من الشُرَّينات (الشرايين الصغيرة) المبينة في الشكل 1، التي توصل الدم إلى شبكة الشعيرات الدموية في نسيج. في هذه الشبكة، ينقسم الوعاء عند كل تفرُّع إلى وعاءين متماثلين. غير أن الأوعية في المستويات الأعلى أضيق وأقصر: اعتبر أن أنصاف أقطار الأوعية وأطوالها في مستويين متتاليين، i و $i+1$ ، ترتبط بالعلاقيتين $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ و $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.



الشكل 1. شبكة من الشُرَّينات.

A.1 (1.3 نقطة)

أوجد تعبيرًا لمعدل التدفق الحجمي، Q_i ، في وعاء عند أي مستوى i ، بدلالة العدد الكلي للمستويات N ، واللزوجة η ، ونصف قطر الوعاء الأول r_0 وطوله ℓ_0 ، والفرق $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ بين الضغط في الشُرَّين عند المستوى 0، P_0 ، والضغط في شبكة الشعيرات الدموية، P_{cap} .

A.2 (0.5 نقطة)

احسب القيمة العددية لمعدل التدفق الحجمي Q_0 للشُرَّين عند المستوى 0، إذا كان نصف قطره $6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ وطوله $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$. اعتبر أن الضغط عند مدخل الشُرَّين هو 55 mmHg، وأن شبكة الأوعية تتكوّن من $N = 6$ مستويات تصل هذا الشُرَّين بشبكة الشعيرات الدموية التي يبلغ ضغطها 30 mmHg. اعتبر أن لزوجة الدم هي $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. عبّر عن نتيجتك بوحدة ml/h.

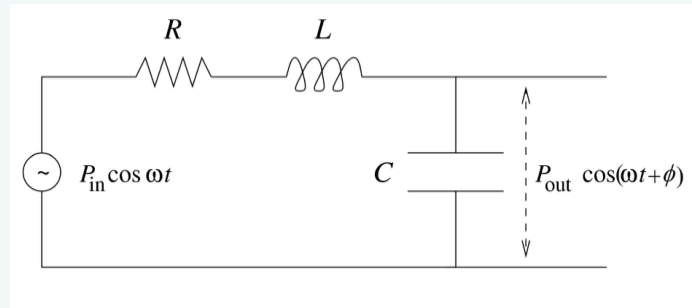
وعاء دموي بوصفه دائرة LCR

إن تقريب الأوعية بأسطوانات صلبة قاصر لعدة أسباب. ومن المهم على نحو خاص إدراج الجريان المتغير مع الزمن، ومراعاة تغير قطر الوعاء الذي يحدث عندما يتغير الضغط خلال دورة ضخ الدم التي يقوم بها القلب. علاوة على ذلك، يُلاحظ أن ضغط الدم في الأوعية الأكبر يتغير بدرجة كبيرة خلال الدورة، بينما تكون سعة تدبذبات الضغط في الأوعية الأصغر أقل بكثير، ويكون الجريان مستقلاً عن الزمن تقريباً.

عندما يزداد الضغط في وعاء مرّن منفرد، يزداد قطره، مما يتيح تخزين المزيد من المائع في الوعاء وإطلاقه عند انخفاض الضغط. ولهذا السبب، يمكن محاكاة السلوك المرّن للوعاء بإضافة مكثف إلى وصفنا الأولي. كذلك، عند مراعاة معدل تدفق الدم المتغير مع الزمن، ينبغي أخذ قصور المائع الذاتي في الحسبان، وهو يتناسب مع كثافته $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. ويمكن وصف هذا القصور الذاتي بمحاثة في نموذجنا. نمثل في الشكل 2 الدارة المكافئة لوعاء منفرد في هذا النموذج. وتُعطي السعة والمحاثة المكافئتان بالعلاقته

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{و} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

على الترتيب، حيث h سُمك جدار الوعاء، و E معامل يونغ للشریان، وهو معامل يصف تغير أبعاد نسيج الوعاء عند تطبيق قوة عليه. لمعامل يونغ وحدات الضغط، وهو من رتبة $E = 0.06 \text{ MPa}$ في الشُرَيَّات.



الشكل 2. الدارة الكهربائية المكافئة لوعاء منفرد.

A.3 (2.0 نقطة)

أوجد، في النظام المستقر، سعة الضغط عند مخرج الوعاء، P_{out} ، بدلالة سعة الضغط عند المدخل، P_{in} ، والمقاومة المكافئة، R ، والمحاثة، L ، والسعة، C ، لجريان ذي تردد زاوي ω . حدّد الشرط الذي يربط بين ρ و E و h و r و ℓ لكي تكون سعة تدبذبات الضغط عند المخرج، عند الترددات المنخفضة، أصغر من P_{in} .

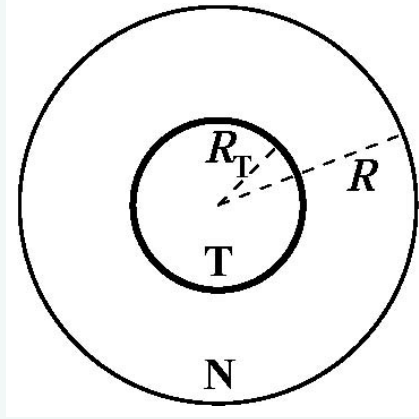
A.4 (0.7 نقطة)

قدّر، لشبكة الأوعية الواردة في A.2، أقصى سُمك h لجدار الشُرَيَّين بحيث يتحقق الشرط المحدّد في A.3 (اعتبر أن h مستقل عن المستوى).

الجزء B. نموّ الورم (5.5 نقاط)

نموّ الورم عملية شديدة التعقيد تتداخل فيها الآليات البيولوجية، مثل تكاثر الخلايا والانتقاء الطبيعي، مع الفيزياء. سننظر في هذه المسألة إلى نموذج مبسّط لنموّ الورم يتناول ازدياد الضغط الذي يُلاحظ عادةً في الأورام الصلبة.

لنعتبر مجموعة من الخلايا الطبيعية تكوّن نسيجاً محاطاً بغشاء قاعدي غير قابل للتمدد، يُلزم النسيج بالحفاظ دائماً على الشكل نفسه: كرة نصف قطرها R (الشكل 3).



الشكل 3. ورم مبسّط.

في البداية لا توجد إجهادات متبقية في النسيج، أي إن الضغط عند كل نقطة يساوي الضغط الجوي. عند الزمن $t = 0$ ، يبدأ ورم بالنمو في مركز هذه الكرة، ومع نموّه يزداد الضغط داخل النسيج. اعتبر أن كلا النسيجين (الطبيعي، N، والورمي، T) قابل للانضغاط بحيث تزداد كثافتهما، ρ_T و ρ_N ، خطياً مع الضغط:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

حيث ρ_0 كثافة النسيج في حالته غير المجهدة، p فرق الضغط عن الضغط الجوي، و K_T و K_N معامل الانضغاط الحجمي للنسيجين الطبيعي والورمي، على الترتيب. وبوجه عام، تكون الأورام أكثر صلابة، ولذلك يكون معامل انضغاطها الحجمي أكبر.

B.1 (1.0 نقطة)

لا تتغير كتلة الخلايا الطبيعية أثناء نمو الورم. أوجد النسبة بين حجم الورم والحجم الكلي للنسيج، $v = V_T/V$ ، بدلالة النسبة بين كتلة الورم (M_T) وكتلة النسيج الطبيعي (M_N)، $\mu = M_T/M_N$ ، ونسبة معاملي الانضغاط الحجمي، $\kappa = K_N/K_T$. يُستخدم العلاج بفطر الحرارة أحياناً مع العلاج الكيميائي والعلاج الإشعاعي لعلاج السرطان. في العلاج بفطر الحرارة، تُسخّن الخلايا السرطانية انتقائياً من درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية، 37°C ، إلى درجات حرارة أعلى من 43°C ، مما يتسبب في موتها. ويطوّر الباحثون حالياً أنابيب نانوية كربونية مغطاة ببروتينات خاصة قادرة على الارتباط بالخلايا الورمية. عند تعريض النسيج للأشعة تحت الحمراء القريبة، تمتصها الأنابيب النانوية بدرجة أكبر بكثير من الأنسجة المحيطة، ولذلك يمكن تسخينها انتقائياً، وكذلك الخلايا الورمية التي ترتبط بها.

اعتبر أن للورم والخلايا الطبيعية والنسيج المحيط موصلية حرارية ثابتة k ، أي إن الطاقة التي تعبر سطحاً كروياً نصف قطره r في وحدة الزمن ووحدة المساحة، في هندسة هذه المسألة، تساوي k مضروبة في مشتقة درجة الحرارة بالنسبة إلى r . تتوزّع الأنابيب النانوية بانتظام في حجم الورم، ويمكنها توفير قدرة حرارية P لكل وحدة حجم. افترض أن درجة الحرارة تساوي درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية بعيداً جداً عن الورم.

B.2 (1.7 نقطة)

أوجد، في الحالة المستقرة، درجة الحرارة عند مركز الورم بدلالة P و k ودرجة حرارة جسم الإنسان ونصف قطر الورم، R_T .

B.3 (0.5 نقطة)

أوجد الحد الأدنى للقدرة لكل وحدة حجم، $P_{\min}$ ، اللازمة لتسخين جميع الخلايا الورمية في ورم نصف قطره 5.0 cm إلى درجة حرارة أعلى من 43.0°C . خذ الموصلية الحرارية للنسيج مساوية لـ $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

اعتبر أن الورم يتغذى بالدم عبر شبكة أوعية ذات بنية متفرعة كما في السؤال A.1. مع نمو الورم، عندما يصبح ضغطه p أكبر من الضغط P_{cap} في أضيق الأوعية، تنفص أنصاف أقطار هذه الأوعية بمقدار صغير δr . وإذا بلغ هذا الضغط قيمة حرجة p_c (تقابل نقصاناً في نصف القطر مقداره δr_c)، فإن أضيق الأوعية تنهار، مما يعرض تروية الورم لخطر شديد. ويمكن الربط بين الضغط وتغير نصف القطر بالعلاقة الظاهرية الآتية:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

اعتبر أن أنصاف أقطار الأوعية الأصغر فقط (عند المستوى $N - 1$) تتغير عندما يزداد ضغط الورم.

B.4 (2.3 نقطة)

في النظام الخطي (أي باعتبار $p - P_{\text{cap}}$ صغيراً جداً)، عبّر عن الانخفاض النسبي في معدل التدفق، $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ ، في هذه الأوعية الأضيّق، بدلالة نسبة حجم الورم $v = V_T/V$ و K_N و N و p_c و δr_c و r_{N-1} و P_{cap} .

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

A.1 •

$$Q_i = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8 \eta \ell_0 N 2^i}, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

A.2 •

$$Q_0 = 1.4536 \dots \text{ ml/h} \simeq 1.5 \text{ ml/h}.$$

A.3 •

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

يتطلب التوهين عند ترددات غير صفرية منخفضة بما يكفي

$$R^2 C \geq 2L \iff h \leq \frac{64 \eta^2 \ell^2}{3 \rho E r^3}.$$

تكون المتباينة صارمة للتوهين عند الرتبة ω^2 ؛ أما المساواة فتعطي توهيناً عند الرتبة ω^4 .

A.4 •

$$h_{\text{max}} = \frac{64 \eta^2 \ell_0^2}{3 \rho E r_0^3} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \text{ } \mu\text{m}.$$

يفرض المستوى 0 القيد الأشد.

B.1 •

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

B.2 • إذا كانت T_b درجة حرارة الجسم الطبيعية،

$$T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P} R_T^2}{2k}.$$

$$P_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

هذه هي قيمة العتبة؛ ولتجاوز 43.0°C تجاوزاً صارماً في كل موضع، يجب أن تكون كثافة القدرة أعلى منها.

• **B.4** باعتبار أن δQ_{N-1} تعني المقدار الموجب للانخفاض،

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right).$$

تنطبق هذه العلاقة عند تجاوز عتبة بدء الانضغاط بقليل، حيث $p > P_{\text{cap}}$.

الحل

A.1

تعطي علاقات التحجيم الهندسي

$$r_i = r_0 2^{-i/3}, \quad \ell_i = \ell_0 2^{-i/3}.$$

وبالتالي، فإن المقاومة الهيدروليكية لوعاء واحد عند المستوى i هي

$$R_i = \frac{8\eta\ell_i}{\pi r_i^4} = \frac{8\eta\ell_0}{\pi r_0^4} 2^i = R_0 2^i.$$

يقتضي انحفاظ التدفق الحجمي والتناظر أن ينقسم التدفق بالتساوي عند كل تفرّع. ومن ثم

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i}.$$

لذلك يكون هبوط الضغط عبر أي وعاء واحد عند المستوى i

$$\Delta P_i = R_i Q_i = R_0 Q_0.$$

يمرّ كل مسار من المدخل إلى شبكة الشعيرات الدموية عبر وعاء واحد في كل مستوى من المستويات N . ويجمع هبوطات الضغط على طول مسار كهذا،

$$\Delta P = NR_0 Q_0.$$

إذن

$$Q_i = \frac{Q_0}{2^i} = \frac{\pi r_0^4 \Delta P}{8\eta \ell_0 N 2^i}.$$

وبصورة مكافئة، يساهم كل مستوى بمقدار $R_i/2^i = R_0$ في المقاومة الكلية للشبكة، ولذلك $R_{\text{eq}} = NR_0$.

A.2

باستخدام التحويل المعطى بين mmHg والباسكال،

$$\Delta P = (55 - 30) \frac{1.013 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 3.3322 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

وعليه،

$$Q_0 = \frac{\pi(6.0 \times 10^{-5})^4(3.3322 \times 10^3)}{8(3.5 \times 10^{-3})(2.0 \times 10^{-3})(6)} = 4.0379 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

بما أن $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ و $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ ml}$

$$Q_0 = (4.0379 \times 10^{-10})(10^6)(3600) = 1.4536 \text{ ml/h.}$$

وبالتقريب إلى رقمين معنويين،

$$Q_0 \simeq 1.5 \text{ ml/h.}$$

A.3

في تمثيل الوعاء بدارة كهربائية، يقابل الضغط فرق الجهد، ويقابل التدفق الحجمي التيار. وتكون علاقة المكثف وموازنة الضغط حول الدارة

$$Q = C \frac{dp_{\text{out}}}{dt}, \quad p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = RQ + L \frac{dQ}{dt}.$$

بدمج هاتين المعادلتين نحصل على

$$LC \frac{d^2 p_{\text{out}}}{dt^2} + RC \frac{dp_{\text{out}}}{dt} + p_{\text{out}} = p_{\text{in}}.$$

بعد اضمحلال الاستجابة العابرة، يتذبذب الدخل والخرج بالتردد الزاوي نفسه. وبتمثيلهما بسعتين مركبتين،

$$(1 - \omega^2 LC + i\omega RC) \tilde{P}_{\text{out}} = \tilde{P}_{\text{in}}.$$

بأخذ القيم المطلقة،

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

مربع المقام هو

$$1 + C(R^2 C - 2L)\omega^2 + L^2 C^2 \omega^4.$$

عند قيم ω غير الصفرية الصغيرة بما يكفي، يتطلب التوهين عند الرتبة الأولى غير الصفرية

$$R^2 C > 2L.$$

إذا كان $R^2 C < 2L$ ، فإن المقام يكون أصغر من الواحد عند الترددات المنخفضة بما يكفي، ويتضخم تذبذب الضغط. وعند الحالة الحدية $R^2 C = 2L$ ، يصبح مربع المقام $1 + L^2 C^2 \omega^4 > 1$ ، ولذلك يحدث توهين في الحالة الحدية أيضًا، وإن كان عند الرتبة ω^4 فقط. ومن ثم فإن الشرط الدقيق هو $R^2 C \geq 2L$.

بالتعويض بمعلمات الوعاء المعطاة،

$$R^2 C = \left(\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} \right)^2 \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} = \frac{96\eta^2 \ell^3}{\pi E h r^5},$$

بينما

$$2L = \frac{9\ell\rho}{2\pi r^2}.$$

إذن

$$64\eta^2 \ell^2 \geq 3\rho E h r^3$$

أو، بصورة مكافئة،

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{64\eta^2 \ell^2}{3\rho E r^3}.$$

للحصول على توهين عند الرتبة ω^2 ، تُستبدل بهاتين المتباينتين متباينتان صارمتان. وعند التردد الصفري، يساوي كسب الضغط الواحد تمامًا.

A.4

عند المستوى i ،

$$h_{\text{crit},i} = \frac{64\eta^2 \ell_i^2}{3\rho E r_i^3} = \frac{64\eta^2 \ell_0^2}{3\rho E r_0^3} 2^{i/3}.$$

يزداد هذا الحد مع رقم المستوى. ولأن سُمك الجدار نفسه يجب أن يحقق الشرط عند كل مستوى، فإن المستوى 0 يفرض القيد الأشد.

باستخدام $E = 0.06 \times 10^6 \text{ Pa}$,

$$h_{\text{max}} = \frac{64(3.5 \times 10^{-3})^2(2.0 \times 10^{-3})^2}{3(1.05 \times 10^3)(0.06 \times 10^6)(6.0 \times 10^{-5})^3} = 7.6818 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

إذن، ضمن النموذج المعطى،

$$h_{\text{max}} \simeq 7.7 \times 10^{-5} \text{ m} = 77 \mu\text{m}.$$

يحقق سُمك أقل من هذه القيمة الحدية شرط التوهين الصارم عند الرتبة الأولى غير الصفريّة في الشبكة بأكملها.

B.1

الحجم الكلي للنسيج V ثابت. ويحتوي في البداية على نسيج طبيعي بكثافة ρ_0 ، ولذلك يعطي انحفاظ كتلة الخلايا الطبيعية

$$M_N = \rho_0 V = \rho_N (V - V_T).$$

بكتابة $v = V_T/V$ واستخدام المعادلة (3)،

$$1 = \left(1 + \frac{p}{K_N}\right)(1 - v).$$

ومن ثم يرتبط الضغط بحجم الورم بالعلاقة

$$p = \frac{K_N v}{1 - v}.$$

كتلة الورم هي

$$M_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T.$$

بالقسمة على $M_N = \rho_0 V$

$$\mu = v \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) = v \left(1 + \frac{\kappa v}{1 - v}\right).$$

تعطي إعادة الترتيب معادلة تربيعية في v :

$$(1 - \kappa)v^2 - (1 + \mu)v + \mu = 0.$$

يقترّب الجذر المقبول فيزيائياً من الصفر عندما تقترب μ من الصفر. وعندما $\kappa \neq 1$ ، يكون هذا الجذر

$$v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4(1 - \kappa)\mu}}{2(1 - \kappa)}.$$

وبالضرب في المرافق نحصل على صيغة تنطبق مباشرةً أيضاً عندما $\kappa = 1$:

$$v = \frac{2\mu}{1 + \mu + \sqrt{(1 - \mu)^2 + 4\kappa\mu}}.$$

للتحقق، عندما يتساوى معامل الانضغاط الحجمي، تكون كثافتا النسيجين متساويتين، مما يعطي $v = \mu/(1 + \mu)$ ، كما يتنبأ هذا التعبير.

B.2

لتكن T_b درجة حرارة الجسم بعيداً عن الورم. في الحالة المستقرة، يساوي التيار الحراري المتجه إلى الخارج عبر كرة القدرة الكلية المتولدة داخلها. وباعتبار التدفق الحراري إلى الخارج موجباً، يكون قانون فورييه

$$\dot{H}(r) = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr}.$$

داخل الورم، $0 \leq r \leq R_T$ ، يعطي توليد الحرارة المنتظم

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi r^3}{3} \mathcal{P},$$

ومن ثم

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}r}{3k}.$$

خارج الورم، تعبر القدرة المتولدة بأكملها كل سطح كروي:

$$-4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi R_T^3}{3} \mathcal{P}.$$

بالتكامل مع الشرط $T(r) \rightarrow T_b$ عندما $r \rightarrow \infty$

$$T(r) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}, \quad r \geq R_T.$$

إنّ تكون درجة الحرارة عند سطح الورم

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

درجة الحرارة متصلة عند السطح. ويتكامل تدرّج درجة الحرارة الداخلي باتجاه الداخل انطلاقاً من ذلك السطح نحصل على

$$T(r) = T(R_T) + \frac{\mathcal{P}}{6k}(R_T^2 - r^2) = T_b + \frac{\mathcal{P}}{6k}(3R_T^2 - r^2).$$

وبالتالي،

$$\boxed{T(0) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}}.$$

تتناقص درجة الحرارة تربيعياً داخل الورم، وتقترب من T_b وفقاً لـ $1/r$ خارجه.

B.3

تتناقص درجة الحرارة مع البعد عن المركز، ولذلك تقع أبعد الخلايا الورمية عند سطحه. ومن ثم فإن تسخين كل خلية ورمية إلى ما فوق 43.0°C يتطلب

$$T(R_T) = T_b + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k} > 43.0^\circ\text{C}.$$

كثافة القدرة عند العتبة هي

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3k(43.0 - 37.0) \text{ K}}{R_T^2}.$$

بالتعويض بـ $R_T = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{3(0.60)(6.0)}{(5.0 \times 10^{-2})^2} = 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}.$$

إنّ

$$\boxed{\mathcal{P}_{\min} \simeq 4.3 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}}.$$

عند هذه العتبة تكون درجة حرارة السطح 43.0°C تمامًا، بينما تكون درجة حرارة المركز 46.0°C . ويتطلب تجاوز درجة الحرارة المحددة تجاوزاً صارماً في كل موضع أن تكون $\mathcal{P} > 4.32 \times 10^3 \text{ W m}^{-3}$.

B.4

نقرب أولاً العلاقة بين الضغط ونصف القطر تقريباً خطياً. يمكن كتابة المعادلة (4) على الصورة

$$p - P_{\text{cap}} = (p_c - P_{\text{cap}}) \left[2 \frac{\delta r}{\delta r_c} - \left(\frac{\delta r}{\delta r_c} \right)^2 \right].$$

على الفرع المتصل بالحالة غير المنضغطة، وبالقرب الكافي من $p = P_{\text{cap}}$ ،

$$\boxed{\delta r \simeq \frac{\delta r_c}{2(p_c - P_{\text{cap}})} (p - P_{\text{cap}})}.$$

لا يتغير نصف القطر إلا في الأوعية الطرفية. لنضع

$$\epsilon = \frac{\delta r}{r_{N-1}} \ll 1.$$

تبقى أطوالها دون تغيير، ولذلك يعطي قانون بوازوي

$$R'_{N-1} = R_{N-1}(1 - \epsilon)^{-4} \simeq R_{N-1}(1 + 4\epsilon).$$

من **A.1**، تساهم الأوعية الطرفية البالغ عددها 2^{N-1} مجتمعة في البداية بمقدار R_0 في مقاومة الشبكة. وتبقى المستويات الأخرى البالغ عددها $N - 1$ دون تغيير. ومن ثم

$$R'_{\text{eq}} = (N - 1)R_0 + R_0(1 - \epsilon)^{-4} \simeq NR_0 + 4R_0\epsilon.$$

عند ثبات ضغطي المدخل والشعيرات الدموية، يتناسب التدفق الكلي عكسياً مع R_{eq} . ويظل التناظر يقتضي أن يساوي التدفق في الوعاء الطرفي التدفق الكلي مقسوماً على 2^{N-1} ، ولذلك يكون انخفاضه النسبي مساوياً لانخفاض النسبي للتدفق الكلي:

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{R'_{\text{eq}} - R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}.$$

يأخذ العامل $1/N$ في الحسبان أن مساهمة واحدة فقط من مساهمات المقاومة المتساوية البالغ عددها N هي التي تتغير.

بالتعويض بتغير نصف القطر في التقريب الخطي،

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}} \frac{p - P_{\text{cap}}}{p_c - P_{\text{cap}}}.$$

أخيراً، يعطي انحفاظ كتلة الخلايا الطبيعية من **B.1** العلاقة $p = K_N v / (1 - v)$ ، وعليه،

$$\boxed{\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq \frac{2\delta r_c}{Nr_{N-1}(p_c - P_{\text{cap}})} \left(\frac{K_N v}{1 - v} - P_{\text{cap}} \right)}.$$

ينطبق هذا التعبير عند تجاوز الكسر الحجمي لبدء الانضغاط بقليل، وهو

$$v_* = \frac{P_{\text{cap}}}{K_N + P_{\text{cap}}},$$

مع $1 \ll (p - P_{\text{cap}})/(p_c - P_{\text{cap}})$ و $\delta r/r_{N-1} \ll 1$. أما دون عتبة البدء، فلا ينص النموذج المذكور على تضيق الأوعية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.