

IPhO 2017

Teorik sorular ve çözümler · Yogyakarta, Endonezya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2017/

Soru 1: Karanlık Madde

Karanlık maddenin varlığına ilişkin ilk bilimsel çıkarım, Fritz Zwicky tarafından, yaklaşık bin galaksiden oluşan Coma galaksi kümesinin dinamiğine ilişkin gözlemlerine dayanılarak yapılmıştır. Zwicky, galaksi kümesinin kütlesini tahmin etmek için virial teoremini kullanmıştır. Gezegenin Güneş'in çevresinde dairesel bir yörüngede dolandığı basit bir Güneş-gezegen sisteminde virial teoremi, gezegenin kinetik enerjisi ile kütleçekimsel potansiyel enerjisi arasında kesin bir bağıntı olduğunu belirtir. Daha genel olarak, bir etkileşimle birbirine bağlı çok sayıda parçacıktan oluşan bir sistem için virial teoremi, toplam kinetik enerjinin zaman ortalaması ile toplam potansiyel enerjinin zaman ortalamasını ilişkilendirir.

Zwicky, 1933 yılında Coma galaksi kümesinin kenarına yakın galaksilerin hızlarına ilişkin gözlemlerine dayanarak, kümenin görsel olarak gözlemlenen (yani galaksilerden) daha fazla kütleye sahip olduğunu tahmin etmiştir. Gözlemlenebilir maddenin (galaksilerin) kütleçekimsel çekimi, galaksilerin hızlarını açıklamak için çok küçüktü. Dolayısıyla, bu kadar büyük hızları açıklayan gizli bir kütle bulunması gerekiyordu. Bu gizli kütle, karanlık madde kütlesidir. Aşağıda, her bir galaksinin kütlesinin, görünür kütlesi ile o galaksiyle birlikte hareket eden karanlık maddenin kütlesinin toplamı olduğunu ve karanlık maddenin görünür maddeyle yalnızca kütleçekimsel olarak etkileştiğini varsayın.

A. Galaksi Kümesi

Çok sayıda, N adet galaksiden ve karanlık maddeden oluşan, bunların R yarıçaplı bir küre içinde homojen olarak dağıldığı ve toplam kütlesi (galaksiler ve karanlık madde) M olan bir galaksi kümesini ele alın. Bir galaksinin ortalama toplam kütlesinin (görünür madde ve karanlık madde) m olduğunu varsayın.

A.1	Kümedeki maddenin sürekli bir dağılıma sahip olduğunu varsayarak, kümenin toplam kütleçekimsel potansiyel enerjisini M ve R cinsinden bulun.	1.0 puan
-----	--	----------

Kozmolojik genişleme nedeniyle, uzaktaki her cisim Dünya'daki bir gözlemciden, gözlemci ile cisim arasındaki uzaklığa bağlı bir süratle uzaklaşır. Galaksi kümesindeki i . galakside bulunan IA tipi bir süpernovanın belirli bir Lyman (hidrojenin bir salma tayf çizgisi) frekansı, $i = 1, \dots, N$ olmak üzere f_i olarak gözlemlenirken, buna karşılık gelen aynı Lyman frekansı Dünya'da f_0 'dir.

A.2	Galaksi kümesinin bir bütün olarak Dünya'dan uzaklaşmasının ortalama sürati V_{cr} 'yi, f_i ($i = 1, \dots, N$. olmak üzere), f_0 ve N cinsinden belirleyin. Bir galaksinin süratının ışık hızı c 'ye göre çok küçük olduğunu dikkate alın.	0.5 puan
A.3	Galaksilerin küme merkezine göre hızlarının izotropik (her yönde aynı) olduğunu varsayarak, galaksilerin küme merkezine göre karekök ortalama kare sürati v_{rms} 'yi, N , f_i (	1.5 puan

$i = 1, \dots, N$ olmak üzere) ve f_0 cinsinden belirleyin. Bu sonuçtan yararlanarak bir galaksinin küme merkezine göre ortalama kinetik enerjisini v_{rms} ve m cinsinden belirleyin.

Kümenin toplam kütlesini bulmak için virial teoremi kullanılabilir. Bu teorem, korunumlu kuvvetleriyle birbirine bağlı parçacıklardan oluşan bir sistem için

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

bağıntısının geçerli olduğunu belirtir. Burada $\langle K \rangle_t$ toplam kinetik enerjinin zaman ortalaması, $\langle U \rangle_t$ toplam potansiyel enerjinin zaman ortalaması ve γ bir sabittir. Bu teorem, kendi etkileşimiyle bağlı parçacıklardan oluşan bir sistemde her parçacığın konum ve momentum büyüklüklerinin sonlu olduğu, dolayısıyla aşağıdaki niceliğin de sonlu olduğu varsayılarak türetilebilir:

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

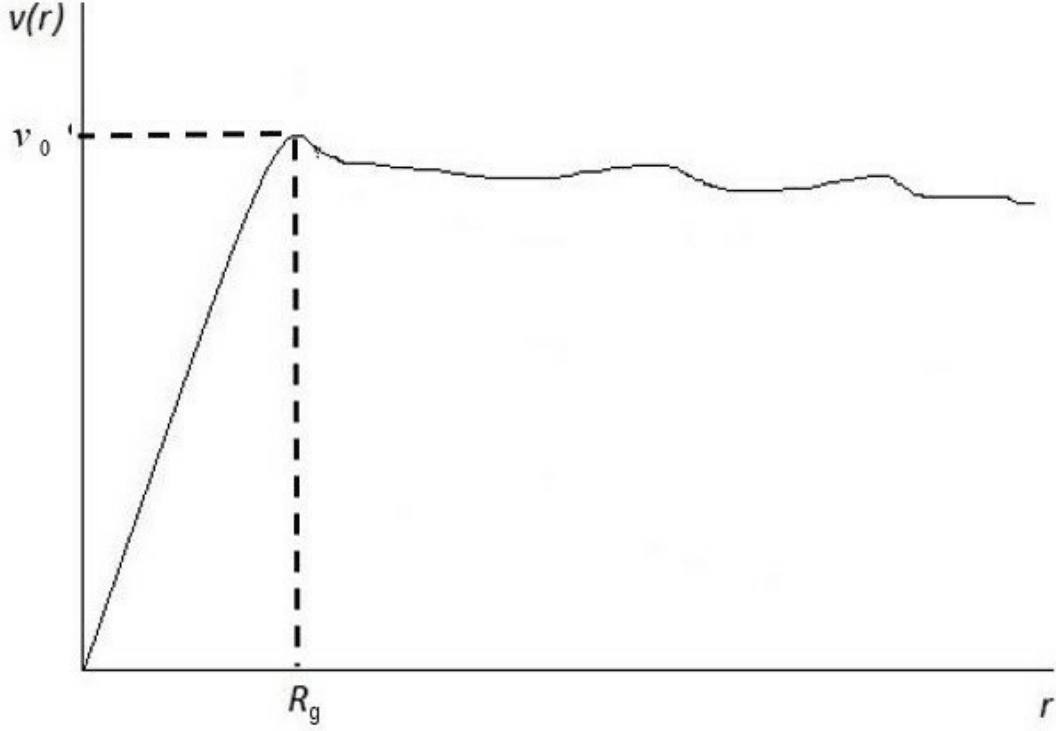
A.4	$d\Gamma/dt$ 'nin uzun bir zaman aralığı üzerinden alınan zaman ortalamasının sıfır olduğu, $\langle d\Gamma/dt \rangle_t = 0$, bilgisini kullanarak, kütleçekimsel etkileşim durumu için yukarıdaki virial teoremindeki γ 'yı belirleyin. (İpucu: Γ 'daki toplamı küçük ve sonlu sayıda galaksi için ele alarak soruyu çözmeyi deneyin.)	1.7 puan
A.5	Önceki sonuçlardan yararlanarak kümenin toplam karanlık madde kütlesini N , m_g , R ve v_{rms} cinsinden belirleyin; burada m_g , bir galaksinin ortalama toplam görünür kütlesidir. Karanlık maddenin karekök ortalama kare süratinin galaksilerinkine aynı olduğunu dikkate alın.	0.5 puan

B. Bir Galaksideki Karanlık Madde

Karanlık madde, bir galaksinin içinde ve çevresinde de bulunur. Görünür sınırının yarıçapı R_g olan küresel bir galaksiyi ele alın (bu, çok sayıda yıldızın hâlâ görülebildiği yaklaşık en dış uzaklıktır; ancak çok az sayıda yıldızın R_g 'nin ötesindeki bölgede de dağılmış olabileceğini dikkate alın). Galaksideki yıldızların ortalama kütlesi m_s olan noktasal parçacıklar olduğunu varsayın. Galakside n sayı yoğunluğuyla homojen olarak dağılmış yıldızların dairesel yörüngelerde hareket ettiği varsayılmaktadır.

B.1	Galaksi yalnızca yıldızlardan oluşuyorsa, bir yıldızın sürati $v(r)$ 'yi galaksi merkezine olan uzaklığının fonksiyonu olarak bulun ve $r < R_g$ ile $r \geq R_g$ için $v(r)$ 'nin grafiğini kabaca çizin.	0.8 puan
-----	--	-------------

Karanlık maddenin varlığı, gözlemlerden elde edilen $v(r)$ 'nin grafiği olan galaksi dönme eğrisinden çıkarılabilir. Aşağıdaki şekil, galaksi dönme eğrisinin yaygın bir biçimini göstermektedir. Basitleştirmek için $v(r)$ 'nin $r \leq R_g$ için doğrusal bir fonksiyon ve $r > R_g$ için v_0 sabiti olduğunu varsayabilirsiniz.



Şek. 1 Bir galaksideki galaksi dönme eğrisinin grafiği.

B.2	Galaksinin R_g yarıçaplı küre içinde kalan kısmının toplam kütlesi m_R 'yi v_0 ve R_g cinsinden bulun.	0.5 puan
-----	--	-------------

B.2.'deki şekil ile B.1'de elde edilen grafik arasındaki uyumsuzluk, karanlık maddenin varlığına işaret eder.

B.3	$r < R_g$ ve $r \geq R_g$ için karanlık maddenin kütle yoğunluğunu r , R_g , v_0 , n ve m_s 'nin fonksiyonu olarak belirleyin.	1.5 puan
-----	--	-------------

C. Yıldızlararası Gaz ve Karanlık Madde

Şimdi kütesinin büyük bölümünü yıldızlararası gaz ve karanlık maddenin oluşturduğu genç bir galaksiyi ele alın (yıldızların kütesini ihmal edin). Yıldızlararası gazın, kütlesi m_p olan özdeş parçacıklardan oluştuğu varsayılmaktadır. Gazın sayı yoğunluğu $n(r)$ ve sıcaklığı $T(r)$, galaksinin merkezinden olan uzaklık r 'ye bağlıdır. Gazda birçok fiziksel süreç gerçekleşmesine rağmen, gazın kendi basıncı ve galaksinin kütleçekimsel çekimi nedeniyle hidrostatik dengede olduğunu varsayabiliriz.

C.1	Gazın basınç gradyanı dP/dr 'yi $m'(r)$, r ve $n(r)$ cinsinden bulun. Burada $m'(r)$, galaksi merkezini merkez alan r yarıçaplı bir küre içindeki gazın ve karanlık maddenin toplam kütlesidir.	0.5 puan
C.2	Yıldızlararası gazın ideal gaz olduğunu varsayarak $m'(r)$ 'yi $n(r)$, $T(r)$ ve bunların r 'ye göre türevleri cinsinden bulun.	0.5 puan

Şimdi basitlik açısından gazın T_0 sıcaklığında izotermal bir dağılıma sahip olduğunu ve yıldızlararası gazın sayı yoğunluğunun

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

ile verildiğini varsayın; burada α ve β birer sabittir.

C.3	Galaksinin içindeki karanlık maddenin kütle yoğunluğunu r 'nin fonksiyonu olarak bulun.	1.0 puan
-----	---	----------

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Şu tanımı yapalım:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

Burada G kütleçekim sabiti, k_B ise Boltzmann sabitidir. Doppler sonuçlarında süratin c 'ye oranının birinci mertebesine kadar olan terimler tutulmuştur.

• A.1

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

• A.2

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

• A.3

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}, \quad \langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

• A.4

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

• A.5

$$M_{DM} = \frac{5Rv_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

• B.1

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Grafik, başlangıç noktasından R_g 'deki maksimumuna kadar doğrusal olarak yükselir, ardından $r^{-1/2}$ ile orantılı olarak azalarak sifıra yaklaşır.

• B.2

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

• B.3

$$\rho_{DM}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - n m_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

• C.1

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G m'(r) m_p n(r)}{r^2}.$$

• C.2

$$m'(r) = - \frac{k_B r^2}{G m_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right].$$

• C.3

$$\rho_{DM}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

Çözüm

A.1

Kütlenin tamamı sonsuzda dağılmış durumdayken kütleçekimsel potansiyel enerjiyi sıfır seçelim. Homojen kütle yoğunluğu ve r yarıçapı içinde kalan kütle şöyledir:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}.$$

Sonsuzdan art arda ince küresel kabuklar getirerek küreyi oluşturalım. Kütesi

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr$$

olan bir kabuğun, daha önce bir araya getirilmiş iç kütleyle etkileşim enerjisi şöyledir:

$$dU = -\frac{GM(r)}{r} dM.$$

Bu oluşturma yöntemi, her ikili etkileşimi bir kez sayar. Dolayısıyla,

$$U = -\int_0^R \frac{G}{r} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) \left(\frac{3Mr^2}{R^3} \right) dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{R^5}{5}.$$

Böylece,

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

A.2

u_i , i galaksisinin Dünya'ya göre görüş doğrultusundaki hızı olsun; uzaklaşma yönünü pozitif alalım.

$u_i \ll c$ için birinci mertebeden Doppler bağıntısı

$$f_i \simeq f_0 \left(1 - \frac{u_i}{c} \right),$$

olduğundan,

$$u_i \simeq c \frac{f_0 - f_i}{f_0}.$$

Kümenin durgun olduğu referans sisteminde iç hızların ortalaması sıfırdır. Bu nedenle kümenin uzaklaşma sürati, ölçülen bu görüş doğrultusundaki hızların ortalamasıdır:

$$V_{cr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \simeq \frac{c}{Nf_0} \sum_{i=1}^N (f_0 - f_i).$$

Sonuç olarak,

$$V_{cr} \simeq c \left(1 - \frac{1}{Nf_0} \sum_{i=1}^N f_i \right) = c \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0} \right).$$

A.3

i galaksisinin küme merkezine göre hızının görüş doğrultusundaki bileşeni şöyledir:

$$w_i = u_i - V_{cr} \simeq -\frac{c}{f_0} (f_i - \bar{f}).$$

İzotropik bir hız dağılımında, hızın karesinin ortalaması birbirine dik üç doğrultu arasında eşit olarak paylaşılır:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

z doğrultusu görüş doğrultusu boyunca alındığında,

$$v_{rms}^2 = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3\langle w^2 \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

Böylece,

$$v_{rms} \simeq \frac{c}{f_0} \sqrt{\frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}.$$

Eşdeğer olarak,

$$v_{rms}^2 \simeq \frac{3c^2}{f_0^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \right)^2 \right].$$

Temsilî toplam galaksi kütlesi m kullanıldığında, kümenin durgun olduğu referans sistemindeki ortalama kinetik enerji şöyledir:

$$\langle K_{gal} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2.$$

A.4

Kütle merkezi referans sisteminde çalışalım. Verilen niceliğin türevi alınırsa,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2K.$$

$\vec{F}_{ij}$, j parçacığının i parçacığına uyguladığı kuvvet olsun. Newton'un üçüncü yasası, kuvvet teriminin sırasız çiftler hâlinde gruplanmasına olanak verir:

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i < j} \left(\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij}.$$

Newton kütleçekimi için,

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

Dolayısıyla,

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

burada U , tüm ikili etkileşimlerin toplam kütleçekimsel potansiyel enerjisidir. Buradan,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2K + U.$$

Γ sınırlı kaldığından,

$$\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t + \tau) - \Gamma(t)}{\tau} = 0.$$

Böylece zaman ortalaması alındığında,

$$2\langle K \rangle_t + \langle U \rangle_t = 0, \quad \langle K \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_t.$$

Verilen teoremler karşılaştırıldığında,

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

A.5

Kümeyi durağan virial dengesinde kabul edelim; böylece gözlemlenen makroskopik özellikleri zaman ortalamalarını temsil eder. Karanlık madde ve galaksiler aynı karekök ortalama kare sürata sahip olduğundan, toplam kinetik enerji şöyledir:

$$K = \frac{1}{2} M v_{rms}^2.$$

Virial teoremini A.1 ile birleştirecek,

$$2K = -U \implies M v_{rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}.$$

$M > 0$ için,

$$M = \frac{5R v_{rms}^2}{3G}.$$

Toplam görünür kütle Nm_g 'dir. Bunu toplam kütleden çıkarırsak,

$$M_{DM} = \frac{5R v_{rms}^2}{3G} - Nm_g.$$

B.1

Yıldızların kütle yoğunluğu şöyledir:

$$\rho_* = nm_s.$$

R_g 'nin ötesindeki seyrek yıldızların toplam kütesini ihmal edelim, ancak onları yörüngeleri dış kütleçekim alanını belirlemeye yarayan test parçacıkları olarak ele almaya devam edelim. Bu durumda içeride kalan yıldız kütlesi şöyledir:

$$M_*(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} nm_s r^3, & r < R_g, \\ \frac{4\pi}{3} nm_s R_g^3, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Küresel kabuk teoremine göre, r 'deki kütleçekim ivmesine yalnızca içeride kalan kütle katkıda bulunur. Bu ivmeyi merkezci ivmeye eşitlersek,

$$\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GM_*(r)}{r^2}, \quad v(r)^2 = \frac{GM_*(r)}{r}.$$

Böylece,

$$v(r) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}, & 0 \leq r < R_g, \\ \sqrt{\frac{4\pi G n m_s R_g^3}{3r}}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Grafiği kabaca çizmek için şu tanımlı yapalım:

$$v_g = R_g \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}.$$

Eğri, $(0, 0)$ noktasından (R_g, v_g) noktasına uzanan bir doğru parçasıdır. Süreklidir ve maksimumunu bu noktada alır. R_g 'nin ötesinde,

$$v(r) = v_g \sqrt{\frac{R_g}{r}},$$

bağıntısını izleyerek $v = 0$ yatay asimptotuna doğru azalır.

B.2

$r = R_g$ 'de gözlemlenen dairesel yörünge sürati v_0 'dır. Dairesel yörünge koşulundan,

$$\frac{v_0^2}{R_g} = \frac{Gm_R}{R_g^2}.$$

Dolayısıyla, karanlık madde dâhil içeride kalan toplam kütle şöyledir:

$$m_R = \frac{v_0^2 R_g}{G}.$$

B.3

Dairesel yörüngeler aracılığıyla belirlenen herhangi bir küresel simetrik kütle dağılımı için,

$$M_{\text{enc}}(r) = \frac{rv(r)^2}{G}.$$

Gözlemlenen dönme eğrisi için belirtilen yaklaşım şöyledir:

$$v(r) = \begin{cases} v_0 r / R_g, & r < R_g, \\ v_0, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Bu nedenle,

$$M_{\text{enc}}(r) = \begin{cases} \frac{v_0^2 r^3}{GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2 r}{G}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Bir küresel kabuğun kütlesi $dM_{\text{enc}} = 4\pi r^2 \rho_{\text{tot}} dr$ olduğundan,

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{enc}}}{dr} = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2}, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

Görünür sınırın içinde yıldız yoğunluğu nm_s 'yi çıkarıp dışındaki yıldız yoğunluğunu ihmal edersek,

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \begin{cases} \frac{3v_0^2}{4\pi GR_g^2} - nm_s, & r < R_g, \\ \frac{v_0^2}{4\pi Gr^2}, & r \geq R_g. \end{cases}$$

İçeride kalan kütle R_g 'de süreklidir; ancak bu idealleştirilmiş modelde yoğunluk bu noktada sıçrama gösterebilir.

C.1

Burada $m'(r)$, soruda belirtilen içeride kalan kütleyi gösterir; üstteki çizgi bir türev değil, gösterimin bir parçasıdır.

Radyal kalınlığı dr ve kesit alanı dA olan küçük bir gaz elemanını ele alalım. Kütlesi şöyledir:

$$dm = m_p n(r) dA dr.$$

Dışarıya doğru net basınç kuvveti şöyledir:

$$dF_P = -\frac{dP}{dr} dA dr.$$

İçeriye doğru kütleçekim kuvvetinin büyüklüğü şöyledir:

$$dF_G = \frac{Gm'(r)}{r^2} m_p n(r) dA dr.$$

Hidrostatik denge, bu kuvvetlerin birbirini dengelemesini gerektirir. Dolayısıyla,

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm'(r)m_p n(r)}{r^2}}.$$

Eksi işareti, gazı içeriye doğru kütleçekimine karşı dengede tutmak için basıncın dışarıya doğru azalması gerektiğini ifade eder.

C.2

İdeal bir gaz için,

$$P(r) = n(r)k_B T(r).$$

Türev alırsak,

$$\frac{dP}{dr} = k_B \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Hidrostatik denge denkleminde yerine koyup içeride kalan kütle için çözersek,

$$m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p n(r)} \left[T(r) \frac{dn}{dr} + n(r) \frac{dT}{dr} \right].$$

Böylece,

$$\boxed{m'(r) = -\frac{k_B r^2}{Gm_p} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{T(r)}{n(r)} \frac{dn}{dr} \right]}.$$

Eşdeğer bir biçim şöyledir:

$$m'(r) = -\frac{k_B T(r) r}{Gm_p} \left[\frac{d \ln n}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right].$$

C.3

İzotermal gaz için $T(r) = T_0$ olduğundan, C.2 şu hâli alır:

$$m'(r) = -\frac{k_B T_0 r^2}{Gm_p} \frac{d \ln n}{dr}.$$

Verilen sayı yoğunluğu

$$\ln n = \ln \alpha - \ln r - 2 \ln(\beta + r),$$

bağıntısını sağlar ve dolayısıyla,

$$\frac{d \ln n}{dr} = -\frac{1}{r} - \frac{2}{\beta + r}.$$

Bunun sonucunda, içeride kalan toplam kütle şöyledir:

$$m'(r) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \left(r + \frac{2r^2}{\beta + r} \right) = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{r(\beta + 3r)}{\beta + r}.$$

İçeride kalan bu kütlenin türevini alalım:

$$\frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0}{G m_p} \frac{\beta^2 + 6\beta r + 3r^2}{(\beta + r)^2}.$$

Böylece toplam kütle yoğunluğu şöyledir:

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d m'(r)}{dr} = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2}.$$

Gazın kütle yoğunluğu şöyledir:

$$\rho_{\text{gas}}(r) = m_p n(r) = \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2}.$$

Bunu toplam yoğunluktan çıkarırsak,

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{k_B T_0 (\beta^2 + 6\beta r + 3r^2)}{4\pi G m_p r^2 (\beta + r)^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta + r)^2} \quad (r > 0).$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Deprem, Yanardağ ve Tsunami

Endonezya, doğal tehlikelerin süpermarketidir. Yanardağ patlamaları, depremler ve tsunamiler gibi doğal tehlikelerin hemen hemen tümü Endonezya'da meydana gelmiştir.

A. Merapi Yanardağı'nın Patlaması

Yogyakarta'daki Merapi Yanardağı, Java'nın en etkin yanardağlarından biridir. Piroklastik akıntılar, bu yanardağın iyi bilinen püskürme özelliklerindendir. Piroklastik akıntı, bir yanardağdan uzaklaşarak ilerleyen sıcak bir gaz ve kaya karışımıdır. 26 Ekim 2010'da Merapi, 12 km yüksekliğe ulaşan bir kül sütunu (Şek. 1) ve yanardağın çevresindeki 20,000'den fazla insanı yerinden eden piroklastik akıntılar oluşturarak patlayıcı karakterini göstermiştir.



(Fig. 1: Pyroclastic cloud during Merapi eruption, Courtesy of Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

(Şek. 1: Merapi patlaması sırasında piroklastik bulut; Yogyakarta Volkanoloji Ofisi, BPPTKG'nin izniyle)

Merapi'nin 2010'daki en büyük patlamasının nedenlerine bakalım. Dışarıdan gelen suyun magmaya etkisinin, volkanik püskürmelerin patlayıcı davranışında (hidromagmatik püskürmeler) önemli bir rol oynadığı jeofizikçilerce bilinmektedir. Yanardağı, magmatik parçacıklar ve su karışımından oluşan bir sistem olarak ele aldığımızı varsayalım. Yanardağın püskürme ağzını oluşturan yapılar ve atmosfer, sistemin sınırını oluşturmaktadır. Patlayıcı püskürmenin iki aşamada gerçekleştiği kabul edilir: (1) ani bir magma-su etkileşimi ve (2) sistemin genleşmesi. İlk aşamada, mutlak sıcaklığı (T_m) olan bir magma kütlesi (m_m), mutlak sıcaklığı (T_w) olan dış kaynaklı bir su kütlesiyle (m_w) karışır. Isıl dengeye neredeyse anında ulaşılır. Bu etkileşim, hacmin yaklaşık olarak sabit kaldığı bir süreç olarak düşünülebilir. Suyun buharlaşma gizli ısı ve magmanın erime gizli ısı ihmal edilebilir.

A.1	İlk aşamadaki denge sıcaklığını, kütleler ile suyun c_{Vw} ve magmanın c_{Vm} birim kütle başına ısı kapasiteleri cinsinden bulunuz.	0.5 puan
A.2	Karışımın ideal gaz olarak modellenebildiğini varsayarak ilk aşamadaki denge basıncını belirleyiniz. Karışımın mol başına hacminin v_e olduğunu varsayınız.	0.3 puan

Sistemin genleşmesi (ikinci aşama) çeşitli yollarla gerçekleşebilir; bunlardan biri ısıl detonasyondur. Böyle bir süreç oldukça karmaşık olsa da püsküren karışımın bağıl hızını deneysel olarak ölçebiliriz. Püskürme sırasındaki gaz hızı, yanardağ bacasındaki karışımın basıncına p , toplam kütleline m ve hacmine V bağlıdır.

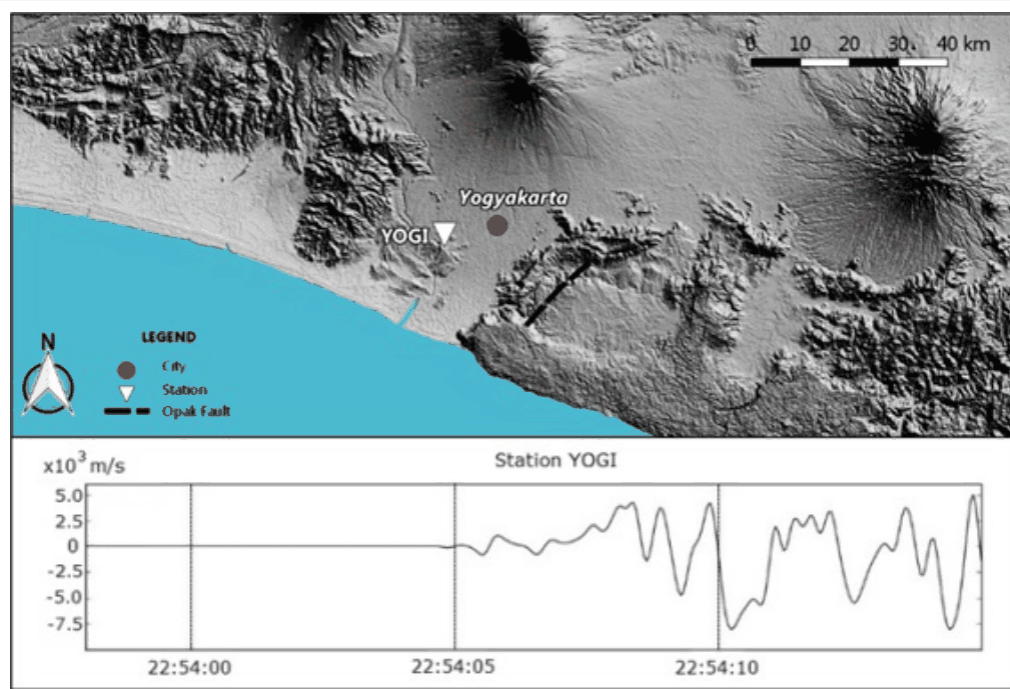
A.3	Püskürme sırasındaki gaz hızını, bir κ orantı sabitine kadar, p , m ve V cinsinden ifade ediniz.	0.5 puan
-----	---	-------------

Gözlenen basınç 100 MPa mertebesinde. Bu nedenle püskürmenin (bağıl) hızı, balistik hız kadar büyük olabilir.

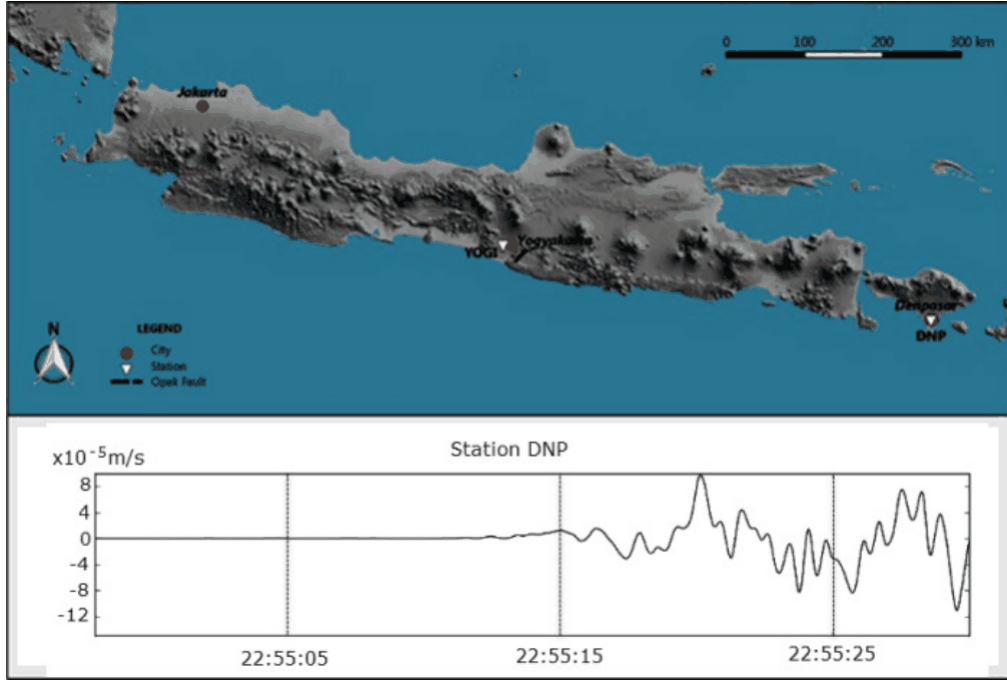
B. Yogyakarta Depremi

Bantul ve Yogyakarta bölgesindeki birçok binayı yıkan, $M_w = 6.4$ büyüklüğündeki 2006 Yogyakarta depremi, yerel saatle 05:54:00.00'da, yani UTC ile 22:54:00.00'da meydana gelmiştir. Depreme, Opak fay segmentinin ani bir yer değiştirmesi neden olmuştur (bkz. Şek. 2). İç merkez, yüzeyin 15 km altında bulunuyordu.

Yer kabuğunda yayılan sismik dalga, sismometre kullanılarak kaydedilebilir. Sismometreden elde edilen grafiğe sismogram denir (Şek. 2 ve 3, alttaki grafik). Bu sismogramlar, Yogyakarta'daki Gamping İstasyonu (YOGI) (Şek. 2) ve Bali'deki Denpasar (DNP) (Şek. 3) sismik istasyonlarınca kaydedilen düşey yer hızını zamanın fonksiyonu olarak göstermektedir. Genel olarak sismik dalgalar üç dalga türünden oluşur: boyuna veya birincil dalga (P dalgası), enine veya ikincil dalga (S dalgası) ve yüzey dalgası. P ve S dalgaları yer altında ilerlerken yüzey dalgası Yer yüzeyi boyunca ilerler. Yer altından istasyonlara ulaşan sismik dalgalar; doğrusal olarak yayılanlar, bir katman sınırından yansıyanlar ve bir sonraki katmana kırılarak geçenler olarak ayrılabilir. Boyuna dalga veya birincil dalga en yüksek hıza sahipken yüzey dalgası, P dalgasının hızının yaklaşık %60'ı kadar olan en düşük hıza sahiptir.



(Şek. 2: YOGI'nin haritadaki konumu)



(Şek. 3: DNP'nin (Denpasar) haritadaki konumu)

Dış merkez (iç merkezin Yer yüzeyindeki izdüşümü) ile YOGI ve DNP istasyonları arasındaki uzaklıklar sırasıyla 22.5 km ve 500 km'dir. Endonezya'nın Java bölgesinde yer kabuğu katmanının derinliği 30 km'dir. Yer kabuğunun altında Yer'in manto katmanı bulunur. Diğer dalga olaylarında olduğu gibi sismik dalgalar da Snell yasasına uyar. Sismik dalga, manto katmanından da yansiyabilir. Bu soruda Yer'in eğriliğinin ihmal edildiğini varsayıyoruz.

B.1	Şek. 2, YOGI istasyonundaki sismogramı göstermektedir. Verileri kullanarak P dalgasının yer kabuğundaki hızını bulunuz.	0.5 puan
B.2	Yogyakarta depremi nedeniyle Denpasar'daki DNP istasyonuna ulaşan doğrudan P dalgasının ve yansıyan dalganın yayılma sürelerini bulunuz.	0.6 puan

Yer'in yalnızca iki katmandan, kabuk ve mantodan oluştuğu varsayıldığında birincil dalga, kabukta ve mantoda birbirinden farklı sabit hızlarla yayılır. Mantodaki hız, kabuktakinden büyüktür. Mantoya dik açıyla (90°) kırılarak geçen P dalgasının, kabuk-manto sınırı boyunca ilerlediği yolun tamamında kısmen tekrar kabuğa kırılarak geçtiğine dikkat ediniz.

B.3	P dalgasının mantodaki hızını bulunuz.	1.2 puan
-----	--	----------

Daha gerçekçi bir Yer yapısı için kabuk, sismik dalganın hızı $v(z) = v_0 + az$ bağıntısına göre derinliğin z bir fonksiyonu olacak biçimde çok sayıda ince katmana ayrılabilir; burada a bir sabittir ve iç merkezin yaklaşık olarak yüzeyde bulunduğu kabul edilir. Bu modelde dalga ışını eğrilir.

B.4	Işın parametresini $p = \sin \theta(z)/v(z)$ olarak tanımlayalım; burada $\theta(z)$, ışın ile normal arasındaki açıdır. Bir sismik dalganın istasyona p ışın parametresiyle ulaştığını varsayınız; iç merkeze olan uzaklığı p , v_0 ve a cinsinden ifade ediniz. İç merkezin yer yüzeyine çok yakın olduğunu varsayınız.	1.4 puan
B.5	İç merkezden herhangi bir istasyona yayılma süresini T , z üzerinden bir integral biçiminde bulunuz.	1.0 puan

Yer, her bir katmanın hızının v_i , kalınlığının ise δz_i olduğu, üst üste dizilmiş homojen katmanlardan oluşmaktadır.

B.6	Önceki sorunun sonucundan yararlanarak, iç merkezden DNP istasyonuna yayılma süresini (T) yaklaşık olarak hesaplayınız; kabuğun yalnızca üç ayrı katmandan, ($i = 1, 2, 3$), oluştuğunu ve bu katmanların $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$ sec/km, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km ile tanımlandığını varsayınız.	1.0 puan
-----	--	-------------

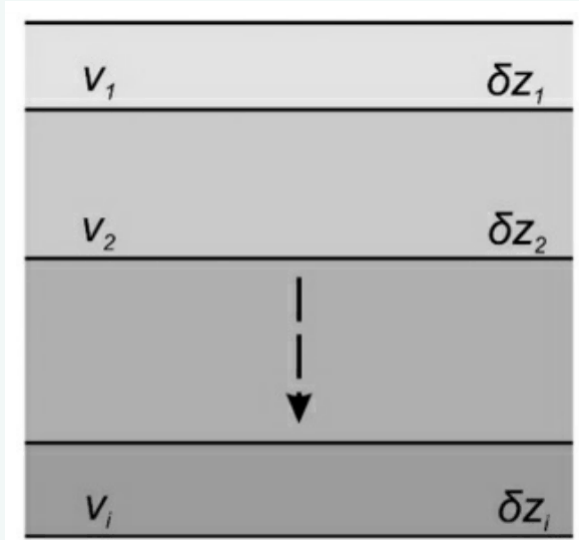
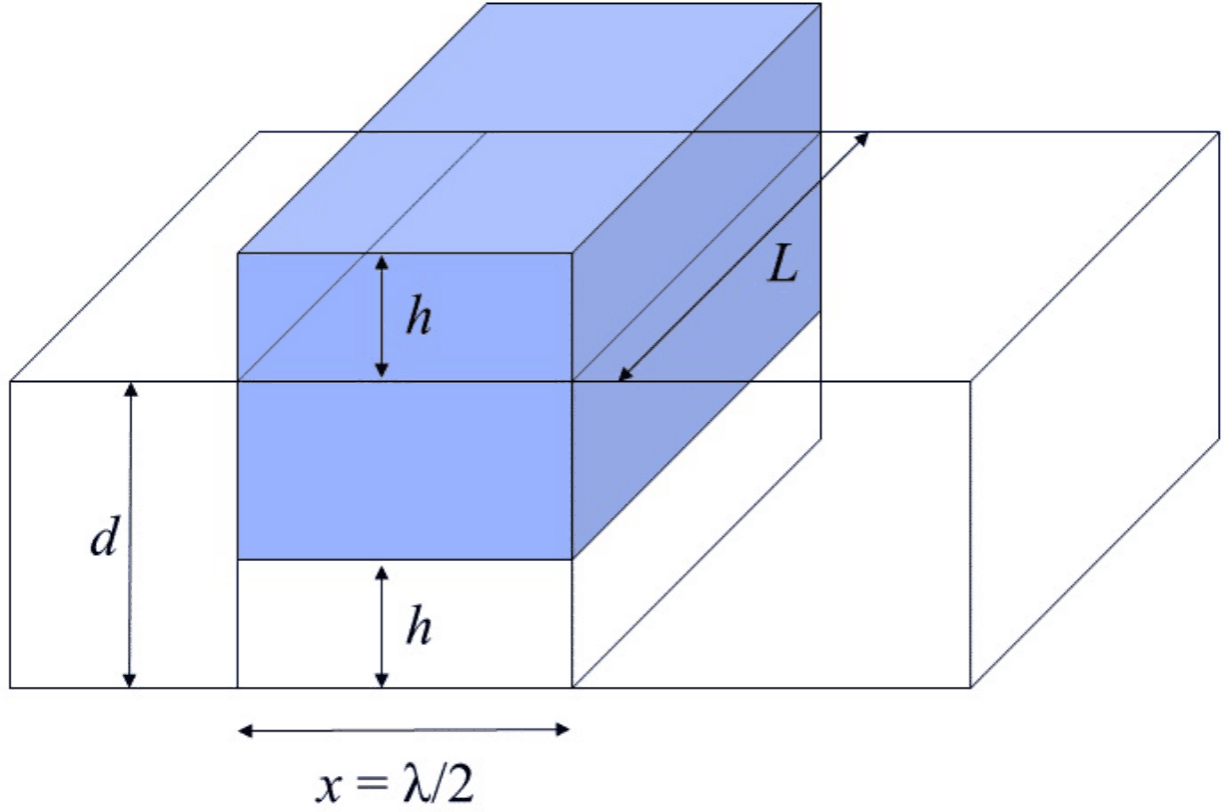


Fig. 4: A simplified model of earth's layers.

Şek. 4: Yer'in katmanlarının basitleştirilmiş bir modeli.

C. Java Tsunamisi

2006 Pangandaran depremi ve tsunamisi, 17 Temmuz'da yerel saatle 15:19:27'de, Java'nın batı ve orta kesimlerinin açıklarında meydana gelmiştir. Dış merkezdeki fayın okyanus tabanında bulunduğu bir deprem sırasında fay yer değiştirerek tsunami adı verilen, son derece büyük bir su dalgası oluşturabilir. Başka bir deyişle tsunami, çok küçük bir genlikle ancak son derece büyük bir dalga boyuyla başlayan bir sığ su dalgasıdır. Şek. 5'te gösterildiği gibi, okyanus tabanının bir kısmının yükselmesine neden olan ani bir fay hareketini ele alınız. Depremin enerjisinin, yükselen bu okyanus suyunun potansiyel enerjisine dönüştüğünü varsayınız. Basit bir model için yükselen suyun, taban alanı $\lambda L/2$ (burada $L \gg \lambda$) ve yüksekliği h olan bir dikdörtgenler prizması geometrisine sahip olduğunu yaklaşık olarak kabul ediyoruz.



Şek. 5: Tsunami dalgasının gösterimi; d , okyanusun derinliğidir.

C.1	Deprem nedeniyle yükselen okyanus suyunda, okyanus yüzeyine göre depolanan potansiyel enerjiyi bulunuz. Deniz suyunun yoğunluğunun ρ olduğunu varsayınız.	0.5 puan
C.2	Tsunami dalgasının hızını boyutsuz bir çarpana kadar bulunuz.	1.2 puan
C.3	Derinliğin yavaş değiştiğini varsayarak ve d_0 derinliğindeki genliğin A_0 olduğunu bilerek, enerjiye dayalı bir akıl yürütmeye tsunami dalgasının genliğini derinliğin fonksiyonu olarak belirleyiniz.	1.3 puan

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Aşağıda kullanılan sismogram okumaları, depremden sonra YOGI için yaklaşık 5 s, DNP için ise 72 s 'dir. v_c ve v_m , kabuktaki ve mantodaki hızları gösterebilir.

- **A.1:** $T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$
- **A.2:** $p_e = \frac{RT_e}{v_e}.$
- **A.3:** $u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$
- **B.1:** $v_c \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$
- **B.2:** $t_{\text{direct}} \simeq 92.5 \text{ s}, \quad t_{\text{reflected}} \simeq 92.8 \text{ s};$ grafiğin duyarlılığı düzeyinde her ikisi de yaklaşık 93 s'dir.

- **B.3:** $v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}$.
- **B.4:** $X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2}$; $a > 0$ ve $0 < p v_0 < 1$ varsayılmıştır.
- **B.5:** $T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}$, $z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}$.
- **B.6:** Doğrudan ayırıklaştırma $T \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}$ sonucunu verir. Bu katman toplamı, belirtilen 500 km yatay uzaklıkla geometrik olarak tutarsızdır; bu durum aşağıda açıklanmıştır.
- **C.1:** $U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2$.
- **C.2:** $c = C \sqrt{gd}$; burada C boyutsuzdur; doğrusal sıg su kuramı $C = 1$ verir.
- **C.3:** $A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}$.

Çözüm

A.1 — Denge sıcaklığı

Hızlı karışma sırasında çevreyle ısı alışverişinin ve sınır işinin ihmal edilebilir olduğunu kabul edelim. Belirtilen gizli ısıları ihmal edip ısı kapasitelerini sabit alırsak iç enerjinin korunumu

$$m_m c_{Vm} (T_e - T_m) + m_w c_{Vw} (T_e - T_w) = 0.$$

bağıntısını verir. Böylece

$$T_e = \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Bu, başlangıç sıcaklıklarının iki ısı kapasitesiyle ağırlıklandırılmış ortalamasıdır.

A.2 — Denge basıncı

İdeal gaz karışımının n molü için

$$p_e V = n R T_e.$$

Molar hacmi $v_e = V/n$ olduğundan

$$p_e = \frac{R T_e}{v_e} = \frac{R}{v_e} \frac{m_m c_{Vm} T_m + m_w c_{Vw} T_w}{m_m c_{Vm} + m_w c_{Vw}}.$$

Burada R , evrensel gaz sabitidir.

A.3 — Püskürme hızı

Belirtildiği gibi hızın yalnızca p , m , V 'ye bağlı olduğunu varsayalım. Şöyle yazalım:

$$u = \kappa p^\alpha m^\beta V^\gamma.$$

Şu boyutları kullanırsak

$$[p] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [m] = M, \quad [V] = L^3,$$

boyutsal tutarlılık şu koşulları gerektirir:

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\alpha + 3\gamma = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

Dolayısıyla

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

ve

$$u = \kappa \sqrt{\frac{pV}{m}}.$$

Eşdeğer olarak, $u = \kappa \sqrt{p/\rho_{\text{mix}}}$; burada $\rho_{\text{mix}} = m/V$ 'dir. Boyut analizi κ 'yı belirlemez.

B.1 — P dalgasının kabuktaki hızı

Kaynak derinliği $z_s = 15$ km olsun. YOGI'ye yatay uzaklık 22.5 km olduğundan kaynaktan istasyona doğrudan uzaklık

$$s_Y = \sqrt{22.5^2 + 15^2} = 27.04 \text{ km}.$$

Şek. 2'de taban çizgisinden görülebilen ilk sapma, yaklaşık UTC 22:54:05'te gerçekleşir. Deprem zamanı 22:54:00'a göre bu,

$$t_Y \simeq 5 \text{ s}.$$

sonucunu verir. Böylece

$$v_c = \frac{s_Y}{t_Y} \simeq \frac{27.04}{5} \simeq 5.4 \text{ km s}^{-1}.$$

Grafik bu kadar çok anlamlı basamağı desteklemese de aşağıdaki sayısal hesaplamaların ara işlemlerinde 5.4083 km s^{-1} değeri korunmuştur.

B.2 — DNP'ye doğrudan ve yansıyarak yayılma süreleri

Kaynaktan DNP'ye yatay uzaklığı $X = 500$ km, kabuk kalınlığını ise $H = 30$ km olarak yazalım.

Doğrudan dalga için

$$s_{\text{direct}} = \sqrt{X^2 + z_s^2},$$

dolayısıyla

$$t_{\text{direct}} = \frac{\sqrt{500^2 + 15^2}}{v_c} \simeq 92.5 \text{ s}.$$

Yatay kabuk–manto sınırındaki yansımayı ele almak için kaynağın $z = H$ düzlemine göre simetriğini alalım. Görüntüsünün derinliği

$$z_{\text{image}} = 2H - z_s = 45 \text{ km}.$$

Yansıyan ışın yolu açıldığında bu görüntüden DNP'ye uzanan bir doğru elde edilir. Sonuç olarak

$$s_{\text{reflected}} = \sqrt{X^2 + (2H - z_s)^2},$$

ve

$$t_{\text{reflected}} = \frac{\sqrt{500^2 + 45^2}}{v_c} \simeq 92.8 \text{ s}.$$

Her iki yayılma süresi de yaklaşık 93 s'dir; hesaplanan farkları yaklaşık 0.33 s'dir.

B.3 — P dalgasının mantodaki hızı

Şek. 3'te düz taban çizgisinden ilk sapma, yaklaşık UTC 22:55:12'de gerçekleşir ve

$$t_D \simeq 72 \text{ s.}$$

sonucunu verir. Bu, kabukta ilerleyen doğrudan ve yansıyan dalgalar için yukarıda hesaplanan varışlardan öncedir. Bu varışı, manto sınırı boyunca ilerleyip kabuğa geri yayılan, kritik kırılmaya uğramış dalgayla ilişkilendiriyoruz.

θ_c , düşeyden ölçülen kritik açı olsun. Snell yasası

$$\frac{\sin \theta_c}{v_c} = \frac{1}{v_m}, \quad \sin \theta_c = \frac{v_c}{v_m}.$$

bağıntılarını verir. Kabukta aşağı doğru ilerleyen yol parçası $H - z_s$, yukarı doğru ilerleyen yol parçası ise H derinlik aralığını kat eder. Düşey yer değiştirmelerinin büyüklükleri toplamı

$$K = (H - z_s) + H = 2H - z_s = 45 \text{ km.}$$

Dolayısıyla toplam uzunlukları ve yatay izdüşümleri

$$s_{\text{crust}} = \frac{K}{\cos \theta_c}, \quad X_{\text{crust}} = K \tan \theta_c.$$

Manto sınırı boyunca alınan yol

$$X_{\text{mantle}} = X - K \tan \theta_c.$$

Böylece

$$t_D = \frac{K}{v_c \cos \theta_c} + \frac{X - K \tan \theta_c}{v_m}.$$

$\sin \theta_c = v_c/v_m$ kullanıldığında bu ifade

$$t_D = \frac{X}{v_m} + \frac{K}{v_c} \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v_m^2}}.$$

biçimine sadeleşir. Grafikten okunan değer yerine konulduğunda

$$72 = \frac{500}{v_m} + \frac{45}{5.4083} \sqrt{1 - \left(\frac{5.4083}{v_m} \right)^2},$$

elde edilir; burada uzaklıklar kilometre, hızlar ise kilometre/saniye cinsindendir. Denklem çözüldüğünde

$$v_m \simeq 7.554 \text{ km s}^{-1},$$

veya uygun duyarlılıkla

$$v_m \simeq 7.6 \text{ km s}^{-1}.$$

Kontrol amacıyla, $\theta_c \simeq 45.7^\circ$ bulunur ve mantodaki yol parçası yaklaşık 454 km uzunluğundadır.

Kabuktaki yol parçalarının kat edilmesi yaklaşık 11.9 s, mantodaki yol parçasının kat edilmesi ise yaklaşık 60.1 s sürer.

B.4 — Sürekli değişen hız için uzaklık

z eksenini aşağıya doğru pozitif, x eksenini yatay alalım. İnce yatay katmanlar arasında Snell yasası,

$$p = \frac{\sin \theta(z)}{v(z)}$$

ifadesinin bir ışın boyunca sabit olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\sin \theta(z) = pv(z), \quad \cos \theta(z) = \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}.$$

Aşağı doğru ilerleyen yol parçasında

$$\frac{dx}{dz} = \tan \theta(z) = \frac{pv(z)}{\sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

$a > 0$ olan bir ortamda geri dönen bir ışın için en derin noktaya, ışının yatay hâle geldiği yerde ulaşılır:

$$pv(z_t) = 1.$$

$v(z) = v_0 + az$ olduğundan

$$z_t = \frac{p^{-1} - v_0}{a}.$$

Hem kaynağın hem de alıcının yaklaşık olarak yüzeyde bulunduğu kabul edildiğinde, aşağı ve yukarı ilerleyen kısımlar simetriktir. Yatay uzaklık

$$X = 2 \int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{\sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}} dz.$$

$u = p(v_0 + az)$ değişken dönüşümünü yapalım; böylece $du = pa dz$ olur. O hâlde

$$X = \frac{2}{ap} \int_{pv_0}^1 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Belirsiz integral $-\sqrt{1 - u^2}$ olduğundan

$$X = \frac{2}{ap} \sqrt{1 - p^2 v_0^2} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{p^2} - v_0^2}.$$

Geri dönen ışın çözümü, $0 < pv_0 < 1$ koşulunu gerektirir.

B.5 — Yayılma süresi integrali

ds uzunluğundaki bir ışın parçasının kat edilmesi için geçen süre

$$dt = \frac{ds}{v(z)}.$$

$|dz| = ds \cos \theta(z)$ olduğundan

$$dt = \frac{|dz|}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Hem aşağı hem yukarı ilerleyen yol parçaları hesaba katıldığında

$$T = 2 \int_0^{z_t} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v(z)^2}}.$$

Doğrusal hız profili için bu ifade

$$T = 2 \int_0^{(p^{-1} - v_0)/a} \frac{dz}{(v_0 + az) \sqrt{1 - p^2(v_0 + az)^2}}.$$

Dönüş noktasındaki tekillik integrallenebilir. İntegralin hesaplanması ayrıca

$$T = \frac{2}{a} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{p v_0} \right).$$

sonucunu verir. B.6'daki sayısal yaklaşımı incelemek için kullanışlı olan eşdeğer bir biçim, pX çıkarılarak elde edilir:

$$\begin{aligned} T - pX &= 2 \int_0^{z_t} \left[\frac{1}{v \sqrt{1 - p^2 v^2}} - \frac{p^2 v}{\sqrt{1 - p^2 v^2}} \right] dz \\ &= 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz. \end{aligned}$$

Dolayısıyla geometrik olarak tutarlı bir ışın için

$$T = pX + 2 \int_0^{z_t} \sqrt{\frac{1}{v(z)^2} - p^2} dz.$$

B.6 — Üç katmanlı yaklaşım

B.4–B.5'teki yüzeyde bulunan kaynak yaklaşımını koruyarak ilk yayılma süresi integralini ayrıklaştıralım:

$$T \approx 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}.$$

İki çarpanı, her katmanın hem aşağı hem yukarı ilerleyen yol boyunca geçilmesini hesaba katar.

Sayılar tam olarak verildiği biçimde kullanıldığında şu sonuçlar elde edilir:

Katman i	$p v_i$	İki yol parçasının katkısı $\frac{2\delta z_i}{v_i \sqrt{1 - p^2 v_i^2}}$
1	0.95095	5.833 s
2	0.99671	31.863 s
3	0.99957	146.366 s

Böylece katmanlar üzerinden doğrudan sayısal integrasyon

$$T \approx 184.06 \text{ s} \simeq 1.84 \times 10^2 \text{ s}.$$

sonucunu verir. Bu sayının DNP'ye yayılma süresi olarak yorumlanmasında bir tutarlılık sınırlaması vardır. Aynı ayrık ışının yatay uzaklığı

$$X_{\text{layers}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\delta z_i p v_i}{\sqrt{1 - p^2 v_i^2}} \simeq 1280.9 \text{ km},$$

olurdu; bu da 500 km'den önemli ölçüde farklıdır.

Bunun yerine, B.5'in ikinci biçimine verilen 500 km yatay uzaklık konulup integrali yaklaşık olarak hesaplanırsa, biçimsel olarak şu tahmin elde edilir:

$$\begin{aligned}
T &\approx p(500) + 2 \sum_{i=1}^3 \delta z_i \sqrt{\frac{1}{v_i^2} - p^2} \\
&= 71.5 + 0.8934 \\
&\approx 72.39 \text{ s.}
\end{aligned}$$

Sürekli ortam için elde edilen iki formül eşdeğerdir; ancak bu kaba yaklaşımlar, formüllerin gerektirdiği uzaklık bağıntısını koruyamaz. Dolayısıyla 184 s, yayılma süresinin doğrudan katman toplamıdır; 72.4 s ise yatay uzaklığın sabit tutulduğu bir tahmindir. Verilen parametrelerle, bu iki değer aynı gerçek üç katmanlı ışını betimleyemez.

C.1 — Yükselen suyun potansiyel enerjisi

Yükselen su prizmasının yatay alanı

$$S = \frac{\lambda L}{2}.$$

olsun. Bozulmamış okyanus yüzeyindeki kütleçekim potansiyelini sıfır alırsak, z yüksekliğindeki dz kalınlıklı yatay bir dilimin kütlesi $\rho S dz$ olur. Sonuç olarak

$$U = \int_0^h \rho S g z dz = \frac{1}{2} \rho S g h^2.$$

Dolayısıyla

$$U = \frac{1}{4} \rho g \lambda L h^2.$$

Eşdeğer olarak, başlangıçtaki yüzeyin üzerindeki suyun kütlesi $\rho S h$, kütle merkezinin yüksekliği ise $h/2$ 'dir.

C.2 — Tsunami hızı

Şığ su ve küçük genlik yaklaşımlarını kullanalım:

$$\lambda \gg d, \quad h \ll d.$$

Bu durumda yatay akışkan hızı derinlik boyunca yaklaşık olarak sabittir ve düşey basınç dağılımı yaklaşık olarak hidrostatiktir.

$\eta(x, t)$ yüzeyin yer değiştirmesi, $u(x, t)$ ise yatay akışkan hızı olsun. Suyun hacminin korunumu, d derinliği çevresinde doğrusallaştırıldığında

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

bağıntısını verir. Yatay basınç gradyanı $\rho g \partial \eta / \partial x$ 'tir. Dolayısıyla Newton'un ikinci yasası

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

bağıntısını verir. İlk denklemin zamana göre türevi alınıp ikinci denklem yerine konulduğunda

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Bu, dalga denklemdir; dolayısıyla

$$c = \sqrt{g d}.$$

Soruda istenen düzeyde

$$c = C\sqrt{gd},$$

burada C boyutsuz bir çarpandır; belirtilen doğrusal sığ su varsayımları $C = 1$ verir. Yoğunluk, hem eylemsizliğin hem de kütleçekimden kaynaklanan geri çağırıcı kuvvetin çarpanı olduğundan sadeleşir.

C.3 — Derinlik değişirken genlik

Derinliğin yavaş değiştiğini, yansıma ve enerji kayıplarının ihmal edilebilir olduğunu ve dalga cephesi genişliğinin sabit kaldığını varsayalım. $L \gg \lambda$ olduğundan dalga, yerel olarak düzlem dalga kabul edilebilir.

Genliği A olan sinüzoidal bir yüzey yer değiştirmesi için

$$\eta = A \cos(kx - \omega t), \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{A^2}{2}.$$

Birim yatay alan başına ortalama kütleçekim potansiyel enerjisi

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

İlerleyen bir sığ su dalgası için süreklilik,

$$u = \frac{c}{d} \eta.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla birim yatay alan başına ortalama kinetik enerjisi

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{\rho c^2 A^2}{4d} = \frac{1}{4} \rho g A^2.$$

Böylece toplam ortalama enerji yoğunluğu

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

Sığ su dalgaları dispersif değildir; dolayısıyla grup hızları $c = \sqrt{gd}$ 'ye eşittir. Birim dalga cephesi genişliği başına enerji akısının korunumu

$$\bar{\mathcal{E}} c = \text{sabit},$$

veya

$$A^2 \sqrt{d} = \text{sabit}.$$

bağıntısını verir. d_0 derinliğindeki referans genlik A_0 kullanıldığında

$$A^2 \sqrt{d} = A_0^2 \sqrt{d_0}.$$

Dolayısıyla

$$A(d) = A_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^{1/4}.$$

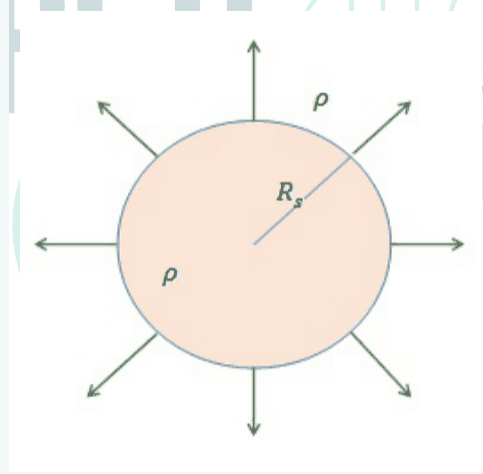
Bu, Green yasasıdır. Geçerliliği, genliğin derinliğe göre küçük olmasını ve derinliğin yeterince yavaş değişmesini gerektirir; dalganın sonunda kırılmasını betimlemez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Kozmik Enflasyon

Dünya'dan gözlenen gökadalara göreli hareketi nedeniyle, belirli bir gökadanın görünür tayfındaki dalga boyları özgün dalga boylarından farklıdır; buna elektromanyetik Doppler etkisi denir. Bir gökada topluluğu için dalga boyu kaymalarının rastgele dağılması beklenir: bazıları pozitif (kırmızıya kayma), bazıları ise negatif (maviye kayma) olur. Ancak gözlemler, yakındaki bir gökada grubu dışında tüm gökadalara kırmızıya kaydığını göstermektedir. Gözlemler evrenin farklı bir noktasından yapılsa da bunun geçerli olması gerekir. Buradan, evrenimizin genişliyor olması gerektiği sonucuna varılır. Öte yandan evrenin yerel düzensizlikleri, 100 Mpc'den büyük ölçeklerde ihmal edilebilir; burada 1 pc = 3.26 ışık yılıdır. Büyük ölçeklerde ortalaması alındığında, gökadalara kümeli dağılımı giderek daha izotropik (yönden bağımsız) ve homojen (konumdan bağımsız) hâle gelir. Dolayısıyla evreni, düzgün bir ρ kütle yoğunluğuna sahip, genişleyen bir madde dağılımı olarak kabul edebiliriz.

A. Evrenin Genişlemesi



Evrenimizin basit bir modeli olarak, aynı yoğunluğa sahip çok daha büyük bir kürenin oluşturduğu ortamın içinde bulunan, düzgün yoğunluklu ve genişleyen bir küreyi ele alalım. Belirli bir anda küçük kürenin yarıçapı R_s olsun. Kürenin genişlemesini ifade etmek için, yarıçapın zamana bağımlılığı $R(t)$, $a(t)$ ölçek çarpanı ile, yani $R(t) = a(t)R_s$ biçiminde ifade edilebilir.

Evren modelimize göre küre sınırındaki bir kütle elemanının hızını hesaplamak için Newton'un kütle çekim yasası kullanılarak bir dizi Friedmann denklemi elde edilebilir:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

Burada k boyutsuz bir sabit, c ise ışık hızıdır.

Kısım	Soru	Puan
A.1	(1) denklemindeki A_1 sabitini belirleyiniz.	1.3 puan

Buraya kadarki inceleme göreli değildir. Ancak gerçekte, $\rho(t)c^2$ toplam enerji yoğunluğu (kütle çekim potansiyel enerjisi hariç) olarak yeniden yorumlanarak göreli bir sisteme genişletilebilir. Bu göreli sistemde ikinci Friedmann denklemi

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

adyabatik bir sistem için termodinamiğin birinci yasası kullanılarak türetilir; burada p , küre üzerindeki basıncı gösterir.

Kısım	Soru	Puan
A.2	(2) denklemindeki A_2 sabitini belirleyiniz.	0.9 puan

(1) ve (2) denklemlerini çözmek için, w bir sabit olmak üzere $p(t)/c^2 = w\rho(t)$ gibi bir $p = p(\rho)$ bağıntısı varsayılmalıdır. Ayrıca Hubble parametresi olarak adlandırılan $H = \dot{a}/a$ çarpanı vardır. Parametrelerin günümüzdeki değerleri genellikle t_0, ρ_0, H_0, a_0 vb. biçiminde 0 alt indisyle gösterilir. Basitlik için $a_0 = 1$ alıyoruz.

Evrenin, görelî parçacıklardan oluşan ışıınımı üreten ve Büyük Patlama adı verilen büyük bir patlamayla başladığı düşünölmektedir. Genişlerken evren soğur ve içindeki parçacıklar görelî olmayan hâle gelir. Bununla birlikte, yakın tarihli gözlemler günümüzdeki evrende kozmolojik sabitin enerji yoğunluğunun baskın olduğunu ortaya koymaktadır. Fotonlar söz konusu olduğunda, evren genişledikçe fotonun dalga boyu ölçek çarpanıyla orantılı olarak artar.

Kısım	Soru	Puan
A.3	Aşağıdaki üç durumun her biri için ortaya çıkan w değerini belirleyiniz: (i) yalnızca ışıınımla (yani foton enerjisiyle) dolu bir evren, (ii) yalnızca görelî olmayan maddeyle dolu bir evren ve (iii) enerji yoğunluğu sabit olan bir evren.	1.2 puan
A.4	$k = 0$ durumunda, A.3'te belirtilen (i) ile (iii) arasındaki durumların her biri için $a(t)$ 'yi bulunuz. (i) ve (ii) durumları için $a(t = 0) = 0$ başlangıç koşulunu, (iii) durumu için ise $a_0 = 1$ koşulunu kullanınız.	1.2 puan

(1) denklemindeki k sabiti, evrenin uzaysal geometrisinin sınıflandırılmasıyla ilgilidir. Değeri, pozitif eğrilikli bir evren (kapalı) için $k = +1$, düz bir evren (sonsuz) için $k = 0$ ve negatif eğrilikli bir evren (açık, sonsuz) için $k = -1$ olabilir. $\Omega = \rho/\rho_c$ yoğunluk oranını tanımlayalım; burada $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ kritik enerji yoğunluğudur. A_1 'in A.1 sorusundan elde edildiğine dikkat ediniz.

Kısım	Soru	Puan
A.5	(1) denklemindeki k 'yi Ω, H, a ve R_0 cinsinden ifade ediniz.	0.1 puan
A.6	$k = +1, k = 0$ ve $k = -1$ değerlerinin her birine karşılık gelen Ω aralığını bulunuz.	0.3 puan

B. Enflasyon Evresinin Öne Sürölme Gerekçesi ve Genel Koşulları

Kozmik mikrodalga arka plan ışıınımı (CMB) gözlemleri, günümüzdeki evrenimizin yaklaşık olarak düz olduğunu düşöndürmektedir. Sorun şudur: Bu doğruysa, günümüzdeki evrenin başlangıçtaki erken evreni tam olarak düz olmalıdır; aksi hâlde düzlükten herhangi bir sapma zamanla büyüyerek günümüzdeki düzlüğü bozacaktır.

Kısım	Soru	Puan
B.1	ışıınımın veya görelî olmayan maddenin baskın olduğu evren için $(\Omega(t) - 1)$ 'i zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz (A.3 sorusuna bakınız).	0.5 puan

Bu sorunu çözmek için evren, tarihinin erken bir döneminde, enflasyon dönemi adı verilen üstel bir genişlemeye yol açan, sabit enerji yoğunluğunun baskın olduğu bir dönemden geçmelidir.

Kısım	Soru	Puan
B.2	Sabit enerji yoğunluğunun baskın olduğu bu dönem için $(\Omega(t) - 1)$ 'i zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. $(\Omega(t) - 1) \ll 1$ olduğunu varsayınız.	0.3 puan
B.3	Enflasyon koşulunun şu koşulları gerektirdiğini gösteriniz: negatif basınç, ivmeli genişleme ($\ddot{a} > 0$) ve azalan Hubble yarıçapı ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 puan
B.4	Azalan Hubble yarıçapı koşulunun, $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ parametresi cinsinden $\epsilon < 1$ olarak ifade edilebileceğini gösteriniz.	0.2 puan

Enflasyon, $\epsilon < 1$ olduğu sürece gerçekleşir ve $\epsilon = 1$ olduğunda sona erer. $dN = d \ln a = H dt$ olacak ve enflasyonun sonunda $N = 0$ olacak şekilde N e-katlanma sayısını tanımlayabiliriz.

C. Homojen Dağılmış Maddenin Oluşturduğu Enflasyon

Bir enflasyon dönemi oluşturabilen basit bir fiziksel sisteme örnek, homojen dağılmış maddenin baskın olduğu bir evrendir. Bu tür maddeye inflaton denir ve bu madde bir $\phi(t)$ fonksiyonuyla betimlenebilir.

Maddenin dinamik denklemi şöyle ifade edilebilir:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

Burada $V = V(\phi)$ bir potansiyel fonksiyonu ve $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ 'dir. Hubble parametresi şu bağıntıyı sağlar:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

Burada M_{pl} , indirgenmiş Planck kütlesi adı verilen bir sabittir. Enflasyon evresi, V potansiyel enerjisinin $\dot{\phi}^2/2$ kinetik enerjisine, (3) denklemindeki $\ddot{\phi}$ teriminin ihmal edilebilmesini sağlayacak kadar uzun süre baskın olması sırasında gerçekleşir. Bu koşula yavaş yuvarlanma yaklaşımı denir.

$\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ olmak üzere, ϵ ve $\eta_V = \delta + \epsilon$ niceliklerine 'yavaş yuvarlanma' parametreleri denir.

Kısım	Soru	Puan
C.1	ϵ parametresini, η_V parametresini ve $dN/d\phi$ 'yi $V(\phi)$ potansiyeli ile onun birinci ve ikinci türevleri (V' ve V'') cinsinden yaklaşık olarak hesaplayınız.	1.7 puan

D. Basit Bir Potansiyelle Enflasyon

Herhangi bir enflasyon modelinin öngörülleri, CMB'den elde edilen şu gözlemsel kısıtlarla karşılaştırılmalıdır: $n_s = 0.968 \pm 0.006$ ve $r < 0.12$. Burada, baskın bir maddenin oluşturduğu enflasyon modeli için $r = 16\epsilon$ ve $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$, $\phi = \phi_{start}$ değerinde hesaplanır. Maddenin potansiyelinin $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ basit biçiminde olduğunu varsayınız; burada n herhangi bir tam sayı, Λ ise bir sabittir.

Kısım	Soru	Puan
D.1	Enflasyonun sonundaki ϕ_{end} 'i hesaplayınız.	0.5 puan
D.2	r ve n_s 'yi N e-katlanma sayısı ve n tam sayısı cinsinden ifade ediniz. Gözlemsel r ve n_s değerlerine en yakın sonucu veren n değerini tahmin ediniz. Hesabınızda $N = 60$ alınız.	0.9 puan

Cevaplar

Aşağıdaki sonuçlarda boyutsal olarak tutarlı olan $\rho_c = H^2/A_1$ kritik yoğunluğu kullanılmıştır. $\Delta = \Omega - 1$ yazalım. D.2 için $\mathcal{N} = \ln(a_{\text{end}}/a_{\text{start}}) = -N_{\text{start}} > 0$ olsun; istenen 60 e-katlanma, $\mathcal{N} = 60$ anlamına gelir.

- **A.1:** $A_1 = \frac{8\pi G}{3}$.
- **A.2:** $A_2 = 3$.
- **A.3:** $w_{\text{radiation}} = \frac{1}{3}, \quad w_{\text{matter}} = 0, \quad w_{\text{constant density}} = -1$.
- **A.4:** Genişleyen çözüm dalında,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a(t) &= (2H_0 t)^{1/2} = (t/t_0)^{1/2}, \\ \text{(ii)} \quad a(t) &= \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} = (t/t_0)^{2/3}, \\ \text{(iii)} \quad a(t) &= e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Burada $H_0^2 = 8\pi G\rho_0/3$ olup (i)'de $H_0 t_0 = 1/2$, (ii)'de ise $2/3$ 'tür.

- **A.5:** $k = (\Omega - 1) \left(\frac{aHR_0}{c} \right)^2$.
- **A.6:** $k = +1 : \Omega > 1; \quad k = 0 : \Omega = 1; \quad k = -1 : \Omega < 1$. Negatif olmayan yoğunluk için son aralık $0 \leq \Omega < 1$ 'dir.
- **B.1:** Düzlüğe yakın durumda başat mertebede, bir t_* referans zamanına göre,

$$\Delta(t) \simeq \begin{cases} \Delta_*(t/t_*), & \text{işinım,} \\ \Delta_*(t/t_*)^{2/3}, & \text{görelî olmayan madde.} \end{cases}$$

- **B.2:** $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$ olmak üzere,

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

- **B.3:** Sabit yoğunluk şu sonuçları verir:

$$p = -\rho c^2 < 0, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} > 0, \quad \frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

Daha genel olarak, ivmeli genişleme $p < -\rho c^2/3$ koşulunu gerektirir.

- **B.4:**

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon < 1.$$

- **C.1:** Yavaş yuvarlanma yaklaşımında,

$$\epsilon \simeq \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_V \simeq M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad \frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{V}{M_{pl}^2 V'}.$$

- **D.1:** $n > 0$ için, alanın pozitif olduğu çözüm dalında,

$$\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

Bişimsel eşik $|\phi| \simeq |n| M_{pl} / \sqrt{2}$ 'dir. Pozitif olmayan n , bu modelde yavaş yuvarlanma enflasyonunun varsayılan biçimde sona ermesini sağlamaz.

- **D.2:**

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Eşdeğer olarak, soru metnindeki işaretli tanım kullanıldığında paydalar $n - 4N_{\text{start}}$ olur. $\mathcal{N} = 60$ için,

n	r	n_s
1	0.0664	0.9751
2	0.1322	0.9669

$r < 0.12$ koşulu uygulanırsa, en yakın pozitif tam sayı seçimi $n = 1$ 'dir. Hiçbir pozitif tam sayı, verilen iki gözlemsel sınırı birden sağlamaz.

Çözüm

A.1

Yarıçapı $R = aR_s$ olan, evrenin genişlemesiyle birlikte hareket eden bir kürenin sınırındaki bir kütle elemanını ele alalım. Newton'un küresel kabuk teoremine göre, bu elemanın ivmesi yalnızca kürenin içinde kalan kütleye bağlıdır:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3.$$

Görelî olmayan modelde, içeride kalan bu kütle sabittir. Newton denklemi şöyledir:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}.$$

$\dot{R}$ ile çarpıp integral alındığında, korunan birim kütle başına mekanik enerji elde edilir:

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = \mathcal{E}.$$

Dolayısıyla

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{2GM}{R^3} + \frac{2\mathcal{E}}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{2\mathcal{E}}{a^2 R_s^2}.$$

$\dot{R}/R = \dot{a}/a$ olduğundan, $2\mathcal{E} = -kc^2$ eşleştirmesi yapılarak (1) ile karşılaştırıldığında şu sonuç elde edilir:

$$\boxed{A_1 = \frac{8\pi G}{3}}.$$

A.2

Kürenin fiziksel hacmi şöyle olsun:

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(aR_s)^3.$$

Toplam iç enerjisi $U = \rho c^2 \mathcal{V}$ 'dir. Adyabatik bir sistem için birinci yasa şu bağıntıyı verir:

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Böylece

$$c^2 \mathcal{V} d\rho + (\rho c^2 + p) d\mathcal{V} = 0.$$

$\dot{\mathcal{V}}/\mathcal{V} = 3\dot{a}/a$ kullanıldığında,

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Buradan

$$\boxed{A_2 = 3}.$$

A.3

Sabit w için süreklilik denklemi şu hâle gelir:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a},$$

Dolayısıyla $a_0 = 1$ kullanılarak,

$$\boxed{\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}}.$$

Işınım için foton sayı yoğunluğu a^{-3} ile orantılı olarak azalır. Her fotonun enerjisi hc/λ 'dır ve verilen $\lambda \propto a$ dalga boyu ölçeklenmesi, enerjisini a^{-1} ile orantılı kılar. Dolayısıyla

$$\rho c^2 \propto a^{-4},$$

ve buradan

$$3(1+w) = 4, \quad \boxed{w = \frac{1}{3}}.$$

Görelî olmayan madde için enerjiye baskın katkı, parçacık başına yaklaşık sabit olan durgunluk enerjisinden gelir. Sayı yoğunluğu a^{-3} ile orantılı olarak azalır ve şu sonuç elde edilir:

$$\rho \propto a^{-3}, \quad \boxed{w = 0}.$$

Bu, basınçsız madde yaklaşımıdır.

Sabit enerji yoğunluğu için $\dot{\rho} = 0$ 'dır. Genişleyen bir evrende süreklilik denklemi şu koşulu gerektirir:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0,$$

ve dolayısıyla

$$\boxed{w = -1}.$$

A.4

$k = 0$ için,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = H_0^2 a^{-3(1+w)}.$$

Genişleyen çözüm dalı seçildiğinde,

$$\dot{a} = H_0 a^{1-\frac{3}{2}(1+w)}.$$

$w \neq -1$ için, $a(0) = 0$ koşuluyla integral alınır

$$a^{\frac{3}{2}(1+w)} = \frac{3}{2}(1+w)H_0 t.$$

Sonuç olarak, ışıınım için,

$$\boxed{a(t) = (2H_0 t)^{1/2}}.$$

$a(t_0) = 1$ normalizasyonu $2H_0 t_0 = 1$ sonucunu verir; dolayısıyla

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}.$$

Görelili olmayan madde için,

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}}.$$

Burada $3H_0 t_0/2 = 1$ olduğundan,

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}.$$

Sabit enerji yoğunluğu için $H = H_0$ sabittir. $\dot{a}/a = H_0$ 'ın integrali alınıp $a(t_0) = 1$ koşulu uygulandığında,

$$\boxed{a(t) = e^{H_0(t-t_0)}}.$$

A.5

(1)'de $k = 0$ alınması, kritik **kütle eşdeğeri yoğunluğunu** belirler:

$$\rho_c = \frac{H^2}{A_1} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Dolayısıyla basılı metindeki $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ tanımı boyutsal olarak tutarsızdır. Buna karşılık gelen kritik enerji yoğunluğu şöyledir:

$$\rho_c c^2 = \frac{H^2 c^2}{A_1}.$$

Tutarlı tanım kullanıldığında,

$$\Omega = \frac{A_1 \rho}{H^2}.$$

(1)'i H^2 'ye bölelim:

$$1 = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 R_s^2 H^2}.$$

$a_0 = 1$ olduğundan, günümüzdeki yarıçap $R_0 = R_s$ 'dir. Dolayısıyla

$$k = (\Omega - 1) \frac{a^2 H^2 R_0^2}{c^2}.$$

A.6

A.5'te $\Omega - 1$ 'in önündeki çarpan pozitifdir. Bu nedenle k ve $\Omega - 1$ aynı işarete sahiptir:

Uzaysal eğrilik	Yoğunluk oranı
$k = +1$, kapalı	$\Omega > 1$
$k = 0$, düz	$\Omega = 1$
$k = -1$, açık	$\Omega < 1$

Enerji yoğunluğu negatif değilse, açık evrene karşılık gelen aralık $0 \leq \Omega < 1$ 'dir.

B.1

A.5'ten,

$$\Delta(t) \equiv \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2} = \frac{kc^2}{R_0^2 \dot{a}^2}.$$

Bu özdeşlik kesindir.

Düzlükten küçük bir sapmayı incelemek için, $\dot{a}$ 'yı başat mertebede A.4'teki düz evren çözümlerini kullanarak hesaplayalım. Eğer

$$a \propto t^\alpha,$$

ise

$$\dot{a}^2 \propto t^{2\alpha-2}, \quad \Delta \propto t^{2-2\alpha}.$$

Işınlımın baskın olduğu dönemde $\alpha = 1/2$ 'dir; dolayısıyla

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \frac{t}{t_*}.$$

Maddenin baskın olduğu dönemde $\alpha = 2/3$ 'tür; dolayısıyla

$$\Delta(t) \simeq \Delta_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3}.$$

Böylece, düzlükten küçük ve sıfırdan farklı herhangi bir sapmanın büyüklüğü her iki dönemde de artar. Bu kuvvet yasaları, eğrilik genişlemeye küçük bir düzeltme olarak kaldığı sürece geçerlidir.

B.2

Sabit yoğunluk ρ_Λ olsun ve şu tanıımı yapalım:

$$H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

$|\Omega - 1| \ll 1$ için eğriliğin (1)'e katkısı küçüktür; dolayısıyla

$$H \simeq H_\Lambda, \quad a(t) \simeq a_i e^{H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Bu ifadeler

$$\Delta = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}$$

bağıntısında yerine konduğunda

$$\Delta(t) \simeq \Delta_i e^{-2H_\Lambda(t-t_i)}.$$

Dolayısıyla enflasyon, düzlükten sapmaları üstel olarak bastırır.

B.3

(1)'in türevini alıp süreklilik denklemini kullanalım:

$$2H\dot{H} = A_1\dot{\rho} + \frac{2kc^2H}{R_0^2 a^2},$$

böylece

$$\dot{H} = -\frac{3A_1}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}.$$

(1)'deki H^2 eklendiğinde eğrilik terimi yok olur:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{A_1}{2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

A.1 kullanılarak,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

Pozitif yoğunluk için ivmeli genişleme şu koşulu gerektirir:

$$p < -\frac{1}{3}\rho c^2,$$

bu da özellikle basıncın negatif olmasını gerektirir.

Burada ele alınan sabit yoğunluklu dönem için A.3, $p = -\rho c^2$ sonucunu verir. Dolayısıyla

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0.$$

Son olarak, $aH = \dot{a}$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0.$$

Böylece istenen üç özelliğin tümü kanıtlanmış olur.

Bu koşulda yer alan yarıçap, **eş hareketli** Hubble yarıçapı $c/(aH)$ 'dir; c sabiti türevin işaretini etkilemez.

B.4

Doğrudan türev alındığında,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{a^2 H^2} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right).$$

$\epsilon = -\dot{H}/H^2$ olduğundan,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{\epsilon - 1}{a}}.$$

$a > 0$ olduğu için, yarıçapın azalması için gerek ve yeter koşul şudur:

$$\boxed{\epsilon < 1}.$$

Eşdeğer olarak,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon).$$

C.1

Önce (4)'ün türevini alalım:

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} (\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}).$$

(3) denklemi $\ddot{\phi} + V' = -3H\dot{\phi}$ sonucunu verir; dolayısıyla

$$2H\dot{H} = -\frac{H\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}.$$

Böylece

$$\boxed{\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2}}, \quad \epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2 H^2}.$$

Yavaş yuvarlanma varsayımları şu bağıntıları verir:

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{pl}^2}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V'.$$

Bunlar ϵ 'da yerine konduğunda,

$$\epsilon \simeq \frac{V'^2}{18M_{pl}^2 H^4} = \boxed{\frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2}.$$

η_V 'yi elde etmek için yavaş yuvarlanma alan denkleminin türevini alalım:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \simeq -V''\dot{\phi}.$$

$3H^2\dot{\phi}$ 'ye bölersek,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq -\frac{V''}{3H^2}.$$

Sol taraf $-\epsilon - \delta$ 'dir. Dolayısıyla

$$\eta_V = \delta + \epsilon \simeq \frac{V''}{3H^2} = \boxed{M_{pl}^2 \frac{V''}{V}}.$$

Son olarak, soru metnindeki $dN = Hdt$ tanımı kullanıldığında,

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H^2}{V'} = \boxed{-\frac{V}{M_{pl}^2 V'}}.$$

Bu ifade, yuvarlanan alanın monoton bir yörüngesi boyunca geçerlidir.

D.1

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n,$$

için türev oranları şöyledir:

$$\frac{V'}{V} = \frac{n}{\phi}, \quad \frac{V''}{V} = \frac{n(n-1)}{\phi^2}.$$

Sonuç olarak,

$$\epsilon \simeq \frac{n^2 M_{pl}^2}{2\phi^2}.$$

Bu yavaş yuvarlanma ifadesi $\epsilon = 1$ bitiş koşuluna kadar uzatıldığında,

$$|\phi_{\text{end}}| \simeq \frac{|n|}{\sqrt{2}} M_{pl}.$$

$n > 0$ için alanın pozitif olduğu çözüm dalını alalım. Alan, daha küçük ϕ değerlerine doğru yuvarlanır; dolayısıyla ϵ artar ve şu değerde bire ulaşır:

$$\boxed{\phi_{\text{end}} \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} M_{pl}}.$$

Alanın birimi M_{pl} ile aynıdır.

Soru metni herhangi bir n tam sayısına izin verir, ancak varsayılan sona eriş, ilgili durumları sınırlar:

- $n = 0$ için potansiyel sabittir ve $\epsilon \simeq 0$ 'dır; bu model yavaş yuvarlanmadan çıkış sağlamaz.
- $n < 0$ ve $\phi > 0$ için $V' < 0$ 'dır; dolayısıyla $\dot{\phi} \simeq -V'/(3H) > 0$. Böylece $\epsilon \propto \phi^{-2}$ azalır. Biçimsel $\epsilon = 1$ eşiği, enflasyona girişi ifade eder.

Enflasyonun sonundaki alan değeri için elde edilen sonuç yaklaşık bir değerdir; çünkü ϵ bire yaklaştıkça yavaş yuvarlanma, kontrollü bir yaklaşım olmaktan çıkar.

D.2

Tek terimli potansiyel için C.1 şu sonucu verir:

$$\frac{dN}{d\phi} \simeq -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}.$$

$N = 0$ olan enflasyon sonundan başlayarak integral alındığında,

$$N(\phi) \simeq -\frac{\phi^2 - \phi_{\text{end}}^2}{2nM_{pl}^2}.$$

$n > 0$ için başlangıçtaki alan değeri son değerden büyüktür; dolayısıyla soru metnindeki N_{start} negatiftir. Pozitif süreyi şöyle tanımlayalım:

$$\mathcal{N} \equiv -N_{\text{start}} = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}}.$$

O hâlde

$$\phi_{\text{start}}^2 \simeq \phi_{\text{end}}^2 + 2nM_{pl}^2\mathcal{N} = \frac{n}{2}(4\mathcal{N} + n)M_{pl}^2.$$

Dolayısıyla başlangıçtaki yavaş yuvarlanma parametreleri şöyledir:

$$\epsilon_{\text{start}} \simeq \frac{n}{4\mathcal{N} + n}, \quad \eta_{V,\text{start}} \simeq \frac{2(n-1)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Böylece

$$r \simeq \frac{16n}{4\mathcal{N} + n}$$

ve

$$n_s \simeq 1 + \frac{4(n-1) - 6n}{4\mathcal{N} + n} = 1 - \frac{2(n+2)}{4\mathcal{N} + n}.$$

Soru metnindeki işaretli tanımla bunlar şu hâle gelir:

$$r \simeq \frac{16n}{n - 4N_{\text{start}}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{2(n+2)}{n - 4N_{\text{start}}}.$$

$\mathcal{N} \gg n$ için bilinen başat biçimler şöyledir:

$$r \simeq \frac{4n}{\mathcal{N}}, \quad n_s \simeq 1 - \frac{n+2}{2\mathcal{N}}.$$

İstenen $N = 60$ değeri, $\mathcal{N} = 60$ pozitif süresi olarak yorumlandığında, tensör sınırı şu sonucu verir:

$$\frac{16n}{240 + n} < 0.12 \implies n < \frac{28.8}{15.88} \simeq 1.814.$$

Dolayısıyla bu sınırı sağlayan tek pozitif tam sayı $n = 1$ 'dir.

Tümü boyutsuz olan sayısal öngörüler şöyledir:

n	r	n_s	Verilen kısıtlarla karşılaştırma
1	0.0664	0.9751	$r < 0.12$ koşulunu sağlar; n_s , 0.974'ün biraz üzerindedir
2	0.1322	0.9669	Verilen n_s aralığını sağlar; r sınırını aşar
3	0.1975	0.9588	Verilen her iki sınırın dışındadır

Buradan

$$n = 1 \quad \text{tensör üst sınırı uygulanırsa.}$$

Bu seçimin öngördüğü tayfsal indis, verilen aralığın üst sınırından yaklaşık 0.0011 daha büyüktür. $n = 2$ tam sayısı tayfsal indisin merkez değerine daha yakındır, ancak tensör sınırını ihlal eder. **Hiçbir pozitif tam sayı, verilen iki sınırı aynı anda sağlamaz.**

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümünden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.