

IPhO 2017

理论题与解答 · 印度尼西亚日惹 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2017/

题目 1: 暗物质

弗里茨·兹威基根据对后发座星系团动力学的观测，首次正式推断出暗物质的存在。后发座星系团由大约一千个星系组成。兹威基利用维里定理估算了该星系团的质量。在一个简单的太阳—行星系统中，若行星沿圆轨道绕太阳运动，维里定理给出了行星动能与其引力势能之间的精确关系。而在一般情况下，对于由某种相互作用束缚在一起的多粒子系统，维里定理给出了总动能的时间平均值与总势能的时间平均值之间的关系。

1933 年，兹威基根据对后发座星系团边缘附近星系速度的观测，估算出该星系团的质量大于通过可见物质（即星系）所推算的质量。可观测物质（星系）产生的引力太小，无法解释这些星系的速度。因此，必然存在某种隐藏的质量，才能解释如此大的速度。这部分隐藏的质量就是暗物质的质量。在下文中，假设每个星系的质量是其可见质量与随该星系一起运动的暗物质质量之和，且暗物质与可见物质之间仅通过引力相互作用。

A. 星系团

考虑一个由大量星系（数目为 N ）和暗物质组成的星系团，它们均匀分布在半径为 R 的球内，星系团的总质量（星系与暗物质）为 M 。假设每个星系的平均总质量（可见物质与暗物质）为 m 。

A.1	假设星系团中的物质连续分布，求星系团的总引力势能，用 M 和 R 表示。	1.0 分
-----	--	-------

由于宇宙膨胀，任何遥远天体都会以一定的速度远离地球上的观测者，该速度取决于观测者到天体的距离。观测到星系团中第 i 个星系内一颗 IA 型超新星的某条莱曼谱线（氢的一条发射谱线）的频率为 f_i ，其中 $i = 1, \dots, N$ ，而地球上对应的同一条莱曼谱线的频率为 f_0 。

A.2	求整个星系团远离地球的平均速率 V_{cr} ，用 f_i （其中 $i = 1, \dots, N$ ）、 f_0 和 N 表示。注意，星系的速率远小于光速 c 。	0.5 分
A.3	假设星系相对于星系团中心的速度分布是各向同性的（各个方向上相同），求星系相对于星系团中心的方均根速率 v_{rms} ，用 N 、 f_i （其中 $i = 1, \dots, N$ ）和 f_0 表示。根据这一结果，求星系相对于星系团中心的平均动能，用 v_{rms} 和 m 表示。	1.5 分

可以利用维里定理求星系团的总质量。该定理指出，对于由保守力束缚在一起的粒子系统，

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

其中， $\langle K \rangle_t$ 是总动能的时间平均值， $\langle U \rangle_t$ 是总势能的时间平均值， γ 是常数。推导该定理时，可假设对于由自身相互作用束缚的粒子系统，每个粒子的位置矢量和动量的大小都是有限的，因此下列量

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

是有限的。

A.4	利用 $d\Gamma/dt$ 在足够长时间内的时间平均值为零这一事实，即 $\langle d\Gamma/dt \rangle_t = 0$ ，求引力相互作用情形下上述维里定理中的 γ 。（提示：尝试先对少量有限个星系计算 Γ 中的求和来解决此问	1.7 分
-----	---	-------

题。)

A.5	根据前面的结果，求星系团中暗物质的总质量，用 N 、 m_g 、 R 和 v_{rms} 表示，其中 m_g 为每个星系的平均可见总质量。注意，暗物质的方均根速率与星系的方均根速率相同。	0.5 分
-----	---	-------

B. 星系中的暗物质

暗物质也存在于星系内部及其周围。考虑一个可见边缘半径为 R_g 的球形星系（这一半径近似表示仍可看见大量恒星的最外侧距离，但注意，在 R_g 之外的区域仍可能分布着极少量恒星）。假设星系中的恒星为质点，其平均质量为 m_s 。星系中的恒星以数密度 n 均匀分布，并假设它们沿圆轨道运动。

B.1	如果该星系仅由恒星组成，求恒星的速率 $v(r)$ 与其到星系中心距离的函数关系，并画出 $r < R_g$ 和 $r \geq R_g$ 时 $v(r)$ 的示意图。	0.8 分
-----	--	-------

可以根据星系旋转曲线推断暗物质的存在，星系旋转曲线是通过观测得到的 $v(r)$ 图像。下图显示了星系旋转曲线的一种常见形态。为简化起见，可以假设 $v(r)$ 在 $r \leq R_g$ 时为线性函数，在 $r > R_g$ 时为常数 v_0 。

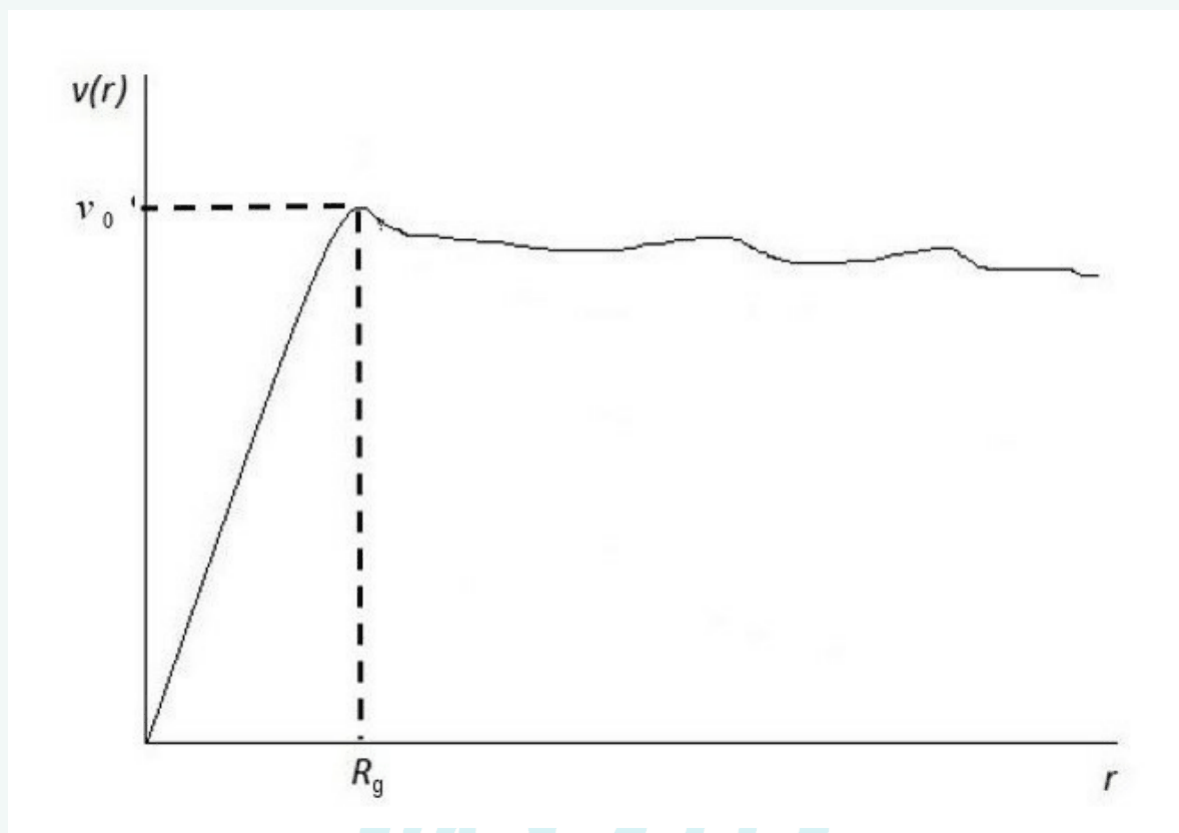


图 1 一个星系的旋转曲线图。

B.2	求该星系位于半径为 R_g 的球内部分的总质量 m_R ，用 v_0 和 R_g 表示。	0.5 分
-----	--	-------

B.2. 中的图与 B.1 中所得图像之间的差异表明暗物质的存在。

B.3	求 $r < R_g$ 和 $r \geq R_g$ 时暗物质的质量密度，用 r 、 R_g 、 v_0 、 n 和 m_s 表示。	1.5 分
-----	--	-------

C. 星际气体与暗物质

现在考虑一个年轻星系，其质量主要由星际气体和暗物质贡献（忽略恒星的质量）。假设星际气体由质量为 m_p 的相同粒子组成。气体的数密度 $n(r)$ 和温度 $T(r)$ 取决于到星系中心的距离 r 。虽然气体中发生着许多物理过程，但可以假设气体在自身压强与星系引力的作用下处于流体静力学平衡。

C.1	求气体的压强梯度 dP/dr , 用 $m'(r)$ 、 r 和 $n(r)$ 表示。这里, $m'(r)$ 是以星系中心为球心、半径为 r 的球内气体与暗物质的总质量。	0.5 分
C.2	假设星际气体为理想气体, 求 $m'(r)$, 用 $n(r)$ 、 $T(r)$ 及其对 r 的导数表示。	0.5 分

接下来, 为简化起见, 假设气体呈温度为 T_0 的等温分布, 且星际气体的数密度为

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

其中, α 和 β 为常数。

C.3	求星系内部暗物质的质量密度与 r 的函数关系。	1.0 分
-----	---------------------------	-------

题目译自官方英文原文。

答案

令

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

这里, G 是引力常量, k_B 是玻尔兹曼常量。多普勒效应的结果保留到速率与 c 之比的一阶。

• A.1

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

• A.2

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

• A.3

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}, \quad \langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

• A.4

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

• A.5

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

• B.1

$$v(r) = \begin{cases} r\sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

图像从原点开始线性上升，在 R_g 处达到最大值，随后按 $r^{-1/2}$ 下降并趋近于零。

• B.2

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

• B.3

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - n m_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

• C.1

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2}.$$

• C.2

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right].$$

• C.3

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

解答

A.1

取全部质量分散在无穷远处时的引力势能为零。均匀的质量密度及半径 r 内的质量分别为

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}.$$

从无穷远处依次移来薄球壳，逐层组装成球体。质量为

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr$$

的球壳与此前已组装好的内部质量之间的相互作用能为

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dM.$$

这一构造过程将每一对质量之间的相互作用恰好计算一次。因此，

$$U = - \int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) \left(\frac{3Mr^2}{R^3} \right) dr = - \frac{3GM^2}{R^6} \frac{R^5}{5}.$$

于是，

$$U = - \frac{3GM^2}{5R}.$$

A.2

令 u_i 为星系 i 相对于地球的视向速度，以远离地球为正方向。当 $u_i \ll c$ 时，多普勒关系的一阶近似为

$$f_i \simeq f_0 \left(1 - \frac{u_i}{c} \right),$$

因此

$$u_i \simeq c \frac{f_0 - f_i}{f_0}.$$

在星系团静止参考系中，内部速度的平均值为零。因此，星系团的退行速率就是这些实测视向速度的平均值：

$$V_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \simeq \frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_0 - f_i).$$

由此得到，

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{1}{Nf_0} \sum_{i=1}^N f_i \right) = c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

A.3

星系 i 相对于星系团中心的速度的视向分量为

$$w_i = u_i - V_{cr} \simeq - \frac{c}{f_0} (f_i - \bar{f}).$$

对于各向同性的速度分布，速度平方的平均值在三个相互垂直的方向上均等分配：

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

取 z 方向沿视线方向，得到

$$v_{rms}^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \langle w^2 \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

于是，

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}.$$

等价地，

$$v_{rms}^2 \simeq \frac{3c^2}{f_0^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 \right].$$

以 m 作为代表性的星系总质量，在星系团静止参考系中的平均动能为

$$\langle K_{\text{gal}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4

在质心参考系中进行计算。对题给的量求导，得到

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K.$$

令 $\vec{F}_{ij}$ 为粒子 j 对粒子 i 的作用力。利用牛顿第三定律，可以将力的求和项按无序粒子对分组：

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i < j} \left(\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij}.$$

对于牛顿引力，

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

因此，

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

其中， U 为所有粒子对的总引力势能。由此可得

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2K + U.$$

由于 Γ 始终有界，

$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)}{\tau} = 0.$$

因此，取时间平均值得到

$$2\langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0, \quad \langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t.$$

与题述定理比较，得到

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5

将星系团视为处于稳态维里平衡，因此观测到的宏观性质可代表时间平均值。由于暗物质与星系具有相同的方均根速率，总动能为

$$K = \frac{1}{2} M v_{rms}^2.$$

将维里定理与 A.1 的结果结合，

$$2K = -U \implies M v_{rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}.$$

对于 $M > 0$,

$$M = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G}.$$

可见物质的总质量为 Nm_g 。从总质量中减去它，得到

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1

恒星的质量密度为

$$\rho_\star = nm_s.$$

忽略 R_g 之外稀疏恒星的总质量，但仍将它们作为试验粒子，其轨道可用于探测外部引力场。于是，所包围的恒星质量为

$$M_\star(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}nm_sr^3, & r < R_g, \\ \frac{4\pi}{3}nm_sR_g^3, & r \geq R_g. \end{cases}$$

根据球壳定理，只有半径 r 内所包围的质量对该处的引力加速度有贡献。令该加速度等于向心加速度，得到

$$\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GM_\star(r)}{r^2}, \quad v(r)^2 = \frac{GM_\star(r)}{r}.$$

于是，

$$v(r) = \begin{cases} r\sqrt{\frac{4\pi Gnm_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi Gnm_sR_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

为绘制示意图，定义

$$v_g = R_g\sqrt{\frac{4\pi Gnm_s}{3}}.$$

曲线从 $(0,0)$ 到 (R_g, v_g) 为一条直线。它是连续的，并在该点取得最大值。在 R_g 之外，它满足

$$v(r) = v_g\sqrt{\frac{R_g}{r}},$$

逐渐下降，趋近于水平渐近线 $v = 0$ 。

B.2

在 $r = R_g$ 处，观测到的圆周运动速率为 v_0 。圆轨道条件给出

$$\frac{v_0^2}{R_g} = \frac{Gm_R}{R_g^2}.$$

因此，所包围的总质量（包括暗物质）为

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

B.3

对于任何可通过圆轨道运动探测的球对称质量分布,

$$M_{\text{enc}}(r) = \frac{rv(r)^2}{G}.$$

题目给出的观测旋转曲线的近似为

$$v(r) = \begin{cases} v_0 r / R_g, & r < R_g, \\ v_0, & r \geq R_g. \end{cases}$$

因此,

$$M_{\text{enc}}(r) = \begin{cases} \frac{v_0^2 r^3}{GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2 r}{G}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

球壳的质量为 $dM_{\text{enc}} = 4\pi r^2 \rho_{\text{tot}} dr$, 因此

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{enc}}}{dr} = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

在可见边缘以内减去恒星密度 nm_s , 并忽略可见边缘以外的恒星密度, 得到

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

所包围的质量在 R_g 处连续, 尽管在这一理想化模型中, 密度可以在该处发生跃变。

C.1

这里, $m'(r)$ 表示题目中指定的所包围质量; 撇号是其记号的一部分, 并不表示导数。

考虑一个径向厚度为 dr 、横截面积为 dA 的气体微元。其质量为

$$dm = m_p n(r) dA dr.$$

向外的净压力为

$$dF_P = -\frac{dP}{dr} dA dr.$$

向内的引力大小为

$$dF_G = \frac{Gm'(r)}{r^2} m_p n(r) dA dr.$$

流体静力学平衡要求这两个力相互平衡。因此,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2}.$$

负号表示压强沿向外方向减小，这是支撑气体、抵抗向内引力所必需的。

C.2

对于理想气体，

$$P(r) = n(r)k_B T(r).$$

求导得到，

$$\frac{dP}{dr} = k_B \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

代入流体静力学平衡方程，解出所包围的质量，得到

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{G m_p n(r)} \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

于是，

$$\boxed{m'(r) = -\frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right]}.$$

一个等价形式为

$$m'(r) = -\frac{k_B T(r) r}{G m_p} \left[\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right].$$

C.3

对于等温气体， $T(r) = T_0$ ，因此 C.2 化为

$$m'(r) = -\frac{k_B T_0 r^2}{G m_p} \frac{d \ln n}{dr}.$$

给定的数密度满足

$$\ln n = \ln \alpha - \ln r - 2 \ln(\beta + r),$$

因此

$$\frac{d \ln n}{dr} = -\frac{1}{r} - \frac{2}{\beta + r}.$$

由此可得所包围的总质量为

$$m'(r) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \left(r + \frac{2r^2}{\beta + r} \right) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{r(\beta + 3r)}{\beta + r}.$$

对这一所包围质量求导：

$$\frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{\beta^2 + 6\beta r + 3r^2}{(\beta + r)^2}.$$

于是总质量密度为

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2}.$$

气体的质量密度为

$$\rho_{\text{gas}}(r) = m_p n(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}.$$

从总密度中减去它，得到

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：地震、火山与海啸

印度尼西亚堪称自然灾害的“超市”。几乎所有类型的自然灾害都曾在印度尼西亚发生，例如火山喷发、地震和海啸。

A. 默拉皮火山喷发

位于日惹的默拉皮火山是爪哇岛最活跃的火山之一。火山碎屑流是这座火山广为人知的喷发特征。火山碎屑流是从火山向外流动的高温气体与岩石混合物。2010 年 10 月 26 日，默拉皮火山展现了其爆炸性喷发的特性，喷出的火山灰柱高达 12 km（图 1），产生的火山碎屑流迫使火山周围超过 20,000 人撤离家园。



(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

（图 1：默拉皮火山喷发时的火山碎屑云，图片由日惹火山观测机构 BPPTKG 提供）

下面考察默拉皮火山 2010 年最大规模喷发的成因。地球物理学家知道，外部水进入岩浆所产生的影响对火山喷发的爆炸性行为（水汽岩浆喷发）起着重要作用。假设我们将火山视为由岩浆颗粒和水的混合物组成的系统。火山喷口结构和大气构成该系统的边界。将爆炸性喷发视为分两个阶段发生：(1) 瞬时的岩浆与水相互作用，以及 (2) 系统膨胀。在第一阶段，质量为 (m_m) 、绝对温度为 (T_m) 的岩浆与质量为 (m_w) 、绝对温度为 (T_w) 的外部水混合。热平衡几乎瞬间建立。这一相互作用可视为近似等容过程。水的汽化潜热和岩浆的熔化潜热均可忽略。

A.1	用水和岩浆的质量以及它们的单位质量热容 c_{Vw} 和 c_{Vm} 表示第一阶段的平衡温度。	0.5 分
A.2	假设可将混合物视为理想气体，求第一阶段的平衡压强。设混合物的摩尔体积为 v_e 。	0.3 分

系统膨胀（第二阶段）可能通过多种方式发生，其中一种是热爆轰。虽然这一过程相当复杂，但我们可以通过实验测量喷出混合物的相对速度。喷发过程中气体的速度取决于火山通道内混合物的压强 p 、总质量 m 和体积 V 。

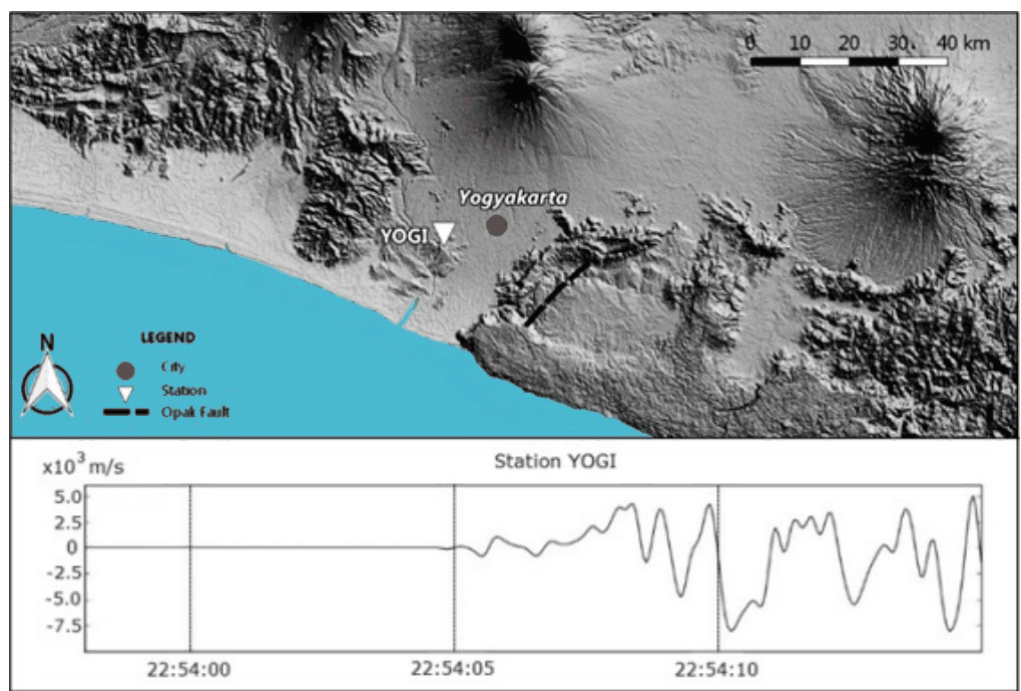
A.3	用 p 、 m 和 V 表示喷发过程中气体的速度，允许含有一个比例常数 κ 。	0.5 分
-----	--	-------

观测到的压强约为 100 MPa 量级。这使得喷发的（相对）速度可达到弹道速度的大小。

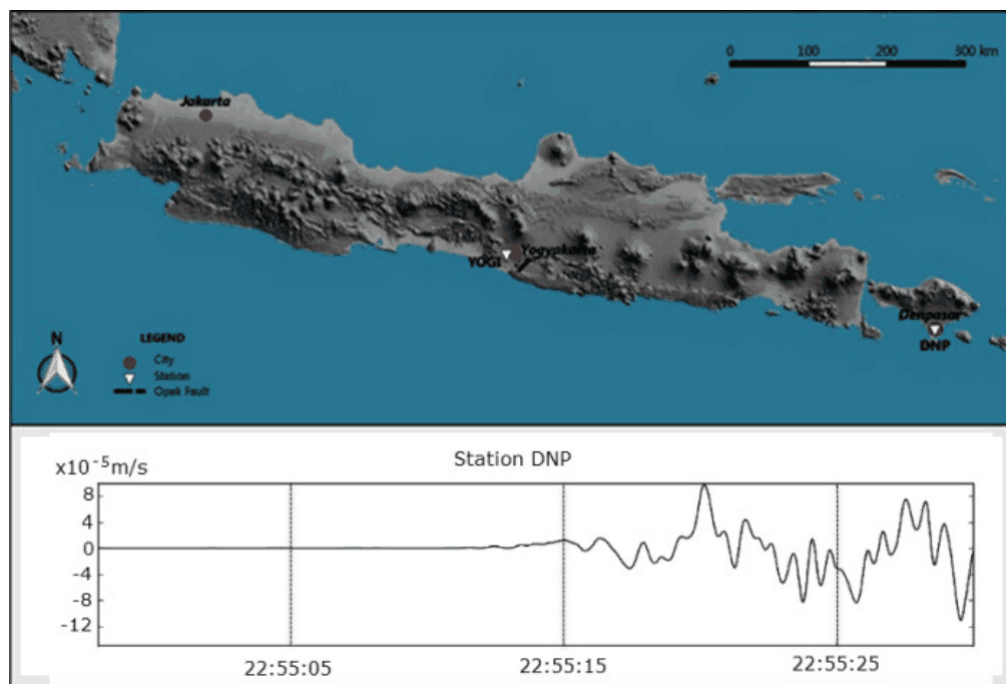
B. 日惹地震

2006 年日惹地震的震级为 $M_w = 6.4$ ，摧毁了班图尔和日惹地区的许多建筑物，发生时间为当地时间 05:54:00.00，即 UTC 时间 22:54:00.00。这次地震由奥帕克断层段的突然错动引起（见图 2）。震源位于地表以下 15 km 处。

在地壳中传播的地震波可用地震仪记录。地震仪记录的图形称为地震图（图 2 和图 3 的下图）。这些地震图表示日惹的甘平地震台（YOGI）（图 2）和巴厘岛登巴萨地震台（DNP）（图 3）记录的地面竖直速度随时间的变化。一般而言，地震波包括三种波：纵波或初至波（ P 波）、横波或次至波（ S 波），以及面波。 P 波和 S 波在地下传播，而面波沿地球表面传播。在地下传播并到达台站的地震波可分为沿直线传播的波、在层间界面上反射的波，以及折射进入下一层的波。纵波或初至波的速度最高，而面波的速度最低，约为 P 波速度的 60%。



(图 2：YOGI 的位置图)



(图 3: DNP (登巴萨) 的位置图)

震中 (震源在地球表面的投影) 到 YOGI 和 DNP 台站的距离分别为 22.5 km 和 500 km。印度尼西亚爪哇岛的地壳厚度为 30 km。地壳之下是地幔。与其他波动现象一样, 地震波也遵循斯涅尔定律。地震波也可被地幔层反射。本题中忽略地球曲率。

B.1	图 2 给出了 YOGI 台站的地震图。利用这些数据求 P 波在地壳中的速度。	0.5 分
B.2	求日惹地震产生的直达 P 波和反射波到达登巴萨 DNP 台站的传播时间。	0.6 分

假设地球仅由地壳和地幔两层组成, 初至波在地壳和地幔中以不同的恒定速度传播。地幔中的速度比地壳中的速度大。注意, 以直角 (90°) 折射进入地幔的 P 波, 在沿地壳与地幔界面传播的整个路径上, 均有一部分折射回地壳。

B.3	求 P 波在地幔中的速度。	1.2 分
-----	-----------------	-------

在更接近实际的地球结构模型中, 可将地壳分成许多薄层, 使地震波速度成为深度 z 的函数, 即 $v(z) = v_0 + az$, 其中 a 为常数, 并将震源近似视为位于地表。在这一模型中, 波射线是弯曲的。

B.4	定义射线参数 $p = \sin \theta(z)/v(z)$, 其中 $\theta(z)$ 为射线与法线之间的夹角。设某地震波以射线参数 p 到达台站; 用 p 、 v_0 和 a 表示台站到震源的距离。假设震源非常靠近地表。	1.4 分
B.5	以对 z 积分的形式, 求从震源到任意台站的传播时间 T 。	1.0 分

地球由一系列均匀层叠加而成, 各层的波速为 v_i , 厚度为 δz_i 。

B.6	利用上一问的结果, 近似计算从震源到 DNP 台站的传播时间 (T)。假设地壳仅由三个离散层 ($i = 1, 2, 3$) 组成, 其参数为 $v_1 = 6.65$ km/sec、 $v_2 = 6.97$ km/sec、 $v_3 = 6.99$ km/sec、 $p = 0.143$ sec/km、 $\delta z_1 = 6.0$ km、 $\delta z_2 = 9.0$ km、 $\delta z_3 = 15$ km。	1.0 分
-----	--	-------

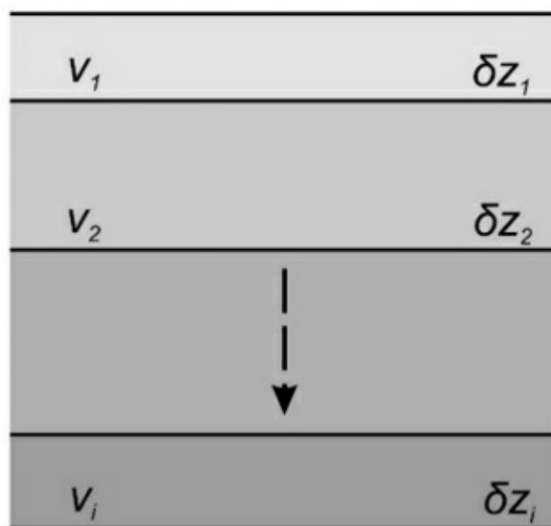


Fig. 4: A simplified model of earth's layers.

图 4：地球分层结构的简化模型。

C. 爪哇海啸

2006 年庞岸达兰地震和海啸发生于 7 月 17 日当地时间 15:19:27，地点位于爪哇岛西部和中部沿岸外海。当地震的震中断层位于海底时，断层可能发生错动，产生称为海啸的巨大水波。换言之，海啸是一种起初振幅很小、但波长极大的浅水波。考虑图 5 所示的断层突然错动，导致部分海底抬升的情形。假设地震能量转化为被抬升海水的势能。在简化模型中，将抬升的水体近似视为底面积为 $\lambda L/2$ （其中 $L \gg \lambda$ ）、高度为 h 的长方体。

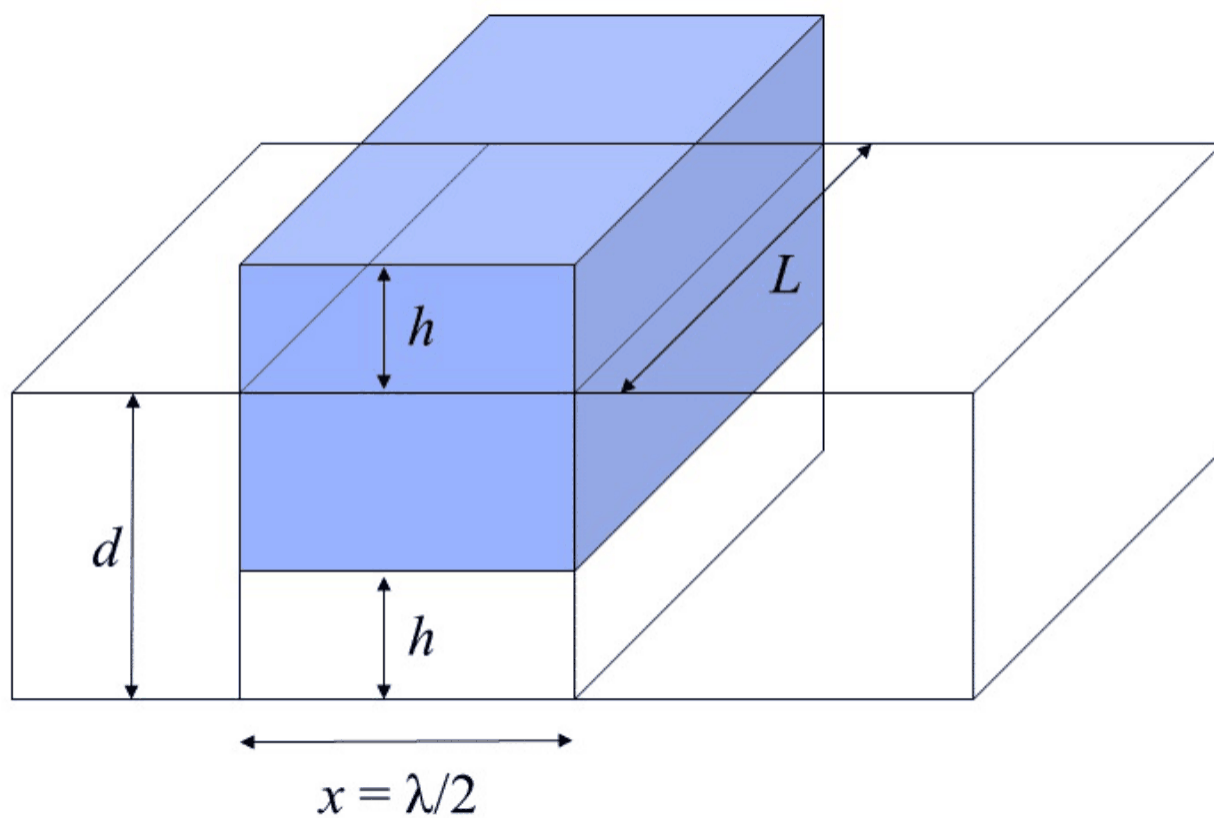


图 5：海啸波示意图， d 为海洋深度。

C.1	求因地震而抬升的海水相对于海面的势能。设海水密度为 ρ 。	0.5 分
C.2	求海啸波的速度，允许含有一个无量纲因子。	1.2 分
C.3	利用能量分析，确定海啸波振幅随水深变化的函数关系。假设水深缓慢变化，并已知水深为 d_0 时振幅为 A_0 。	1.3 分

题目译自官方英文原文。

答案

以下采用的地震图读数为：YOGI 台站在地震发生后约 5 s 收到波，DNP 台站在约 72 s 后收到波。用 v_c 和 v_m 分别表示地壳和地幔中的波速。

- A.1: $T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}$ 。
- A.2: $p_e = \frac{RT_e}{v_e}$ 。
- A.3: $u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}$ 。
- B.1: $v_c \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}$ 。
- B.2: $t_{\text{direct}} \simeq 92.5 \text{ s}$, $t_{\text{reflected}} \simeq 92.8 \text{ s}$, 按图的精度，两者均约为 93 s。
- B.3: $v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}$ 。
- B.4: $X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2}$, 假设 $a > 0$ 且 $0 < p v_0 < 1$ 。
- B.5: $T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}$, $z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}$ 。
- B.6: 直接离散化得到 $T \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}$ 。这一分层求和结果与题给的 500 km 水平距离在几何上不一致，下文将作解释。
- C.1: $U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2$ 。
- C.2: $c = C \sqrt{gd}$, 其中 C 为无量纲因子；线性浅水波理论给出 $C = 1$ 。
- C.3: $A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}$ 。

解答

A.1 — 平衡温度

在快速混合过程中，认为与外界的热交换以及边界功均可忽略。忽略题中指定的潜热，并将热容视为常数，由内能守恒可得

$$m_m c_{Vm} (T_e - T_m) + m_w c_{Vw} (T_e - T_w) = 0.$$

因此

$$T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

这是以两部分物质的热容为权重，对初始温度求得的加权平均值。

A.2 — 平衡压强

对于 n 摩尔理想气体混合物，

$$p_e V = nRT_e.$$

由于其摩尔体积为 $v_e = V/n$,

$$p_e = \frac{RT_e}{v_e} = \frac{R}{v_e} \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

这里 R 为普适气体常数。

A.3 — 喷发速度

按题意，假设速度仅取决于 p, m, V 。令

$$u = \kappa p^\alpha m^\beta V^\gamma.$$

利用

$$[p] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [m] = M, \quad [V] = L^3,$$

量纲一致性要求

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + 3\gamma = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

因此

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

从而

$$u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$$

等价地， $u = \kappa \sqrt{p/\rho_{\text{mix}}}$ ，其中 $\rho_{\text{mix}} = m/V$ 。量纲分析无法确定 κ 。

B.1 — 地壳中的 P 波速度

设震源深度为 $z_s = 15$ km。到 YOGI 的水平距离为 22.5 km，因此震源到台站的直线距离为

$$s_Y = \sqrt{22.5^2 + 15^2} = 27.04 \text{ km}.$$

图 2 中首次可见的偏离基线发生在 UTC 时间约 22:54:05。相对于地震发生时间 22:54:00，可得

$$t_Y \simeq 5 \text{ s}.$$

所以

$$v_c = \frac{s_Y}{t_Y} \simeq \frac{27.04}{5} \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$$

以下数值计算在中间步骤中保留 5.4083 km s^{-1} ，尽管图的精度并不足以支持如此多的有效数字。

B.2 — 到达 DNP 的直达波和反射波的传播时间

将震源到 DNP 的水平距离记为 $X = 500$ km，地壳厚度记为 $H = 30$ km。

对于直达波，

$$s_{\text{direct}} = \sqrt{X^2 + z_s^2},$$

所以

$$t_{\text{direct}} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_c} \simeq 92.5 \text{ s}.$$

对于水平地壳—地幔界面上的反射，作震源关于平面 $z = H$ 的镜像。其像的深度为

$$z_{\text{image}} = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

将反射射线展开，便得到从该像点到 DNP 的直线。因此，

$$s_{\text{reflected}} = \sqrt{X^2 + (2H - z_s)^2},$$

从而

$$t_{\text{reflected}} = \frac{\sqrt{500^2 + 45^2}}{v_c} \simeq 92.8 \text{ s}.$$

两种传播时间都约为 93 s；计算所得的时间差约为 0.33 s。

B.3 — 地幔中的 P 波速度

图 3 中首次偏离平直基线的时刻约为 UTC 时间 22:55:12，因此

$$t_D \simeq 72 \text{ s}.$$

这一到时早于上文计算的地壳中直达波和反射波的到时。我们将其认定为沿地幔界面传播并向地壳中辐射的临界折射波。

设 θ_c 为相对于竖直方向测量的临界角。由斯涅尔定律可得

$$\frac{\sin \theta_c}{v_c} = \frac{1}{v_m}, \quad \sin \theta_c = \frac{v_c}{v_m}.$$

地壳中的下行段跨越深度 $H - z_s$ ，上行段跨越深度 H 。两段竖直位移的大小之和为

$$K = (H - z_s) + H = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

因此，它们的总长度和水平投影之和为

$$s_{\text{crust}} = \frac{K}{\cos \theta_c}, \quad X_{\text{crust}} = K \tan \theta_c.$$

沿地幔界面传播的距离为

$$X_{\text{mantle}} = X - K \tan \theta_c.$$

于是

$$t_D = \frac{K}{v_c \cos \theta_c} + \frac{X - K \tan \theta_c}{v_m}.$$

利用 $\sin \theta_c = v_c/v_m$ ，可将其简化为

$$t_D = \frac{X}{v_m} + \frac{K}{v_c} \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v_m^2}}.$$

代入从图中读取的数值，

$$72 = \frac{500}{v_m} + \frac{45}{5.4083} \sqrt{1 - \left(\frac{5.4083}{v_m} \right)^2},$$

其中距离以千米计，速度以千米每秒计。解得

$$v_m \simeq 7.554 \text{ km s}^{-1},$$

或者，按适当精度表示为

$$\boxed{v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}}.$$

作为检验， $\theta_c \simeq 45.7^\circ$ ，地幔段长约 454 km。地壳中的两段共耗时约 11.9 s，地幔段耗时约 60.1 s。

B.4 — 速度连续变化时的距离

取 z 轴竖直向下为正， x 轴沿水平方向。各水平薄层之间的斯涅尔定律表明

$$p = \frac{\sin \theta(z)}{v(z)}$$

沿同一条射线保持不变。因此

$$\sin \theta(z) = pv(z), \quad \cos \theta(z) = \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}.$$

在下行段，

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta(z) = \frac{pv(z)}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

对于 $a > 0$ 的介质中返回地表的射线，最深点位于射线变为水平的位置：

$$pv(z_t) = 1.$$

由于 $v(z) = v_0 + az$,

$$\boxed{z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}}.$$

将震源和接收点均近似视为位于地表时，下行部分与上行部分对称。水平距离为

$$X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}} dz.$$

令 $u = p(v_0 + az)$ ，则 $du = pa dz$ 。于是

$$X = \frac{2}{ap} \int_{pv_0}^1 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

由于原函数为 $-\sqrt{1 - u^2}$,

$$\boxed{X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{p^2} - v_0^2}}.$$

返回地表的射线解要求 $0 < pv_0 < 1$ 。

B.5 — 传播时间积分

长度为 ds 的射线段所需时间为

$$dt = \frac{ds}{v(z)}.$$

由于 $|dz| = ds \cos \theta(z)$,

$$dt = \frac{|dz|}{v(z)\sqrt{1-p^2v(z)^2}}.$$

计入下行段和上行段，得到

$$T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z)\sqrt{1-p^2v(z)^2}}.$$

对于速度随深度线性变化的情况，此式为

$$T = 2 \int_0^{(p^{-1}-v_0)/a} \frac{dz}{(v_0 + az)\sqrt{1-p^2(v_0 + az)^2}}.$$

转向点处的奇点是可积的。计算该积分还可得到

$$T = \frac{2}{a} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-p^2v_0^2}}{pv_0} \right).$$

减去 pX ，可得到一种等价形式，便于考察 B.6 中的数值近似：

$$\begin{aligned} T - pX &= 2 \int_0^{z_t} \left[\frac{1}{v\sqrt{1-p^2v^2}} - \frac{p^2v}{\sqrt{1-p^2v^2}} \right] dz \\ &= 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz. \end{aligned}$$

因此，对于几何关系自洽的射线，

$$T = pX + 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz.$$

B.6 — 三层近似

沿用 B.4–B.5 中震源位于地表的近似，将第一个传播时间积分离散化：

$$T \approx 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i}{v_i \sqrt{1-p^2v_i^2}}.$$

因子 2 计入了下行段和上行段各穿过每一层一次。

严格使用题中印出的数值，得到：

层 i	pv_i	下行与上行两段的时间贡献 $\frac{2\delta z_i}{v_i \sqrt{1-p^2v_i^2}}$
1	0.95095	5.833 s
2	0.99671	31.863 s
3	0.99957	146.366 s

因此，直接进行分层数值积分可得

$$T \approx 184.06 \text{ s} \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$$

将这一数值解释为到达 DNP 的传播时间时，存在一致性方面的限制。同一条离散射线的水平距离应为

$$X_{\text{layers}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i p v_i}{\sqrt{1 - p^2 v_i^2}} \simeq 1280.9 \text{ km},$$

这与 500 km 相差很大。

如果改为将题给的 500 km 水平距离代入 B.5 的第二种形式，并近似计算其中的积分，则得到形式上的估计值

$$\begin{aligned} T &\approx p(500) + 2 \sum_{i=1}^3 \delta z_i \sqrt{\frac{1}{v_i^2} - p^2} \\ &= 71.5 + 0.8934 \\ &\approx 72.39 \text{ s}. \end{aligned}$$

连续介质中的这两个公式是等价的，但这些粗略近似未能保持它们所要求的距离关系。因此，184 s 是直接对 layers 传播时间求和的结果；72.4 s 是固定水平距离下的估计值。对于给定参数，它们不可能同时描述同一条严格按三层模型传播的射线。

C.1 — 抬升水体的势能

设被抬升的长方体水体的水平面积为

$$S = \frac{\lambda L}{2}.$$

以未受扰动的海面为重力势能零点，高度 z 处厚度为 dz 的水平薄层质量为 $\rho S dz$ 。因此，

$$U = \int_0^h \rho S g z dz = \frac{1}{2} \rho S g h^2.$$

所以

$$U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$$

等价地，原海面以上的水体质量为 $\rho S h$ ，其质心位于高度 $h/2$ 处。

C.2 — 海啸速度

采用浅水、小振幅近似

$$\lambda \gg d, \quad h \ll d.$$

此时流体的水平速度在整个水深范围内近似均匀，竖直方向上的压强分布近似为静水压分布。

设 $\eta(x, t)$ 为水面的位移， $u(x, t)$ 为流体的水平速度。将水体积守恒方程在水深 d 附近线性化，得到

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

水平压强梯度为 $\rho g \partial \eta / \partial x$ 。因此由牛顿第二定律得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

对第一个方程关于时间求导，并代入第二个方程，

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

这是波动方程，因此

$$c = \sqrt{gd}.$$

按题目要求的精确程度，

$$c = C\sqrt{gd},$$

其中 C 为无量纲因子；上述线性浅水波假设给出 $C = 1$ 。密度同时作为因子出现在惯性项和重力回复力项中，因此相互约去。

C.3 — 水深变化时的振幅

假设水深缓慢变化，反射和耗散可忽略，且波前宽度保持不变。由于 $L \gg \lambda$ ，可将该波在局部视为平面波。

对于振幅为 A 的正弦水面位移，

$$\eta = A \cos(kx - \omega t), \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{A^2}{2}.$$

单位水平面积的平均重力势能为

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

对于行进的浅水波，由连续性方程可得

$$u = \frac{c}{d} \eta.$$

因此，其单位水平面积的平均动能为

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{\rho c^2 A^2}{4d} = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

所以总平均能量密度为

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

浅水波没有色散，因此其群速度等于 $c = \sqrt{gd}$ 。单位波前宽度的能流守恒给出

$$\bar{\mathcal{E}} c = \text{常数},$$

即

$$A^2 \sqrt{d} = \text{常数}.$$

利用深度 d_0 处的参考振幅 A_0 ，

$$A^2 \sqrt{d} = A_0^2 \sqrt{d_0}.$$

因此

$$A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}.$$

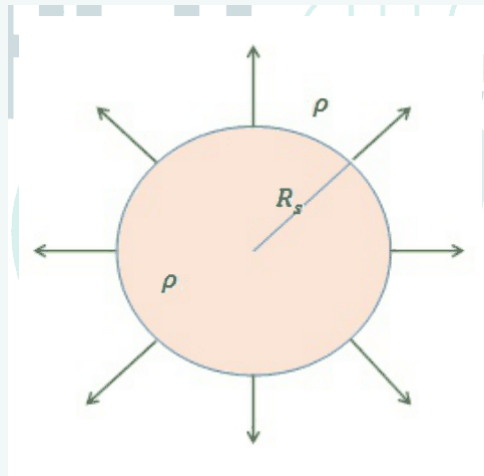
这就是格林定律。其适用条件是振幅相对于水深很小，且水深变化足够缓慢；它不能描述波最终发生的破碎。

解答已与官方解答核对。

题目 3：宇宙暴胀

由于从地球上观测到的星系相对运动，某个星系的可见光谱波长会偏离其原始波长，这称为电磁多普勒效应。对于一群星系，人们预期波长偏移应呈随机分布：有些为正（红移），有些为负（蓝移）。然而，观测表明，除附近的一群星系外，所有星系都发生了红移。即使在宇宙中的其他位置进行观测，这一结论也应成立。因此，我们的宇宙必定正在膨胀。另一方面，在超过 100 Mpc 的尺度上，可以忽略宇宙的局部不规则性，其中 $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ 光年}$ 。在大尺度上取平均后，星系的成团分布变得越来越各向同性（与方向无关）且均匀（与位置无关）。因此，我们可以将宇宙视为质量密度为 ρ 的均匀物质，并认为它正在膨胀。

A. 宇宙的膨胀



作为宇宙的一个简单模型，我们考虑一个正在膨胀的均匀密度球体，它嵌在一个密度相同、体积大得多的球体介质中。设在某一时刻，较小球体的半径为 R_s 。为了描述球体的膨胀，可以用尺度因子 $a(t)$ 表示半径 $R(t)$ 随时间的变化，即 $R(t) = a(t)R_s$ 。

根据这一宇宙模型，利用牛顿万有引力定律求球体边界上一个质量元的速度，可以得到一组弗里德曼方程：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

其中， k 是一个无量纲常数， c 是光速。

部分	问题	分值
A.1	求方程 (1) 中的常数 A_1 。	1.3 分

以上讨论是非相对论性的。但实际上，只要将 $\rho(t)c^2$ 重新解释为总能量密度（不包括引力势能），就可以将其推广到相对论性系统。对于这一相对论性系统，利用绝热系统的热力学第一定律可导出第二个弗里德曼方程：

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

其中， p 表示球体所受的压强。

部分	问题	分值
A.2	求方程 (2) 中的常数 A_2 。	0.9 分

要求解方程 (1) 和 (2)，应假设一个关系 $p = p(\rho)$ ，例如 $p(t)/c^2 = w\rho(t)$ ，其中 w 是常数。另外， $H = \dot{a}/a$ 称为哈勃参数。各参数的当前值通常用下标 0 表示，例如 t_0, ρ_0, H_0, a_0 等。为简单起见，取 $a_0 = 1$ 。

人们认为，宇宙始于一次称为“大爆炸”的剧烈爆炸，它产生了由相对论性粒子组成的辐射。在膨胀过程中，宇宙逐渐冷却，其中的粒子变为非相对论性粒子。然而，近期观测表明，当前宇宙由宇宙学常数的能量密度主导。对于光子，随着宇宙膨胀，其波长按与尺度因子成正比的方式增大。

部分	问题	分值
A.3	分别求以下三种情况中 w 的值：(i) 仅充满辐射（即光子能量）的宇宙，(ii) 仅充满非相对论性物质的宇宙，以及 (iii) 能量密度恒定的宇宙。	1.2 分
A.4	在 $k = 0$ 的情况下，分别求 A.3 中 (i) 至 (iii) 各种情况的 $a(t)$ 。对情况 (i) 和 (ii)，使用初始条件 $a(t = 0) = 0$ ；对情况 (iii)，使用条件 $a_0 = 1$ 。	1.2 分

方程 (1) 中的常数 k 对应于宇宙空间几何的分类。对于正曲率宇宙（闭合），其值为 $k = +1$ ；对于平直宇宙（无限），其值为 $k = 0$ ；对于负曲率宇宙（开放、无限），其值为 $k = -1$ 。定义密度比 $\Omega = \rho/\rho_c$ ，其中 $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ 是临界能量密度。注意， A_1 由问题 A.1 求得。

部分	问题	分值
A.5	用 Ω 、 H 、 a 和 R_0 表示方程 (1) 中的 k 。	0.1 分
A.6	分别求与 $k = +1$ 、 $k = 0$ 和 $k = -1$ 对应的 Ω 的取值范围。	0.3 分

B. 引入暴胀阶段的动机及其一般条件

宇宙微波背景辐射（CMB）的观测表明，当前宇宙近似平直。问题在于，如果确实如此，当前宇宙就应起源于一个完全平直的早期宇宙，否则任何对平直性的偏离最终都会随时间增长，破坏当前的平直性。

部分	问题	分值
B.1	对于由辐射或非相对论性物质主导的宇宙（见问题 A.3），求 $(\Omega(t) - 1)$ 随时间的变化关系。	0.5 分

为解决这一问题，宇宙应在其历史的某个早期时刻经历一个由恒定能量密度主导的时期，从而产生指数膨胀，这一时期称为暴胀期。

部分	问题	分值
B.2	对于这一恒定能量密度主导的时期，求 $(\Omega(t) - 1)$ 随时间的变化关系。假设 $(\Omega(t) - 1) \ll 1$ 。	0.3 分
B.3	证明，暴胀条件意味着以下几个条件成立：负压强、加速膨胀 ($\ddot{a} > 0$)，以及哈勃半径减小 ($d(aH)^{-1}/dt < 0$)。	0.9 分
B.4	证明，哈勃半径减小的条件可以用参数 $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ 表示为 $\epsilon < 1$ 。	0.2 分

只要 $\epsilon < 1$ ，暴胀就会持续；当 $\epsilon = 1$ 时，暴胀结束。可以定义 e 折叠数 N ，使得 $dN = d \ln a = H dt$ ，并在暴胀结束时取 $N = 0$ 。

C. 由均匀分布的物质产生的暴胀

能够产生暴胀期的一个简单物理系统的例子，是由均匀分布的物质主导的宇宙。这种物质称为暴胀子，可用函数 $\phi(t)$ 描述。

这种物质的动力学方程可表示为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

其中， $V = V(\phi)$ 是势函数， $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ 。哈勃参数满足

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

其中， M_{pl} 是一个常数，称为约化普朗克质量。当势能 V 相对于动能 $\dot{\phi}^2/2$ 占主导地位并持续足够长的时间，使方程 (3) 中的 $\ddot{\phi}$ 项可以忽略时，就会出现暴胀阶段。这一条件称为慢滚近似。

ϵ 和 $\eta_V = \delta + \epsilon$ 称为“慢滚”参数，其中 $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ 。

部分	问题	分值
C.1	用势 $V(\phi)$ 及其一阶、二阶导数 (V' 和 V'') 估算参数 ϵ 、参数 η_V 以及 $dN/d\phi$ 。	1.7 分

D. 简单势下的暴胀

任何暴胀模型的预言都应与以下来自 CMB 的观测约束进行比较： $n_s = 0.968 \pm 0.006$ 和 $r < 0.12$ 。对于由一种占主导地位的物质产生的暴胀模型，其中的 $r = 16\epsilon$ 和 $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ 均在 $\phi = \phi_{start}$ 处取值。假设物质的势具有简单形式 $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ ，其中 n 为任意整数， Λ 为常数。

部分	问题	分值
D.1	计算暴胀结束时的 ϕ_{end} 。	0.5 分
D.2	用 e 折叠数 N 和整数 n 表示 r 和 n_s 。估算使结果最接近 r 和 n_s 观测值的 n 值。计算时取 $N = 60$ 。	0.9 分

题目译自官方英文原文。

答案

以下结果采用量纲一致的临界密度 $\rho_c = H^2/A_1$ 。记 $\Delta = \Omega - 1$ 。对于 D.2，令 $\mathcal{N} = \ln(a_{end}/a_{start}) = -N_{start} > 0$ ；题目要求的 60 个 e 折叠意味着 $\mathcal{N} = 60$ 。

- A.1: $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$ 。
- A.2: $A_2 = 3$ 。
- A.3: $w_{\text{radiation}} = \frac{1}{3}, \quad w_{\text{matter}} = 0, \quad w_{\text{constant density}} = -1$ 。

- **A.4:** 在膨胀分支上,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a(t) = (2H_0 t)^{1/2} = (t/t_0)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad & a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} = (t/t_0)^{2/3}, \\ \text{(iii)} \quad & a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

这里 $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$, 其中 (i) 中有 $H_0 t_0 = 1/2$, (ii) 中为 $2/3$ 。

- **A.5:** $k = (\Omega - 1) \left(\frac{aHR_0}{c} \right)^2$ 。

- **A.6:** $k = +1 : \Omega > 1; \quad k = 0 : \Omega = 1; \quad k = -1 : \Omega < 1$ 。对于非负密度, 最后一个范围为 $0 \leq \Omega < 1$ 。

- **B.1:** 在接近平直的情况下, 取最低阶近似, 相对于参考时刻 t_* ,

$$\Delta(t) \simeq \begin{cases} \Delta_*(t/t_*), & \text{辐射,} \\ \Delta_*(t/t_*)^{2/3}, & \text{非相对论性物质.} \end{cases}$$

- **B.2:** 令 $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$, 则

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

- **B.3:** 恒定密度给出

$$p = -\rho c^2 < 0, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} > 0, \quad \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

更一般地, 加速膨胀要求 $p < -\rho c^2/3$ 。

- **B.4:**

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon < 1.$$

- **C.1:** 在慢滚近似下,

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \simeq M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad \frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{V}{M_{pl}^2 V'}.$$

- **D.1:** 对于 $n > 0$, 在场取正值的分支上,

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

形式上的阈值为 $|\phi| \simeq |n| M_{pl} / \sqrt{2}$ 。在此模型中, 非正的 n 无法给出所假设的慢滚暴胀结束过程。

• D.2:

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

等价地, 按照题目中带符号的约定, 分母为 $n - 4N_{\text{start}}$ 。当 $\mathcal{N} = 60$ 时,

n	r	n_s
1	0.0664	0.9751
2	0.1322	0.9669

若严格要求 $r < 0.12$, 则 $n = 1$ 是最接近观测值的正整数选择。没有任何正整数能同时满足所给的两个观测约束。

解答

A.1

考虑半径为 $R = aR_s$ 的共动球体边界上的一个质量元。根据牛顿球壳定理, 其加速度仅取决于球内包围的质量,

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3.$$

在非相对论性模型中, 这一包围质量保持不变。牛顿运动方程为

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

两边乘以 $\dot{R}$ 并积分, 得到守恒的单位质量机械能

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \mathcal{E}.$$

因此

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\mathcal{E}}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2\mathcal{E}}{a^2 R_s^2}.$$

由于 $\dot{R}/R = \dot{a}/a$, 与式 (1) 比较, 并令 $2\mathcal{E} = -kc^2$, 得到

$$A_1 = \frac{8\pi G}{3}.$$

A.2

设球体的物理体积为

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(aR_s)^3.$$

其总内能为 $U = \rho c^2 \mathcal{V}$ 。绝热系统的热力学第一定律给出

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

因此

$$c^2 \mathcal{V} d\rho + (\rho c^2 + p) d\mathcal{V} = 0.$$

利用 $\dot{\mathcal{V}}/\mathcal{V} = 3\dot{a}/a$,

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

故

$$\boxed{A_2 = 3}.$$

A.3

对于常数 w ，连续性方程变为

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a},$$

因此，利用 $a_0 = 1$ ，

$$\boxed{\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}}.$$

对于辐射，光子数密度按 a^{-3} 减小。每个光子的能量为 hc/λ ，题目给出的波长标度关系 $\lambda \propto a$ 使其能量正比于 a^{-1} 。因此

$$\rho c^2 \propto a^{-4},$$

由此得到

$$3(1+w) = 4, \quad \boxed{w = \frac{1}{3}}.$$

对于非相对论性物质，能量主要来自每个粒子近似不变的静能。粒子数密度按 a^{-3} 减小，因而

$$\rho \propto a^{-3}, \quad \boxed{w = 0}.$$

这就是无压物质近似。

对于恒定能量密度， $\dot{\rho} = 0$ 。在膨胀宇宙中，连续性方程要求

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0,$$

因此

$$\boxed{w = -1}.$$

A.4

对于 $k = 0$ ，

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = H_0^2 a^{-3(1+w)}.$$

选择膨胀分支，

$$\dot{a} = H_0 a^{1-\frac{3}{2}(1+w)}.$$

对于 $w \neq -1$ ，用 $a(0) = 0$ 积分得到

$$a^{\frac{3}{2}(1+w)} = \frac{3}{2}(1+w)H_0 t.$$

于是，对于辐射，

$$\boxed{a(t) = (2H_0 t)^{1/2}}.$$

归一化条件 $a(t_0) = 1$ 意味着 $2H_0 t_0 = 1$ ，因此

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}.$$

对于非相对论性物质,

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}.$$

这里 $3H_0 t_0/2 = 1$, 从而

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}.$$

对于恒定能量密度, $H = H_0$ 为常数。对 $\dot{a}/a = H_0$ 积分, 并施加条件 $a(t_0) = 1$,

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}.$$

A.5

在式 (1) 中令 $k = 0$, 即可确定临界等效质量密度:

$$\rho_c = \frac{H^2}{A_1} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

因此, 题目印出的定义 $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ 在量纲上不一致。相应的临界能量密度为

$$\rho_c c^2 = \frac{H^2 c^2}{A_1}.$$

采用量纲一致的定义,

$$\Omega = \frac{A_1 \rho}{H^2}.$$

将式 (1) 除以 H^2 :

$$1 = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 R_s^2 H^2}.$$

由于 $a_0 = 1$, 当前半径为 $R_0 = R_s$ 。因此

$$k = (\Omega - 1) \frac{a^2 H^2 R_0^2}{c^2}.$$

A.6

A.5 中乘在 $\Omega - 1$ 前的因子为正。因此, k 与 $\Omega - 1$ 同号:

空间曲率	密度比
$k = +1$, 闭合	$\Omega > 1$
$k = 0$, 平直	$\Omega = 1$
$k = -1$, 开放	$\Omega < 1$

当能量密度非负时, 开放宇宙的范围为 $0 \leq \Omega < 1$ 。

B.1

由 A.5,

$$\Delta(t) \equiv \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} = \frac{kc^2}{R_0^2 \dot{a}^2}.$$

这一恒等式是精确的。

为研究对平直性的微小偏离，在最低阶近似下用 A.4 的平直宇宙解计算 $\dot{a}$ 。若

$$a \propto t^\alpha,$$

则

$$\dot{a}^2 \propto t^{2\alpha-2}, \quad \Delta \propto t^{2-2\alpha}.$$

在辐射主导时期， $\alpha = 1/2$ ，所以

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \frac{t}{t_*}.$$

在物质主导时期， $\alpha = 2/3$ ，所以

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3}.$$

因此，在这两个时期中，任何微小但非零的平直性偏离，其大小都会增长。这些幂律关系适用于曲率对膨胀的影响仍只是微小修正的阶段。

B.2

设恒定密度为 ρ_Λ ，并定义

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

对于 $|\Omega - 1| \ll 1$ ，式 (1) 中曲率的贡献很小，因此

$$H \simeq H_\Lambda, \quad a(t) \simeq a_i e^{H_\Lambda(t-t_i)}.$$

将其代入

$$\Delta = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

得到

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

因此，暴胀以指数方式抑制对平直性的偏离。

B.3

对式 (1) 求导，并利用连续性方程：

$$2H\dot{H} = A_1\dot{\rho} + \frac{2kc^2 H}{R_0^2 a^2},$$

所以

$$\dot{H} = -\frac{3A_1}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}.$$

加上式 (1) 给出的 H^2 ，消去曲率项：

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{A_1}{2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

利用 A.1,

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)}.$$

对于正密度, 加速膨胀要求

$$\boxed{p < -\frac{1}{3}\rho c^2},$$

这尤其要求压强为负。

对于这里考虑的恒定密度时期, A.3 给出 $p = -\rho c^2$ 。因此

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0.$$

最后, $aH = \dot{a}$, 所以

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0.$$

这就证明了题目要求的全部三个性质。

这一条件中出现的半径是共动哈勃半径 $c/(aH)$; 常数 c 不影响导数的符号。

B.4

直接求导得到

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2 H^2} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right).$$

由于 $\epsilon = -\dot{H}/H^2$,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a}}.$$

因为 $a > 0$, 半径减小当且仅当

$$\boxed{\epsilon < 1}.$$

等价地,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

C.1

首先对式 (4) 求导:

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} (\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}).$$

方程 (3) 给出 $\ddot{\phi} + V' = -3H\dot{\phi}$, 所以

$$2H\dot{H} = -\frac{H\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}.$$

因此

$$\boxed{\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}}, \quad \epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2 H^2}.$$

慢滚假设给出

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'.$$

将这些关系代入 ϵ ,

$$\epsilon \simeq \frac{V'^2}{18M_{pl}^2 H^4} = \boxed{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2}.$$

为求 η_V , 对慢滚场方程求导:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''\dot{\phi}.$$

两边除以 $3H^2\dot{\phi}$,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{3H^2}.$$

左边为 $-\epsilon - \delta$ 。因此

$$\eta_V = \delta + \epsilon \simeq \frac{V''}{3H^2} = \boxed{M_{pl}^2 \frac{V''}{V}}.$$

最后, 利用题目中的定义 $dN = Hdt$,

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H^2}{V'} = \boxed{-\frac{V}{M_{pl}^2 V'}}.$$

这一表达式适用于场单调滚动的演化轨迹。

D.1

对于

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n,$$

导数与势的比值为

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\phi}, \quad \frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\phi^2}.$$

因此,

$$\epsilon \simeq \frac{n^2 M_{pl}^2}{2\phi^2}.$$

将这一慢滚表达式外推至结束条件 $\epsilon = 1$, 得到

$$|\phi_{\text{end}}| \simeq \frac{|n|}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

对于 $n > 0$, 取场为正值的分支。场向较小的 ϕ 滚动, 因此 ϵ 增大, 并在下式所示的场值处达到 1:

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

场与 M_{pl} 具有相同的单位。

题目允许 n 为任意整数，但所假设的暴胀退出过程限制了相关情况：

- 对于 $n = 0$ ，势为常数，且 $\epsilon \simeq 0$ ；这一模型无法使宇宙退出慢滚暴胀。
- 对于 $n < 0$ 且 $\phi > 0$ ，有 $V' < 0$ ，因此 $\dot{\phi} \simeq -V'/(3H) > 0$ 。于是 $\epsilon \propto \phi^{-2}$ 减小。形式上的 $\epsilon = 1$ 阈值对应于进入暴胀。

暴胀结束时的场值只是估算值，因为当 ϵ 接近 1 时，慢滚近似不再是误差可控的近似。

D.2

对于单项式势，C.1 给出

$$\frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}.$$

从暴胀结束时的 $N = 0$ 开始积分，

$$N(\phi) \simeq -\frac{\phi^2 - \phi_{\text{end}}^2}{2nM_{pl}^2}.$$

对于 $n > 0$ ，初始场值大于最终场值，因此题目中的 N_{start} 为负。定义正的持续量

$$\mathcal{N} \equiv -N_{\text{start}} = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}}.$$

则

$$\phi_{\text{start}}^2 \simeq \phi_{\text{end}}^2 + 2nM_{pl}^2 \mathcal{N} = \frac{n}{2}(4\mathcal{N} + n)M_{pl}^2.$$

因此，开始时的慢滚参数为

$$\epsilon_{\text{start}} \simeq \frac{n}{4\mathcal{N} + n}, \quad \eta_{V,\text{start}} \simeq \frac{2(n-1)}{4\mathcal{N} + n}.$$

于是

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}$$

以及

$$n_s \simeq 1 + \frac{4(n-1) - 6n}{4\mathcal{N} + n} = 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

按照题目中带符号的约定，这些表达式变为

$$r \simeq \frac{16n}{n - 4N_{\text{start}}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{n - 4N_{\text{start}}}.$$

对于 $\mathcal{N} \gg n$ ，熟知的最低阶形式为

$$r \simeq \frac{4n}{\mathcal{N}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{n+2}{2\mathcal{N}}.$$

将题目要求的 $N = 60$ 理解为正的持续量 $\mathcal{N} = 60$ ，张量约束给出

$$\frac{16n}{240+n} < 0.12 \implies n < \frac{28.8}{15.88} \simeq 1.814.$$

因此，满足这一约束的唯一正整数为 $n = 1$ 。

数值预言如下，所有数值均无量纲：

n	r	n_s	与所给约束的比较
1	0.0664	0.9751	满足 $r < 0.12$ ； n_s 略高于 0.974
2	0.1322	0.9669	满足所给的 n_s 区间；超出 r 的上限
3	0.1975	0.9588	均不满足所给的两个约束

因此

$$n = 1 \quad \text{若严格要求满足张量上限.}$$

其预言的谱指数比所给区间的上边界约高 0.0011。整数 $n = 2$ 对应的谱指数更接近中心值，但违反了张量约束。**没有任何正整数能同时满足所给的两个约束。**

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。